Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal

FÍSICA GENERAL

Ingeniería Técnica de Obras Públicas

RESÚMENES DE LOS TEMAS

Tarsicio Beléndez Vázquez
Augusto Beléndez Vázquez

Alicante, 2002

FÍSICA GENERAL

Ingeniería Técnica de Obras Públicas

Tema 1.- MAGNITUDES Y UNIDADES

• Magnitudes físicas y medidas

Magnitud física es todo aquello que se puede medir. La longitud, la masa, el tiempo, son magnitudes, ya que pueden medirse. Una magnitud física está correctamente expresada por un *número* y una *unidad*, aunque hay algunas magnitudes físicas (relativas) que no necesitan de unidades y representan cocientes de magnitudes de la misma especie.
Cantidad de una magnitud física es el estado de la misma en un determinado fenómeno físico. La aceleración es una magnitud física y el valor de la aceleración de la gravedad en un punto en la superficie de la Tierra es una cantidad de esta magnitud.

Las magnitudes físicas se dividen en tres grupos:
(i) *Magnitudes básicas o fundamentales:* Aunque las leyes físicas relacionan entre sí cantidades de distintas magnitudes físicas, siempre es posible elegir un conjunto de magnitudes que no estén relacionados entre sí por ninguna ley física, es decir, que sean independientes.
(ii) *Magnitudes derivadas:* Se derivan de las magnitudes físicas básicas mediante fórmulas matemáticas. Las leyes físicas que permiten su obtención a partir de las magnitudes fundamentales reciben el nombre de ecuaciones de definición.
(iii) *Magnitudes suplementarias:* Son el ángulo plano (θ), que se expresa en radianes (rad) y el ángulo sólido (Ω) que se expresa en estereorradianes (sr). El ángulo sólido completo alrededor de un punto es 4π sr.

Medir es comparar dos magnitudes de la misma especie, una de las cuales se toma como patrón. Se trata de determinar la cantidad de una magnitud por comparación con otra que se toma como unidad. El resultado de una medida es un número que debe ir acompañado de la unidad empleada. Para que se pueda efectuar una medida es necesario disponer del sistema que se pretende medir y un instrumento de medida que lleve incorporado el patrón a utilizar.
El proceso de medida siempre es imperfecto debido a deficiencias del experimentador y de los instrumentos de medida. El concepto de error surge como necesario para dar fiabilidad a las medidas efectuadas. Toda medida lleva consigo intrínsecamente una incertidumbre o error, de tal modo que no es posible conocer exactamente el número que la expresa. Por ello, cuando se realiza una medida en el laboratorio es importante conocer no sólo el valor de la magnitud física, sino también la exactitud con que ha sido determinada.

• Sistemas de Unidades. Sistema Internacional

Las unidades son los patrones que se eligen para poder efectuar medidas. Su elección es arbitraria por lo que es necesario un entendimiento entre todos los científicos.
A un conjunto de unidades que representan las magnitudes físicas de interés se les llama *sistema de unidades*, y se utilizan como unidades para medir otras cantidades de las magnitudes correspondientes.
Para definir un sistema de unidades es necesario establecer:
- La *base del sistema*, es decir, las magnitudes que se toman como fundamentales.
- La cantidad que se elige como *unidad* de cada magnitud fundamental.
- Las *ecuaciones de definición* de las magnitudes derivadas, los valores de las constantes de proporcionalidad de estas ecuaciones.

En Mecánica basta con elegir convenientemente tres magnitudes fundamentales y sus unidades para poder derivar todas las demás. Si se eligen longitud, masa y tiempo se tienen los llamados *sistemas absolutos*.
Si las magnitudes fundamentales son longitud, fuerza y tiempo se tienen los *sistemas técnicos* muy usados en ingeniería.

En la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1960 se aceptó como *Sistema Internacional de Unidades (S.I.)* el que había propuesto, a principio de este siglo, el italiano Giorgi. En España fue declarado legal por la ley de Pesas y Medidas de 1967.

(i) *Magnitudes y unidades fundamentales*:

longitud	metro (m)
masa	kilogramo (kg)
tiempo	segundo (s)
corriente eléctrica	amperio (A)
temperatura termodinámica	kelvin (K)
cantidad de sustancia	mol (mol)
intensidad luminosa	candela (cd)

(ii) *Magnitudes y unidades derivadas:* Se expresan mediante relaciones algebraicas de las unidades fundamentales y de las suplementarias, haciendo uso de símbolos matemáticos de multiplicar y dividir. Para establecer la unidad derivada se escribe una ecuación que relacione la magnitud correspondiente con las fundamentales. Se hace después que las magnitudes valgan 1 y tendremos la unidad de la magnitud derivada.
Muchas de estas unidades han recibido nombre oficial y símbolo como newton (N), culombio (C), faradio (F), henrio (H), ohmio (Ω), tesla (T), voltio (V), etc.

(iii) *Unidades suplementarias:* El radián (rad) para el ángulo plano y el estereorradián (sr) como unidad de ángulo sólido.

(iv) *Prefijos del Sistema Internacional:* En ocasiones para medir ciertas cantidades resulta más cómodo utilizar múltiplos o submúltiplos de la unidad. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades, tanto fundamentales como derivadas, se forman añadiendo un prefijo. Existen una serie de prefijos aceptados con sus símbolo y nombre particulares.

• Análisis dimensional. Ecuación de dimensiones

A las siete magnitudes fundamentales se les asocia unívocamente el concepto de *dimensión*. A cada magnitud fundamental le hacemos corresponder su símbolo, es decir: longitud (L), masa (M), tiempo (T), intensidad eléctrica (I), temperatura termodinámica (K), cantidad de sustancia (n) e intensidad luminosa (I_r).

Toda magnitud derivada se puede expresar por medio de un producto (*ecuación de dimensiones*) de las magnitudes fundamentales. Para ello, se sustituye cada magnitud fundamental de la ecuación de definición de la magnitud derivada, por su dimensión. Escribiremos:

$$[A] = \text{dimensiones de la magnitud A}$$

por ejemplo:

$$F = ma \qquad [F] = [m]\,[a] = M\,[e/t^2] = M\,L\,T^{-2}$$

Para que la fórmula representativa de una ley que relaciona diversas magnitudes físicas sea correcta, debe ser homogénea, es decir, las ecuaciones dimensionales de sus dos miembros deben ser idénticas.
La *coherencia de las dimensiones* es una condición necesaria para que una ecuación física sea correcta pero no suficiente. Una ecuación puede tener las dimensiones correctas en cada miembro sin describir ninguna situación física.
El conocimiento de las dimensiones de las magnitudes nos permite recordar una fórmula e incluso hacer suposiciones sobre la misma.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 2: Mediciones y unidades.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 1: Sistemas de medida.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 1: Introducción.*

Tema 2.- CÁLCULO VECTORIAL

• Magnitudes escalares y vectoriales

Una *magnitud escalar* es aquélla que queda completamente determinada por el número que expresa su medida (escalar), expresado en alguna unidad conveniente, como tiempo o masa. Una *magnitud vectorial* necesita para su determinación además de un número (módulo), una dirección y un sentido. Esta clase de magnitud recibe el nombre de vector, como la fuerza.
Un vector está determinado por cuatro elementos:
(i) Origen: Es el punto de aplicación del vector.
(ii) Dirección: La de la recta sobre la cual está el vector.
(iii) Sentido: Uno de los dos posibles que define su dirección, representado por la cabeza de la flecha.
(iv) Módulo: Valor numérico de la magnitud que representa, expresado por la longitud del vector.
De acuerdo con sus características podemos considerar:
Vectores ligados: Son aquellos vectores con su punto de aplicación definido, así como su dirección y sentido.
Vectores deslizantes: Son vectores que se pueden desplazar sobre la recta en que se encuentran, siendo su punto de aplicación cualquier punto de ella.
Vectores libres: Son vectores que se pueden trasladar paralelamente a sí mismos a cualquier punto del espacio.

Cuando un vector expresa un sentido de giro se denomina *vector axial.*

• Componentes y cosenos directores

Dado un sistema de ejes cartesianos XYZ, podemos descomponer un vector **v** en la suma de tres vectores perpendiculares entre sí, cada uno sobre uno de estos ejes.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z$$

Para cada una de estas tres direcciones podemos definir un vector unitario (de módulo unidad), **i** según el eje X, **j** según el eje Y, **k** según el eje Z. Entonces:

$$\mathbf{v}_x = v_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{v}_y = v_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_z = v_z\mathbf{k}$$

La expresión general del vector **v**, en función de los vectores unitarios **i**, **j**, **k**, es:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

Los escalares v_x, v_y, v_z son las *componentes* cartesianas del vector **v**. El *módulo del vector* **v**, | **v** |, viene dado por su distancia euclídea:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

El *vector unitario* en la dirección de **v**, al que llamamos **u**, viene dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$$

Para determinar la dirección del vector **v** hay que conocer los ángulos α, β, γ que forma, respectivamente con los ejes coordenados XYZ. A sus cosenos se les llama *cosenos directores* del vector **v**:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{|\mathbf{v}|}$$

Se verifica la relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Es decir, la dirección de la recta directriz del vector queda perfectamente determinada con dos cualquiera de los ángulos.
Un vector queda determinado:
-A partir de sus tres componentes.
-A partir del módulo y dos de los ángulos que forma con el sistema de referencia.

• Operaciones con vectores

Suma y diferencia de vectores: Sean los vectores **A** y **B** escritos en función de sus componentes cartesianas:

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \qquad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

los vectores suma, **S**, y diferencia, **D**, se escriben:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

Producto escalar de dos vectores **v** y **w** es la cantidad escalar:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.En función de sus componentes, el producto escalar se escribe:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

La expresión analítica del producto escalar permite calcular el ángulo que forman los dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\ \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$$

Producto vectorial de dos vectores **v** y **w** es el vector perpendicular al plano determinado por **v** y **w** en la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha que ha sido rotado de **v** hacia **w**, por el camino más corto. Su módulo es

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\,\mathrm{sen}\theta$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. En función de sus componentes cartesianas:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\,\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

Producto mixto de tres vectores (triple): Es un escalar, cuyo valor se obtiene haciendo el producto escalar de un vector, por un producto vectorial de dos vectores.

Doble producto vectorial: Es un vector contenido en el plano definido por **v** y **w**

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

• Momento de un vector respecto a un punto

El momento de un vector **A** respecto a un punto O se define como el vector **M**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathrm{OP} \times \mathbf{A}$$

con **r** el vector cuyo origen está en el punto O y su extremo en el origen del vector **A**. Su módulo es:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{A}| = |\mathbf{r}||\mathbf{A}|\,\mathrm{sen}\theta$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores **r** y **A**.

• Derivación e integración vectorial

Si las componentes cartesianas del vector **r**(u) son función de un escalar *u*, $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$, entonces:

$$\frac{d\mathbf{r}(u)}{du} = \frac{dx(u)}{du}\mathbf{i} + \frac{dy(u)}{du}\mathbf{j} + \frac{dz(u)}{du}\mathbf{k}$$

$$\int \mathbf{r}(u)\,du = \mathbf{i}\int x(u)du + \mathbf{j}\int y(u)\,du + \mathbf{k}\int z(u)du$$

• Representación vectorial de una superficie

A una superficie *S* se le puede asignar un vector **S** normal a la superficie y tiene como módulo el valor del área de la misma.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[GETTYS, 1991] *Cap. 2: Vectores.*

Tema 3.- CINEMÁTICA

La Mecánica se ocupa de las relaciones entre los movimientos de los sistemas materiales y las causas que los producen. La Mecánica se divide en tres partes: *Cinemática* que estudia el movimiento sin preocuparse de las causas que lo producen; *Dinámica* que estudia el movimiento y sus causas; y *Estática* que estudia las fuerzas y el equilibrio de los cuerpos.

• Posición, velocidad y aceleración

Para describir el movimiento de una partícula el primer paso es establecer un sistema de coordenadas o *sistema de referencia*. El *vector de posición* **r**, sitúa a un objeto respecto al origen de un sistema de referencia y es función del tiempo. En coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Si una partícula se mueve, el extremo de **r** describe una curva que se denomina *trayectoria*. Si s es el *espacio recorrido* por la partícula a lo largo de la trayectoria, s será función del tiempo t. La función $s = f(t)$ es la *ley horaria del movimiento*.

El *vector desplazamiento* $\Delta\mathbf{r}$ es el cambio del vector de posición entre dos puntos P_1 y P_2:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

La *velocidad media* $\mathbf{v}_m$ de una partícula es el desplazamiento del punto durante un intervalo de tiempo Δt, dividido por dicho intervalo de tiempo:

$$\mathbf{v}_m = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$$

La *velocidad instantánea* **v** es el valor límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Se cumple:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$$

El vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria de la partícula en cada punto de la misma.

La *aceleración media* $\mathbf{a}_m$ de un punto material es el cambio de la velocidad durante un intervalo de tiempo Δt, dividido por el intervalo de tiempo:

$$\mathbf{a}_m = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$$

La *aceleración instantánea* **a** es el valor límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$$

La aceleración instantánea **a** puede descomponerse en dos vectores, uno normal a la trayectoria denominado *aceleración normal* o centrípeta, $\mathbf{a}_N$, y otro tangente a la misma que recibe el nombre de *aceleración tangencial*, $\mathbf{a}_T$. Estas componentes se conocen como *componentes intrínsecas de la aceleración*:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_T$$

$\mathbf{a}_T$ tiene en cuenta el cambio en el módulo del vector velocidad, $v = |\mathbf{v}|$, y $\mathbf{a}_N$ tiene en cuenta el cambio en la dirección del vector velocidad **v**:

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad a_N = \frac{v^2}{r}$$

donde r es el *radio de curvatura* de la trayectoria de la partícula en cada punto de la misma. Se cumple:

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$$

• Movimientos rectilíneos

En un movimiento rectilíneo la trayectoria es una línea recta, y el espacio recorrido coincide con el módulo del vector desplazamiento. Además el radio de curvatura es infinito y no hay aceleración normal.

En un *movimiento rectilíneo uniforme* la velocidad es constante y la aceleración es nula. Si el movimiento tiene lugar a lo largo del eje X. Se cumplen las relaciones:

$$a(t) = 0 \qquad v(t) = v = \text{cte.} \qquad x(t) = x_0 + vt$$

En un *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* la aceleración es constante y se cumple:

$$a(t) = a = \text{cte.} \qquad v(t) = v_0 + at \qquad x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

• Movimientos circulares

Un movimiento circular es un movimiento plano en el que la trayectoria es una circunferencia de radio R. El espacio recorrido s puede ponerse en función del ángulo θ en la forma:

$$\theta = s/R$$

La *velocidad angular* ω es la variación de θ con el tiempo t:

$$\omega = d\theta/dt$$

Se verifica la relación:

$$\omega = v/R$$

La *aceleración angular* α es la variación de ω con t:

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$$

Se cumple:

$$\alpha = a_T/R$$

Puede asignarse un vector ω a la velocidad angular ω y otro α a la aceleración angular α. Estos vectores son perpendiculares a la trayectoria circular de la partícula y se cumple:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{a}_T = \alpha \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{a}_N = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$

donde **r** es el vector que va desde el centro de la circunferencia a la posición de la partícula.

En un *movimiento circular uniforme* la aceleración angular es nula y la velocidad angular es constante y no hay aceleración tangencial (el módulo de **v** también es constante) y que la aceleración normal es constante por serlo v y R. Se verifica:

$$\alpha(t) = 0 \qquad \omega(t) = \omega = \text{cte.} \qquad \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

En un *movimiento circular uniformemente acelerado* la aceleración angular es constante. La aceleración tangencial es constante, pero no lo es la aceleración normal. Se cumple:

$$\alpha(t) = \alpha = \text{cte.} \qquad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

• Composición de movimientos. Tiro parabólico

Otro ejemplo de movimiento plano es el *movimiento de un proyectil* que se lanza con velocidad constante v_0 formando un ángulo α con el eje X y se ve afectado por la aceleración de la gravedad g a lo largo del eje Y. La trayectoria es una parábola y el movimiento es la superposición de un movimiento rectilíneo uniforme en el eje X y un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado en el eje Y. El tiempo de vuelo, t, la altura máxima, h, y el alcance, d, son:

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}, \quad d = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\alpha}{g}$$

la ecuación de la trayectoria, $y(x)$, es:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\operatorname{tg}\alpha$$

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 3: Movimiento rectilíneo, Cap. 4: Movimiento curvilíneo, Cap. 5: Movimiento circular.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 3: Movimiento en una dimensión, Cap. 4: Movimiento en dos dimensiones.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 2: Movimiento en una dimensión, Cap. 3: Movimiento en dos y tres dimensiones.*

Tema 4.- DINÁMICA

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia la relación entre el movimiento y las causas que lo producen, es decir, las fuerzas. El movimiento de un cuerpo es un resultado directo de sus interacciones con los otros cuerpos que lo rodean y estas interacciones se describen convenientemente mediante el concepto de fuerza. La masa de un cuerpo es una medida de la resistencia del objeto a cambiar de velocidad.

• Leyes de Newton

Las leyes de Newton son leyes fundamentales de la naturaleza y constituyen la base de la mecánica.
Primera ley de Newton (ley de la inercia): Si un cuerpo en un sistema inercial no está sometido a la acción de fuerza alguna, o se halla en reposo o tiene movimiento rectilíneo y uniforme.
Segunda ley de Newton (ecuación fundamental de la Dinámica): La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo **F** es la causa de su aceleración **a**:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Tercera ley de Newton (principio de acción y reacción): Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ (acción) sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce sobre el A una fuerza $\mathbf{F}_{BA}$ (reacción) de igual intensidad y dirección, pero de sentido contrario:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\,\mathbf{F}_{BA}$$

Las fuerzas de acción reacción actúan en cuerpos distintos. Las leyes de Newton sólo son válidas en un *sistema de referencia inercial*, es decir un sistema de referencia para el cual un objeto en reposo permanece en reposo si no hay fuerza neta que actúe sobre él. Cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad constante relativa a un sistema inercial es también un sistema de referencia inercial. Un sistema ligado a la Tierra es aproximadamente un sistema de referencia inercial.

• Fuerza debida a la gravedad. Peso

La ley de la Gravitación Universal fue enunciada por Newton y permite obtener la fuerza con la que se atraen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathbf{u}_r$$

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} es la constante de la gravitación universal y $\mathbf{u}_r$ es el vector unitario en la dirección del vector **r** que une las dos masas. La masa caracteriza dos propiedades diferentes de un objeto, su resistencia a cambiar de velocidad (masa inercial) y su interacción gravitatoria con otros objetos (masa gravitatoria). Los experimentos demuestran que ambas son proporcionales y con la elección del sistema de unidades realizada, ambas son iguales.
Supuesta la Tierra esférica de radio R y masa M, un cuerpo de masa m situada sobre la superficie terrestre será atraído por una fuerza $F = GMm/R^2$, estando dicha masa, según la segunda ley de Newton, sometida a una aceleración g:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

que es la aceleración de la gravedad. El *peso* **P** de un cuerpo es la fuerza ejercida por la Tierra sobre el cuerpo:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

• Aplicación de las leyes de Newton a la resolución de problemas

El procedimiento para resolver un problema de mecánica es:
(i) Hacer un dibujo del sistema e identificar el objeto (u objetos) a los que se aplicará la segunda ley de Newton. En el dibujo usar vectores que representen las fuerzas que aparecen.
(ii) Dibujar un diagrama puntual que incluya los ejes de coordenadas para descomponer los vectores en sus componentes. Estos diagramas deben dibujarse de modo que los cálculos siguientes se simplifiquen. Normalmente esto se consigue poniendo tantos ejes como sea posible a lo largo de las direcciones de las fuerzas, o situando un eje en la dirección de la aceleración, si esta dirección es conocida.
(iii)Usando el diagrama puntual, escribir las componentes de la segunda ley de Newton en función de las cantidades conocidas y desconocidas y resolver esas ecuaciones para cada una de las cantidades desconocidas en función de las conocidas. Finalmente, sustituir los valores numéricos de las cantidades conocidas (incluyendo sus unidades) y calcular cada una de las desconocidas.

• Momento lineal y momento angular

El *momento lineal* o cantidad de movimiento **p** de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad **v** es:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Teniendo en cuenta la relación $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, la segunda ley de Newton puede escribirse:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

La *ley de conservación del momento lineal* indica que en todo sistema aislado, es decir, no sometido a fuerzas externas, el momento lineal se conserva.
El *impulso mecánico* de una fuerza **J** se define como:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt$$

El cambio en la cantidad de movimiento de un objeto inducido por una sola fuerza impulsora aplicada al objeto está dado por:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{J}$$

El *momento angular* **L** de una partícula de masa m respecto a un punto O es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

donde **r** es el vector con origen el punto O y final en la posición de la partícula, y $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el momento lineal de la partícula. También se puede escribir:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

lo que indica que **L** es perpendicular al vector velocidad. Derivando la ecuación $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

es decir, la variación del momento angular de una partícula es igual al momento de la fuerza total que actúa sobre la partícula.

La *ley de conservación del momento angular* señala que si el momento de la fuerza total que actúa sobre una partícula es nulo ($\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$), el momento angular permanece constante:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \qquad \mathbf{L} = cte.$$

Si el momento angular permanece constante la trayectoria de la partícula está confinada en un plano.
Para que se cumpla $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ es necesario que:
(i) $\mathbf{F} = 0$ (partícula libre)
(ii) **F** y **r** sean dos vectores paralelos (fuerza central).

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 6: Fuerza y momentum, Cap. 7: Aplicaciones de la leyes de Newton.*
[GETTYS, 1991] *Cap. 5: Leyes de Newton para el movimiento, Cap. 6: Aplicaciones de la leyes de Newton para el movimiento.*
[TIPLER, 1999] *Cap. 4: Leyes de Newton, Cap. 5: Aplicaciones de las leyes de Newton.*

Tema 5.- TRABAJO Y ENERGÍA

El trabajo y la energía se encuentran entre los conceptos más importantes de la Física, así como en nuestra vida diaria. En Física, una fuerza realiza trabajo cuando actúa sobre un objeto que se mueve a través de una distancia y existe una componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento. Íntimamente asociado al concepto de trabajo se encuentra el concepto de energía. Cuando un sistema realiza trabajo sobre otro, se transfiere energía entre los dos sistemas. Existen muchas formas de energía. La energía cinética está asociada al movimiento de un cuerpo. La energía potencial es energía asociada con la configuración de un sistema, tal como la distancia de separación entre un cuerpo y la Tierra. La energía térmica está asociada al movimiento aleatorio de las moléculas dentro de un sistema y está íntimamente relacionada con la temperatura. Una de las leyes fundamentales de la naturaleza es la ley de la conservación de la energía. Si la energía de un sistema se conserva, su energía total no cambia, aunque alguna parte de ella puede que cambie de forma o naturaleza.

• Trabajo y potencia

El *trabajo* W realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo mientras que éste se mueve siguiendo una trayectoria, está definido por la integral:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

En el caso sencillo de una fuerza constante y un desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ en línea recta, el trabajo está dado por el producto escalar:

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

Para una fuerza variable en una dimensión (por ejemplo, a lo largo del eje X):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\, dx$$

La unidad en el SI del trabajo es el julio (J).
La *potencia* P es la rapidez con que una fuerza realiza un trabajo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La potencia de una fuerza $\mathbf{F}$ realizando un trabajo sobre un objeto con velocidad $\mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

En el SI la potencia se mide en vatios (W).

• Energía cinética. Teorema de la energía cinética

La *energía cinética* E_c de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

La energía cinética es la energía asociada con el movimiento. El *teorema de la energía cinética* establece que el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo es igual al cambio en la energía cinética del cuerpo:

$$W = \frac{1}{2} m v^2_{final} - \frac{1}{2} m v^2_{inicial} = E_{c,\,final} - E_{c,inicial}$$

es decir:

$$W = \Delta E_c$$

• Fuerzas conservativas y energía potencial

Una fuerza es *conservativa* si el trabajo que realiza a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo. También se dice que el trabajo es independiente del camino seguido y depende únicamente del estado inicial y final.
El trabajo realizado por el peso de un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra es:

$$W = -\, mg(y_2 - y_1)$$

y es independiente de la trayectoria que conecta los puntos inicial y final. Esta fuerza es conservativa.
La *energía potencial E_p es* una energía que depende sólo de la posición. Dos ejemplos de energía potencial son la energía potencial gravitatoria:

$$E_p = mgy$$

y la energía elástica de compresión o elongación de un muelle:

$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$$

Para una fuerza conservativa el trabajo W y la energía potencial E_p están relacionados mediante la ecuación:

$$W = -\, \Delta E_p$$

y la fuerza $\mathbf{F}$ y la energía potencial E_p están relacionadas mediante la ecuación:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}E_p = \quad E_p$$

que en el caso unidimensional se escribe:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

El movimiento de un objeto puede representarse mediante una gráfica de la energía potencial. Sobre esta gráfica se pueden identificar los puntos de equilibrio.

• Conservación de la energía mecánica

La suma de las energías cinética y potencial de un sistema se denomina *energía mecánica E:*

$$E = E_c + E_p$$

Si no hay fuerzas externas que realizan trabajo sobre el sistema y todas las fuerzas internas son conservativas, la energía mecánica total del sistema permanece constante:

$$E = E_c + E_p = cte.$$

es decir, entre dos estados inicial 1 y final 2:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

La energía total del sistema E_{sist} es la suma de sus diversos tipos de energía. Una forma de transferir energía (absorbida o cedida) de un sistema es intercambiar trabajo con el exterior. Si ésta es la única fuente de energía transferida, la ley de conservación de la energía se expresa:

$$W_{ext} = \Delta E_{sist}$$

W_{ext} es el trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas externas y ΔE_{sist} es la variación de la energía total del sistema. *Éste es el teorema trabajo-energía*.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 9: Trabajo y energía.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 8: Trabajo y energía, Cap. 9: Conservación de la energía.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 6: Trabajo y energía.*

Tema 6.- ELASTICIDAD

• Tensión y deformación

La materia en su estado de agregación sólido, no es rígida. La fuerza por unidad de superficie sobre un sólido se denomina *tensión* o *esfuerzo*, σ, y la distorsión unitaria que resulta en el sólido se denomina *deformación*, ε. Cuando se somete un sólido a un *esfuerzo*, sufre una *deformación* que puede llegar incluso, cuando el esfuerzo es considerable, a la destrucción del sistema. Si el sistema deformado recupera su forma inicial al desaparecer el esfuerzo, entonces se dice que estamos en la zona de comportamiento elástico del material. Si además la deformación producida es proporcional al esfuerzo aplicado, se dice que el comportamiento del material es *elástico lineal*:

$$\varepsilon \quad \sigma$$

En este último caso, la ley que relaciona el esfuerzo con la deformación producida se conoce como ley de Hooke.

• Deformación axial y módulo de Young

Se dice que un ensayo es de *tracción* cuando la causa de la deformación es una fuerza y las magnitudes deformadas son las longitudes del cuerpo en la dirección de dicha fuerza. Para una barra de longitud l y sección S suspendida por un extremo y sometida a una fuerza F en el otro extremo que tienda a extender la barra (tracción), según la ley de Hooke el alargamiento unitario $\Delta l/l$ es proporcional al esfuerzo F/S aplicado y la constante de proporcionalidad es el módulo de elasticidad o módulo de Young del material, E:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

como en este caso $\sigma = F/S$ y $\varepsilon = \Delta l/l$, se puede escribir:

$$\sigma = E\varepsilon$$

• Deformación transversal y coeficiente de Poisson

Se observa que cuando una varilla se alarga (tracción) su sección dismunuye, mientras que cuando se acorta (compresión) la citada sección aumenta. Si por sencillez se considera una varilla de seción rectangular de lados x e y, al estirarse su longitud de l hasta $l + \Delta l$, las dimensiones x e y se reducen a $x - \Delta x$ e $y - \Delta y$. Como $\Delta x/x$ e $\Delta y/y$ deben ser proporcionales a la causa deformadora F/S, entonces:

$$-\frac{\Delta x}{x} \quad \frac{\Delta l}{l} \qquad \frac{\Delta x}{x} = -\nu\frac{\Delta l}{l} = -\frac{\nu}{E}\frac{F}{S}$$

$$-\frac{\Delta y}{y} \quad \frac{\Delta l}{l} \qquad \frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta l}{l} = -\frac{\nu}{E}\frac{F}{S}$$

ν se conoce como *coeficiente de Poisson.*

• Cizalladura y módulo de rigidez

Con el nombre de cizalladura se conoce la deformación producida en un cuerpo al aplicarle fuerzas tangenciales, de modo que su volumen permanece constante. La deformación del sólido se mide por su ángulo de cizalla γ. De acuerdo con la ley de Hooke aplicada a este caso:

$$\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{1}{G}\frac{F}{S}$$

donde ahora F es una fuerza tangencial y G recibe el nombre de *módulo de rigidez* del material. Este módulo está relacionado con el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν por la expresión:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

• Compresibilidad y módulo de compresibilidad

Cuando un cuerpo se somete a una compresión se produce un cambio en su volumen. Para ello hay que someter el cuerpo a una presión usiforme en todas sus caras, es decir, aplicando una fuerza F normal de modo que el cociente F/S sea constante en todas las caras del cuerpo. Así sucede, por ejemplo, al colocar un material cualquiera en un cuerpo de bomba lleno de un líquido y comprimir con un émbolo. En este caso la deformación unitaria del cuerpo es el cambio relativo de su volumen, $\Delta V/V$, y como esfuerzo es la presión F/S:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{B}\frac{F}{S}$$

el signo menos aparece para que ΔV sea negativo ya que F/S es positivo. B se conoce como módulo de compresibilidad.
Existe la siguiente relación entre el módulo de Young E, el coeficiente de Poisson ν y el módulo de compresibilidad B:

$$B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Como B ha de ser siempre positivo, la ecuación anterior impone un límite físico para el coeficiente de Poisson, comprobado en todas las medidas experimentales sobre diversos materiales, inferior a 0.5.

• Torsión

Cuando un cuerpo tiene forma cilíndrica de radio r y longitud L y es fijado por una de sus bases, podemos retorcerlo y se dice entonces que se ha hecho un ensayo de elasticidad por torsión. La deformación se mide por el ángulo de torsión β y el esfuerzo deformador será el momento M de la fuerza F que provoca la torsión, respecto al eje de la barra, es decir, $M = rF$. Por la ley de Hooke:

$$\beta = \frac{1}{R}M$$

donde R es la constante de torsión de la barra y no se llama módulo de torsión porque su valor depende de las dimensiones geométricas de la barra retorcida. Para una barra cilíndrica de radio r y longitud L se cumple la relación:

$$R = \frac{\pi r^4}{2L}G$$

• Flexión

Cuando una barra paralelepípedica empotrada en una pared se somete a un esfuerzo de flexión, la barra se curva, de modo que una zona de la barra trabaja a tracción y otra a compresión, existiendo una superficie de la barra que ni se estira ni se contrae y que se conoce como superficie neutra. El desplazamiento del extremo libre de la barra s (flecha de flexión) debido a la fuerza aplicada F es:

$$s = c_f F$$

donde c_f se conoce como constante de flexión. Para una barra de longitud L empotrada en un extremo se cumple:

$$c_f = \frac{L^3}{3EI}$$

donde I es el momento de inercia de la sección de la barra respecto al eje neutro.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[BURBANO, 1993] *Cap. 21: Elasticidad.*

[CATALÁ, 1988] *Cap. 11: Estado sólido y elasticidad.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 15: Sólidos y fluidos.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 12: Equilibrio estático y elasticidad.*

Tema 7.- ESTÁTICA DE FLUIDOS

Desde un punto de vista macroscópico suele clasificarse la materia en sólidos y fluidos. Un fluido es una sustancia que puede fluir, de tal forma que el término fluido incluye a los líquidos y a los gases. Aunque está clasificación no es tajante, pues algunos fluidos como el vidrio y la brea, fluyen tan lentamente que se comportan como si fuesen sólidos durante el intervalo de tiempo en el que, por lo general, los empleamos. Los plasmas que son gases muy ionizados, no se ajustan fácilmente a estas categorías. Aun la distinción entre un líquido y un gas no es tajante, en virtud de que, cambiando en forma adecuada la presión y la temperatura resulta posible transformar un líquido (por ejemplo el agua) en un gas (por ejemplo, vapor de agua). Una propiedad de una sustancia es su densidad ρ, cociente entre su masa m y su volumen V:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Las densidades de la mayor parte de los sólidos y líquidos son aproximadamente independientes de la presión y la temperatura. En cambio, la densidad de un gas depende fuertemente de la presión y la temperatura.

• Presión en un fluido

Un gas o un líquido sometido a una tensión de cizalladura, no alcanzará el equilibrio, aunque se deformará continuamente. Estas sustancias se denominan *fluidos*. En condiciones estáticas, no puede haber una tensión de cizalladura en un fluido. Se tiene pues, que la fuerza sobre cualquier superficie límite a un fluido en reposo es normal a la superficie.

La *presión* en un fluido en reposo es independiente de la orientación de la superficie sobre la que actúa. Cuando se sumerge un cuerpo en un fluido, éste ejerce una fuerza perpendicular a la superficie del cuerpo en cada punto de la superficie. Ésta fuerza F por unidad de área S se denomina *presión* p del fluido:

$$p = \frac{F}{S}$$

La unidad de la presión en el SI es el pascal (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

La relación con otras unidades de presión es la siguiente:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg } (=13.6 \text{ g/cm}^3 \times 980 \text{ cm/s}^2 \times 76 \text{ cm}) =$$

$$= 760 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ bar} = 10^3 \text{ milibares} = 100 \text{ kPa}$$

La *presión manométrica* es la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica:

$$p = p_{manométrica} + p_{atm}$$

La presión debida a un fluido que presiona contra un cuerpo tiende a comprimirlo. el cociente entre el cambio de presión, Δp, y la disminución relativa de volumen, $-\Delta V/V$, se denomina módulo de compresibilidad, β:

$$\beta = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

• Ecuación fundamental de la estática de fluidos. Principio de Pascal

Si un fluido está en equilibrio, cada una de sus partes también lo estará. La diferencia de presión, dp, entre dos puntos de un fluido separados una altura dy, en el campo gravitatorio, viene dada por la ecuación:

$$dp = -\rho g\, dy$$

En un fluido incompresible (densidad, ρ = *cte.*) la presión varía con la posición vertical de la forma:

$$p = p_0 + \rho g h$$

donde h es la diferencia de alturas entre los puntos en los que la presión es p y p_0. Ésta es la ecuación fundamental de la estática de fluidos. A partir de esta ecuación se deduce el *principio de Pascal:* La presión aplicada a un fluido encerrado en un recipiente se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente. Una aplicación del principio de Pascal es la *prensa hidráulica*: Si en un pistón de área S la presión es P y en el otro pistón de área s la presión es p, se cumple:

$$PS = ps$$

Para un fluido compresible como un gas en el que existe una relación entre presión y densidad de la forma:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

la integración de la ecuación $dp = -\rho g dy$ proporciona:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} h\right)$$

y la presión disminuye exponencialmente con la altura.

• Presión hidrostática sobre superficies sumergidas

Sea un dique de modo que un líquido alcanza una altura h en la pared vertical del mismo. El líquido ejerce una determinada fuerza resultante que tiene a deslizarlo a lo largo de su base, y un cierto momento que tiende a volcar el dique. La fuerza resultante F que actúa sobre el dique es:

$$F = \frac{1}{2}\rho g L h^2$$

donde L es la anchura de la pared rectangular del dique y h la altura a la que llega el líquido. El momento τ total que ejerce el líquido respecto a un punto O en la base del dique es:

$$\tau = \frac{1}{6}\rho g L h^3$$

El *centro de empuje* está a una altura H por encima de O, a la cual hubiera tenido que actuar la fuerza total F para producir el mismo momento τ:

$$FH = \frac{1}{2}\rho g h^2 H = \frac{1}{6}\rho g h^3 \qquad H = \frac{1}{3}h$$

• Principio de Arquímedes

Arquímedes descubrió el principio que describe las fuerzas de flotación. Un cuerpo que está parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical ascendente por una fuerza igual al peso del volumen de fluido desalojado. Dicha fuerza está dirigida hacia arriba según una línea que pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado.

• Equilibrio de cuerpos flotantes

En un cuerpo flotante en un fluido la línea de acción del empuje E (que es vertical y dirigido hacia arriba) pasa por el centro de gravedad del fluido desplazado, mientras que el peso del cuerpo w (que es vertical y hacia abajo) está aplicado en el centro de gravedad del cuerpo. El peso w y el empuje E originan un par de fuerzas. La línea que pasa por el centro de gravedad C del cuerpo gira con él cuando éste está escorado y determina una dirección YY. El punto A en el cual la línea de acción del empuje corta a la línea YY se denomina *metacentro*, y la distancia CA es la distancia metacéntrica. Cuento mayor es la distancia metacéntrica, tanto mayor es la estabilidad del cuerpo flotante. Si la línea de acción del empuje corta a la línea YY en un punto situado por debajo de C, el cuerpo queda inestable y volcará.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[BURBANO, 1993] *Cap. 16: Hidrostática.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 15: Sólidos y fluidos.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 13: Fluidos.*

Tema 8.- DINÁMICA DE FLUIDOS Y FLUIDOS REALES

• Estudio del flujo de los fluidos

El flujo de los fluidos puede ser:
(i) Estacionario o no estacionario: Cuando la velocidad del fluido **v** en cualquier punto no varía con el tiempo, se dice que el movimiento del fluido es estacionario. Es decir, todas las partículas que pasen por un punto del fluido loharán con la misma velocidad en ese punto. En un flujo no estacionario las velocidades son función del tiempo (rápidos, catarata, etc.).
(ii) Rotacional e irrotacional: Si el elemento de fluido en un punto dado no tiene una velocidad angular neta alrededor de ese punto, el flujo es irrotacional.
(iii) Compresible o incompresible: Por lo general puede considerarse que los líquidos fluyen de forma incompresible y la densidad de los mismos es constante.
(iv) Viscoso o no viscoso: La viscosidad en el movimiento de los fluidos es análoga al rozamiento en el movimiento de los sólidos. La viscosidad introduce fuerzas tangenciales entre las capas del fluido en movimiento relativo y se traduce en una disipación de energía mecánica.

Para el *flujo estacionario*, la velocidad **v** en un punto dado es constante en el tiempo. Todas las partículas que pasen por ese punto lo harán con la misma velocidad yla trayectoria de una partícula del fluido corresponde a una *línea de corriente* que es tangente en cada punto al vector velocidad. En el flujo estacionario, la distribución de líneas de corriente del flujo no cambia con el tiempo. En el flujo estacionario un *tubo de corriente* o de *flujo* está formado por un haz de líneas de corriente. El fluido no puede cruzar el borde de un tubo de corriente y el tubo se comporta como una tubería.

• Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la masa de un fluido en estado estacionario que circula o fluye por un tubo de sección variable. Para un tubo de flujo se cumple:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \qquad \rho v S = cte.$$

Si el fluido es incompresible ($\rho_1 = \rho_2$):

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad vS = cte$$

El producto vS indica la rapidez del *flujo de volumen* o *gasto* del fluido y se representa por el símbolo Q:

$$Q = vS$$

Líneas de corriente espaciadas indican regiones de velocidad baja, líneas concentradas indican regiones de gran velocidad.

• Teorema de Bernoulli. Aplicaciones

La ecuación de Bernoulli es una relación fundamental de la mecánica de fluidos que se deduce de las leyes básicas de la mecánica newtoniana. Para un fluido incompresible en régimen estacionario, si el trabajo que realizan las fuerzas no conservativas es despreciable, la energía mecánica se conserva. El trabajo realizado por las fuerzas externas sobre el fluido dará lugar a una variación en su energía mecánica. En este caso, para un fluido incompresible en estado estacionario y no viscoso, la conservación de la energía mecánica conduce a la *ecuación de Bernoulli* a lo largo de una línea de corriente:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

En términos de alturas o, en el lenguaje ingenieril, *cargas* (carga de presión, carga geométrica y carga cinética):

$$\frac{p_1}{\rho g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2\rho} = \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \frac{v_2^2}{2\rho}$$

La velocidad de salida de un fluido en una vasija abierta, por un orificio practicado en la pared delgada de la misma, es:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (\textit{ley de Torricelli})$$

Si un fluido circula a lo largo de un tubo horizontal que tiene una región de menor diámetro, las distintas partes del tubo están a la misma altura y la ecuación de Bernoulli se reduce a:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte.$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad $vS = cte.$, cuando el fluido se introduce en un estrechamiento aumenta su velocidad y según la ecuación de Bernoulli, si la velocidad aumenta debe disminuir la presión en la parte estrecha. Este resultado se conoce como *efecto Venturi*.

• Viscosidad

La fuerza de viscosidad F_v sobre una superficie S viene dada por el gradiente de velocidad v/L en el fluido:

$$F_v = \frac{\eta S v}{L}$$

donde η es una constante de proporcionalidad que se denomina *viscosidad*. La unidad de viscosidad en el SI es $N{\cdot}s{\cdot}m^{-2}$. Una unidad (que no pertenece al SI) muy corriente para la viscosidad es el poise (P), y es igual a:

$$1\ P = 0.1\ N{\cdot}s{\cdot}m^{-2}$$

En el flujo laminar cada capa (lámina) de fluido ejerce una fuerza sobre la capa de fluido que está a su lado, pero como el flujo es no turbulento, las capas no se mezclan.

• Fórmula de Poiseuille. Pérdida de carga

El gasto Q debido a la diferencia de presión, $p_1 - p_2$, de un fluido viscoso a través de una tubería circular de radio R y longitud L es:

$$Q = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8 \eta L}$$

que se conoce como *fórmula de Poiseuille*. La pérdida de presión $p_1 - p_2$ para una longitud L es proporcional a L:

$$p_1 - p_2 = \frac{8 \eta Q}{\pi R^4} L$$

Esta pérdida de presión también se expresa como una "pérdida de carga" en la ecuación de Bernoulli como $(p_1 - p_2)/\rho g$.

• Ley de Stokes

Cuando un fluido viscoso se mueve alrededor de una esfera con movimiento estacionario, o cuando una esfera se desplaza en el interior de un fluido viscoso en reposo, se ejerce una fuerza resistente sobre la esfera de radio r, cuyo valor es:

$$F = 6 \pi \eta r v$$

siendo v la velocidad de la esfera. Esta relación se conoce como *ley de Stokes*.

• Regímenes laminar y turbulento

El régimen estacionario es laminar cuando las capas de fluido se deslizan unas sobre otras. Si el rozamiento interno en el fluido es muy elevado se forman torbellinos, el régimen se llama turbulento y no es estacionario. El número de Reynolds para un tubo de diámetro D es:

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Para $N_R < 2000$ el régimen es laminar.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[BURBANO, 1993] *Cap.19: Hidrodinámica y aerodinámica.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 15: Sólidos y fluidos.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 13: Fluidos.*

Tema 9.- TEMPERATURA Y PROPAGACIÓN DEL CALOR

Suele decirse que la temperatura es una medida del grado de calor o frío de los cuerpos, pero esta definición no es válida desde el punto de físico. Cuando un cuerpo se calienta o enfría, cambian algunas de sus propiedades físicas: La mayor parte de los sólidos y líquidos se dilatan al calentarse, si se calienta un conductor eléctrico varía su resistencia, etc. Una propiedad física que varía con la temperatura se denomina *propiedad termométrica* y un cambio de esta propiedad indica que se ha modificado la *temperatura* del objeto.

• Equilibrio térmico y principio cero de la Termodinámica

Dos sistemas en contacto están en *equilibrio térmico* cuando sus propiedades ya no cambian con el tiempo. Para que dos sistemas estén en contacto deben estar separados por una *pared diatérmica* que facilite su interacción térmica. Una *pared adiabática* no permite esta interacción: cada sistema está aislado del otro y cada uno de ellos puede permanecer en su estado de equilibrio. El *principio cero de la Termodinámica* establece que dos sistemas que están en equilibrio térmico con un tercero lo están también entre sí. El concepto de temperatura está relacionado con el estado de equilibrio térmico de dos sistemas pues estarán en equilibrio térmico si tienen la misma temperatura.

• Termómetros y la escala de temperaturas del gas ideal

Para establecer una escala de temperatura se utiliza una propiedad termométrica. Los termómetros de gas tienen la propiedad de que todos ellos concuerdan entre sí en la medición de cualquier temperatura con tal de que la densidad del gas empleado en el termómetro sea muy baja. La temperatura del gas ideal se define mediante un límite con gases reales diluidos en un *termómetro de gas a volumen constante.* La escala de temperaturas se ajusta asignando al punto triple del agua la temperatura 273.16 K. En este estado coinciden el punto de fusión, el punto de ebullición y el punto de sublimación, y tiene lugar a una presión de vapor de 610 Pa y a una temperatura de 0.01° C. Se define la temperatura del gas ideal mediante:

$$T = 273.16K\,\frac{p}{p_3}$$

donde p es la presión del gas en el termómetro cuando está en equilibrio térmico con el sistema del que se quiere medir la temperatura y p_3 es la presión cuando el termómetro está en un baño de agua-hielo-vapor en su punto triple.

• Dilatación térmica

La mayoría de las sustancias se expanden o dilatan al aumentar su temperatura y contraen cuando ésta disminuye.

(i) *Dilatación lineal:* El cambio ΔL de la longitud L_0 de un objeto al cambiar la temperatura en ΔT es:

$$\Delta L = \alpha\, L_0\, \Delta T$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal de la sustancia.

(ii) *Dilatación superficial:* El cambio ΔS de la superficie S_0 de un objeto al cambiar la temperatura en ΔT viene dado por:

$$\Delta S = \gamma\, S_0\, \Delta T$$

donde γ es el coeficiente de dilatación superficial de la sustancia. Para una sustancia isótropa se cumple que $\gamma = 2\alpha$.

(iii) *Dilatación cúbica:* El cambio ΔV del volumen V_0 de un objeto al cambiar la temperatura en ΔT es:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

donde β es el coeficiente de dilatación cúbica o de expansión de volumen. Para una sustancia isótropa se cumple que $\beta = 3\alpha$. El agua presenta una expansión térmica anómala entre 0° y 4° C, pues se contrae al aumentar la temperatura.

• Esfuerzos de origen térmico

Si los extremos de una barra están fijos de modo que se impida su dilatación o contracción, y se varía la temperatura de la barra, se producen en ésta esfuerzos de tracción y compresión que pueden llegar a ser muy grandes, originando en la barra tensiones que pueden sobrepasar el límite elástico y aun el de ruptura. Si E es el módulo de Young del material, el valor de este esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \alpha E \Delta T$$

• Propagación del calor por conducción

El calor Q es la energía transferida entre un sistema y su entorno, debido únicamente a una diferencia de temperatura entre dicho sistema y alguna parte de su entorno. El flujo de calor persiste hasta que se igualan las temperaturas. En el proceso de propagación del calor por *conducción,* el calor se transmite entre dos sistemas a través de un medio de acoplamiento. Si el medio que separa los sistemas que están a temperaturas T_1 y T_2 tiene longitud L y sección S, en el estado estacionario (T ya no cambia con el tiempo) el calor que pasa a través de una sección transversal por unidad de tiempo (corriente térmica, $H = Q/t$) es:

$$H = kS\frac{T_2 - T_1}{L}$$

donde k es la *conductividad térmica* del medio. Se define la *resistencia térmica* del medio, R, como:

$$R = \frac{L}{kS}$$

y $H = \Delta T/R$. Para una pared compuesta en el estado estacionario, su resistencia térmica equivalente es la suma de las resistencia térmicas de las paredes componentes si tienen la misma superficie. La corriente térmica H para condiciones no estacionarias y para diversas geometrías se calcula como:

$$H = -kS\frac{dT}{dx}$$

que se conoce como ley de Fourier. dT/dx es el gradiente de temperatura y H es la corriente de calor instantánea a través de un elemento de área S. El signo negativo indica que el calor fluye desde las temperaturas altas a las bajas.

• Propagación del calor por convección y radiación

En la propagación por *convección* existe transferencia de calor de un lugar a otro por un movimiento real de la sustancia caliente dando lugar a corrientes de convección macroscópicas, que pueden aparecer en fluidos en el campo gravitatorio cuya densidad varía con la temperatura (convección natural). La convección puede forzarse también con el uso de ventiladores.

En el calor transferido por *radiación,* la potencia radiada P por una superficie viene dada por la ley de Stefan-Boltzmann:

$$P = e\sigma S T^4$$

donde e es la emisividad y σ = 5.67 x 10^{-8} $Wm^{-2}K^{-4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann. Todos los objetos emiten energía desde sus superficies cuando están calientes y la radiación térmica es un tipo de radiación electromagnética.

En todos los mecanismos de propagación del calor, si la diferencia de temperatura entre el cuerpo y los alrededores es pequeña, la velocidad de enfriamiento del cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura (*ley de enfriamiento de Newton*).

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[GETTYS, 1991] *Cap. 16: Temperatura y transferencia del calor.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 18: Temperatura y teoría cinética de los gases.*

Tema 10.- PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

• Capacidad calorífica y calor específico

El calor suministrado a un sistema a presión constante y el cambio de temperatura están relacionados, a través del *calor específico* a presión constante c_p:

$$dQ = mc_p dT$$

si se conoce la masa m; o a través de la *capacidad calorífica molar* a presión constante C_p:

$$dQ = nC_p dT$$

si lo que conocemos es el número de moles n. De igual manera se definen el calor específico a volumen constante, c_V, y la capacidad calorífica molar a volumen constante C_V:

$$dQ = mc_V dT \qquad dQ = nC_V dT$$

La relación entre el julio y la caloría es: 1 cal = 4.186 J.

• Cambio de fase y calor latente

El calor necesario para fundir una sustancia sólida es:

$$Q_f = mL_f$$

donde L_f es el *calor latente de fusión*. Para el agua a presión atmosférica L_f = 333.5 kJ/kg = 80 cal/g. El calor necesario para vaporizar un líquido es:

$$Q_v = mL_v$$

donde L_v es el *calor latente de vaporización*. Para el agua a presión atmosférica L_f = 2257 kJ/kg = 540 cal/g. En igualdad de condiciones todo cambio de fase se produce a una temperatura determinada, y mientras se está produciendo un cambio de fase no varía la temperatura del sistema.

• Trabajo

El trabajo es una transferencia de energía entre un sistema y su entorno debida al movimiento de alguna parte del entorno. el trabajo realizado por un fluido sobre su entorno es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

El trabajo realizado por un sistema es positivo cuando se transfiere energía desde el sistema al exterior (entorno).

Trabajo en sistemas gaseosos (procesos reversibles):

(a) *Proceso isócoro* (volumen constante, $dV = 0$): $W = 0$.

(b) *Proceso isobárico* (presión constante, $dp = 0$):

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

(c) *Proceso isotermo* (temperatura constante, $dT = 0$), para un gas ideal $pV = nRT$ y si T es constante $p_1V_1 = p_2V_2$:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = p_2V_2\ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1\ln\frac{p_1}{p_2}$$

(d) Proceso adiabático ($Q = 0$), para un gas ideal $pV^\gamma = cte.$:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \qquad pV^\gamma = p_1V_1^\gamma \qquad p = \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}\,dV = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1}\right]$$

• Funciones de estado y ecuaciones de estado

Las *variables de estado* p, V, T y n para una sustancia están ligadas entre sí a través de una ecuación matemática que se denomina *ecuación de estado*. Para un gas ideal:

$$pV = nRT$$

donde R = 8.31 J·mol^{-1}·K^{-1} = 2 cal·mol^{-1}·K^{-1} es la constante universal de los gases. Un estado de equilibrio de un sistema puede representarse mediante un punto en el diagrama p-V. Los *procesos cuasiestáticos* son aquéllos en los que el sistema pasa a través de una sucesión de estados de equilibrio, y pueden representarse mediante curvas en un diagrama p-V.

• Primer principio de la Termodinámica. Energía interna

La relación entre la energía transferida entre un sistema y su entorno y el cambio de *energía interna* U del sistema es:

$$\Delta U = Q - W$$

El calor Q cedido al sistema y el trabajo W que éste realiza dependen de los detalles del proceso, sin embargo la energía interna es una función de estado: el cambio de energía interna $\Delta U = U_f - U_i$ depende sólo de los estados inicial (i) y final (f), y no del proceso realizado para ir de uno a otro. En la ecuación del primer principio el convenio de signos es el siguiente: $Q > 0$ si se cede calor al sistema desde el exterior y $W > 0$ si el sistema realiza trabajo sobre el exterior.

• Algunas aplicaciones del primer principio

(a) *Proceso isócoro* ($V = cte.$): El trabajo es nulo ($W = 0$) y aplicando el primer principio:

$$\Delta U = Q - W = Q$$

(b) *Proceso isobárico* ($p = cte.$): Se pueden dar ambos tipos de transferencia de energía entre el sistema y su entorno, Q y W.

(c) *Proceso adiabático* ($Q = 0$): $\Delta U = Q - W = -W$

(d) *Proceso isotérmico* ($T = cte.$): Un ejemplo de proceso isotérmico es una cambio de fase.

(e) *Expansión libre de un gas ideal*: Si se tiene un recipiente con dos vasijas, en una de ellas hay un gas ideal y en la otra se ha hecho el vacío. Ambas cámaras están separadas y el recipiente aislado del exterior. Se abre la llave de paso entre las dos vasijas y el gas se expande libremente hasta que se igualan las presiones de los dos recipientes. En la expansión libre se observa que no cambia la temperatura del gas y entonces $Q = 0$. El sistema tampoco realiza trabajo sobre su entorno $W = 0$, por tanto la energía interna no cambia $\Delta U = 0$. Como la presión y el volumen del gas han cambiado, U no es función ni de p ni de V,pero como la temperatura permanece constante, se puede concluir que *la energía interna de un gas ideal depende sólo de la temperatura,* $U(T)$. Como a volumen constante se tiene $dU = dQ = nC_V dT$ y U sólo depende de T , a presión constante también será $dU = nC_V dT$.

(f) *Proceso cíclico*: Los estados inicial y final coinciden. Como U es una función de estado, en un ciclo $\Delta U = 0$.

• Capacidades caloríficas de los gases

Capacidades caloríficas para un gas ideal monoatómico:

$$C_V = \frac{3}{2}R \qquad C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$$

Capacidades caloríficas para un gas ideal diatómico:

$$C_V = \frac{5}{2}R \qquad C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$$

La ecuación:

$$C_p - C_V = R$$

recibe el nombre de *relación de Meyer*. Un gas ideal que realiza un *proceso adiabático* cuasiestático experimenta cambios de presión y volumen que satisfacen la ecuación:

$$pV^\gamma = cte.$$

con $\gamma = C_p/C_V$. Para gases ideales monoatómicos γ = 5/3 = 1.67, y para gases ideales diatómicos γ = 7/5 = 1.40.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[GETTYS, 1991] *Cap. 17: Primera ley de la Termodinámica.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 19: Calor y primer principio de la Termodinámica.*

Tema 11.- SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

• Máquinas térmicas y segundo principio de la Termodinámica

Según la expresión de *Kelvin-Planck* del segundo principio de la Termodinámica, no es posible un ciclo en el que se extraiga calor de un foco a una sola temperatura y se convierta completamente en trabajo.

• Rendimiento de las máquinas térmicas y frigoríficas

Si una máquina térmica extrae calor Q_C de un foco caliente, realiza un trabajo W y cede calor Q_F a un foco frío, su rendimiento η es

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = \frac{Q_C - |Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C}$$

El rendimiento de una máquina frigorífica es:

$$\eta = \frac{Q_F}{|W|}$$

Según la expresión de *Clausius* del segundo principio, no es posible un proceso cuyo único resultado sea la transferencia de calor desde una temperatura baja a otra más alta, sin producir otro efecto.

• Ciclo de Carnot

Un proceso reversible es aquel que puede invertirse con sólo llevar a cabo cambios infinitesimales en el entorno, o alrededores, del sistema. Todo proceso que sea no reversible, es un proceso irreversible. Una máquina de Carnot es una máquina reversible que trabaja entre dos focos a temperaturas T_C y T_F, siguiendo un ciclo formado por:

1.-Una expansión isoterma cuasiestática que absorbe calor del foco caliente a temperatura T_C.

2.-Una expansión adiabática cuasiestática hasta una temperatura más baja T_F.

3.-Una compresión isoterma cuasiestática que cede calor a un foco frío a temperatura T_F.

4.-Una compresión adiabática cuasiestática hasta el estado original (temperatura T_C).

El rendimiento del ciclo de Carnot es:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

y es el límite superior del rendimiento de las máquinas reales que operan entre esas dos temperaturas. Según el *teorema de Carnot*, todas las máquinas térmicas reversibles que operan entre dos temperaturas, T_C y T_F, tienen el mismo rendimiento y no hay ninguna máquina que opere entre estas temperaturas con rendimiento superior a ésta.

• Temperatura termodinámica

El cociente entre las temperaturas absolutas de dos focos viene definido por el cociente entre los calores cedido y absorbido por los mismos al verificar una máquina un ciclo de Carnot entre dichos focos:

$$\frac{T_F}{T_C} = \frac{|Q_F|}{Q_C}$$

La temperatura termodinámica T de un sistema se define:

$$T = 273.16 \frac{|Q|}{|Q_3|} \ K$$

donde Q y Q_3 son los intercambios de calor que tienen lugar en un ciclo de Carnot que opera entre el sistema y agua en su punto triple.

• Entropía

La entropía es una variable de estado. La diferencia de entropía entre dos estados próximos viene dada por:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$$

donde dQ_{rev} es el calor entregado al sistema en un proceso reversible que conecte dichos estados. La variación de entropía de un sistema puede ser positiva o negativa. La diferencia de entropía entre dos estados de un sistema viene dada por:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$$

donde la integral es válida para cualquier proceso reversible que conecte los dos estados. La entropía es una medida del desorden de un sistema.

• Cálculo de variaciones de entropía en diversos procesos

Cuando un sistema experimenta un proceso, el cambio de entropía sólo depende de los estados inicial y final, al ser una función de estado. Así, en un proceso real, sea reversible o irreversible, para calcular la entropía se utiliza un proceso reversible que conecte los estados inicial y final , teniendo en cuenta que el proceso reversible sólo se utiliza para el cálculo.

(i) *Cambio de fase*: Por ejemplo, para la fusión de un sólido como el hielo, el proceso es irreversible, pero imaginamos un proceso reversible que consista en utilizar un foco cuya temperatura sea insignificantemente mayor que la del sólido, cediendo calor de forma reversible en el punto de fusión del hielo. El calor absorbido por el hielo es $Q_f = mL_f$, y como la temperatura no cambia:

$$\Delta S = S_{líq} - S_{sól} = \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f dQ_{rev} = \frac{Q_{rev}}{T} = \frac{mL_f}{T}$$

(ii) *Cambio de temperatura*: Por ejemplo si se caliente agua a presión constante, se usa un procese reversible con focos con temperaturas insignificantemente más altas que la del agua:

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_p dT}{T} = mc_p \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc_p \ln \frac{T_f}{T_i}$$

(iii) *Cambio de volumen:* Por ejemplo para la expansión libre (proceso irreversible) de un gas ideal ($Q = 0$, $W = 0$, $\Delta U = 0$, $\Delta T = 0$), se imagina un proceso reversible isotermo entre dos estados (V_i,T) y (V_f,T). De acuerdo al primer principio:

$$dQ = dU + pdV = 0 + pdV = pdV$$

y como $pV = nRT$,

$$\frac{dQ}{T} = \frac{pdV}{T} = \frac{nRT}{V}\frac{dV}{T} = \frac{nRdV}{V}$$

$$\Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRdV}{V} = nR\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nR\ln \frac{V_f}{V_i}$$

• Entropía y segundo principio

El cambio de la entropía del universo es igual a la suma de los cambios de entropía de un sistema y de su entorno. Según la expresión de la entropía del segundo principio, en cualquier proceso la entropía del universo o aumenta (si el proceso es irreversible) o permanece constante (si el proceso es reversible). El aumento de entropía de un sistema aislado en un proceso irreversible está relacionado con la pérdida de la oportunidad que dicho sistema tiene para realizar trabajo ($W_{perdido} = T\Delta S$). Los procesos irreversibles pasan de estados más ordenados a estados más desordenados. La entropía está relacionada con la probabilidad: un sistema altamente ordenado tiene baja probabilidad y baja entropía.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[GETTYS, 1991] *Cap. 19: Segunda ley de la Termodinámica.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 20: Segundo principio de la Termodinámica.*

Tema 13.- MOVIMIENTO ONDULATORIO

• Generalidades. Ondas longitudinales y ondas transversales

Una onda viajera es una perturbación que se propaga de una posición a otra. En las *ondas longitudinales* la dirección en la cual varía la magnitud que define la perturbación coincide con la dirección de propagación de la onda. En las *ondas transversales* la dirección de variación de esta magnitud es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

• Propagación de una perturbación en una dirección. Ecuación de onda

Una onda está descrita por una función ψ que representa una propiedad de la onda y recibe el nombre de *función de onda*:

$$\psi = f(x,t)$$

Si la perturbación se propaga con una velocidad constante en el medio, v (*velocidad de fase)*, la forma más general de una *onda unidimensional* que se propaga hacia $+x$ es:

$$\psi(x,\, t) = f(x - vt)$$

Si la onda viaja hacia $-x$:

$$\psi(x,\, t) = f(x + vt)$$

La *ecuación de onda* en una dimensión que describe el movimiento ondulatorio que se propaga con una velocidad v sin distorsión a lo largo del eje x se escribe:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Esta ecuación de onda es una ecuación diferencial lineal, lo que significa que las ondas que satisfagan esta ecuación obedecen el principio de superposición.

• Ondas armónicas

Una onda armónica se puede expresar como:

$$\psi(x,t) = A\ \text{sen}k(x - vt)$$

que es una onda periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El período espacial o *longitud de onda* λ es el intervalo espacial tal que $\psi(x,t) = \psi(x + \lambda,t)$. Se cumple:

$$k = 2\pi/\lambda$$

El *período temporal* es el intervalo temporal T tal que $\psi(x,t) = \psi(x,t + T)$. Se cumple:

$$T = \lambda/v$$

El inverso del período T es la *frecuencia* $\nu = 1/T$. Se verifica la relación $v = \lambda\nu$. Otra cantidad que se usa es la *frecuencia angular* $\omega = 2\pi/T$ y se puede escribir $v = \omega/k$, con lo que la función de onda puede reescribirse como:

$$\psi(x,t) = A\ \text{sen}(kx - \omega t)$$

Dos puntos x_1 y x_2 que en un instante t tienen el mismo estado de perturbación, están *en fase* si $\psi(x_1,t) = \psi(x_2,t)$:

$$x_2 - x_1 = m\lambda$$

donde m es un número entero. Dos puntos x_1 y x_2 que en un instante t tienen un estado de perturbación opuesto se dice que están *en oposición de fase*. Si $\psi(x_1,t) = -\psi(x_2,t)$, es decir:

$$x_2 - x_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

donde m es un número entero.
Con otra elección del origen de tiempos se podría haber escrito inicialmente la función de onda en la forma:

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

• Ondas en dos y tres dimensiones

Puede haber ondas en dos dimensiones como las de la superficie de un líquido en las que los frentes de onda son curvas, y ondas en tres dimensiones como las ondas sonoras o las ondas luminosas en las que los frentes de onda son superficies. Puede hablarse de ondas planas, esféricas y cilíndricas según sea el frente de onda.

• Intensidad en el movimiento ondulatorio. Absorción

La *intensidad* I de una onda es el flujo de energía que atraviesa la unidad de área normal a la dirección de propagación en la unidad de tiempo, es decir, la potencia P que atraviesa la unidad de área de una superficie normal ΔS a la dirección de propagación:

$$I = P/\Delta S$$

Suele definirse una intensidad media respecto al tiempo para un intervalo τ largo comparado con el período de la onda. Para una *onda plana* la intensidad es constante $I \propto A^2$.
Para una *onda esférica* $I = P/4\pi r^2$, es decir, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente puntual. Se cumple $I \propto A^2/r^2$.
Cuando una onda plana atraviesa, por ejemplo, un muro se produce el fenómeno de la absorción y su intensidad disminuye exponencialmente con el espacio recorrido.

• Ondas y barreras: Reflexión, refracción y difracción

Cuando una onda incide sobre una superficie límite que separa dos regiones de diferente velocidad de fase, una parte de la onda se refleja y la otra parte se transmite.
La difracción es una distorsión que experimenta una onda alrededor de un obstáculo o abertura que tiene lugar cuando el frente de onda está limitado.

• Superposición de ondas

Cuando se encuentran dos ondas en un punto del espacio sus funciones de onda se suman algebraicamente.

• Interferencia de ondas armónicas

Si interfieren dos ondas armónicas de la misma amplitud, número de onda y frecuencia angular:

$$\psi_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi_1)$$

$$\psi_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi_2)$$

la onda resultante es:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

la *diferencia de fase* es: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Si la diferencia de fase es $\Delta\varphi = 2m\pi$, la interferencia es constructiva, mientras que si $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$, la interferencia es destructiva.

• Ondas estacionarias

Si un tren de onda se encuentra con una frontera, la parte reflejada interfiere con la parte incidente del tren de onda. Esta interferencia puede dar lugar a un patrón estacionario que se conoce como *onda estacionaria*. Para dos ondas idénticas pero que viajan en sentidos opuestos:

$$\psi_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad \psi_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

la función de onda resultante es:

$$\psi(x,t) = 2A\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

que indica que en cada punto x existe un movimiento armónico simple de frecuencia ω y amplitud resultante $2A\text{sen}(kx)$ dependiente de x.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap.28: Movimiento oscilatorio.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 32: Ondas.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 15: Movimiento ondulatorio, Cap. 16: Superposición y ondas estacionarias.*

Tema 14.- ACÚSTICA

• Ondas sonoras. Propagación

La *Acústica* se ocupa de los métodos de generación, recepción y propagación del sonido. Las ondas sonoras son ondas elásticas que se propagan en los medios materiales y cuya velocidad de propagación depende de las propiedades elásticas del medio. En los sólidos pueden propagarse ondas longitudinales y transversales mientras que en los fluidos sólo ondas longitudinales. La propagación de una onda sonora longitudinal en un fluido puede describirse mediante el desplazamiento $\psi(x,t)$ de un elemento en la dirección de propagación de la onda, mediante el cambio de presión $p(x,t) = P(x,t) - p_0$ a partir de una presión de equilibrio p_0 (para el aire p_0 10^5 Pa) o bien mediante la variación de la densidad $\Delta\rho(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$. Una onda armónica viene dada por:

$$\psi(x,t) = \psi_{\text{máx}}\,\text{sen}(\omega t - kx)$$

$$p(x,t) = p_{\text{máx}}\cos(\omega t - kx)$$

$$\Delta\rho(x,t) = \Delta\rho_{\text{máx}}\cos(\omega t - kx)$$

lo que da lugar a una sucesión de *compresiones* (máxima presión y densidad) y *enrarecimientos* (mínima presión y densidad). Para una frecuencia de 1000 Hz el oído tolera como mucho una presión acústica de 28 Pa.

• Velocidad de propagación del sonido

La velocidad de una onda sonora elástica longitudinal que se propaga en una barra delgada de un sólido depende de la densidad ρ_0 y del módulo de Young E:

$$v = \sqrt{E/\rho_0}$$

La velocidad de una onda sonora transversal que se propaga en un sólido depende de ρ_0 y del módulo de rigidez G:

$$v = \sqrt{G/\rho_0}$$

La velocidad de una onda sonora que se propaga en un fluido depende de la densidad ρ_0 y del módulo de compresión adiabática $B_S = -V(dp/dV)$:

$$v = \sqrt{B_S/\rho_0}$$

Para un gas ideal, la velocidad del sonido viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

donde $\gamma = C_p/C_V$, R la constante universal de los gases, T es la temperatura y M la masa molecular del gas.

• Intensidad y potencia acústica

La intensidad de una onda sonora armónica es proporcional a la amplitud al cuadrado y viene dada por la ecuación:

$$I = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 v^2 A^2$$

La intensidad mínima que puede detectar el oído humano es 10^{-12} W/m^2 y la intensidad máxima capaz de soportar es 10^5 W/m^2. A partir de 1 W/m^2 se produce sensación de dolor. El valor 10^{-12} W/m^2 se conoce como *intensidad de referencia* y es el umbral mínimo audible de una persona normal media para un sonido de 1000 Hz.

La energía emitida por un foco sonoro por unidad de tiempo y en todas direcciones se denomina potencia sonora W del foco.

• Medición del campo acústico. Niveles

Se utiliza una medición logarítmica en base 10 y el nivel se indica en decibelios (dB).

Nivel de intensidad acústica, L_I:

$$L_I = 10\log\frac{I}{I_0} \qquad I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

Nivel de potencia acústica, L_W:

$$L_W = 10\log\frac{W}{W_0} \qquad W_0 = 10^{-12}\ \text{W}$$

Nivel de presión acústica, L_p:

$$L_p = 20\log\frac{p}{p_0} \qquad p_0 = 2\times10^{-5}\ \text{Pa}$$

• Audición. Frecuencia y tono, intensidad y sonoridad, forma de la onda y timbre

Cuando una onda sonora que se propaga a través de un sólido, un líquido o un gas alcanza nuestro oído produce vibraciones en la membrana auditiva que provocan una reacción del nervio auditivo y el proceso se conoce como *audición*. Sólo son audibles las ondas sonoras cuyas frecuencias están comprendidas entre 16 Hz y 20000 Hz. Evaluaciones subjetivas de intervalos iguales en el tono corresponden a múltiplos iguales de la frecuencia. Las evaluaciones subjetivas de intervalos iguales en el nivel de sonoridad corresponden a múltiplos iguales de la intensidad. Un *sonido puro* viene representado pro una onda armónica y por tanto sólo tiene una frecuencia. Su espectro de frecuencias tiene sólo una línea.

Frecuencias graves:	16 - 360 Hz
Frecuencias medias:	360 - 1400 Hz
Frecuencias agudas:	1400 - 20000 Hz

Un *sonido complejo* o musical es la superposición de un sonido puro (sonido fundamental) con sonidos puros de frecuencias múltiplos enteros de la fundamental (sonidos armónicos). Su espectro de frecuencias tienen varias líneas. La propiedad que percibimos como timbre está relacionada con la forma de la onda y, por tanto, con su espectro de frecuencias.

• Interferencia de ondas sonoras y pulsaciones

Las ondas sonoras exhiben interferencias y este efecto es importante para diseños acústicos. Los sonidos con frecuencias muy próximas ν_1 y ν_2 producen *pulsaciones* con una frecuencia:

$$\nu_p = |\nu_2 - \nu_1|$$

• Tubos sonoros

Un tubo sonoro es un recipiente cilíndrico que está abierto por uno de sus extremos o por los dos y que genera sonidos al vibrar la columna de aire que contienen debido a ondas estacionarias. Un tubo abierto por los dos extremos emite el sonido fundamental y todos los armónicos, mientras que un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro emite el sonido fundamental y los armónicos impares.

• Efecto Doppler

La frecuencia del sonido ν_O recibido por un observador O en movimiento con velocidad v_O está desplazada por efecto Doppler de la frecuencia ν_F que emite una fuente F en movimiento con velocidad v_F (v_S es la velocidad del sonido):

$$\nu_O = \nu_F\,\frac{v_S \pm v_O}{v_S \pm v_F}$$

Numerador: Observador se acerca al foco (+)
Observador se aleja del foco (-)

Denominador: Foco se acerca al observador (-)
Foco se aleja del observador (+)

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[GETTYS, 1991] *Cap. 33: El sonido.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 15: Movimiento ondulatorio, Cap. 16: Superposición y ondas estacionarias.*

Tema 15.- CAMPO ELÉCTRICO

Las primeras observaciones de la atracción eléctrica fueron realizadas por los antiguos griegos. Éstos observaron que al frotar el ámbar, éste atraía pequeños objetos como pajitas o plumas. ciertamente, la palabra “eléctrico” procede del vocablo griego asignado al ámbar, *elektron.*

• Naturaleza eléctrica de la materia. Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia, existiendo dos tipos de carga: positiva y negativa. Dos cuerpos con el mismo tipo de carga se repelen, mientras que si tienen distinto tipo de carga, se atraen entre sí.

• Cuantización y conservación de la carga eléctrica

La carga eléctrica aparece siempre como múltiplo de una carga fundamental o cuanto eléctrico, cuyo valor es:

$$e = 1.602177 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

que es la carga del electrón, en valor absoluto.

En todos los procesos observados en la Naturaleza, la carga neta o total de un sistema aislado permanece constante.

• Fuerza eléctrica entre cargas puntuales. Ley de Coulomb

La ley de Coulomb expresa la fuerza eléctrica **F** que ejerce una carga puntual q sobre otra carga puntual q':

$$\mathbf{F} = K \frac{qq'}{r^2}\, \mathbf{u}_r$$

donde **r** es el vector que con origen en q y final en q' y $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$. K es la constante:

$$K = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \times 10^9\ \text{N C}^{-2}\ \text{m}^2$$

Esta fuerza es de tipo inverso del cuadrado de la distancia, es atractiva entre cargas de distinto signo y repulsiva entre cargas del mismo signo.

• Campo eléctrico, principio de superposición y líneas de fuerza

Existe un campo eléctrico en cualquier región donde una carga eléctrica experimenta una fuerza, la cual se debe a la presencia de otras cargas en esa región. El campo eléctrico **E** producido por una distribución de carga es la fuerza **F** ejercida por la distribución sobre una partícula de prueba dividida por el valor de la carga q de la partícula de prueba:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad \mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Para una carga puntual:

$$\mathbf{E} = K \frac{q}{r^2}\, \mathbf{u}_r$$

donde $\mathbf{u}_r$ es un vector unitario que va de la carga q al punto donde se evalúa el campo **E**. Para calcular el campo eléctrico creado por un sistema de cargas puntuales se suman los campos eléctricos que crearían cada una de las cargas del sistema por separado (principio de superposición).

Las características espaciales de un campo eléctrico pueden ilustrarse con líneas de fuerza o líneas de campo eléctrico, que son tangentes en cada punto a la dirección de **E** en ese punto.

Las *líneas de campo* eléctrico parten de las cargas positivas y van a parar a las cargas negativas. Un campo *uniforme* tiene la misma intensidad, dirección y sentido en todos los puntos del espacio y se representa por líneas de campo rectilíneas, paralelas y equidistantes.

• Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga

Para una distribución continua de carga (en volumen, superficie o línea) el campo eléctrico se calcula mediante:

$$\mathbf{E} = K \int \frac{dq}{r^2}\, \mathbf{u}_r$$

Como ejemplo de aplicación se puede obtener el campo creado por un anillo y por un disco en puntos de sus ejes o el campo creado por un segmento rectilíneo en puntos de su mediatriz.

• Movimiento de cargas en un campo eléctrico

Si la fuerza eléctrica es la única que afecta a una partícula de masa m y carga q, la segunda ley de Newton da para la aceleración $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$. Cuando una partícula se mueve en un campo eléctrico uniforme, su movimiento es descrito por la cinemática del movimiento bajo aceleración constante. en particular resulta de interés estudiar el movimiento de una carga que entra en una región donde hay un campo eléctrico uniforme perpendicular al vector velocidad de la carga.

• Dipolos eléctricos en campos eléctricos

Un dipolo eléctrico es un sistemas de dos cargas eléctricas iguales pero opuestas, separadas por una pequeña distancia a. si **a** es el vector que va desde la carga negativa a la carga positiva, se define el *momento dipolar* eléctrico del dipolo como el vector **p**:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}$$

En un campo eléctrico uniforme, la fuerza neta que actúa sobre un dipolo es nula, pero existe un momento τ dado por:

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

al situar un dipolo en un campo eléctrico uniforme, el dipolo tiende a alinearse en la dirección del campo. Si **p** y **E** tienen el mismo sentido se tiene una posición de equilibrio estable del dipolo. Si tienen sentido contrario el equilibrio es inestable.

• Flujo del campo eléctrico. Ley de Gauss

Se define el flujo del campo eléctrico a través de una superficie S como la integral de superficie del vector campo eléctrico extendida a toda la superficie:

$$\Phi_E = \int_S \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}}$$

Cuando se calcula el flujo a través de una superficie cerrada a ésta se la denomina *superficie gaussiana.* Las líneas de campo pueden ser utilizadas para visualizar el flujo a través de la superficie. El flujo total puede ser positivo, negativo o cero. Cuando es positivo, el flujo es saliente y cuando es negativo, es entrante.

La *ley de Gauss* establece que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica neta encerrada dentro de la superficie dividida por ε_0:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \int_S \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

• Cálculo del campo eléctrico mediante la ley de Gauss

La ley de Gauss puede ser utilizada para encontrar el campo eléctrico producido por distribuciones de carga que posean una alta simetría como líneas infinitas, planos o esferas. El paso crucial de este proceso es la selección de la superficie gaussiana.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap.21: Interacción eléctrica, Cap. 25: El campo eléctrico.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 21: El campo eléctrico, Cap. 22: La ley de Gauss.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 22: Campo eléctrico I: Distribuciones discretas de carga, Cap. 23: Campo eléctrico II: Distribuciones continuas de carga.*

Tema 16.- POTENCIAL ELÉCTRICO

La fuerza eléctrica entre dos cargas está dirigida a lo largo de la línea que une las dos cargas y depende de la inversa del cuadrado de su separación, lo mismo que la fuerza gravitatoria entre dos masas. como la fuerza gravitatoria, la fuerza eléctrica es conservativa. Existe, por tanto, una función energía potencial asociada con la fuerza eléctrica. si se sitúa una carga de prueba en un campo eléctrico, su energía potencial es proporcional a esta carga. La energía potencial por unidad de carga es una función de la posición en el espacio de la carga y se denomina potencial eléctrico.

• Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

La fuerza eléctrica es conservativa. La *energía potencial* de una partícula de prueba en el campo creado por varias partículas fijas q_i está dada por:

$$E_p = Kq \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

(tomando el origen de energías potenciales en el infinito).
El *potencial eléctrico* de una carga q se define como:

$$V = \frac{E_p}{q} \qquad E_p = qV$$

En el SI el potencial se expresa en voltios (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

• Potencial eléctrico de una carga puntual

Para una carga puntual (con origen de potenciales en el infinito):

$$V = K\frac{q}{r}$$

Para un sistema de partículas cargadas (con origen de potenciales en el infinito):

$$V = K \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

• Potencial eléctrico de una distribución continua de carga

Para una distribución continua de carga:

$$V = K \int \frac{dq}{r}$$

Aplicando esta ecuación se puede calcular el potencial, por ejemplo, de un anillo cargado en su eje.

• Diferencia de potencial

La diferencia de potencial ΔV entre dos puntos 1 y 2 está relacionada con el trabajo W realizado por el campo eléctrico

$$W = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = q(V_1 - V_2) = -q\Delta V$$

Se tiene:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$$

La diferencia de potencial $V_1 - V_2$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga de prueba positiva cuando ésta se despalza del punto 1 al punto 2. La diferencia de potencial ΔV es también el trabajo positivo por unidad de carga que debe realizarse contra el campo eléctrico para desplazar la carga de 1 a 2.

• Relación entre el potencial eléctrico y el campo eléctrico

Se cumple:

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

Las líneas del campo eléctrico señalas en el sentido en el que disminuye el potencial. Si se conoce la expresión de **E**, puede obtenerse el potencial V en un punto P por medio de la integral de línea de **E**:

$$V = -\int_\infty^P \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$$

Si se conoce V, el campo **E** se puede encontrar por medio del gradiente de V:

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\, V = -\nabla V$$

Si el campo eléctrico es constante en dirección (por ejemplo, la del eje X):

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Si el potencial sólo depende del módulo de **r** (es decir, de r):

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

• Superficies equipotenciales

Las superficies que tienen el mismo potencial eléctrico en sus puntos, es decir, V = *constante*, se conocen como *superficies equipotenciales*. Las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales. Para una carga puntual las superficies equipotenciales son superficies esféricas concéntricas con la carga.

Tema 17.- CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Experimentalmente se comprueba que determinadas sustancias poseen la propiedad de permitir el movimiento de cargas eléctricas a través de ellas, mientras que otras impiden tal flujo. Las primeras reciben el nombre de conductores y las del segundo tipo aislantes o dieléctricos. Son conductores los metales y sus aleaciones, las soluciones acuosas de ácidos, bases y sales, etc. De todos ellos sólo se considerarán los conductores metálicos, los cuales están formados por iones positivos que ocupan posiciones fijas dando lugar a la red cristalina y los electrones que se han desprendido de los átomos metálicos circulan libre y desordenadamente en el seno del conductor, dando lugar a una especie de "gas de electrones" responsable de los fenómenos de conducción eléctrica.

- **Propiedades generales de los conductores en equilibrio electrostático**

(i) El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo.
(ii) La carga eléctrica neta de un conductor en equilibrio electrostático se encuentra sobre su superficie.
(iii) El campo eléctrico en la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es normal a la superficie.
(iv) La superficie de un conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial.

- **Campo eléctrico en las proximidades de un conductor en equilibrio electrostático**

El campo eléctrico en puntos muy próximos a la superficie de un conductor es perpendicular a su superficie y vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

lo que se conoce como teorema de Coulomb. Éste es el campo creado por toda la carga del conductor y puede considerarse suma del campo creado por un pequeño disco de área dS y el creado por el resto el conductor. El campo E_1 creado por un pequeño disco en puntos próximos es:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

luego el campo E_2 creado por el resto de las cargas superficiales del conductor es entonces:

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

de modo que $E = E_1 + E_2$.

- **Conductores en un campo eléctrico**

Al situar un conductor en un campo eléctrico debe anularse el campo en su interior para que se alcance el equilibrio electrostático. Ésto da lugar a una reordenación de las cargas del conductor de modo que creen un campo eléctrico en el interior del conductor que compense el campo aplicado.

- **Presión sobre un conductor, ruptura dieléctrica y efecto de puntas**

En un conductor en equilibrio electrostático el campo producido por todas las cargas menos las de un pequeño disco de área dS es:

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

y la fuerza dF que ejerce este campo eléctrico sobre la carga sobre la carga $dq = \sigma dS$ contenida en el disco será:

$$dF = E_2 dq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$$

Dicha fuerza es perpendicular a la superficie del conductor y va dirigida hacia el exterior. La fuerza por unidad de superficie es la *presión electrostática* sobre el conductor, p:

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Muchos materiales no conductores se ionizan en campos eléctricos muy altos y se convierten en conductores. Este fenómeno se denomina *ruptura dieléctrica* y el límite dieléctrico de un aislante es el valor máximo del campo eléctrico, E_{max}, que puede existir en ese material sin que se produzca su ruptura dieléctrica. Este valor del campo también se conoce como *resistencia dieléctrica.* Cuando ocurre la *ruptura dieléctrica* las moléculas del material se ionizan y el material comienza a conducir. En un material gaseoso como el aire $E_{max} \approx 3 \times 10^6$ V/m y este efecto va acompañado de una emisión luminosa, debida a la recombinación de los electrones con las moléculas ionizadas, fenómeno que se conoce como *descarga en arco.*

Cuando un conductor tiene forma no esférica, su superficie es equipotencial pero la densidad superficial de carga y el campo eléctrico justamente en el exterior del conductor, varían de un punto a otro. El campo eléctrico es más intenso en los puntos cercanos a las regiones del conductor de menor radio de curvatura (*efecto de puntas*). Si el conductor tiene puntas de radio de curvatura muy pequeño, la ruptura del dieléctrico que lo rodea puede producirse con potenciales relativamente bajos. Los pararrayos extraen la carga de una nube próxima antes de que el potencial de la nube alcance un valor destructivamente grande.

- **Sistema de conductores. Pantalla eléctrica**

Si un conductor se halla en presencia de otros conductores cargados con cargas de diferente signo, en su superficie podrían aparecer cargas inducidas, positivas en unas zonas y negativas en otras.
Una línea de fuerza del campo eléctrico no puede partir de un punto de un conductor e ir a parar a otro punto del mismo conductor, ya que entonces habría una diferencia de potencial entre los dos puntos del conductor y eso no es posible si el conductor está en equilibrio. Ésto hace que en una cavidad de un conductor hueco no haya campo eléctrico, pues como las líneas de campo no pueden ser cerradas, de haber campo tendrían que ir de un punto a otro del conductor, y eso no es posible. Así, dicha cavidad quedaría protegida contra las acciones eléctricas exteriores y el conductor constituye una *pantalla eléctrica*. En las paredes de la cavidad no puede haber carga eléctrica.
Si se une a tierra un conductor, su potencial será en todos los puntos el de la Tierra, que podemos considerar nulo por haber puntos de la Tierra tan alejados del sistema que podemos considerarlos en el infinito.
Si en el interior de la cavidad se colocan cargas, el campo de éstas no saldría fuera del conductor y se induciría en las paredes de la cavidad una carga igual y opuesta. En los laboratorio de alta tensión, los operarios trabajan en el interior de jaulas metálicas unidas a tierra, con lo que quedan protegidos de las posibles descargas exteriores. son las llamadas *jaulas de Faraday*.

- **BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA**

[BURBANO, 1993] *Cap. 32: Materiales conductores. Capacidad.*
[GETTYS, 1991] *Cap. 22: La ley de Gauss, Cap. 23: El potencial eléctrico.*
[TIPLER, 1999] *Cap. 24: Potencial eléctrico.*

Tema 18.- CAPACIDAD, CONDENSADORES Y DIELÉCTRICOS

• Capacidad de un conductor

Un conductor que tiene una carga Q y un potencial V, tiene una capacidad $C = Q/V$.

• Condensadores. Ejemplos

Un condensador es un dispositivo eléctrico utilizado en los circuitos para almacenar carga y energía eléctrica; está formado por dos placas conductoras con una diferencia de potencial ΔV entre ambas. La capacidad de un condensador es:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

En el SI la capacidad se mide en faradios (1 F = 1 C/V). La capacidad depende del diseño geométrico del condensador y de la naturaleza del dieléctrico que hay entre sus placas o armaduras. Para un condensador de láminas planoparalelas con vacío entre las placas:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

• Condensadores en serie y en paralelo

La capacidad equivalente de un conjunto de condensadores conectados es la capacidad de un único condensador que, cuando se utiliza en lugar del conjunto, produce el mismo efecto externo. La capacidad equivalente de varios condensadores en **serie** es:

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_i (1/C_i)}$$

Para varios condensadores en **paralelo**:

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

• Energía del campo electrostático y densidad de energía

La energía de un condensador es la energía potencial de las cargas que hay en sus placas:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Cuando se asocia esta energía con el campo eléctrico, la **densidad de energía** u_E en el espacio ocupado por el campo (en el vacío) es:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

En un medio material basta sustituir ε_0 por ε. La energía eléctrica total U en un volumen V se calculará mediante la integral:

$$U = \int_V u_E \, dV$$

• Propiedades electrostáticas de los dieléctricos

Cuando se introduce un dieléctrico entre las armaduras de un condensador en que había el vacío entre las placas, la capacidad aumenta de modo que:

$$C = \varepsilon_r C_0$$

mientras que la diferencia de potencial y el campo eléctrico disminuyen:

$$V = V_0/\varepsilon_r \qquad E = E_0/\varepsilon_r$$

• Descripción atómica de las propiedades de los dieléctricos

Existen dieléctricos apolares y polares. En los primeros, sus moléculas no tienen momento dipolar eléctrico, mientras que en los segundos las moléculas tienen un momento dipolar eléctrico permanente.

Cuando se coloca un dieléctrico apolar en un campo eléctrico, sus átomos o moléculas se convierten en dipolos eléctricos que se orientan en la dirección del campo eléctrico. si el dieléctrico es polar, sus momentos dipolares permanentes se orientan paralelos al campo exterior.

Cuando los dipolos eléctricos de una sustancia se alinean de manera espontánea (sustancias *ferroeléctricas*) o debido a la acción de un campo eléctrico externo, decimos que la sustancia está *polarizada*.

• Polarización, susceptibilidad y desplazamiento eléctrico

La *polarización* **P** de un material es una magnitud vectorial definida como el momento dipolar eléctrico del material por unidad de volumen. Si **p** es el momento dipolar eléctrico inducido por átomo o molécula y n el número de átomos o moléculas por unidad de volumen, la polarización es:

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p}$$

que tiene dimensiones de densidad superficial de carga y en el SI se mide en C/m^2.

Un dieléctrico polarizado tiene cargas sobre su superficie y, a menos que la polarización sea uniforme, también en su volumen. Estas *cargas de polarización*, sin embargo, están congeladas en el sentido de que están ligadas a los átomos o moléculas y no tienen libertad de movimiento en el dieléctrico. En un conductor, las cargas sí que son capaces de moverse con libertad y se denominan *cargas libres*. Se cumple la relación:

$$\sigma_{libre} = \varepsilon_o E + P$$

Se define el vector *desplazamiento eléctrico*, **D**, como:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

que se expresa en C/m^2. La densidad de carga libre está relacionada con **D** mediante la ecuación:

$$\sigma_{libre} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_N$$

donde $\mathbf{u}_N$ es el vector unitario en la dirección normal a la superficie del material.

La carga libre total sobre un conductor es entonces:

$$q_{libre} = \int_S \sigma_{libre} \, dS = \int_S \vec{\mathbf{D}} \, d\vec{\mathbf{S}}$$

donde S es una superficie cerrada.

En general, el vector **P** es proporcional al campo eléctrico aplicado **E**:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

χ_e es la *susceptibilidad eléctrica* del material. Cuando la relación entre **P** y **E** es lineal, se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

la cantidad:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

es la permitividad relativa del medio y $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ es la *permitividad* del medio.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap.25: El campo eléctrico.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 13: Capacidad, energía eléctrica y propiedades de los aislantes.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 25: Energía eléctrica y capacidad.*

Tema 19.- CORRIENTE ELÉCTRICA

Un conductor es un material en el cual algunas de las partículas cargadas se pueden mover libremente; estas partículas son los portadores de carga del conductor. Por ejemplo, podemos pensar en un metal como una estructura de iones positivos localizados en posiciones de red fijas, y entre éstos se distribuyen los electrones libres. La carga del conjunto de los electrones libres es igual y opuesta a la carga del conjunto de los iones, resultando un material neutro. Los electrones libres pueden moverse entre la red de iones, y constituyen los portadores de carga en el metal.

• Corriente y movimiento de cargas. Densidad de corriente

Una *corriente eléctrica* consiste en un flujo de partículas cargadas. La intensidad I de la corriente eléctrica caracteriza la carga que fluye a través de un elemento de circuito:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El sentido de la corriente corresponde con el sentido de la velocidad de arrastre **v** de los portadores de carga positivos. En el SI la intensidad I se expresa en amperios (A). La *densidad de corriente* **j** es el flujo de carga por unidad de tiempo y por unidad de superficie en un punto interior de un medio conductor:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$$

donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen y **v** es la velocidad de desplazamiento o arrastre de los portadores de carga que es contante, ya que los sucesivos choques de los portadores de carga en el metal con los iones de la red hacen que la velocidad de desplazamiento de los mismos sea en promedio constante. Si **j** es uniforme, su módulo j viene dado por:

$$j = \frac{I}{S}$$

y en el caso general:

$$I = \int_S \mathbf{j}\ d\mathbf{S}$$

Por convenio se toma como sentido de la corriente eléctrica el de los portadores de carga positivos. en el caso en el que los portadores de carga sean negativos, el sentido de la corriente es contrario al sentido de movimiento de los portadores de carga negativos.

• Ley de Ohm. Conductividad, resistividad y resistencia

La ley de Ohm establece que para un conductor a temperatura constante, la relación entre la diferencia de potencial V que hay entre dos puntos de un conductor y la corriente eléctrica I en el conductor es una constante conocida como *resistencia eléctrica, R:*

$$\frac{V}{I} = R \qquad\qquad V = RI$$

En este caso se dice que el conductor es óhmico. En el SI la resistencia R se expresa en ohmios (Ω).

Para un conductor de longitud l y sección S, la ley de Ohm puede escribirse en la forma:

$$j = \frac{l}{RS}\, E = \frac{1}{\rho}\, E = \sigma E$$

donde $\sigma = 1/\rho$ es la *conductividad* del material y ρ es su *resistividad*. σ se expresa en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Se cumple:

$$R = \frac{\rho\, l}{S}$$

Para los metales la resistividad aumenta cuando lo hace la temperatura. La ley de Ohm puede escribirse de forma general como:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

y la velocidad de arrastre para los electrones se escribe como:

$$\mathbf{v} = -\frac{\sigma}{en}\,\mathbf{E}$$

• Resistencias en serie y en paralelo

Para resistencias conectadas en serie, la resistencia equivalente se calcula mediante:

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

y para resistencias conectadas en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

• Aspectos energéticos de la corriente eléctrica. Ley de Joule

Para mantener una corriente eléctrica es necesario un suministro de energía ya que las cargas deben de ser aceleradas por el campo eléctrico. La energía por unidad de tiempo o potencia requerida para mantener una corriente se obtiene como $P = IV$. En el SI la potencia P se expresa en vatios (W).

Para conductores que obedecen la ley de Ohm $V = RI$ y se cumple la relación:

$$P = IV = IR^2 = \frac{V^2}{R} \quad (\textit{ley de Joule})$$

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap.24: Corrientes eléctricas.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 24: Corriente y resistencia eléctrica.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 26: Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua.*

Tema 20.- CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

Cuando la corriente circula en un circuito siempre en el mismo sentido se habla de un *circuito de corriente continua*. Las corrientes continuas están producidas usualmente por baterías conectadas a resistencias y condensadores. Cuando un interruptor se cierra en un circuito, a lo largo de los elementos de éste se propaga un campo eléctrico a una velocidad cercana a la de la luz. Al establecerse la corriente y acumularse la carga en diversos puntos del circuito tienen lugar cambios muy complicados, pero rápidamente se alcanza un equilibrio o estado estacionario, siendo estacionaria también la corriente.

- **Generadores y receptores. Fuerza electromotriz**

Para que en un circuito eléctrico exista una corriente continua, el circuito debe contener un componente que actúe como fuente de energía eléctrica, los cuales se conocen como fuentes de *fuerza electromotriz* (*fem*)y proporcionan a los portadores de carga la energía eléctrica necesaria para que realicen su trayecto a través del circuito. Una fuente de fuerza electromotriz bastante común es la batería. El terminal que está a mayor potencial de la batería se llama terminal positivo y el que está a menor potencial, terminal negativo. Las propiedades eléctricas importantes de una batería son su fuerza electromotriz ε y sus resistencia interna r. La diferencia de potencial V entre los terminales de una batería en descarga (*generador*) por es:

$$V = \varepsilon - Ir$$

donde el sentido de la corriente I en el interior de la batería es el mismo que el de su fuerza electromotriz (de menor a mayor potencial, por eso hay que suministrar energía que se utiliza de la energía almacenada en la batería). Para una batería en carga (*receptor*):

$$V = \varepsilon + Ir$$

donde el sentido de la corriente en el interior de la batería es opuesto al de su fuerza electromotriz (de mayor menor potencial, y la diferencia de energía queda almacenada).
La energía disipada como calor en una resistencia es:

$$P_R = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

La potencia cedida por una batería en descarga (generador) de resistencia interna r es:

$$P_c = \varepsilon I - I^2 r$$

La potencia absorbida por una batería en carga (receptor) de resistencia interna r es:

$$P_a = \varepsilon I + I^2 r$$

La rapidez con que la energía se transforma en un componente de un circuito es:

$$P = VI$$

- **Diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito**

La diferencia entre dos puntos A y B de un circuito se calcula mediante:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i R_i - \sum_i \varepsilon_i$$

donde el signo de las baterías depende de si al ir de A hacia B se comportan como generadores (signo positivo) o receptores (signo negativo) y el signo de la intensidad es positivo si va de A hacia B y negativo en caso contrario.

- **Amperímetros y voltímetros**

Para medir la corriente que pasa por un componente de un circuito debe colocarse un *amperímetro* en serie con el componente. La resistencia del amperímetro es muy baja. Puede fabricarse un amperímetro utilizando un galvanómetro con una resistencia pequeña en paralelo (*shunt*) mucho menor que la resistencia interna del galvanómetro.

Para medir la diferencia de potencial entre los extremos de un componente de un circuito debe colocarse un *voltímetro* en paralelo con el componente. La resistencia del voltímetro es muy alta. Puede fabricarse un voltímetro utilizando un galvanómetro con una resistencia grande en serie (*shunt*) mucho mayor que la resistencia interna del galvanómetro.

- **Resolución de circuitos: Leyes de Kirchhoff, método de las corrientes de malla y teorema de Thevenin**

Leyes de Kirchhoff: (a) Ley de las mallas: Al recorrer un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial es igual a cero. Se puede escribir para una malla:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \varepsilon_i$$

(b) Ley de los nudos: En toda unión de un circuito (nudo), donde la corriente puede dividirse, la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes:

$$\sum I_{entrante} = \sum I_{saliente}$$

considerando, por ejemplo, positivas las corrientes salientes y negativas las entrantes también se puede escribir en la forma:

$$\sum_i I_i = 0$$

Método de las corrientes de malla: Se deduce de las leyes de Kirchhoff. Se asigna a cada malla una corriente de malla I_i que es ficticia y se aplica para cada malla la ecuación:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \varepsilon_i$$

a continuación se deteminan las corrientes de cada rama.

Teorema de Thevenin: Una porción de un circuito entre dos terminales A y B se puede sustituir por una rama entre esos dos terminales con una batería de tensión el voltaje de Thevenin, ε_{Th}, en serie con una una resistencia de valor la resistencia de Thevenin R_{Th}. El voltaje de Thevenin es la diferencia de potencial entre los puntos A y B, mientras que la resistencia de Thevenin es la resistencia equivalente entre los puntos A y B cuando se eliminan todas las baterías (dejando sus resistencias internas).

- **Circuitos RC. Carga y descarga de un condensador**

Al cargar un condensador de capacidad C con una batería de fuerza electromotriz ε su carga varía con el tiempo como:

$$q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-t/\tau_C})$$

donde:

$$\tau_C = RC$$

es la *constante de tiempo del circuito RC*. La corriente que pasa por el circuito es:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau_C}$$

La carga de un condensador con carga inicial Q_0 que está descargándose a través de una resistencia R es:

$$q(t) = Q_0 e^{-t/\tau_C}$$

y la corriente que pasa por el circuito es:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau_C}$$

- **BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA**

[BURBANO, 1993] *Cap. 34: Corriente eléctrica continua.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 25: Energía y corriente en circuitos de corriente continua.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 26: Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua.*

Tema 21.- INTERACCIÓN MAGNÉTICA

Existen ciertos minerales del hierro, como la magnetita, que tienen la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. A esta propiedad se le dió el nombre de *magnetismo.* Las regiones de un cuerpo donde parece concentrarse el magnetismo se denominan *polos magnéticos* y el cuerpo magnetizado se llama *imán.* Existen dos polos magnéticos (norte N y sur S). La interacción entre polos magnéticos iguales es de repulsión y entre polos magnéticos distintos es de atracción. No existen monopolos magnéticos, no siendo posible aislar un polo N o un polo S por separado: siempre aparecen por parejas.
Las interacciones eléctricas y magnética están estrechamente relacionadas, y constituyen dos aspectos diferentes de una misma propiedad de la materia, su *carga eléctrica.* El magnetismo es una manifestación de las cargas eléctricas en movimiento con respecto al observador.

• Fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Definición del campo magnético

El campo magnético **B** en un punto del espacio se define en función de la fuerza magnética ejercida sobre una partícula de carga q y velocidad **v** en dicho punto:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La dirección de la fuerza magnética es perpendicular al plano definido por los vectores **v** y **B**.
Como la fuerza magnética es perpendicular al vector velocidad, su trabajo al mover la carga es cero, por lo que es constante la energía cinética de la partícula. Esto implica que el módulo del vector velocidad permanece constante cuando la partícula se mueve en el seno de un campo magnético.
Si la partícula se mueve en una región donde hay un campo eléctrico **E** y un campo magnético **B**, la fuerza total sobre la partícula se conoce como *fuerza de Lorentz:*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Las características espaciales de un campo magnético pueden ilustrarse con *líneas de campo* magnético, que son tangentes en cada punto a la dirección de **B** en ese punto. Las líneas del campo magnético son cerradas sobre sí mismas, debido a la no existencia de cargas magnéticas (monopolos).

• Movimiento de una carga en un campo magnético

Campo magnético uniforme: Si la velocidad v ($v << c$) de la partícula es perpendicular a un campo magnético uniforme, y no existen otras fuerzas, la partícula cargada describe un movimiento circular uniforme. Si la masa de la partícula es m, y su velocidad v, y el radio r de la trayectoria verifican:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La *frecuencia ciclotrónica* ω no depende de v y r:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B$$

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{\mathbf{B}}$$

Si el campo magnético es uniforme pero la velocidad de la partícula no es perpendicular al campo, la partícula describirá una hélice de radio y paso constante.
Campo magnético no uniforme: Si la velocidad de la partícula no es perpendicular al campo, la partícula describirá una hélice de radio y paso variable, disminuyendo éstos conforme aumenta la intensidad del campo magnético.

Espectrómetro de masas: Se utiliza para separar iones de la misma carga y diferente masa m. La relación carga-masa de los iones es:

$$\frac{q}{m} = \frac{2\,\Delta V}{B^2 r^2}$$

donde ΔV es la d.d.p. del potencial eléctrico acelerador.

Determinación de la carga-masa del electrón (*Thomson*)*:* Se utiliza un tubo de rayos catódicos y un campo eléctrico **E** y otro magnético **B** perpendiculares como selector de velocidad. Sólamente las partículas con velocidad:

$$v = E/B$$

pasarán a través de la región de los campos sin desviarse.

El ciclotrón: Es un acelerador de partículas cargadas formada por dos conductores huecos en forma de D y entre los cuales se aplica una tensión alterna de frecuencia angular la frecuencia ciclotrónica. Perpendicular a los conductores hay un campo magnético uniforme. La energía cinética de los iones es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{m} B^2 R^2$$

donde R es el radio del ciclotrón.

• Efecto Hall

Cuando un conductor que transporta una corriente I se coloca en un campo magnético B, se genera una d.d.p. (voltaje Hall, V_H) en una dirección perpendicular a la corriente y al campo magnético. El voltaje Hall vale:

$$V_H = v_d B d$$

siendo d la anchura del conductor y v_d la velocidad de los portadores de carga. Se puede escribir:

$$V_H = IB/nqa$$

siendo a el espesor del conductor, q la carga de cada portador y n el número de portadores por unidad de volumen. La constante Hall vale:

$$R_H = 1/nq \qquad \text{de donde:} \qquad V_H = R_H IB/a$$

El signo y el valor de la constante Hall proporcionan el signo de los portadores de carga y su densidad. El efecto Hall se usa para medir campos magnéticos mediante una sonda Hall.

• Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica

La fuerza magnética producida por un campo magnético uniforme sobre un trozo recto de conductor, por el que circula una corriente, viene dada por:

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

En general, la fuerza magnética sobre un trozo de conductor por el que circula una corriente eléctrica es:

$$\vec{\mathbf{F}} = I \int_L d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

• Momento magnético sobre una corriente eléctrica

Si una espira por el que circula una corriente I está en el seno de un campo magnético uniforme **B**, el momento τ de las fuerzas que ejerce el campo sobre el circuito es:

$$\tau = I\,\mathbf{S} \times \mathbf{B}$$

donde **S** es el vector del área plana encerrada por la espira. La dirección de **S** es perpendicular al plano de la espira y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha. El momento dipolar magnético **M** de la espira con corriente I es $\mathbf{M} = I\mathbf{S}$ y el momento de fuerzas sobre un dipolo magnético en el seno de un campo magnético es:

$$\tau = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

El dipolo tiene una energía potencial $E_p = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}$.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 22: Interacción magnética, Cap. 23: Corrientes eléctricas.*
[GETTYS, 1991] *Cap. 26: El campo magnético.*
[TIPLER, 1999] *Cap. 28: El campo magnético.*

Tema 22.- FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO

Los campos magnéticos difieren de los campos eléctricos en varios aspectos. Son producidos por cargas que se mueven con respecto al observador, como las corrientes eléctricas, en lugar de ser producidos por cargas en reposo. Además, las líneas de campo magnético son cerradas, es decir, no empiezan en un punto y terminan en otro, sino que, de alguna manera, se enrollan con la trayectoria de las cargas en movimiento o corrientes eléctricas. Las primeras observaciones sobre campos magnéticos creados por corrientes fueron realizadas por Oersted, quien descubrió que una aguja imantada que puede girar alrededor de un eje, y está próxima a un hilo conductor por el cual circula una corriente, tiende a colocarse con su eje longitudinal perpendicular al conductor. Experiencias posteriores realizadas por Biot y Savart, y por Ampère, condujeron a unas relaciones por medio de las cuales se puede calcular el campo magnético en cualquier punto del espacio que rodea un circuito por el cual circula una corriente.

• Campo magnético producido por una corriente. Ley de Biot-Savart

La contribución $d\mathbf{B}$ de un elemento infinitesimal de corriente $Id\mathbf{l}$ al campo magnético en un punto del espacio viene dada por la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

El campo magnético resultante se obtiene por la forma integral de la ley de Biot-Savart:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

μ_0 es la permeabilidad del vacío ($4\pi \times 10^{-7}$ m kg C^{-2}).

• Cálculo del campo magnético mediante la ley de Biot-Savart

(i) *Corriente rectilínea e indefinida:* A una distancia r del conductor, el campo vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

las líneas de campo son circunferencias concéntricas con la corriente rectilínea y perpendicular al plano de las mismas.

(ii) Espira circular: Si el radio de la espira es a y transporta una corriente I, el campo magnético en un punto de su eje a una distancia R de su centro es:

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\,(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

(iii) *Solenoide muy largo:* El campo magnético en el eje del solenoide de longitud L con N vueltas en total y lejos de los bordes del solenoide es:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

(iv) *Solenoide infinito:* Sólo hay campo en el interior del solenoide y si tiene n vueltas por unidad de longitud el campo es $B = \mu_0 nI$.

• Fuerzas entre corrientes. Definición de amperio

El valor de la fuerza por unidad de longitud que se ejercen entre sí dos conductores rectilíneos indefinidos, paralelos, separados una distancia R, por los que circulan corrientes de intensidades I e I' viene dada por:

$$f = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi R}$$

El amperio, unidad de corriente eléctrica, se define en función de la fuerza por unidad de longitud entre los conductores. El amperio es aquella corriente que si se mantiene en dos conductores rectilíneos y paralelos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, situados en el vacío con una separación de un metro, produce entre estos dos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} N por metro de longitud.

• Flujo del campo magnético y ley de Gauss para el campo magnético

Se define el flujo del campo magnético a través de una superficie S como la integral de superficie del vector campo magnético extendida a toda la superficie:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$$

En el Sistema Internacional el flujo magnético se expresa en una unidad denominada **weber** (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2$$

La ley de Gauss para el campo magnético establece que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es nulo, de acuerdo con la inexistencia de monopolos magnéticos, ya que los polos magnéticos siempre aparecen por pares:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0$$

Esto implica que las líneas del campo magnético son cerradas sobre sí mismas. Esta ley de Gauss es válida no sólo para campos estacionarios, sino para cualquier tipo de campo magnético.

• Ley de Ampère para el campo magnético

La ley de Ampère establece que la circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada L que enlaza las corrientes I_1, I_2, I_3, ... depende únicamente de las corrientes que atraviesan una superficie delimitada por la línea cerrada:

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

donde $I = I_1 + I_2 + I_3 + ...$ es la corriente enlazada por la línea cerrada L.

Cuando se aplica la ley de Ampère consideramos que la corriente es positiva si pasa a través de la línea L en el sentido indicado por el dedo pulgar, cuando se utiliza la regla de la mano derecha para indicar la forma en que está orientada la trayectoria, y negativa en el sentido opuesto.

La ley de Ampère sólo es válida si las corrientes son continuas.

• Cálculo del campo magnético mediante la ley de Ampère

La ley de Ampère puede usarse para obtener el campo magnético producido por distribuciones de corriente con gran simetría, tales como un conductor largo y rectilíneo tanto si es filiforme como si es cilíndrico o un solenoide infinito. El campo magnético en el interior de un solenoide largo de vueltas apretadas, con n vueltas por unidad de longitud, y por el que circula una corriente I, viene dado por:

$$B = \mu_0 nI$$

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 24: Corrientes eléctricas, Cap. 26: El campo magnético*

[GETTYS, 1991] *Cap. 27: Fuentes del campo magnético.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 29: Fuentes del campo magnético.*

Tema 23.- INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

• Experiencias de inducción electromagnética

A principios de la década de 1830, Faraday en Inglaterra y Henry en Estados Unidos descubrieron independientemente que un campo magnético variable con el tiempo induce una corriente eléctrica en un conductor. Las fuerzas electromotrices y las corrientes causadas por los campos magnéticos variables se denominan fems inducidas y corrientes inducidas. Si se acerca o aleja una bobina a un conductor que transporta una corriente eléctrica, aparece una corriente inducida en la bobina. Lo mismo sucede si alejamos o acercamos la bobina a un imán, o si la bobina gira en un campo magnético fijo. Todos estos métodos de inducción magnética pueden resumirse mediante una simple expresión denominada ley de Faraday-Henry, que relaciona la fem inducida en un circuito con el cambio en el flujo magnético a través del circuito.

• Ley de Faraday-Henry y ley de Lenz

En una espira conductora se induce una corriente cuando varía el flujo del campo magnético que la atraviesa. La fuerza electromotriz inducida en una espira simple viene dada por la ley de Faraday-Henry:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

De acuerdo con la *ley de Lenz*, el sentido de la fem y la corriente inducidas es tal que se oponen al cambio de flujo que la produce.

• Fuerza electromotriz inducida por movimiento

Fuerza electromotriz de movimiento es toda fem inducida por el movimiento relativo de un campo magnético y un segmento de corriente. Cuando un circuito o una parte del mismo se mueve con velocidad v en un campo magnético se induce una fuerza electromotriz en dicho circuito. La fuerza electromotriz inducida en un circuito que posee un alambre deslizante es:

$$\varepsilon = Blv$$

Según la ley de Faraday-Henry, la fuerza electromotriz inducida en un *generador* de bobina rotante es:

$$\varepsilon = NBS\omega \operatorname{sen}\omega t$$

En un *alternador*, la fuerza electromotriz se induce en bobinas estáticas debido a un imán giratorio.

• Corrientes de Foucault

En los casos anteriores las corrientes producidas por un flujo variable se establecen en circuitos definidos. Sin embargo, frecuentemente un flujo variable estable unas corrientes circulantes, denominadas *corrientes de Foucault* o *turbillonarias*, en un trozo de metal como el núcleo de un transformador. el calor producido por estas corrientes por efecto Joule constituye una pérdida de potencia en el transformador. Estas corrientes no siempre son perjudiciales, por ejemplo se utilizan en los hornos de inducción.

• Autoinducción. Autoinducciones en serie y en paralelo

El flujo magnético que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el circuito mismo y el flujo magnético sobre el circuito debido a su propia corriente es proporcional a ésta:

$$\Phi_B = LI$$

El coeficiente de autoinducción, L, depende de la geometría del componente. En el SI L se mide en henrios:

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Tm}^{-2}\text{A}$$

La autoinducción de un solenoide de longitud l, sección S y con n espiras por unidad de longitud, es:

$$L = \mu_0 n^2 Sl$$

Cuando la corriente que circula por una autoinducción, como una bobina, varía, aparece una fuerza electromotriz autoinducida que viene dada por:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

• Circuitos RL

En un circuito RL formado por una resistencia R y una autoinducción L en serie con una batería de fuerza electromotriz ε_0, al cerrar el circuito la corriente no alcanza su valor máximo I instantáneamente, sino que tarda un cierto tiempo. Si la corriente es inicialmente cero, su valor al cabo de un cierto tiempo t viene dado por:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = I_0(1 - e^{-t/\tau_L})$$

donde:

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

es la constante de tiempo del circuito. Cuanto mayor es L o menor es R, más tiempo exige el establecimiento máximo de la corriente.

• Energía magnética y densidad de energía

Una autoinducción almacena energía magnética, del mismo modo que un condensador almacena energía eléctrica. La energía almacenada en una autoinducción L por la que circula una corriente I es:

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

Esta energía está almacenada en el campo magnético producido por la corriente. La densidad de energía de este campo magnético es:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

• Inducción mutua. El transformador

Cuando por dos bobinas próximas circulas corrientes variables, cada una de ellas induce una fuerza electromotriz sobre la otra:

$$\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{21} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

donde M es la inducción mutua del conjunto de las bobinas.

En un *transformador*, los voltajes y corrientes en las bobinas primaria y secundaria dependen del número de vueltas de cada una de ellas:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \qquad \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}$$

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 27: El campo electromagnético.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 28: La ley de Faraday, Cap. 29: Inducción magnética.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 30: Inducción electromagnética.*

Tema 24.- CAMPOS MAGNÉTICOS EN LA MATERIA

Hasta ahora se ha estudiado el magnetismo relacionándolo principalmente con las corrientes eléctricas: las corrientes eléctricas como fuentes de campos magnéticos, las fuerzas y momentos que ejercen los campos magnéticos sobre conductores que transportan corriente, las corrientes inducidas por flujos magnéticos variables con el tiempo. En muchos materiales las corrientes debidas a los movimientos de los electrones a escala atómica son la causa de sus propiedades magnéticas. El efecto de estas corrientes microscópicas en diferentes materiales da lugar a las diferentes interacciones, desde la casi inapreciable interacción de la madera con un imán a la fuerte atracción de las limaduras de hierro por el mismo imán. De esta forma, la descripción de los fenómenos magnéticos también se expresa en términos de corrientes.

• Corrientes atómicas, dipolos magnéticos y magnetización

Los electrones en órbita en los átomos pueden tratarse como pequeños dipolos magnéticos que tienen un momento magnético asociado con sus momento angular y su spin.
Según un modelo simple, un electrón que se mueve en una órbita alrededor de un núcleo tiene un momento magnético $\mathbf{m}_L$ proporcional a su momento angular **L**, dado por:

$$\mathbf{m}_L = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}$$

y también presenta una contribución $\mathbf{m}_S$ al momento magnético total **m** debida al momento angular de spin **S**, dada por:

$$\mathbf{m}_S = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S}$$

ya que $\mathbf{S} \approx 2\mathbf{L}$, y donde e y m_e son la carga y la masa del electrón, respectivamente.
Los átomos y las moléculas pueden o no tener un momento dipolar magnético neto, dependiendo de su simetría y de la orientación relativa de sus órbitas electrónicas. Los agregados de materia, con excepción de las sustancias *ferromagnéticas*, no poseen un momento magnético neto, debido a la orientación al azar de sus moléculas. Sin embargo, la presencia de un campo magnético externo distorsiona el movimiento electrónico, dando lugar a una polarización magnética o *magnetización* del material. Las sustancias se pueden agrupar en varios tipos, dependiendo de la forma en que son magnetizadas por un campo magnético externo. Se habla de diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo, así como de antiferromagnetismo y ferrimagnetismo.

• Vector magnetización, M

El *vector magnetización* **M** de un material es una magnitud vectorial definida como el momento dipolar magnético del material por unidad de volumen:

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{d\vec{\mathbf{m}}}{dV}$$

Cuando se aplica a una muestra un campo magnético, si **m** es el momento dipolar magnético inducido por átomo o molécula y n el número de átomos o moléculas por unidad de volumen, la magnetización es:

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}$$

La magnetización tiene dimensiones de corriente por unidad de longitud y en el S.I. se mide en A/m.

La corriente de magnetización efectiva por unidad de longitud, I_{mag}, sobre la superficie de un trozo de material magnetizado es igual a la componente del vector magnetización, M, paralela al plano tangente a la superficie del cuerpo, y tiene dirección perpendicular a **M**.

• Vector intensidad magnética, H (campo magnetizante)

El vector intensidad magnética o campo magnetizante **H** está dado por la relación:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

H se expresa en A/m. En un medio lineal con permeabilidad magnética μ está relación puede expresarse como:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \text{(medio lineal)}$$

El vector **H** depende sólo de las corrientes libres, siendo su valor independiente de las corrientes de magnetización. La *ley de Ampère* para el vector **H** se escribe:

$$\oint \mathbf{H}\ d\mathbf{l} = I_{libre}$$

• Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas

El vector **M** es proporcional al campo magnetizante **H**:

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}$$

χ_m es la *susceptibilidad magnética* del material. Teniendo esto en cuenta, se puede escribir:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

la cantidad:

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

es la permeabilidad relativa del medio y $\mu = \mu_r\mu_0$ es la *permeabilidad* del medio. En materiales diamagnéticos y paramagnéticos χ_m es muy pequeño (por ejemplo, -2.4×10^{-6} para el sodio o 2.3×10^{-5} para el aluminio), por lo que para estos materiales $\mu_r \approx 1$.

• Diamagnetismo

En los materiales *diamagnéticos* un campo magnético externo induce momentos dipolares magnéticos en las moléculas que lo componen. En este caso los vectores **M** y **B** tienen distinto sentido y $\chi_m < 0$.

• Paramagnetismo

En los materiales *paramagnéticos* el momento dipolar magnético permanente de los electrones desapareados tiende a alinearse con el campo magnético externo. En este caso los vectores **M** y **B** son paralelos y tienen el mismo sentido, siendo ahora $\chi_m > 0$. Los vectores **M** y **B** están relacionados por la *ley de Curie*:

$$\mathbf{M} = \frac{C\mathbf{B}}{\mu_0 T}$$

válida mientras el material no se encuentre a baja temperatura T o sometido a un campo magnético B intenso.

• Ferromagnetismo. Dominios magnéticos

En un material *ferromagnético* existe un gran número de regiones en las cuales los dipolos se encuentran alineados, pero la dirección de alineación es diferente para cada región. Estas regiones se llaman *dominios magnéticos*. Cuando los dominios magnéticos son orientados preferencialmente en una dirección, mediante la aplicación de un campo magnético externo, la muestra adquiere una intensa magnetización. La magnetización persiste una vez retirado el campo en materiales ferromagnéticos duros, dando lugar a imanes permanentes.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 26: El campo magnético.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 30: Campos magnéticos en la materia.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 29: Fuentes del campo magnético.*

Tema 25.- CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

• Generación de una corriente alterna sinusoidal. Fuerza electromotriz alterna

Un generador de corriente alterna es un dispositivo que transforma la energía mecánica en energía eléctrica. Para ello, se hace girar con velocidad angular ω una bobina conductora de *N* espiras, cada una de ellas con área *S*, en un campo magnético *B* y se genera una fuerza electromotriz instantánea:

$$\varepsilon=\varepsilon_0 \,\mathrm{sen}(\omega t+\phi) \qquad \varepsilon_0 = NSB\omega$$

Si *R* es la resistencia del circuito, la intensidad instantánea de la corriente será:

$$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon_0}{R}\mathrm{sen}(\omega t+\phi)=I_0\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$$

La frecuencia $\nu = \omega/2\pi$ de la corriente alterna utilizada en España es de 50 Hz.

• Valores eficaces y medios. Representación compleja

El valor medio de la fuerza electromotriz y de la intensidad alternas instantáneas se toma en un semiperíodo, $T/2$ ($T = 2\pi/\omega$), pues el valor medio de un seno o un coseno en un período es nulo. La *intensidad media* es:

$$I_{med}=\langle I\rangle=\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I\,dt=\frac{2}{\pi}I_0\approx 0.637 I_0$$

La *fuerza electromotriz media* es:

$$\varepsilon_{med}=\langle\varepsilon\rangle=\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2}\varepsilon\,dt=\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\approx 0.637\varepsilon_0$$

El *valor eficaz* de una magnitud sinusoidal es la raíz cuadrada del valor medio de su cuadrado. Ahora se puede tomar el valor medio del cuadrado en un período. La *intensidad eficaz* es:

$$I_e=\sqrt{\langle I^2\rangle}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2\,dt}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\approx 0.707 I_0$$

La *fuerza electromotriz eficaz* es:

$$\varepsilon_e=\sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2\,dt}=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\approx 0.707\varepsilon_0$$

Para la fuerza electromotriz instantánea se puede definir una *fuerza electromotriz compleja* como un número complejo que tiene como módulo el valor eficaz y argumento la fase inicial:

$$\varepsilon=\varepsilon_0\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi) \qquad \bar{\varepsilon}=\varepsilon_e\,|\underline{\phi}$$

La *intensidad compleja* se define:

$$I=I_0\,\mathrm{sen}(\omega t+\gamma) \qquad \bar{I}=I_e\,|\underline{\gamma}$$

• Circuitos resistivo puro, inductivo puro y capacitivo puro

Circuito resistivo puro: El voltaje y la intensidad están en fase.

$$\bar{V}=V_e\,|\underline{0^\circ} \qquad \bar{I}=I_e\,|\underline{0^\circ}$$

$$\bar{I}=\frac{\bar{V}}{R}=\frac{V_e}{R}\,|\underline{0^\circ} \qquad \bar{R}=R\,|\underline{0^\circ}$$

Circuito inductivo puro: El voltaje adelanta a la intensidad en 90°. Se define la *reactancia inductiva*, X_L, como el número complejo:

$$\bar{X}_L=X_L\,|\underline{90^\circ} \qquad X_L=\omega L$$

Se cumple:

$$\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{X}_L}=\frac{V_e\,|\underline{0^\circ}}{X_L\,|\underline{90^\circ}}=\frac{V_e}{X_L}\,|\underline{-90^\circ} \qquad \bar{I}=I_e\,|\underline{-90^\circ}$$

Circuito capacitivo puro: El voltaje se retrasa respecto a la intensidad en 90°. Se define la *reactancia capacitiva*, X_C, como el número complejo:

$$\bar{X}_C=X_C\,|\underline{-90^\circ} \qquad X_C=\frac{1}{\omega C}$$

Se cumple:

$$\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{X}_C}=\frac{V_e\,|\underline{0^\circ}}{X_C\,|\underline{-90^\circ}}=\frac{V_e}{X_C}\,|\underline{90^\circ} \qquad \bar{I}=I_e\,|\underline{90^\circ}$$

• Circuito RLC serie. Impedancia. Resonancia

En un circuito *RLC* serie, la *impedancia* compleja es el número complejo:

$$\bar{Z}=Z\,|\underline{\phi}$$

donde:

$$\bar{Z}=\bar{R}+\bar{X}_L+\bar{X}_C=\bar{R}+\bar{X}$$

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$tg\phi=\frac{X}{R}=\frac{X_L-X_C}{R}$$

Si la tensión es:

$$V=V_0\,\mathrm{sen}\omega t \qquad \bar{V}=V_e\,|\underline{0^\circ}$$

la intensidad compleja vale:

$$\bar{I}=\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}=\frac{V_e\,|\underline{0^\circ}}{Z\,|\underline{\phi}}=\frac{V_e}{Z}\,|\underline{-\phi} \qquad \bar{I}=I_e\,|\underline{-\phi}$$

luego:

$$I=I_0\,\mathrm{sen}(\omega t-\phi)$$

En un circuito *RLC* serie la corriente es máxima cuando se hace mínima la impedancia y esto se consigue si se anula la reactancia *X*, es decir:

$$X=0 \qquad X_L=X_C \qquad \omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z=R$$

En este caso se dice que el circuito está en *resonancia.*

• Potencia en circuitos de corriente alterna. Factor de potencia

La *potencia instantánea* es el producto de el voltaje y la intensidad instantáneas:

$$P_i=VI$$

La *potencia media* vale:

$$P=\langle P\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T P\,dt=V_eI_e\cos\phi$$

V_eI_e se conoce como *potencia aparente*, P_a, y $\cos\phi$ es el *factor de potencia*:

$$\cos\phi=\frac{R}{Z}$$

La *potencia compleja* se define como:

$$\bar{S}=\bar{V}\,\bar{I}^*=V_eI_e\,|\underline{\phi}=P+jQ \qquad S=P_a$$

- Potencia activa (se expresa en W):

$$P=V_eI_e\cos\phi$$

- Potencia reactiva (en VAR, voltios-amperios-reactivos):

$$Q=V_eI_e\,\mathrm{sen}\phi$$

• Resolución de circuitos de corriente alterna

Los mismos métodos de resolución de circuitos de corriente continua se aplican a los circuitos de corriente alterna.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[LLINARES, 1988] *Cap. 23: Corriente alterna.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 31: Oscilaciones electromagnéticas y circuitos de corriente alterna.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 31: Circuitos de corriente alterna.*

Tema 26.- NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ

• Ondas electromagnéticas

Las ecuaciones de Maxwell muestran que para una onda electromagnética plana en el vacío los campos **E** y **B**:
(i) son perpendiculares a la dirección de propagación, la cual coincide con la dirección del producto vectorial **E** x **B**,
(ii) son perpendiculares entre sí,
(iii) cumplen las ecuaciones de onda con una velocidad de propagación en el vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

(iv) están en fase y tienen la misma velocidad y frecuencia, y
(v) tienen amplitudes relacionadas por:

$$E_0 = cB_0 \qquad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Las ecuaciones de una onda e.m. plana-polarizada que se propaga en la dirección del eje $+x$ son:

$$E_y = E_0\cos(\omega t - kx) \quad \text{y} \quad B_z = B_0\cos(\omega t - kx)$$

donde $c = \omega/k$, y el plano xy es el plano de polarización. Los valores instantáneos de E y B están relacionados por:

$$E = cB \qquad B = E/c$$

Las frecuencias (o las longitudes de onda) de las ondas e.m. abarcan varios órdenes de magnitud. La luz visible corresponde sólo a una pequeña parte del *espectro electromagnético*:
(1) *Ondas de radiofrecuencia:* Varios km hasta 0.3 m
(2) *Microondas:* Desde 0.3 m hasta 10^{-3} m
(3) *Espectro infrarrojo:* Desde 10^{-3} m hasta 7.8×10^{-7} m
(4) *Luz o espectro visible:* Desde 780 nm hasta 380 nm
(5) *Rayos ultravioleta:* Desde 3.8×10^{-7} m hasta 6×10^{-10} m
(6) *Rayos X:* Desde $\sim 10^{-9}$ m hasta 6×10^{-12} m
(7) *Rayos gamma* (γ)*:* Desde $\sim 10^{-10}$ m hasta $\sim 10^{-14}$ m

• Velocidad de la luz. Índice de refracción

La velocidad de la luz en el vacío es exactamente:

$$c = 299\ 792\ 457 \text{ m/s}$$

La velocidad de la luz v en un medio es:

$$v = \frac{c}{n}$$

donde n es el índice de refracción del medio (se tiene que para el vacío $n = 1$ y para los demás medios $n > 1$).

• Propagación de la luz. Principio de Huygens

Según el principio de Huygens, cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de pequeñas ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a la de la onda primaria. el frente de onda primario al cabo de cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales.

• Reflexión y refracción

Cuando la luz incide sobre la superficie de separación de dos medios de distintos índices de refracción (velocidades de la luz diferentes) parte de la energía luminosa se transmite y parte se refleja. En relación a la reflexión de la luz se satisface la *ley de la reflexión* según la cual el rayo reflejado, el rayo incidente y la normal a la superficie de separación están en un mismo plano denominado plano de incidencia, y el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal (ángulo reflejado) es igual al ángulo que forma el rayo incidente con la normal (ángulo de incidencia). En incidencia normal la reflectancia R de la superficie que separa dos medios de índices n_1 y n_2, es decir, la relación entre las intensidades incidente I_i y reflejada I_r es:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

La ley de le refracción (ley de Snell) relaciona el ángulo de incidencia θ_1 y el ángulo de refracción θ_2 cuando la luz pasa de un medio de índice n_1 a un medio de índice n_2 mediante:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

• Reflexión total y dispersión de la luz

Cuando la luz que se está propagando en un medio con un índice de refracción n_1 incide sobre la superficie de separación de un segundo medio con menor índice de refracción $n_2 < n_1$, la luz se refleja totalmente si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico θ_c dado por:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Este fenómeno se conoce como *reflexión total*.
Tanto la velocidad de la luz en un medio como su índice de refracción depende de la longitud de onda de la luz. Éste fenómeno se conoce como *dispersión de la luz* y a causa del mismo un haz de luz blanca que incide sobre un prisma se dispersa en sus colores componentes. Análogamente, la reflexión y la refracción de la luz solar en las gotas de agua de la lluvia producen el arco iris.

• Polarización de la luz. Ley de Malus

La ondas transversales pueden polarizarse. Los cuatro fenómenos que producen ondas electromagnéticas polarizadas son: (1) absorción, (2) dispersión o “scattering”, (3) reflexión y (4) birrefringencia.
La luz puede polarizarse cuando se hace pasar a través de un *polarizador* (lineal), que transmite selectivamente luz que tiene su plano de polarización paralelo el *eje de transmisión del polarizador* (polarización por absorción). La luz que tiene su plano de polarización perpendicular al eje de transmisión queda bloqueada. Si un haz de luz no polarizada (*luz natural*) incide sobre un polarizador, pasa la mitad de la intensidad.
Ley de Malus: Si la luz polarizada mediante un polarizador pasa a través de un segundo polarizador, denominado *analizador*, y los ejes de transmisión del polarizador y el analizador forman un ángulo θ, se cumple:

$$I = I_0 \cos^2\theta$$

• Interferencia y difracción de la luz

El experimento de la doble rendija de Young demuestra la naturaleza ondulatoria de la luz, debido a que el diagrama que aparece en la pantalla puede explicarse en términos de la *interferencia* entre ondas.
Cuando la luz se refleja en láminas transparentes delgadas pueden observarse fácilmente efectos interferenciales.
Se produce *difracción* siempre que una porción de un frente de onda se encuentra limitada por un obstáculo o abertura. La intensidad de la luz en un punto cualquiera del espacio puede calcularse mediante el empleo del principio de Huygens, considerando que cada punto del frente de onda es una fuente o foco puntual y calculando el diagrama de interferencia resultante. En la *difracción de Fraunhofer* las distancia entre el foco luminoso y el obstáculo y la pantalla son muy grandes, de modo que las ondas pueden considerarse planas. Sin embargo, en la *difracción de Fresnel* las ondas no son necesariamente planas.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 29: Ondas electromagnéticas.*
[GETTYS, 1991] *Cap. 26: Las ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas.*
[TIPLER, 1999] *Cap. 33: Propiedades de la luz, Cap. 35: Interferencia y difracción.*

Tema 27.- ÓPTICA GEOMÉTRICA

Cuando las dimensiones de los sistemas son muy superiores a la longitud de onda de la luz utilizada pueden despreciarse los efectos de la difracción y utilizar un modelo de rayos para la propagación de la luz.

• Principios de la Óptica Geométrica

La luz se propaga en forma de rayos. Un medio óptico se caracteriza por el índice de refracción *n:*

$$n = \frac{c}{v}$$

Como $c \geq v$ (para el vacío $c = v$), se tiene $n \geq 1$.

Propagación de la luz en un medio homogéneo: En estos medios las trayectorias de la luz son rectilíneas.

Reflexión de la luz en un espejo: El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:

$$\theta' = \theta$$

Refracción de la luz en una superficie: El ángulo refractado θ_2 y el incidente θ_1 están relacionados mediante la *Ley de Snell:*

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Convenio de signos:

-Para las distancias en el eje *z* a lo largo de cualquier rayo se toma como sentido positivo el de la luz incidente, que siempre será de izquierda a derecha mientras no se advierta lo contrario. Estas distancias a lo largo del eje se toman con origen en el vértice *S* de la superficie del elemento óptico.

-El radio de curvatura *R* es positivo si el centro de curvatura de la superficie está a la derecha de *S* (el origen de *R* está en *S*).

-Los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.

-Los ángulos de incidencia y refracción de un rayo serán positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto, se va en el sentido de las agujas del reloj.

-Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir por giro con el eje se va en el sentido contrario a las agujas del reloj.

• Reflexión en superficies planas y esféricas

Rayos paraxiales reflejados por un espejo esférico: Los rayos que inciden con pequeños ángulos θ reciben el nombre de *rayos paraxiales*.

Las distancias objeto z_1 e imagen z_2 para un espejo esférico en la aproximación paraxial están relacionadas por:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}$$

donde $f = R/2$ es la focal del espejo. Si por la imagen pasan rayos de luz, ésta se denomina *imagen real*. Si la imagen se forma con las prolongaciones en sentido opuesto de los rayos de luz, se la denomina *imagen virtual*. El *aumento lateral* de un sistema óptico es el cociente entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto, $m = y_2/y_1$; para un espejo esférico:

$$m = -\frac{z_2}{z_1}$$

• Trazado de rayos para espejos

En el caso de los espejos esféricos en la aproximación paraxial es posible obtener gráficamente la posición y tamaño de la imagen. Para ello basta con utilizar dos de los siguientes rayos:

(i) Un rayo paralelo al eje que pase por el extremo superior del objeto, tras reflejarse en el espejo pasará por el foco.

(ii) Un rayo que pase por el centro del espejo, tras reflejarse en éste, regresa por el mismo camino.

(iii) Un rayo que pase por el extremo superior del objeto y pase o se dirija hacia el foco del espejo, tras reflejarse en éste, volverá paralelo al eje.

• Refracción en una superficie esférica

Un *dioptrio esférico* es una superficie esférica de radio *R* que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2. La distancias objeto z_1 e imagen z_2 para un dioptrio esférico en la aproximación paraxial están relacionadas por:

$$-\frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2}{z_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

y el aumento lateral *m* es:

$$m = \frac{n_1 z_2}{n_2 z_1}$$

• Lentes delgadas

Una *lente esférica* está limitada por dos superficies esféricas de radios R_1 y R_2 cuyo espesor es *d* y el índice de refracción de la misma es *n*. Una lente es delgada si su espesor *d* es despreciable frente a cada uno de sus radios de curvatura. La distancias objeto z_1 e imagen z_2 para una *lente delgada en aire* en la aproximación paraxial están relacionadas por:

$$-\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f'}$$

donde *f'* es la *focal imagen de la lente*:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

y el aumento lateral dado por la ecuación:

$$m = \frac{z_2}{z_1}$$

Si $f' > 0$ la lente se dice que es *convergente.*
Si $f' < 0$, la lente es *divergente.*

• Trazado de rayos para lentes delgadas

Para una lente delgada en la aproximación paraxial es posible obtener gráficamente la posición y tamaño de la imagen. Para ello basta con utilizar dos de los siguientes rayos:

(i) Un rayo paralelo al eje que pase por el extremo superior del objeto, emergerá de la lente y pasará por el foco imagen.

(ii) Un rayo que pase por el centro de la lente no se desvía.

(iii) Un rayo que pase por el extremo superior del objeto y pase o se dirija hacia el foco objeto del espejo, emergerá paralelo al eje.

• Instrumentos ópticos

La *lupa* es una lente simple con distancia focal imagen positiva cuyo valor es menor que la distancia del punto próximo del ojo, cuyo valor medio típico es de 25 cm.

El *microscopio compuesto* está formado por dos lentes: un objetivo y un ocular. El objeto a examinar se coloca ligeramente más allá del foco del objetivo, que forma así una imagen aumentada del objeto en el punto focal del ocular. Éste actúa como una lupa simple para observar la imagen final.

En un *anteojo* o *telescopio*, el objetivo forma una imagen real que es mucho menor que el objeto pero que está mucho más cercana. entonces se utiliza el ocular como una lupa simple para ver la imagen. Un telescopio reflector utiliza un espejo como objetivo.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[ALONSO, 1995] *Cap. 33: Geometría de las ondas.*

[GETTYS, 1991] *Cap. 35: Óptica geométrica.*

[TIPLER, 1999] *Cap. 34: Imágenes ópticas.*

Tema 28.- FOTOMETRÍA

La *Fotometría* es la parte de la Óptica que se ocupa del estudio de las características de los focos luminosos, así como de las iluminaciones que producen. Todos los focos luminosos emiten energía, y en la mayor parte de los casos lo son a causa de su elevada temperatura, gracias a la cual tiene lugar en ellos una emisión térmica de energía cuya longitud de onda corresponde precisamente a la zona visible del espectro.

• Flujo energético y flujo luminoso

Un foco luminoso da lugar a un *flujo energético* que representa la energía que pasa por segundo a través de la superficie cerrada que lo contiene. Su potencia se expresa en vatios. En la medida del flujo energético se utilizan órganos sensibles a la energía radiante y, en general, la sensibilidad de los receptores está limitada a cierta región del espectro.

Dos focos luminosos que emiten el mismo flujo energético, Φ, generalmente no producen la misma sensación luminosa, porque la sensibilidad del ojo varía con la longitud de onda de la radiación, siendo nula para todas las longitudes de onda fuera de los límites del espectro visible (~380-740 nm).

Cada valor del *rendimiento luminoso* V_λ se obtiene como el cociente entre el flujo energético para una longitud de onda λ y el flujo energético para la longitud de onda de 555 nm, de modo que ambos flujos energéticos produzcan en el ojo humano igual sensación de claridad.

Un determinado *flujo luminoso* puede ser producido por distintos flujos energéticos. El flujo luminoso se mide en lúmenes (lm). Para la radiación de λ = 555 nm un flujo energético de 1 W produce una luminosidad o sensación de claridad equivalente a un flujo de 680 lm:

$$1\text{lm}(\,de\ 555\ nm) = \frac{1}{680}\ \text{W}$$

número que se denomina *equivalente mecánico del lumen* para la mencionada radiación. Una fuente que emite un flujo energético de 1 W de luz de 555 nm tiene un flujo luminoso de 680 lm. Con esta definición una cierta cantidad de lúmenes de cualquier color producirá la misma sensación de claridad al ojo. El flujo luminoso total se obtiene mediante:

$$F = \int_0^\infty 680 V_\lambda\, f(\lambda)\, d\lambda$$

donde para el ojo realmente los límites de integración quedan reducidos al intervalo 380-740 nm.

• Intensidad luminosa de un foco puntual

Para un foco O cuyas dimensiones son lo suficientemente pequeñas para poder considerarlo puntual, se define la intensidad I del foco O en una dirección OO', como el flujo luminoso emitido por unidad de ángulo sólido Ω:

$$I = \frac{dF}{d\Omega}$$

En el SI su unidad es la *candela* (cd) que es la intensidad luminosa en la dirección perpendicular de una superficie de 1/600000 m^2 de un cuerpo negro a la temperatura de fusión del platino bajo la presión de 1.013 x 10^5 Nm^{-2}. La unidad de flujo luminoso (lumen, lm), es el flujo emitido por un foco puntual de 1 cd en un ángulo sólido de 1sr:

$$1\ \text{lm} = 1\ \text{cd} \times 1\ \text{sr}$$

• Iluminancia y primera ley de Lambert

La *iluminancia* E es el concepto fotométrico más importante desde el punto de vista práctico, pues representa el flujo luminoso recibido por unidad de superficie:

$$E = \frac{dF}{dS}$$

La unidad es el *lux* o lumen por metro cuadrado (1 lux = 1 lm/m^2). Si el foco que produce la iluminación puede considerarse puntual existe una relación sencilla entre la iluminación que origina y la intensidad de dicho foco. En efecto, el flujo luminoso dF recibido por la superficie elemental dS, situada a la distancia r del foco puntual O, es:

$$dF = I\, d\Omega$$

siendo $d\Omega$ el ángulo sólido elemental bajo el cual se ve, desde O, la superficie dS. Se tiene:

$$dF = \frac{I\, dS \cos\theta}{r^2} \quad \text{y por tanto} \quad E = \frac{dF}{dS} = \frac{I\cos\theta}{r^2}$$

Expresión que se conoce como *ley inverso del cuadrado de la distancia* o *"1ª Ley de Lambert"*.

• Focos luminosos extensos. Luminancia y segunda ley de Lambert

La mayor parte de los focos no pueden considerarse puntuales, salvo cuando los observamos a distancias muy grandes y, en general, los focos luminosos son de cierta extensión, tanto si tienen intensidad propia como si actúan difundiendo la luz que reciben de otro foco. Para un pequeño elemento de superficie S perteneciente a un foco extenso π, sea dF la parte del flujo emitido por S en la dirección OO' dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, la intensidad en dicha dirección es:

$$I_\theta = \frac{dF}{d\Omega}$$

Recibe el nombre de *luminancia* de dicha superficie, observada en la dirección OO', el cociente entre la intensidad I_θ y la proyección de la superficie S normalmente a dicha dirección:

$$B_\theta = \frac{I_\theta}{S\cos\theta}$$

Es un hecho experimental que una esfera incandescente, como el Sol, aparece con luminancia uniforme, independientemente del punto observado, luego para los difusores o emisores perfectos se cumple siempre que $B_\theta = B_0$, siendo B_0 la luminancia en dirección normal a la superficie. Como $B_0 = I_0/S$, resulta:

$$I_\theta = I_0 \cos\theta$$

que se conoce como *ley del coseno* o *2ª Ley de Lambert*. La unidad SI de luminancia es el nit:

$$1\ \text{nit} = 1\ \text{cd/m}^2$$

Las superficies que reflejan luz de manera difusa y uniformemente en todas las direcciones se denominan reflectores lambertianos y su luminancia no depende del punto de la fuente, ni de la dirección de propagación de la luz.

La luminancia de los focos es la causa que provoca el deslumbramiento cuando tiene valores elevados. De ahí la sensación desagradable que producen los focos intensos de poca superficie y, por el contrario, lo grata que resulta a la vista una iluminación idéntica producida por un foco extenso. El flujo luminoso correspondiente a una fuente lambertiana verifica la ecuación:

$$F_\theta = F_0 \cos\theta$$

y para la iluminancia se cumple:

$$E_\theta = E_0 \cos\theta$$

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[BURBANO, 1993] *Cap. 47: Dispersión de la luz, radiación térmica, fotometría y colorimetría.*

[CATALÁ, 1988] *Cap. 45: Fotometría y teoría física del color.*

[ALONSO, 1995]: ALONSO, M. y FINN, E. J. "Física" (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington 1995).

[CATALÁ, 1988]: CATALÁ, J., "Física" (Saber, Valencia 1988).

[BURBANO, 1993]: BURBANO, S., BURBANO, E. y GRACIA, C., "Física General" (Mira Editores, Zaragoza 1993).

[GETTYS, 1991]: GETTYS, W. E., KELLER, F. J. y SKOVE, M. J., "Física Clásica y Moderna" (McGraw-Hill, Madrid 1991).

[TIPLER, 1999]: TIPLER, P. A., "Física para la Ciencia y la Tecnología (dos volúmenes)" (Reverté, Barcelona 1999).