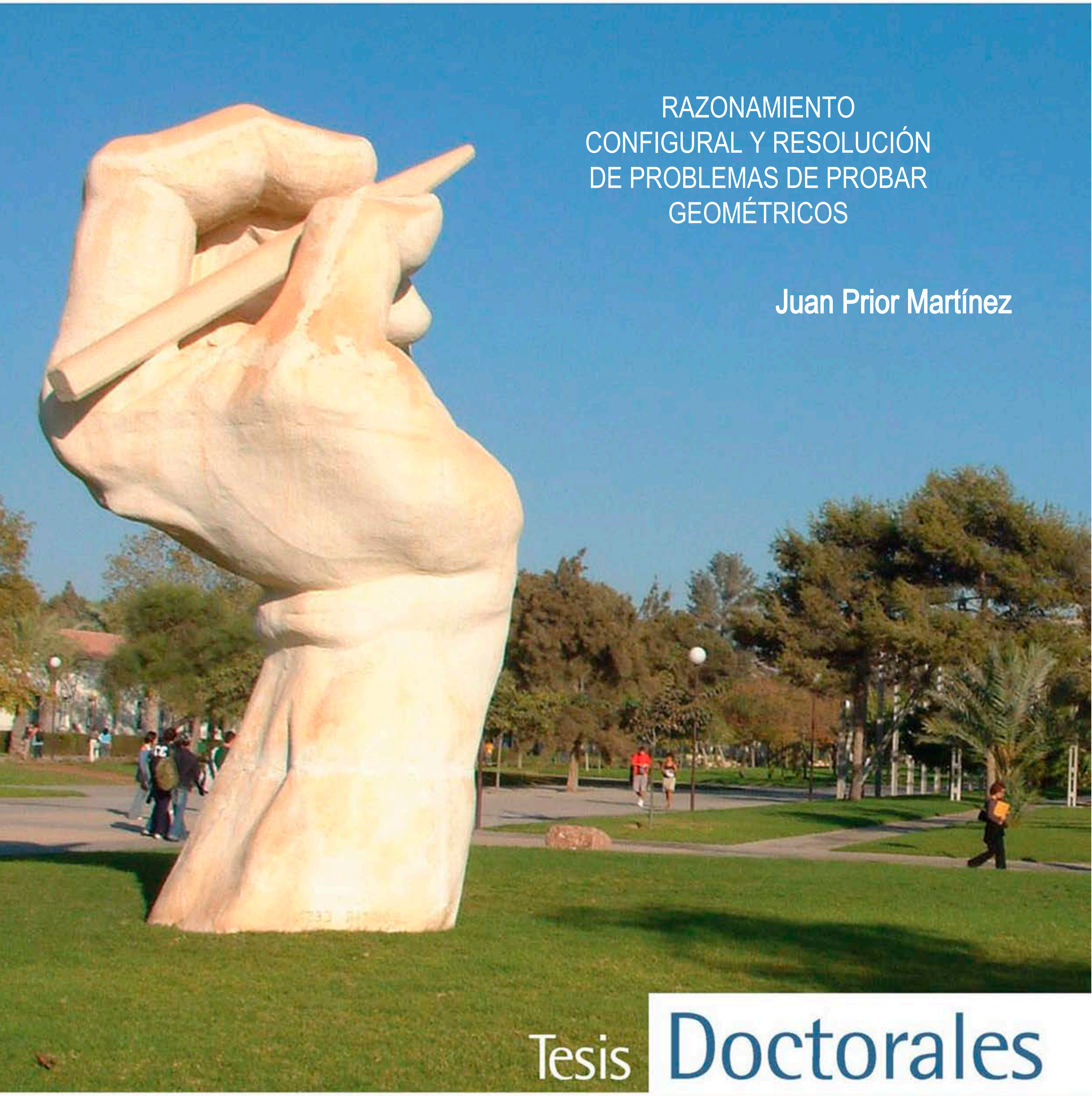
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

RAZONAMIENTO CONFIGURAL Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBAR GEOMÉTRICOS

Juan Prior Martínez



Tesis Doctorales
UNIVERSIDAD de ALICANTE

Unitat de Digitalització UA
Unidad de Digitalización UA

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA
FACULTAD DE EDUCACIÓN

RAZONAMIENTO CONFIGURAL Y CONTEXTO MATEMÁTICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBAR GEOMÉTRICOS

JUAN PRIOR MARTÍNEZ

Tesis presentada para aspirar al grado de
DOCTOR POR LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Dirigida por:
Dr. GERMÁN TORREGROSA GIRONÉS

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi gratitud al director de esta tesis, Dr. Don Germán Torregrosa Gironés, por la dirección y rigor académico a lo largo de la elaboración de este trabajo y, especialmente, por su paciencia y aliento en los momentos de flaqueza.

Asimismo, agradezco al Dr. Salvador Llinares Ciscar sus valiosos comentarios durante la realización de esta memoria que han contribuido significativamente a su mejora.

Un trabajo de investigación es fruto de ideas y esfuerzos previos, por lo que quiero también mostrar mi agradecimiento a los compañeros del Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática del departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante. En particular, a los miembros que han colaborado en el desarrollo de la investigación sobre Didáctica de la Geometría.

Pero un trabajo de investigación es también el fruto del apoyo personal que nos ofrecen las personas de nuestro entorno más cercano, sin el que no habría sido posible encontrar la motivación y energía necesarias para completar esta tarea. Gracias a mi esposa, cuya dedicación y apoyo ha sido imprescindible en cada una de las etapas de esta aventura; a mis hijos, que dan sentido a cada uno de mis proyectos; y gracias a mis padres y hermana, todo lo bueno que pueda haber en mí es debido a su esfuerzo, sacrificio y amor incondicional.

Muchas gracias a todos.

A Mari Carmen

ÍNDICE

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La geometría ilumina el intelecto y templa la mente.

(Ibn Jaldún, siglo XIV)

INTRODUCCIÓN

La demostración matemática, la manera en la que los estudiantes construyen demostraciones en diferentes contextos, y los factores que influyen en los procesos de justificación han centrado la atención de los investigadores en Didáctica de la Matemática desde hace décadas. Actualmente, existe un acuerdo generalizado entre los educadores sobre la importancia de la prueba en el aprendizaje de las matemáticas. Esto ha permitido el desarrollo de agendas de investigación centradas en la prueba matemática y en los procesos cognitivos que ponen de manifiesto los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos de probar.

Nuestra investigación centra su atención en la relación entre los procesos visuales y analíticos involucrados en la justificación de propiedades geométricas en estudiantes de secundaria, incidiendo en la construcción de una interacción sólida entre estos dos componentes con el fin de lograr un aprendizaje significativo.

¿Qué es demostrar? ¿Cómo se demuestra una afirmación matemática? ¿Qué características debe poseer un argumento para ser reconocido como una demostración válida? ¿En qué difieren los procesos de justificación de los matemáticos y de los escolares? ¿Qué diferencia a la prueba en Matemáticas de un argumento en otro ámbito? En estas preguntas se apoyan una gran cantidad de las recientes investigaciones sobre los procesos de prueba y argumentación. Sin embargo, hay necesidad de investigaciones que tengan como objetivo identificar elementos críticos del conocimiento de la noción de prueba que sean extraídos de intentos reales de construcción de pruebas por parte de estudiantes. Uno de estos elementos, descrito en numerosos estudios, es el denominado razonamiento configural, que implica la coordinación de procesos de visualización.

El objetivo de esta investigación es estudiar el razonamiento configural de estudiantes de secundaria que prueban afirmaciones matemáticas en contexto geométrico y su interacción con los procedimientos de validación que utilizan y los tipos de prueba que construyen para caracterizar su espacio de trabajo geométrico personal.

La tesis doctoral que presentamos consta de cinco capítulos.

En el primer capítulo se sitúa la investigación, realizando una revisión de la literatura científica en la que nos hemos basado y que justifica este estudio. Repasamos las contribuciones más significativas sobre la prueba matemática y su naturaleza, prestando especial atención a los estudios sobre los procesos cognitivos de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de probar un enunciado y al contexto en que tiene lugar la actividad geométrica.

En el segundo capítulo desarrollamos el marco teórico adoptado en esta investigación. Analizamos la propuesta teórica de Duval sobre procedimientos de visualización en la actividad geométrica que da lugar al modelo de razonamiento configural introducido por Torregrosa, Quesada y Penalva; precisamos la noción de procedimiento de validación y describimos sus tipos; analizamos las características de los procesos discursivos en el contexto de la prueba; y utilizamos el marco teórico de los Paradigmas Geométricos y el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) desarrollado por Houdement y Kuzniak, que toma en cuenta la naturaleza del trabajo geométrico cuando un resolutor se enfrenta a un problema en geometría. Al final del capítulo describimos los objetivos que se plantean en la investigación.

El tercer capítulo se dedica al diseño de la investigación. En este apartado indicamos los participantes en el estudio, los instrumentos de recogida de datos: un cuestionario de problemas de probar geométricos y entrevistas semiestructuradas a los participantes; y describimos el proceso de análisis realizado a partir de las respuestas de los estudiantes de secundaria a los problemas.

En el cuarto capítulo presentamos los resultados obtenidos y su interpretación desde el marco teórico adoptado. En primer lugar, refinamos el modelo de razonamiento configural con algunos desenlaces no observados en los estudios con alumnos universitarios. En segundo lugar, describimos el modo en que los estudiantes utilizan los procedimientos de validación en sus respuestas a los problemas de probar. En tercer lugar, encontramos una relación biunívoca entre el desenlace del razonamiento configural y el tipo de prueba en respuesta a los problemas del cuestionario. En cuarto lugar, identificamos seis perfiles diferentes en función de las características del espacio de trabajo geométrico personal de los participantes a partir de cuatro dimensiones: desenlaces del razonamiento configural, procedimientos de validación, tipos de discurso y rol desempeñado por la configuración inicial. En último lugar, analizamos posibles relaciones entre los distintos ETG descritos y el curso académico al que pertenecen los participantes.

En el quinto y último capítulo de esta investigación, se exponen las conclusiones y se discuten los resultados obtenidos. Se subraya el potencial del modelo de razonamiento configural para inferir características del espacio de trabajo geométrico de los estudiantes. Asimismo, se reflexiona sobre las limitaciones del estudio y las implicaciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El razonamiento del estudiante es un asunto de máxima relevancia en cualquier ámbito relacionado con la educación: psicológico, pedagógico, filosófico o didáctico. El razonamiento, al igual que otros conceptos como la inteligencia, es difícil de definir con precisión debido a su complejidad. La RAE proporciona las siguientes acepciones para el término ‘razonar’:

- Exponer razones para explicar o demostrar algo.
- Ordenar y relacionar ideas para llegar a una conclusión.
- Exponer razones o argumentos.

En definitiva, razonar implica una cierta actividad mental con el propósito de alcanzar una conclusión, persuadir a otros, explicar una situación o resolver un problema. De acuerdo a la actividad mental y a su propósito es posible diferenciar varios tipos de razonamiento, de manera que hablamos de razonamiento lógico, inductivo, deductivo, abductivo, argumentativo, abstracto, verbal, etc. Pero esta clasificación no es única, también realizamos distinciones en función del área de conocimiento en el que el razonamiento tiene lugar. Así, por ejemplo, hablamos de razonamiento en el marco de una actividad científica o en el ámbito matemático. Por ejemplo, en sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (2003), la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) incluye el estándar curricular de Razonamiento y Demostración, concretamente entre los estándares de procesos, aquellos que presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento y que deben ser desarrollados a lo largo de toda la vida escolar. Además, se sugiere que los programas de enseñanza en todos los niveles, desde educación infantil hasta educación secundaria, deberían capacitar a los estudiantes para:

- reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas;
- formular e investigar conjeturas matemáticas;
- desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones;
- elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

Tal y como señalan Stylianides et al. (2016), actualmente existe un acuerdo generalizado entre los educadores de matemáticas sobre la importancia de la prueba en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, con un número de documentos de política educativa o marcos curriculares en diferentes países pidiendo un lugar importante para la prueba en las experiencias matemáticas de todos los estudiantes y desde la escuela primaria (ver, por ejemplo, los Estándares Estatales Básicos Comunes de EE. UU. para Matemáticas Escolares (CCSSI, 2010) y el más reciente National Mathematics Plan de estudios en Inglaterra (Departamento de Educación, 2013). En la misma línea, Ball et al. (2002) consideran que es necesario desarrollar una cultura de la justificación en las clases de matemáticas a lo largo de toda la etapa educativa.

Las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento del estudiante son numerosas y los marcos teóricos desde donde se aborda, variados. En los años cuarenta del pasado siglo XX, Piaget se interesó por el estudio del razonamiento matemático. El impacto de sus teorías sobre la enseñanza de las matemáticas y las ciencias fue enorme (Pulaski, 1975). En los años noventa aparece una corriente de psicología evolutiva cognitiva que combina las ideas de Piaget y Vigotsky, a partir de los trabajos de Flavell y Bruner, con las de la teoría del procesamiento de la información, que compara la mente humana con un ordenador, con la intención de elaborar modelos que expliquen el funcionamiento de los procesos cognitivos (Montañés y Latorre, 1991). Se inició así el estudio del desarrollo cognitivo en diferentes frentes, uno de los cuales hace referencia a los avances metodológicos en la investigación del desarrollo de estrategias y procesos cognitivos. Dentro de este campo se incluyen los estudios sobre el razonamiento matemático (Rodrigo, 1985).

Sin embargo, aunque durante la última década el campo de la didáctica de la Matemática ha ganado más conocimiento sobre la naturaleza de la argumentación y la prueba en el aula de matemáticas, los hallazgos de PME y otros informes relevantes muestran que la experiencia escolar típica de los estudiantes y el tratamiento de la argumentación y pruebas en los libros de texto (Stylianides, 2014) continúan siendo insuficientes para lograr la intención de los documentos de política educativa o los marcos curriculares.

En relación al contexto matemático en el que desarrollar el razonamiento de los estudiantes, los documentos curriculares vigentes en España establecen que la resolución de problemas geométricos es un objetivo de aprendizaje prioritario para los estudiantes de educación secundaria, siendo una actividad cognitiva fundamental para la práctica educativa (LOMCE, 2015). A su vez, el NCTM (2000, 2010) señala que la geometría constituye un terreno fértil para el desarrollo de las habilidades para generar razonamiento y justificación.

Nuestro trabajo de investigación se enmarca en el grupo de investigaciones didácticas sobre el razonamiento, siendo la Geometría el dominio matemático que sirve de contexto. En este ámbito prestamos especial atención a las producciones discursivas de los estudiantes y a los procesos cognitivos que realizan cuando se enfrentan a tareas de probar un enunciado. El estudio se centra en proporcionar información sobre el conocimiento de los procesos de justificación de propiedades geométricas de los estudiantes de últimos cursos de educación secundaria obligatoria que resuelven problemas geométricos de probar en contexto geométrico.

Este primer capítulo se organiza en cuatro secciones. La primera sección ofrece una revisión de las investigaciones sobre la prueba matemática. En la segunda sección, describimos la visualización en la actividad geométrica y su relación con la prueba matemática. En la tercera sección, analizamos la demostración y los tipos de pruebas descritos en la literatura científica en las investigaciones realizadas con estudiantes de secundaria. En la cuarta y última sección, mostramos la relación entre los procesos de justificación y el contexto institucional en el que se produce la actividad matemática.

1.1 Perspectivas de las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la prueba matemática

El interés por la enseñanza y el aprendizaje de la prueba matemática en contexto geométrico se debe a razones de distinta naturaleza. Por un lado, históricas, Tales de Mileto (624 a.C.- 547 a.C. aproximadamente) aportó las primeras demostraciones de problemas geométricos sin utilidad práctica, lo que supuso el punto de partida en la transformación de la matemática experimental en la matemática como ciencia deductiva. Euclides (300 a.C.), en sus Elementos, recopila el saber matemático de la época en un sistema axiomático, dando lugar a la Geometría euclidiana. Elementos es el principio de la matemática como una asignatura analítica y deductiva; con él las Matemáticas pasaron de tratar con ejemplos a buscar verdades universales. Por otro lado, razones cognitivas, la importancia de la geometría elemental para descubrir lo que es la demostración matemática se debe al hecho de que moviliza dos registros multifuncionales: el uso del lenguaje natural y el de las configuraciones gestálticas (Duval, 2016b).

El aprendizaje y la enseñanza de la demostración matemática en contexto geométrico es un problema clásico dentro de la relativamente reciente área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas. La literatura acerca de la prueba matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje es muy amplia. No es de extrañar, ya que como afirma Duval (2007, p.137): "la prueba constituye un umbral crucial en el aprendizaje de las matemáticas".

Las investigaciones han examinado los esquemas de prueba de los estudiantes (Harel y Sowder, 1998; Housman y Porter, 2003), la habilidad de los estudiantes para validar un texto como una prueba (Stylianides et al., 2004), las dificultades de los estudiantes para producir pruebas (Moore, 1994; Weber, 2001), la comprensión de los estudiantes sobre la estructura de la prueba deductiva (Miyazaki et al., 2017) o la importancia de la tecnología en el aprendizaje de la prueba en contexto geométrico (Zengin, 2017). Tanto es así, que en la última década se han elaborado varias síntesis de las investigaciones realizadas internacionalmente sobre el tópico (Fiallo et al., 2013; Hanna y Knipping, 2020; Sinclaire et al., 2017; Stylianides et al., 2016), lo que muestra que sigue recibiendo una considerable atención.

Realizamos a continuación un análisis de esta variedad de trabajos. Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) realizan una amplia recopilación bibliográfica de las principales investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, organizando ésta en cinco líneas de investigación: consideraciones histórico-epistemológicas, la demostración en el currículo, concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar, relaciones entre argumentación y demostración, y propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración. Sin embargo, como afirman los propios autores, “La división del texto en estas cinco secciones no genera grupos disjuntos, pues las líneas de investigación se articulan estrechamente.” (p.183).

Describimos las características principales de estas líneas de investigación según Fiallo et al (2013):

- *Histórico-epistemológica*, centrada en la naturaleza de la demostración y su estatus en el conocimiento matemático. En esta línea, Balacheff (2008) distingue cinco posiciones acerca del estatus otorgado a la demostración: como validadora universal del conocimiento matemático (Nardi, 2008); como concepto de naturaleza idiosincrásica y particular ligada al contenido matemático (Fiallo, 2010;Harel y Sowder, 1998; Stylianides, 2011); como práctica connatural al pensamiento matemático y el razonamiento deductivo que diferencia a las matemáticas de las ciencias empíricas (Hoyles y Küchemann, 2002; Tall, 1999); como herramienta para la comunicación de la comprensión matemática (Hanna y Jahnke, 1996); y en su rol dentro de la organización teórica específica de las matemáticas de acuerdo a axiomas, teoremas y definiciones (Mariotti, 1997).
- *La demostración en el currículo*. Estas investigaciones describen el rol de la demostración en la escuela y su relación con el currículo. Un ejemplo de interés para nuestro estudio es el trabajo de Battista y Clements (1995). Proponen que el currículo de secundaria debería estimular a los estudiantes a refinar su pensamiento de manera que comprendan los defectos de las justificaciones visuales y empíricas y se adentren en el pensamiento formal.
- *Concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar*. Estos estudios centran el foco de atención en las creencias de los estudiantes sobre la demostración, en las dificultades que estos experimentan y en el origen de éstas (Balacheff, 1988; Ibañes y Ortega, 2003). De este grupo de investigaciones queremos señalar, por su relación con nuestro estudio, el trabajo de Arzarello et al. (1998) que proponen un modelo para interpretar las dificultades en los procesos de exploración de situaciones geométricas. Estos autores analizan la solución a un problema de demostración poniendo especial atención al momento en que se pasa de la elaboración de conjeturas, caracterizada por una actividad empírica que apunta a entender mejor el problema, a la producción de una demostración deductiva.

- *Relación entre argumentación y demostración*, en esta sección los autores agrupan los trabajos centrados en las relaciones entre la argumentación y la demostración. Aquí la pregunta es: ¿existe una continuidad entre la argumentación y la demostración o hay una ruptura cognitiva? Una de las fuentes de dificultades que algunos estudios han planteado es la discrepancia entre la argumentación con base en la verificación empírica y el razonamiento deductivo. Balacheff (2000) plantea que el objetivo de la argumentación consiste en obtener la adhesión del interlocutor sin plantear necesariamente el problema de validez del enunciado. Pedemonte (2005) usa el constructo *unidad cognitiva de teoremas*, desarrollado por Boero et al. (1996), para destacar la coherencia, o la falta de ella, entre las fases de resolución de los problemas de conjetura y demostración, con el fin de analizar y mostrar las posibles continuidades y rupturas entre la argumentación y la demostración. Duval (1999) afirma que la argumentación, aun en su forma más elaborada, no deriva necesariamente en una demostración y que, por tanto, existe una ruptura cognitiva entre estos dos procesos.
- *Propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración*, obviamente esta línea de investigación pretende generar propuestas para la enseñanza y aprendizaje de la demostración. Por ejemplo, Radford (1994) aporta una descripción del tipo de cuestiones a proponer a los estudiantes en contexto geométrico. Existen numerosos estudios que analizan el papel que pueden jugar los programas de geometría dinámica como Cabri, o el más reciente y popularizado Geogebra. Algunos de ellos analizan las posibilidades didácticas de la función de arrastre que facilita la elaboración de conjeturas y la verificación experimental de casos particulares (Marrades y Gutiérrez, 2000), hecho que influye en una evolución positiva hacia la producción de justificaciones cada vez más próximas a demostraciones deductivas. Otro aspecto considerado en esta línea de investigación es el análisis de las interacciones sociales tanto entre iguales como entre profesor y alumnos. Según Mariotti, el aprendizaje de la demostración se favorece cuando una solución propuesta por un estudiante es sometida al juicio de los demás.

En una revisión posterior, Sinclaire et al. (2016) realizan una categorización de los estudios en educación geométrica desde el año 2008, entre las que incluyen la categoría: *Avances en la comprensión de la enseñanza y aprendizaje del proceso de probar*. Los autores de esta revisión organizan los estudios en siete líneas de investigación que van desde la enseñanza en etapas preescolares hasta la educación postobligatoria y la formación de profesores. En su trabajo destacan que gran parte de la investigación en la última década se ha dirigido a estudiar la enseñanza y el aprendizaje de la prueba, particularmente a raíz del creciente uso de recursos educativos tecnológicos. Afirman que muchos estudios han centrado su atención en intentar dar respuesta a las siguientes preguntas: (1) ¿Qué es y qué constituye una prueba matemática? (2) ¿Cómo interpretar la prueba como una explicación que convence a otros? ¿Qué hace que una prueba sea convincente? y (3) ¿Qué clase de pedagogía y qué herramientas pedagógicas propician la construcción de la prueba?

En su recopilación, Sinclaire et al (2016) dividen las investigaciones en torno a los procesos de prueba en cuatro categorías relacionadas con:

- *La naturaleza de la prueba.* Moutsios-Rentzos y Spyrou (2013) utilizaron un enfoque fenomenológico para observar los factores socioculturales que condujeron a la aparición de la prueba geométrica en la antigua Grecia con el objetivo de fomentar el aprecio de la prueba por los estudiantes. Señalan que la prueba en contexto geométrico es una construcción socio-cultural íntimamente relacionada con el mundo perceptivo, abriendo así una posibilidad, especialmente interesante en el contexto pedagógico, para discutir marcos alternativos compatibles sobre *qué es una prueba geométrica*, que podrían tener una base más empírica. Así, consideran que la naturaleza de la prueba es variable ya que su estado puede cambiar dependiendo del proceso de adquisición de conocimientos geométricos y de las herramientas utilizadas en dicho proceso.
- *La elaboración de conjeturas en un entorno de geometría dinámica.* La función de arrastre de figuras dinámicas visuales en entornos de geometría dinámicos (EGDs) ha desempeñado un papel epistémico vital en estudios que investigaron el proceso de generar conjeturas geométricas. Mariotti (2014) usó la teoría de la mediación semiótica para identificar el potencial semiótico de la herramienta de arrastre en los EGDs con el objetivo de introducir la noción de *enunciado condicional*, equivalente a la noción de *tercera afirmación* de Duval (2007). La producción de conjeturas se ha visto como un proceso semiótico que involucra una transformación de signos personales a signos matemáticos. Se analizaron modalidades de arrastre específicas que se relacionan con los significados de premisa, conclusión y condicional.
- *La explicación y prueba en entornos de geometría dinámica.* La explicación y prueba en entornos de geometría dinámica ha mostrado la tensión existente entre las naturalezas empírica y teórica de las matemáticas. Algunos investigadores han considerado la relación

entre las pruebas en EGDs y las tradicionales (Gravina, 2008), mientras que otros, por ejemplo, Leung (2009), proponen que no hay necesidad de traducir las pruebas en EGDs a la deducción tradicional.

- *La prueba geométrica en el aula.* Kim y Ju (2012) exploraron los cambios experimentados por los estudiantes al aprender a construir pruebas matemáticas en una clase de geometría de secundaria basada en la investigación. El análisis del discurso en el aula identificó tres etapas a través de las cuales se transformó la práctica de los estudiantes: comprensión incipiente del concepto de prueba; aprendizaje de la prueba como actividad orientada a un objetivo y experimentación de la prueba como práctica de los matemáticos. Miyazaki et al. (2014) proponen una progresión del aprendizaje de la prueba a la que denominan *flow-chart proving* (diagrama de flujo de la prueba), creando situaciones *abiertas* donde los estudiantes pueden construir múltiples soluciones, decidiendo sus propias suposiciones y las proposiciones intermedias necesarias para deducir una conclusión dada. De esta manera, se proporciona a los estudiantes una oportunidad para explorar sus razonamientos y tener una comprensión más profunda de la estructura de la prueba geométrica.

Otra revisión reciente de la literatura científica en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la prueba matemática es la realizada por Stylianides et al. (2016) para *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, donde se encargan del capítulo dedicado a las investigaciones sobre la argumentación y la prueba en la educación matemática. Stylianides et al. realizan una extensa revisión de las investigaciones en torno a la prueba y la argumentación en la educación matemática. Para ello, caracterizan estos dos conceptos: *argumentación* como el discurso o medios retóricos (no necesariamente matemáticos) que usa un individuo o un grupo para convencer a otros de que una proposición es verdadera o falsa; y *prueba* en el contexto de una comunidad de clase como un argumento matemático para asegurar la validez o falsedad de una proposición. Para ser una prueba, una argumentación debe utilizar proposiciones verdaderas, modos de razonamiento válidos y modos de representación adecuados de acuerdo al campo matemático; en palabras de Duval (2007), debe ser un *razonamiento matemático válido*.

En su trabajo Stylianides et al. (2016), organizan las investigaciones sobre la prueba en tres grandes categorías:

- *Investigaciones sobre las concepciones de los estudiantes y su aprendizaje*. A su vez, dividen este primer grupo en varios subtemas: concepciones de los estudiantes sobre la prueba y el proceso de probar; uso de ejemplos en la argumentación y en la prueba; y conocimiento, tareas y herramientas que fomentan el éxito en la producción de pruebas.

En esta categoría abundan los estudios que discuten el potencial de los EGDs para apoyar la investigación de conjeturas por parte de los estudiantes y llevarlos desde la argumentación informal a la prueba (Rodríguez y Gutiérrez, 2006; Baccaglini-Frank et al., 2011). Otros trabajos se dirigen a “aumentar nuestra comprensión del conocimiento, habilidades y creencias de los estudiantes sobre la argumentación y la prueba” (Styllianides et al, 2016 p. 327). También destacan la predominancia de las investigaciones sobre la argumentación y la prueba en estudiantes de secundaria dentro del dominio de la geometría. Señalan, además, el creciente interés en investigar el pensamiento del estudiante en una variedad de actividades relacionadas con la argumentación, más allá de producir un argumento o una prueba, tales como la generalización de patrones (Lockwood et al., 2013) o la comprensión de pruebas (Weber, 2015).

- *Investigaciones en el aula*. Dentro de la segunda categoría, distinguen tres subtemas: (1) Los procesos de argumentación y prueba de los estudiantes; (2) Las distintas formas de llevar la argumentación y la prueba al aula; y (3) Intervenciones dirigidas a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la argumentación y la prueba.

En relación con el primero, Fielding-Wells y Makar (2015) analizaron situaciones de argumentación epistémica, definida como un discurso que busca la verdad a través del razonamiento crítico y la justificación. Concluyeron que dicha actividad favorece el acceso a procesos cognitivos y metacognitivos propios del desempeño de los expertos, y apoya el desarrollo de habilidades comunicativas que favorecen el logro de la competencia matemática. Otros estudios centran su atención en la relación crucial entre argumentación y prueba. Estos estudios se apoyan en la idea de unidad cognitiva (Boero et al., 2007; Fiallo y Gutiérrez, 2017), definida como la continuidad entre los procesos de producción de conjeturas y construcción de pruebas. Martínez y Li (2010) enfatizaron que la fase de conjeturas es un proceso complejo y rico, y abogaron por la difusión de este tipo de tareas en los EEUU, donde el currículo tradicionalmente se centra en la producción y valoración de pruebas. En general, los estudios reconocen la importancia de las interacciones durante los procesos de argumentación y prueba. Matos y Rodríguez (2011) se centran en la prueba como una forma de práctica social. Los autores adoptan la perspectiva de la *teoría social del aprendizaje*. De acuerdo con esta, las Matemáticas son un fenómeno social, y, en consecuencia, el constructo *comunidad de práctica* es central para su trabajo.

En relación con las investigaciones que se centran en el modo en que los profesores tratan la argumentación y la prueba en el aula, hay un acuerdo general sobre la complejidad de la tarea del profesor que lidia con la prueba en su clase (Zaslavsky et al, 2012). Por ejemplo, el profesor debe establecer reglas socio-matemáticas adecuadas; elegir o diseñar tareas idóneas y manejarlas de la forma correcta para fomentar la comprensión; y guiar a los estudiantes hacia el razonamiento deductivo evitando convertir la prueba en una actividad rutinaria. Resulta crucial la forma en la que la prueba se introduce en el aula, y el papel y propósito de tal tratamiento: Furinghetti y Morselli (2011) distinguieron entre enseñar pruebas y enseñar mediante pruebas, siendo el objetivo de la prueba en el segundo caso promover la comprensión. Varias investigaciones se centraron en las interacciones de los profesores con los estudiantes. Huang (2005) comparó lecciones sobre el teorema de Pitágoras en Hong Kong y Shanghai utilizando grabaciones de vídeo de clases. El estudio mostró que los profesores de Hong Kong tendían a valorar la verificación visual, mientras que los profesores de Shanghai estaban interesados en presentar un argumento deductivo que cumpliera con el estándar de prueba. En términos de interactuar con los estudiantes e involucrarlos en el proceso de prueba, los maestros de Shanghai hicieron más esfuerzos para involucrar a los estudiantes en la construcción de pruebas. Este estudio destacó el papel de las cuestiones culturales en la enseñanza de la prueba, poniendo en primer plano la dialéctica crucial entre la visualización y razonamiento deductivo.

Rodríguez y Rigo (2015) estudiaron el surgimiento de una cultura de racionalidad en el aula, adoptando un enfoque etnográfico y empleando el modelo de Toulmin como lente interpretativa. Definieron la *cultura de la racionalidad* compuesta por *normas de sustentación* (aquellos argumentos que una comunidad dada emplea para sustentar hechos matemáticos y las prácticas recurrentes que se utilizan en dicha comunidad), y trayectorias de participación y distribución de responsabilidades (la sucesión de intervenciones de los actores de clase en el proceso de argumentación). Los autores examinaron episodios de la enseñanza en el aula, destacando la naturaleza de argumentos (siempre respaldados por consideraciones matemáticas) y las recurrentes trayectorias de participación (intercambios dialécticos entre el profesor y el estudiante). Este estudio contribuye a la descripción de una cultura de racionalidad en el aula y destaca el papel del profesor en promover el desarrollo de tal cultura.

El último de los subtemas en la categoría de investigaciones basadas en el aula de clase es el dedicado a las *intervenciones destinadas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje* *de la argumentación y la prueba*. Estos estudios son importantes, ya que ponen de relieve que además de estudiantes y profesores, existe un tercer elemento principal de la investigación basada en el aula: la tarea. Adicionalmente, estos trabajos ayudan a ilustrar el vínculo entre la investigación teórica y aplicada, examinando cómo las ideas teóricas se pueden convertir en propuestas para el aula. Podemos observar un ejemplo de esta conversión en la adaptación del constructo *comportamiento racional* de Habermas para estudiar diferentes aspectos de la prueba y otras actividades matemáticas (Boero, 2006; Boero y Planas, 2014). El comportamiento racional trata con la complejidad de las prácticas discursivas en la intersección de tres tipos de racionalidad: epistémica (relacionada con el desarrollo del conocimiento y las preguntas sobre la validez de los juicios), teleológica (relativo a elecciones estratégicas y acciones correspondientes para lograr un objetivo establecido), y comunicativa (relacionada con el uso reflexivo del lenguaje orientado a la comprensión). Un aspecto interesante es el hecho de que este constructo, integrado con otras herramientas teóricas como el modelo argumentativo de Toulmin, puede proporcionar un marco integral que permite: (1) analizar mejor los procesos de prueba de los estudiantes y (2) planificar y llevar a cabo innovaciones e intervenciones en el aula.

Otra línea de investigación se ha centrado en el desarrollo de tareas para fomentar el acercamiento de los estudiantes a la argumentación y la prueba (Miyazaki et al., 2014; Heinze et al., 2006; Kuntze, 2008). Heinze et al. (2006) propusieron el trabajo con ejemplos resueltos como una herramienta para ayudar a los estudiantes a aprender la argumentación y la prueba. El trabajo de Heinze et al. se centró en la prueba como proceso y en la idea de ofrecer a los estudiantes algún elemento de conocimiento de meta-nivel sobre la prueba. En la misma línea, Kuntze (2008) estableció un entorno de aprendizaje, que denominaron *topic study method*, donde se pidió a los estudiantes que escribieran textos sobre diferentes aspectos del proceso de prueba para fomentar su metaconocimiento relacionado con la prueba. El estudio invitó a la reflexión sobre una posible correlación entre el metaconocimiento y la competencia en la prueba. Miyazaki et al. (2014) abordaron la cuestión de la creación de lecciones introductorias eficaces para enseñar a probar. Para ayudar a los estudiantes a apreciar la estructura de una prueba, propusieron combinar dos ideas pedagógicas: pruebas de diagrama de flujo y problemas abiertos. Los hallazgos mostraron que tal enfoque podría fomentar la comprensión de la prueba. Concretamente, la prueba del diagrama de flujo ayudó a los estudiantes a identificar las condiciones necesarias y combinarlas para llegar a las conclusiones.

En sus conclusiones sobre las investigaciones en el aula, Stylianides et al. (2017) afirman que:

> *La primera cuestión es la profunda interconexión entre argumentación y prueba y los beneficios de abordar actividades argumentativas. Esto también se relaciona con el creciente consenso sobre la importancia de la interacción social al hacer matemáticas (por ejemplo, Schwarz et al., 2009). Otro tema clave se refiere a la importancia de brindar a los estudiantes oportunidades para apreciar el proceso de prueba, y no solo la prueba como producto final. Para tal fin, la demostración se conceptualiza como un caso especial de resolución de problemas (por ejemplo, Weber, 2005), sugiriendo así la importancia del metaconocimiento (Boero et al., 2010; Kuntze,2008) y heurística (Heinze et al., 2006). (p. 336).*

- *Investigaciones sobre el conocimiento y desarrollo del profesor.* La tercera categoría en la que encuadran las investigaciones sobre la prueba se dedica al conocimiento y desarrollo profesional del profesor. En su revisión, agrupan estos trabajos, tanto con profesores en ejercicio como con futuros docentes, en tres categorías: (1) Conocimiento de los profesores sobre la argumentación y la prueba, (2) Conocimiento sobre la enseñanza de la argumentación y la prueba y (3) Creencias de los profesores relacionadas con la argumentación y la prueba.

En general, las contribuciones realizadas en torno al conocimiento de los profesores sobre la argumentación y la prueba se pueden encuadrar en uno o más de los siguientes: (1) Hallazgos empíricos sobre la naturaleza del conocimiento matemático de los profesores sobre la argumentación y la prueba, (2) Hallazgos empíricos sobre la efectividad de las intervenciones diseñadas para mejorar el conocimiento matemático de los profesores sobre la argumentación y la prueba, y (3) Contribuciones teóricas o metodológicas a la investigación sobre la naturaleza o el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores sobre la argumentación y la prueba.

Un ejemplo de estos estudios es el trabajo de Zazkis y Zazkis (2013), en el que se utilizó una categoría especial de tareas que Stylianides y Stylianides (2006) denominan *teaching –related mathematical task* y que definen como:

> *Tareas matemáticas que están conectadas con la enseñanza y tienen un doble propósito: (1) Fomentar [o evaluar] el aprendizaje por parte de los maestros de las matemáticas que son importantes para la enseñanza, y (2) ayudar a que los profesores vean como esta matemática se relaciona con el trabajo de enseñar (p. 205).*

Muchos de los trabajos identificaron debilidades en el conocimiento matemático sobre la argumentación y la prueba de futuros maestros, aunque también hay estudios que identificaron debilidades en los conocimientos matemáticos de futuros profesores y profesores en activo (Tsamir et al., 2008)

En torno al conocimiento sobre la enseñanza de la argumentación y la prueba, los estudios señalan que si bien el conocimiento de los profesores tiene debilidades (que suelen tener sus raíces en las limitaciones del conocimiento matemático de los profesores sobre la argumentación y la prueba), es posible mejorar este conocimiento. Monoyiou et al. (2006) examinaron la naturaleza de los conocimientos de maestros en ejercicio sobre prácticas pedagógicas, poniendo la atención en la evaluación de diferentes tipos de argumentos de estudiantes. En sus conclusiones destacaron que muchos maestros daban tanta validez a argumentos empíricos como a razonamientos válidos. Tsamir, Tirosh, Dreyfus, Barkai y Tabach (2008) realizaron un estudio con profesores de secundaria en ejercicio en el que compararon las respuestas de los participantes antes y después de un curso de desarrollo profesional de profesores de matemáticas. En el cuestionario se les pidió que debían sugerir tanto argumentos válidos como inválidos que pensaban que sus estudiantes darían a una colección de seis proposiciones. En sus conclusiones observaron que al final del curso los participantes mejoraron su habilidad para anticipar argumentos válidos e inválidos de sus estudiantes. Cirillo (2011) estudió de una manera más naturalista el desarrollo del conocimiento de un profesor de secundaria sobre la enseñanza de la argumentación y la prueba. En particular, documentó las experiencias en el aula de un profesor de matemáticas de secundaria principiante, con una sólida formación matemática, a través de sus primeros tres años de enseñanza de la prueba en una clase de geometría para jóvenes de 15 a 16 años. Con este estudio de caso, interpretativo y longitudinal, arrojó algo de luz sobre los desafíos a los que se enfrentan los profesores de secundaria al aprender a enseñar a probar (incluso cuando su conocimiento matemático no es un problema).

Por último, en relación con las creencias de los profesores relacionadas con la argumentación y la prueba, los estudios se han centrado mayoritariamente en los profesores de secundaria en activo y han examinado sus creencias sobre el lugar y los objetivos de la argumentación y la prueba en la matemática escolar (Chua et al, 2010; Dickerson y Doerr, 2008). Un hallazgo clave de Chua et al. (2010) fue que, mientras que casi el 60% de los profesores en su estudio vieron el propósito de una justificación como una *explicación,* solo un maestro mencionó la convicción, que, generalmente, se reconoce como un propósito central de la prueba. Dickerson y Doerr (2008) encontraron que algunos profesores creían que uno de los principales propósitos de la prueba en las matemáticas escolares es el desarrollo de las habilidades de pensamiento de los estudiantes y que las pruebas que se desvían de la forma normal pueden socavar este propósito.

Miyakawa y Herbst (2007) encontraron que los profesores de matemáticas de secundaria no siempre consideraron que una prueba era la mejor forma de convencer a los estudiantes sobre la verdad de un teorema. De hecho, los profesores valoraron más dedicar tiempo a otros tipos de argumentos (incluidos los empíricos) para cambiar el valor epistémico que el teorema tenía para los estudiantes. Estos hallazgos pueden ayudar a explicar algunas de las opciones pedagógicas de los maestros y las evaluaciones del trabajo de los estudiantes que mostraron Monoyiou et al. (2006): los profesores pueden privilegiar los tipos de argumentos que elevan el valor epistémico del teorema en lugar de las normas de funcionamiento de la prueba. Estos resultados ofrecen información sobre las concepciones erróneas de los estudiantes, relacionadas con el poder de una prueba para establecer de manera concluyente la verdad de un teorema (Fischbein y Kedem, 1982), e ilustran la tensión que puede existir entre la argumentación y la prueba (Duval, 1989, 1999, 2003, 2016a, 2016b).

Stylianides et al (2016) concluyen que:

> *Se necesita más investigación sobre el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores sobre argumentación y demostración, con intervenciones diseñadas teniendo explícitamente en cuenta la idea de que la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere que los profesores no solo tengan buenos conocimientos matemáticos, sino también que sean capaces de utilizar de manera flexible ese conocimiento mientras apoyan el aprendizaje de los estudiantes (p. 342).*

Recientemente, Hanna y Knipping (2020) analizan la evolución de las ideas sobre el papel de la prueba en la educación matemática desde 1980 a 2020, examinando en particular las contribuciones de la investigación, tanto teórica como empírica, a la enseñanza de la prueba matemática. Al hacerlo, describe algunos de los principales temas que han surgido en los últimos cuarenta años, principalmente en la filosofía de las matemáticas y en educación matemática. Comienza con el énfasis en la estructura axiomática de las matemáticas modernas en los años 1950-80 y la reacción en contra de muchos profesores que encontraban las nuevas Matemáticas demasiado abstractas y difíciles de enseñar. Ya en el período 1980-2000, analiza el declive de las teorías conductivistas del aprendizaje y la enseñanza en psicología y sus evidentes implicaciones en la investigación en educación matemática; la importancia y la influencia de los trabajos de Polya y Lakatos; las investigaciones de carácter epistemológico como la clasificación de las pruebas de los estudiantes en Balacheff (1988), los esquemas de prueba de Harel y Sowder (1998), y los factores que influyen en la aceptación de una prueba por parte de matemáticos profesionales (Hanna, 1989) y sus implicaciones para la enseñanza (Hanna, 1990); el trabajo de Fischbein (1982, 1987, 1993) que contribuyó mucho a aclarar la relación entre el razonamiento en la vida cotidiana y el razonamiento matemático, que requiere un mayor grado de rigor.
La mayor parte de las investigaciones empíricas sobre razonamiento y demostración en el periodo 1980-1990 se centran en evaluar las habilidades de razonamiento de los estudiantes y en determinar su capacidad de dominar la prueba matemática. Además, la investigación empírica sobre la prueba a nivel de pregrado ha crecido a un ritmo exponencial desde el comienzo de la década de 2000 (Hanna y Knipping, 2020, p. 8).

Senk (1985), y más tarde Healy y Holes (2000), mostraron el bajo rendimiento de los estudiantes en la construcción de pruebas, concluyendo que muchos de ellos no eran capaces de diferenciar una prueba deductiva de una evidencia empírica y que, como consecuencia, usaban predominantemente argumentos empíricos en la construcción de pruebas. En relación con el período comprendido entre los años 2000-2020, afirman que los primeros años de este siglo vieron un aumento en el uso de la prueba en el aula de matemáticas, pero dejando claro que difieren en las interpretaciones de los objetivos, de la justificación y de la fundamentación de su enseñanza. Cada una de las interpretaciones se centra en diferentes cuestiones, enfatizando aspectos particulares de lo que es importante transmitir a los estudiantes sobre la prueba y probar, y qué características de la prueba contribuirán a la mejora del aprendizaje. Por otro lado, señalan también que la disponibilidad de los entornos de geometría dinámica ha favorecido la realización de un gran número de trabajos de investigación en relación con sus efectos en la enseñanza geométrica en general y de la prueba en particular (de Villiers, 2004; Mariotti, 2014).

Esta sección nos permite vislumbrar la complejidad del problema en cuestión y de la variedad de enfoques, modelos, constructos y marcos teóricos desarrollados para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la prueba matemática.

1.2. La visualización en los procesos de prueba

La visualización desempeña un rol determinante para el desarrollo y tratamiento de otras actividades cognitivas y la construcción de conceptos matemáticos (Marmolejo et al., 2020). La aparición de los entornos de geometría dinámica y el desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente propició el interés por el estudio de la visualización en los últimos decenios (Presmeg, 2006). Así, hay ahora un consenso sobre la importancia de la visualización en el estudio de las Matemáticas (Hershkowitz. 1989, 1990; Duval, 2003). Esta situación ha propiciado numerosas investigaciones sobre este tópico en función de:

- los tipos de visualización contemplados en la enseñanza de las matemáticas y su complejidad (Duval, 1995, 2004; Marmolejo y Vega, 2012)
- el rol de la visualización en el desarrollo de actividades cognitivas (León, 2005; Torregosa et al., 2010), que analiza su relación con otras actividades cognitivas en el ámbito de la educación matemática (generalización, razonamiento deductivo, construcción o resolución de problemas) (León, 2005; Llinares y Torregrosa, 2017; Mesquita, 1989)
- el papel de la visualización en la enseñanza de objetos matemáticos específicos (Outherd y Mitchelmore, 2000; Padilla, 1990)
- cómo los profesores, los libros de texto y los entornos de geometría dinámica pueden promover su desarrollo (Duval, 1998; Warren y Cooper 2008).

En nuestro trabajo adoptamos el concepto de visualización definido por Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) como *"la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra"* (p. 163).

Además, los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción, por lo que se hace imprescindible su representación. Esta relación entre representados y representantes es abordada desde una perspectiva cognitiva por la *Teoría de registros de representación semiótica* de Raymond Duval (1995). En esta se define *representación mental* como el conjunto de imágenes y conceptualizaciones que un individuo puede tener sobre un objeto o situación; y *representación semiótica* como el conjunto de signos que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles. Por tanto, los sistemas de representación semiótica para el pensamiento matemático son esenciales, ya que no hay otras maneras de acceder a los objetos matemáticos, y estas representaciones semióticas son las que cada uno produce para expresar sus representaciones mentales (Font, 2000).

Son muchas las formas de percibir y manejar las diferentes representaciones que permiten abordar los conceptos matemáticos. No obstante, la comprensión de las matemáticas requiere no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones, pues esta confusión puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje (Dreher y Kuntze, 2015). La didáctica de la geometría se ocupa en parte del uso adecuado de imágenes, dibujos o símbolos que tienen como misión principal facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos. Son numerosas las investigaciones que tratan el análisis y estudio de las conexiones entre diferentes sistemas de representación (Arnal et al., 2016; Duval, 2006; Paraskevi y Gagatsis, 2014). En la misma línea, Duval (1995) señala que la construcción de los conceptos matemáticos depende de la capacidad de usar diferentes registros de sus representaciones semióticas. Dicho de otro modo, la asimilación conceptual de un objeto pasa necesariamente por la adquisición de una o más representaciones semióticas (Duval, 1995, Godino y Batanero, 1994; D'Amore et al., 2015). Sin embargo, la conexión entre las representaciones no se produce de manera trivial, sino que requiere de una instrucción puesto que cada vez que se introduce a los estudiantes en una nueva representación, tienen que aprender cómo se utiliza y se interpreta en la comunidad matemática y en su aula de matemáticas. Además, estas interpretaciones pueden cambiar cuando cambia el contexto geométrico en el que tiene lugar la actividad matemática, por lo que se hace imprescindible el tratamiento adecuado de cada representación en el marco institucional en el que tiene lugar la actividad geométrica.

Para Duval (1995), comprender los procesos cognitivos de visualización implica considerar la diferencia entre el concepto de figura y el de dibujo, puesto que hay que distinguir entre el objeto representado y su representación. Duval (2003) señala que una figura asocia siempre dos tipos de representación: (1) una configuración de formas que constituye todo lo visual y (2) un enunciado que designa las propiedades que la configuración visual representa. Desde el punto de vista cognitivo, estos dos tipos de representaciones dependen de funcionamientos diferentes e independientes, de modo que su asociación resulta conflictiva pues predomina lo visual sobre las hipótesis codificadas en la configuración.

Si se habla de *figura*, entendemos la imagen mental de un objeto físico; el *dibujo* es la representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico. Si una figura representa un objeto matemático, debe cumplir los siguientes requisitos:

1. Ser una configuración, es decir, un conjunto de conjuntos de puntos con relaciones entre ellos que caracterizan la configuración.
2. Estar ligada a alguna afirmación matemática que fije alguna propiedad representada por la configuración. (Quesada, 2014).

Estos dos conceptos (dibujo y figura) están íntimamente relacionados en matemáticas por lo que en muchas ocasiones nos movemos inconscientemente entre ellos (Quesada, 2014).

También Laborde y Capponi (1994) y Gogou et al. (2020) destacan la necesidad de distinguir entre objeto geométrico y dibujo, y afirman que la enseñanza de la geometría ignora las relaciones existentes entre ambos. Por su parte, Fischbein (1993) denomina a las figuras geométricas conceptos figurales, porque tienen una doble naturaleza: conceptual y figural, pues una figura geométrica puede describirse a partir de sus propiedades intrínsecamente conceptuales. La figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto (Parzysz, 1988).

> La importancia de las figuras y de sus representaciones, dibujos, radica en el hecho de que son un soporte intuitivo para desarrollar la actividad geométrica, es decir, permiten verificaciones subjetivas, ilustraciones de afirmaciones matemáticas, posibilitan el trabajo con afirmaciones matemáticas de manera sinóptica y permiten la exploración heurística de situaciones complejas (Quesada, 2014 p. 21).

Duval (1995) señala:

Por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual, y por otro, sólo por medio de

> *representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos (p.38).*

La validación de propiedades geométricas es solo una de las muchas actividades que se plantean en un curso de geometría en cualquier nivel educativo. Los alumnos se enfrentan a tareas de construcción, clasificación, definición, problemas empíricos (cálculo de alguna magnitud), etc. En muchas de estas actividades, el enunciado suele ir acompañado de una representación cuyo rol determina el espacio de trabajo geométrico de la tarea y, por tanto, el tipo de respuesta que consideraremos válida. Pero como afirma Sánchez (2003), para tener acceso a una figura desde un punto de vista geométrico es necesario que la significación de algunos elementos de la figura y de algunas de sus relaciones sea establecida de antemano. La figura en sí misma no es suficiente para fijar las propiedades del objeto que se quiere representar en el dibujo; una mediana, por ejemplo, puede confundirse en algunas representaciones con una mediatriz o con una altura. "En geometría no hay dibujo que se represente por sí mismo, es decir, no hay dibujo sin leyenda" (Duval, 1999, p. 159).

Sin embargo, la diferenciación de este rol no se trata con suficiente claridad en la práctica educativa ni desde la perspectiva del diseño de la tarea ni, como consecuencia lógica, desde la perspectiva de los estudiantes. De manera que, la articulación entre lo que se observa visualmente en la configuración y las propiedades u objetos geométricos mencionados en el enunciado se ignora generalmente en las propuestas de enseñanza de la geometría en los niveles elementales. Tsamir et al. (2008) destacaron en un estudio con profesores de secundaria en ejercicio que muchos daban la misma validez a argumentos empíricos como a razonamientos válidos. La diferencia entre dibujo y figura en geometría no es clara ni a los alumnos ni a los profesores, que suponemos conocedores de esta diferencia (Santos et al. 2014).

En este trabajo codificamos las imágenes, ilustraciones, tablas, esquemas, … siguiendo la codificación tradicional que consiste en utilizar la palabra "Figura" seguido del capítulo al que pertenece y, tras un punto, el orden que esta ocupa. Consideramos que este uso no da lugar a confusiones con el concepto de "figura" como imagen mental, que acabamos de tratar en los párrafos anteriores.

En el siguiente ejemplo se ilustra la dificultad a la que se enfrenta un estudiante ante una tarea en la que no se ha determinado claramente el rol de la representación gráfica que acompaña al enunciado. De manera que enunciado y representación incluyen características de distintos espacios de trabajo, lo que obviamente supone una dificultad, en muchos casos, insalvable. Únicamente el conocimiento a priori de las demandas del profesor, y una idea 'flexible' del rigor, consiguen establecer las condiciones de una respuesta correcta.

Ejemplo: Dos círculos son tangentes interiores como se muestra en la figura. Calcule los radios de ambos círculos. (Describa detalladamente su razonamiento).

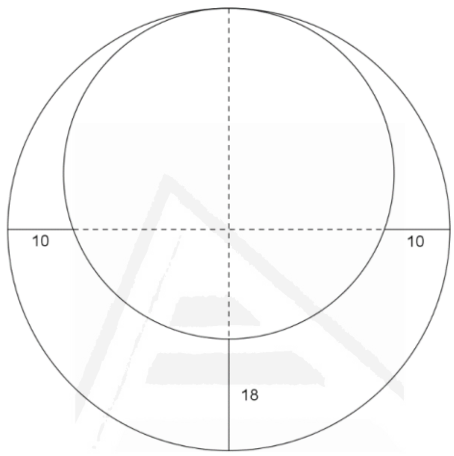


Figura 1.1

Si entendemos la figura 1.1 como una representación con sus propiedades ancladas a las hipótesis que son explícitamente enunciadas, tenemos dos círculos tangentes interiores. En la misma podemos observar dos cuerdas del círculo tangente interior dibujadas a partir de unas líneas de puntos suspensivos, que se convierten también en cuerdas del círculo tangente exterior si les añadimos los segmentos representados esta vez por una línea continua. Los valores de dichos segmentos, 10 y 18, nos proporcionan la medida de las longitudes de dichos segmentos, aunque no se refieren a ninguna unidad de medida concreta. Si observamos lo que se distingue visualmente en la configuración que acompaña al enunciado, estas cuerdas parecen ser dos diámetros perpendiculares del círculo tangente exterior; esto implica que el punto de corte de ambos 'diámetros' es el centro de dicho círculo tangente exterior. Y, por tanto, que el centro del círculo tangente interior se halla en el diámetro que parte del punto de tangencia, ya que los centros de dos circunferencias tangentes entre sí están alineados con el punto de tangencia.

A continuación, se muestran posibles soluciones que muestran la necesaria articulación entre las propiedades que el enunciado de una tarea geométrica proporciona y lo que se distingue visualmente en la configuración que acompaña al enunciado:

Si denotamos por R al radio de la circunferencia mayor y r al de la menor, a partir del teorema sobre la potencia de un punto respecto de una circunferencia, que establece que "para cualquier secante que pase por un punto P y corte a una circunferencia c en dos puntos A y B, el producto de distancias $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ es constante", se puede dar la siguiente respuesta:

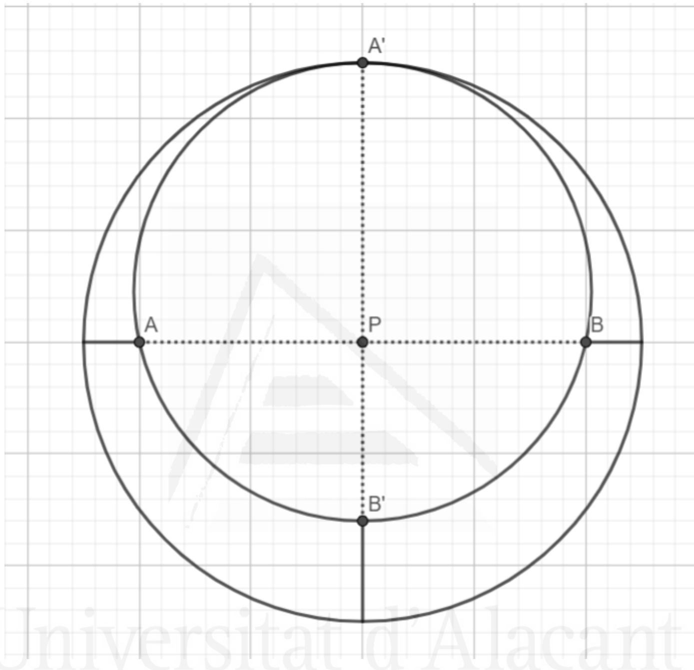


Figura 1.2

1. $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son dos segmentos definidos en la misma recta que pasa por P y es secante al círculo tangente interior.
2. $\overline{PA'}$ y $\overline{PB'}$ son dos segmentos definidos en la misma recta que pasa por P y es secante al círculo tangente interior.
3. El teorema sobre la potencia de un punto respecto de una circunferencia nos permite afirmar que $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PA'}\cdot\overline{PB'}$.
4. Si R es el radio del círculo tangente exterior, entonces por un lado $\overline{PA}$ = R – 10 y $\overline{PB}$ = R – 10, y por otro, $\overline{PA'}$ = R y $\overline{PB'}$ = R – 18.
5. Aplicando el teorema tenemos que (R – 10) · (R – 10) = R · (R – 18)
6. $R^2 - 20R + 100 = R^2 - 18R$
7. 100 = 2R

8. $R = 50$

9. Si r es el radio del círculo tangente interior, $2r + 18 = 2R$.

10. $r + 9 = 50$

11. $r = 41$.

Si bien podemos aplicar la proposición a cualquier punto P, afirmar que $\overline{PA} = R - 10$, $\overline{PB} = R - 10$, $\overline{PA'} = R$ y $\overline{PB'} = R - 18$ ¡implica considerar que P es el centro de la circunferencia mayor! Y esto no se deduce de las hipótesis del enunciado.

Mostramos a continuación otra posible respuesta:

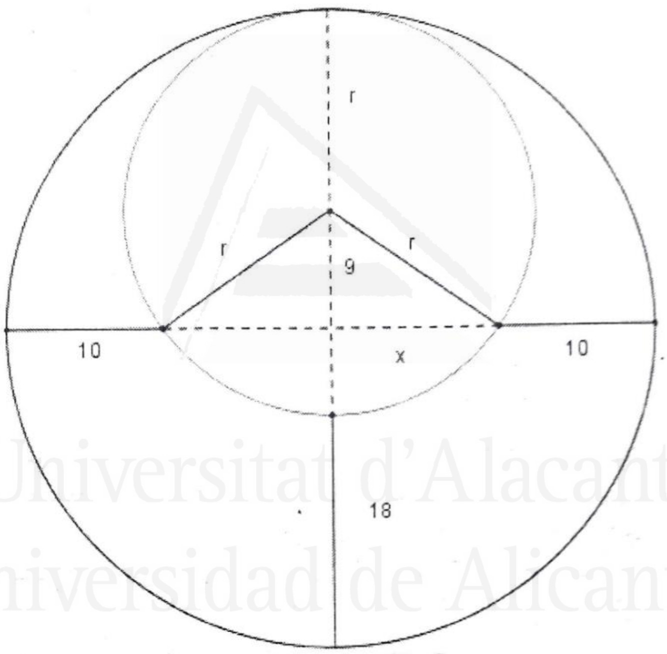


Figura 1.3

1. $2r + 18 = 2R$, lo que implica que $r + 9 = R$
2. $x^2 + 9^2 = r^2$
3. $x + 10 = R$, lo que implica que $x = R – 10$
4. Si sustituimos 3 en 2 tenemos que $(R – 10)^2 + 81 = r^2$
5. Si tenemos en cuenta que $R = r + 9$, entonces $(r + 9 – 10)^2 + 81= r^2$

   $r^2 – 2r + 1 + 81 = r^2$

   $82 = 2r$

   $r = 41$ e inmediatamente $R = 41 + 9= 50$

De nuevo, la afirmación 2R = 2r + 18 implica que la cuerda 'vertical' es un diámetro del círculo tangente exterior, esta asunción sería suficiente para asegurar que pasaría por el centro del círculo tangente interior ya que punto de tangencia y centros de los círculos tangentes están alineados. Por otro lado, la utilización del teorema de Pitágoras supone la perpendicularidad de dichas cuerdas secantes. Estas consideraciones se deducen del 'dibujo' pero no están ancladas al enunciado del problema, puesto que no hay ninguna afirmación sobre las 'rectas secantes'. Y la afirmación x + 10 = R supone que la cuerda 'horizontal' es un diámetro. Esto incumple las características del estatus de las representaciones gráficas en la geometría deductiva, donde éstas sólo sirven de apoyo al razonamiento y nunca como objetos donde validar afirmaciones, que es una característica de la geometría elemental.

Para la resolución de este problema en un contexto de geometría deductiva, las hipótesis no son suficientes y, en las distintas soluciones, es necesario suponer ciertas conjeturas sin demostración, bien relativas a las cuerdas dibujadas como diámetros de la circunferencia mayor, bien a la intersección de éstas en el centro del círculo tangente exterior o bien a su perpendicularidad como se muestra en la respuesta que transcribimos a continuación.

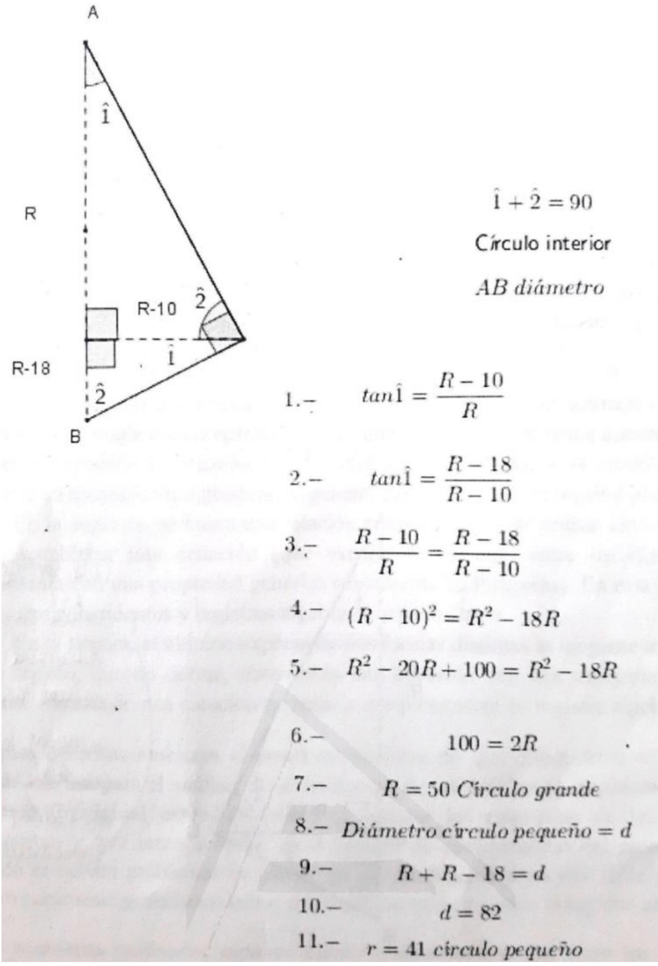


Figura 1.4

En cualquier caso, no es posible dar una respuesta en el contexto de la geometría deductiva salvo si se realiza una verificación perceptiva, que no es propia del contexto en el que se plantea el problema.

Una posible respuesta al porqué de esta 'no distinción' es que utilizamos enunciados con figuras 'mudas' porque deseamos aumentar el poder heurístico de la figura que se restaría al enunciar hipótesis que podrían dirigir el "conocimiento susceptible de ser utilizado" (Clemente y Llinares, 2015). Sin embargo, esta forma de proceder no es coherente con la exigencia a los alumnos de que no deben basar sus conjeturas en lo que parece que se cumple en la configuración inicial que acompaña a los enunciados (Torregrosa, 2017), característica básica de la geometría deductiva que pretendemos desarrollar en los alumnos de etapas secundarias.

Los problemas empíricos en el contexto escolar no están sujetos a la organización discursiva específica de la prueba, por lo que para alcanzar la solución lo imprescindible es que las conjeturas utilizadas sean ciertas, y no se presta la debida atención a los procedimientos de validación utilizados. Este es un problema recurrente en Geometría: la imposibilidad de validar deductivamente propiedades que son visualmente evidentes y necesarias para la resolución de los problemas. Esta práctica, lógica desde el punto de vista de la economía del lenguaje, supone una barrera para la comprensión del funcionamiento específico de la prueba matemática, ya que estos procedimientos, que son permitidos en contextos de resolución de problemas empíricos, se prohíben cuando la demanda es probar una propiedad geométrica.

Esto supone una barrera para la comprensión de la prueba matemática pues, si en determinados contextos como la resolución de problemas empíricos se aceptan conjeturas sin demostración, ¿por qué en otros, como los problemas de probar, no se aceptan?

La investigación en torno al tratamiento de actividades cognitivas evidencia un alto interés en los vínculos visualización-razonamiento deductivo. Es necesario pues la realización de nuevos estudios que amplíen la comprensión de cómo la visualización favorece u obstaculiza la resolución de problemas y la argumentación, asimismo que evidencien pautas para su promoción y establezcan dificultades, errores y obstáculos tanto en educadores como en estudiantes.

1.3. La prueba matemática en estudiantes de secundaria.

La enseñanza de la prueba en la etapa secundaria obliga inicialmente a descubrir y tener en cuenta la racionalidad de los alumnos, saber cómo funciona y cómo puede evolucionar; porque es a partir de esta racionalidad, en pro o en contra de ella, que los alumnos construirán el sentido de la demostración (Balacheff, 2000). Probar es una actividad característica del quehacer matemático, pero también una actividad que marca diferencias sustanciales entre la matemática y el pensamiento ordinario, y las prácticas de la vida cotidiana (Mariotti, 1998). Esta afirmación es especialmente importante en el ámbito de la Educación Matemática pues ésta pretende armonizar la intuición y la teoría. Por tanto, se hace necesario tener en mente los posibles obstáculos: no hay nada más peligroso para el aprendizaje de la matemática que soslayar las discrepancias entre el pensamiento espontáneo, o el sentido común, y el pensamiento matemático (Mariotti y Fischbein, 1997).

La literatura en torno al razonamiento en contexto geométrico es muy extensa; la mayoría de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han realizado en el dominio de la geometría euclidiana. Todas ellas ponen de manifiesto la complejidad de la transición que el estudiante de geometría ha de realizar, desde las primeras aproximaciones al trabajo geométrico en un contexto real con objetos 'reales' y procedimientos de verificación asociados a la intuición o al uso de instrumentos de medida, hasta la geometría formal, donde los objetos matemáticos tienen una entidad independiente de su existencia, real o no, y los procedimientos de verificación son los propios de la deducción formal en un conjunto de axiomas completo. Un ejemplo que pone de manifiesto la complejidad de este problema didáctico lo muestra el trabajo de Haverhals (2011) en un estudio de caso cualitativo con nueve estudiantes de pregrado y con entrevistas quincenales durante un año académico, en el que se pidió a los estudiantes que completaran, evaluaran o discutieran pruebas matemáticas. La finalidad del estudio era identificar, si los hay, caminos que recorren los estudiantes mientras aprenden a demostrar. Desafortunadamente, los datos de este estudio no pudieron mostrar ninguna ruta identificable que fuera común a todos los participantes.

Ndemo, Mtetwa y Zindi (2018, 2019) afirman que la noción de prueba matemática no ha logrado impregnar el plan de estudios en todos los niveles. Si bien la prueba matemática puede servir como vehículo para desarrollar el pensamiento matemático, los estudios han revelado que los estudiantes experimentan serias dificultades para demostrar, tales como (a) no saber cómo comenzar el proceso de prueba, (b) utilizar verificaciones empíricas para tareas que requieren métodos axiomáticos de prueba, o (c) recurrir a la memorización de fragmentos descoordinados de hechos probatorios. También destacan que, aunque se han realizado varios estudios con el objetivo de abordar la frágil comprensión de la prueba matemática, la mayoría de estos se han basado en actividades que demandan de los estudiantes reflexionar y expresar su nivel de convencimiento sobre argumentos aportados por los investigadores. Afirman, pues, que hay escasez de estudios de investigación sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes en torno a la prueba matemática basados en los propios intentos de prueba de los estudiantes, por lo que sugieren que las investigaciones actuales deben tener como objetivo identificar elementos críticos del conocimiento de la noción de prueba que sean extraídos de intentos reales de construcción de pruebas por parte de estudiantes.

Sobre las concepciones de los estudiantes de secundaria acerca de la demanda de una prueba matemática, Kunimune et al. (2010) informan de resultados que indican que hasta el 80% de los estudiantes de secundaria inferior pueden continuar considerando que las verificaciones experimentales son suficientes para demostrar que los enunciados geométricos son verdaderos, incluso cuando, al mismo tiempo, están aprendiendo que se requiere una prueba para demostrar que los enunciados geométricos son verdaderos. Sus resultados sugieren que prestar más atención al tema de la *generalidad de la prueba* puede afectar las creencias de los estudiantes sobre la verificación experimental y hacer que la prueba deductiva sea significativa para ellos.

Señalamos, a continuación, algunas de las clasificaciones más relevantes de las demostraciones de aprendices que se han obtenido en investigaciones en el área de la Didáctica de la Matemática. A partir del análisis de respuestas de estudiantes de 14 y 15 años a problemas de demostrar, Bell (1976) elabora unas categorías cuyo primer nivel viene dado por las categorías *empírica* (basada en el uso de ejemplos) y *deductiva* (relacionada con el uso de la deducción para conectar las hipótesis con la tesis). A su vez, estas categorías se ven divididas en función de la corrección y completitud de los ejemplos utilizados en el caso de las demostraciones empíricas, y en función de la 'calidad' de la conexión de los datos con las conclusiones en el caso de las demostraciones deductivas. Balacheff (1988) denomina *pruebas pragmáticas* a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión, y llama *pruebas intelectuales* a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones. Boero et al. (1996) construyen la noción de *unidad cognitiva de teoremas*. Sugieren que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal. Estas etapas comienzan con una exploración de una situación dada. Tras la observación se produce una conjetura o el planteamiento de una propiedad. En busca de una justificación al respecto, se realiza otra exploración. Y se termina encadenando argumentos que permitan demostrar (validar o justificar) la propiedad observada. Según estos autores,

> La actividad completa ejecutada por los estudiantes comparte muchos aspectos con el trabajo de los matemáticos cuando producen conjeturas y pruebas en algunos campos matemáticos (Boero et al., 1996, p. 126).

Algunos autores se centran en el aspecto de constructo social de la justificación: lo que constituye una demostración depende del contexto matemático y cultural en el que uno está trabajando (Mariotti, 2006). El aprendizaje de la demostración se ve como una práctica sociocultural que se lleva a cabo y se condiciona por la comunidad en la que se inscribe (J. Fiallo y otros, 2013). Otros, Harel y Sowder (1998), se centran en asuntos cognitivos referidos a los esquemas de demostración. Definen esquema de demostración como lo que permite asegurarse (en el sentido de eliminar sus dudas acerca de la veracidad de una afirmación matemática) y persuadir (con el objetivo de eliminar las dudas de otros sobre dicha afirmación). Este concepto les permite extraer un conjunto de categorías de demostraciones externas, empíricas y analíticas que amplía la clasificación de pruebas realizada por Balacheff (1988).

Estas clasificaciones han sido posteriormente completadas por Marrades y Gutiérrez (2000) e Ibañes (2001). Así, en el grupo de esquemas de convicción externa, donde la certeza y la persuasión se consiguen mediante elementos ajenos al razonamiento, distinguen esquemas autoritarios (si se basan en que quien lo dice es una autoridad), simbólicos (basados en la manipulación matemática) o rituales (si se sustentan en que lo afirmado tiene la apariencia de una demostración). En el conjunto de esquemas empíricos hablan de esquemas *experimentales*, cuando la certeza se obtiene por medio de percepciones o manipulaciones físicas directas, o *inductivos*, cuando se consigue por medio de comprobaciones cuantitativas de casos concretos. Por último, el grupo de esquemas de prueba analíticos, donde la certeza se obtiene por medio del razonamiento deductivo, lo dividen en esquemas *transformacionales* (si se hace uso de transformaciones de elementos o imágenes por medio de la deducción lógica) y *axiomáticos* (si se basa en la aplicación del razonamiento deductivo a partir de axiomas y otros resultados ya demostrados).

Ibañes aporta una importante novedad al concepto de esquema de prueba. Según sus investigaciones, los alumnos no poseen un único esquema de demostración, sino que razonan influenciados por varios de ellos, y utilizan uno u otro en función de la actividad a realizar. Ören (2007) identifica el uso de esquemas de prueba de los estudiantes de décimo grado en preguntas de geometría, utilizando como marco para categorizar las respuestas de los estudiantes los esquemas de prueba de Harel y Sowder (1998). Los resultados revelaron que los estudiantes utilizaron esquemas de prueba de base externa y esquemas de prueba empírica significativamente más que los esquemas de prueba analítica. Sen y Guler (2015) examinan las habilidades de realización de pruebas de estudiantes de séptimo grado de secundaria utilizando esquemas de prueba. Como resultado del estudio, se vio que las pruebas producidas por los estudiantes generalmente se encontraban en esquemas de prueba externa y empírica. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Prior y Torregrosa (2013) acerca de los comportamientos observados en alumnos que resuelven problemas geométricos de probar. Recientemente, A partir del análisis de los datos recopilados de 85 estudiantes de secundaria (14-15 años), Kanellos et al. (2018) proponen una aplicación ampliada y enriquecida de la taxonomía de los esquemas de prueba de Harel y Sowder que se puede utilizar como una herramienta de diagnóstico para caracterizar el aprendizaje de la prueba de los estudiantes de secundaria. En su estudio evidencian la presencia de seis de los siete esquemas de prueba, así como otras ocho combinaciones de los seis observados. Afirman que un uso dinámico de la taxonomía de los esquemas de prueba que abarca esquemas de prueba únicos y combinados es una potente herramienta teórica y pedagógica para representar la competencia multifacética y en evolución de los estudiantes. En esta línea, Lee (2016) afirma que, aunque la clasificación de los esquemas de prueba de los estudiantes ofrece información, faltan estudios que detallen mejor la progresión de los mismos, y apenas se han examinado esquemas de prueba que involucran contraejemplos. En su trabajo, examinó los esquemas de prueba de los estudiantes a través de ejemplos y contraejemplos. A partir de pruebas construidas por estudiantes de secundaria de Singapur de 14 a 15 años de edad, clasificó los esquemas de Construcción de prueba por deducción y Construcción de prueba por contraejemplo. El primero consta de siete niveles, que van desde inferencias irrelevantes hasta pruebas deductivas utilizando representaciones formales. El último consta de seis niveles, que abarcan desde inferencias irrelevantes hasta la construcción de un conjunto general de contraejemplos.

Ahmadpour, Reid y Fadaee (2019) presentan un modelo para describir el crecimiento de la comprensión de los estudiantes al leer una prueba. El modelo se compone de dos caminos principales. Uno se centra en tomar conciencia de la estructura deductiva de la prueba, es decir, comprender la prueba a nivel semántico. La generalización, la abstracción y la formalización son las transiciones más importantes en este camino. El otro camino se centra en la forma superficial de la prueba y el uso de representaciones simbólicas. Al final de este, los estudiantes comprenden cómo y por qué los cálculos simbólicos establecen formalmente una afirmación a nivel sintáctico. Stylianides (2019) explica que, aunque investigaciones anteriores han mostrado que muchos estudiantes de secundaria no logran construir argumentos que cumplan con el estándar de prueba en matemáticas, estas solo han considerado las producciones escritas de los estudiantes. Indica que la consideración de las producciones orales de los estudiantes podría ofrecer una imagen menos desfavorable de la competencia de los estudiantes que producen pruebas matemáticas. Un estudio realizado en dos aulas de matemáticas de secundaria (de 14 a 15 años) corrobora dicha hipótesis, según el autor.

1.4 La prueba matemática y el contexto institucional

Un aspecto interesante en la definición de esquema de demostración es la consideración explícita de una comunidad como unidad de elaboración de demostraciones, ya que para ello es necesario que los individuos que la integran se pongan de acuerdo en aspectos cruciales como: qué es demostrar, cómo se demuestra una afirmación matemática y qué características debe poseer un argumento para ser reconocido como una demostración válida. Aspectos que, como hemos mencionado anteriormente, son preguntas en las que se apoyan muchas de las recientes investigaciones sobre los procesos de prueba y argumentación. Desde este punto de vista, la actividad de producir una demostración es una práctica cuyas características dependen del ámbito institucional donde se lleva a cabo.

La explicación de numerosas incongruencias y errores reiterados por parte de los estudiantes, […], se encuentra en una incomprensión entre profesores y alumnos, los cuales hablan y razonan en diferentes niveles" (Jaime, 1998 p. 26). Para Godino y Recio (2001), un contexto o marco institucional es un punto de vista local o una perspectiva sobre una problemática determinada, caracterizada por el uso de recursos expresivos e instrumentales propios, así como por hábitos y normas específicas de comportamiento. Particularmente, en relación con la demostración, distinguen los siguientes contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, vida cotidiana, ciencias experimentales, y enseñanza de las matemáticas. En este último contexto, el escolar, y cuando nos referimos a la validación de afirmaciones, los teoremas matemáticos son necesariamente verdaderos, tanto en la clase de matemáticas de los niveles de enseñanza primaria y secundaria, como, generalmente, en el nivel universitario. Pero las argumentaciones que establecen esa verdad son, en el mejor de los casos, argumentaciones deductivas informales, con frecuencia argumentaciones no deductivas, o incluso argumentaciones basadas en criterios externos de autoridad. Hemmi (2006) investigó el aprendizaje de la prueba en estudiantes de pregrado considerando la noción de comunidad de práctica, que consiste en sus instructores, sus compañeros y el entorno universitario. En opinión de Schuck (2003) hay que animar a los estudiantes a formar comunidades matemáticas y a usar la lógica y la evidencia matemática como verificación, evitando aceptar al profesor y el libro de texto como únicas autoridades.

Así, Godino y Recio (2001) afirman:

Creemos que los estudios sobre la demostración en educación matemática deben enmarcarse dentro de la problemática más amplia de la evaluación y desarrollo de las distintas prácticas argumentativas en diversos contextos institucionales. Sólo de esta manera seremos sensibles a las distintas modalidades de demostración, de sus condiciones de desarrollo, los papeles que desempeñan en los distintos contextos institucionales y las relaciones entre las mismas (p. 406).

Interesados por los problemas didácticos involucrados en los procesos de validación de proposiciones matemáticas, es necesario considerar que no hay un concepto de demostración sino diversos, tanto desde el punto de vista subjetivo como institucional (Godino y Batanero, 1994). Esta variedad de funciones y significados del concepto de demostración ha sido ampliamente tratada. Así, se reconoce a la demostración, entre otras, las funciones o significados de:

- Verificación: validar o justificar una afirmación aportando razones o argumentos (Godino y Recio, 1997).
- Explicación: se considera que una prueba explica cuando proporciona información sobre por qué la proposición enunciada es cierta (Hanna y Jahnke, 1996).
- Comunicación: Schoenfeld (1994) considera la demostración como esencial del hacer, comunicar y dejar constancia del conocimiento matemático, y Hanna y Jahnke (1996) la relaciona con el proceso social requerido para la aceptación de una demostración dentro de una comunidad matemática.
- Sistematización: el proceso que permite la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas (de Villiers, 1990).

En su investigación, Recio y Godino (2001), estudian esquemas de prueba matemática de estudiantes que inician sus estudios en la Universidad de Córdoba (España), y relacionan estos esquemas con los significados de la prueba matemática en diferentes contextos institucionales: vida cotidiana, ciencias experimentales, matemática profesional, lógica y fundamentos de las matemáticas. La principal conclusión de su investigación es la dificultad de la prueba matemática deductiva para estos estudiantes. Además, sugieren que los diferentes significados institucionales de la prueba podrían ayudar a explicar esta dificultad.

En nuestra investigación, para al análisis del contexto en que tiene lugar la resolución de problemas de probar geométricos, se han tenido en cuenta las nociones que Houdement y Kuzniak (2003, 2006) han desarrollado en torno a la idea de contexto institucional en el que se desarrolla la actividad matemática. Construyen el concepto de espacio de trabajo geométrico (ETG) con el que pretenden comprender lo que, desde el punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto geométrico escolar. En sus investigaciones describen tres paradigmas geométricos: Geometría Natural, Geometría Axiomática Natural y Geometría Axiomática Formal, que desarrollaremos con detalle en el capítulo dedicado al marco conceptual; y tres Espacios de Trabajo Geométrico: de referencia, idóneo y personal, diseñados por y para el resolutor, articulando esta división en dos planos en relación a diferencias *epistemológicas* (con respecto a los contenidos matemáticos) y *cognitivas* (que conciernen al pensamiento del sujeto que resuelve tareas geométricas).

La demostración adquiere unas características propias en cada uno de los paradigmas geométricos mencionados. Así, en la Geometría natural las pruebas pueden apoyarse en dibujos u observaciones realizadas con el uso de instrumentos de medida; en la Geometría axiomática natural las demostraciones se basan en las leyes hipotético-deductivas de un sistema axiomático que puede ser incompleto, incluso no explícito, pero ligado a la intuición; y, por último, en la Geometría axiomática formal la demostración se realiza exclusivamente a través del sistema axiomático completo y desligado del espacio físico del modelo geométrico subyacente.

Las ideas sobre el espacio de trabajo geométrico aportan luz a la relación, básica en toda interacción educativa, que se establece entre el contenido, el alumno y el profesor, para explicar la complejidad que encierra la actividad geométrica a lo largo de la enseñanza no universitaria. Es fácil observar, especialmente en la etapa secundaria, tareas en las que cohabitan características de los dos primeros paradigmas descritos. De hecho, esta es una de las dificultades a las que se enfrentan alumnos y profesores cuando se plantea una tarea geométrica: que la respuesta que el alumno proporciona y la que el profesor espera se den en el mismo espacio de trabajo geométrico (Kuzniak, 2011).

Y es que, aunque el término Geometría está presente en todos los currículos matemáticos desde la etapa infantil hasta la enseñanza secundaria, e incluso en determinados programas universitarios, obviamente no tiene el mismo significado. La enseñanza de la geometría durante el período no universitario se centra en los dos primeros paradigmas geométricos y en el tránsito desde la Geometría Natural, propia de la etapa Primaria, hasta la Geometría Axiomática Natural, que se pretende alcanzar durante la etapa Secundaria. Es decir, se trata de abordar la aparición de la deducción, que permite la transición desde el *ver* al *conocer* (Parzysz, 1988).

El desarrollo de pruebas geométricas a través de la resolución de problemas ha sido tradicionalmente el contexto matemático sobre el que los estudiantes han transitado desde las primeras justificaciones empíricas hasta la deducción formal. Sin embargo, tal y como muestran distintos estudios, el porcentaje de estudiantes que realizan con éxito esta transición es realmente bajo. Así, Gaud y Guichard (1984) constatan un fracaso generalizado respecto a la capacidad de los alumnos de 15-16 años para formular una demostración, particularmente en contexto geométrico. Senk (1985) dio como resultado que, de 2699 graduados de secundaria, el 85% no domina la formulación de una demostración. Incluso con alumnos de nivel universitario, Jones (2000) afirma que, si bien la demostración ocupa un lugar central dentro de las clases de Matemáticas en la universidad, muchos estudiantes pueden concluir sus estudios teniendo una percepción incompleta de qué constituye una prueba y cómo pueden estas desarrollarse. Stylianides y Stylianides (2018) analizaron las dificultades persistentes de los estudiantes que aprenden a probar. Muchos de los estudios presentados al PME en la pasada década ilustran que “aprender a probar, incluso en los niveles superiores, continúa siendo un desafío persistente para los estudiantes” (Styllianides et al, 2016 p. 327). Se hace pues necesario que se aborden, desde diferentes perspectivas, las dificultades que impiden a una mayoría de estudiantes comprender y dominar la deducción formal matemática, que se realicen análisis que permitan entender los procesos mentales involucrados en el razonamiento geométrico, y que se desarrollen modelos que ayuden al profesor a interpretar dichas dificultades y a articular respuestas que ayuden a superarlas. En esta problemática de investigación enmarcamos nuestro estudio.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2. MARCO CONCEPTUAL

Nuestro estudio se enmarca dentro de la agenda de investigación que se centra en la caracterización de los procesos cognitivos que ponen de manifiesto los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría acerca de la demostración matemática y sus diferentes desarrollos. Nuestra aproximación pone de relieve la importancia dada a la relación entre lo visual y lo analítico tanto en el estudio de los procesos de resolución de problemas de geometría como para el desarrollo de las pruebas matemáticas.

Este trabajo se desarrolla en dos fases. En la primera, el objetivo es caracterizar a partir del modelo teórico de razonamiento configural desarrollado por Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) las respuestas de estudiantes de últimos cursos de Educación Secundaria Obligatoria. La segunda etapa es consecuencia de la necesidad de encontrar una explicación a una mayor diversidad de comportamientos en los estudiantes de educación secundaria que la encontrada en los estudios previos con estudiantes universitarios. Esta búsqueda nos llevó a poner el foco de atención en el contexto en el que se desarrolla la actividad matemática.

Para ello usamos la noción de espacio de trabajo geométrico que describen Houdement y Kuzniak (1999, 2003, 2006), un marco teórico con el que caracterizar el contexto en el que se resuelve una tarea geométrica. Es decir, la consideración de los objetos geométricos como entidades reales o ideales, los procedimientos de validación aceptados, el rol de las imágenes que acompañan el enunciado o la demanda de la tarea, entre otros.

El aprendizaje de la geometría puede analizarse desde tres puntos de vista, considerando las nociones y conceptos geométricos, las modalidades de su presentación y las actividades que se propone desarrollar (Guzmán, 2009). Duval (1998) indica tres procesos cognitivos involucrados en la actividad geométrica:

1. Procesos de visualización, para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación, para echar un vistazo sinóptico sobre la situación o para una verificación subjetiva.
2. Procesos de construcción mediante herramientas, de modo que la construcción de configuraciones sirve como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados se relacionan con los objetos matemáticos que estos representan.
3. Procesos de razonamiento en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración, para la explicación.

Nuestro estudio, basado en el análisis de respuestas a problemas de demostración de propiedades, dirige la atención a los procesos de visualización y a los procesos de razonamiento.

2.1 Procesos de visualización en la actividad geométrica

Nuestro marco teórico para los procesos de visualización que se desarrollan en la actividad geométrica se fundamenta en la teoría cognitiva de Duval y los estudios de Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010). La visualización en geometría implica, necesariamente, al menos uno de los tres cambios acerca de lo que se ve en una figura: cambio dimensional, cambio figural y cambio de anclaje (Duval, 1998; 2017).

- **Cambio dimensional.** Una configuración 3D/2D -una representación en el plano de un objeto tridimensional- o 2D/2D -la representación en el plano de un objeto bidimensional- está formada por subconfiguraciones de dimensión inferior. Al movimiento interno que permite visualizar estas configuraciones constituyentes lo denominamos *cambio dimensional*. Es un proceso cognitivo básico de la manera como uno ve una figura y está en el centro de la mirada geométrica sobre las figuras. En la figura 2.1,

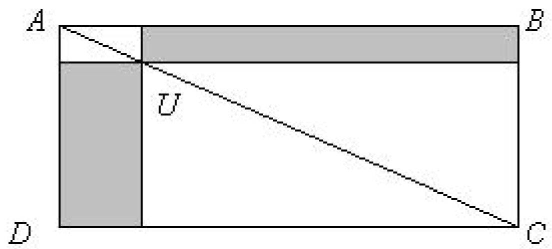


Figura 2.1

el cambio dimensional nos permite identificar puntos (0D) como U, segmentos (1D) como AB o rectángulos (2D) como el rectángulo sombreado de vértices UB.

- **Cambio de anclaje**. Es la asociación entre una configuración y una afirmación matemática. En función de la dirección de dicha asociación hablaremos de visual-discursivo o discursivo-visual.

- **Cambio figural**. Si se añade o quita algún elemento a la configuración inicial o se reconfigura dicha configuración inicial, manipulando las subconfiguraciones como piezas de un puzzle, hablamos de cambio figural.

De acuerdo con las características de la acción realizada por el sujeto sobre una configuración, se pueden distinguir tres tipos de aprehensión, entendidos como distintas formas de *ver* una figura, relacionados con la visualización que caracterizamos como sigue:

2.1.1. Aprehensión Perceptiva

La aprehensión perceptiva se caracteriza por la identificación simple de una configuración. Es aquella que permite identificar o reconocer una forma o un objeto matemático.

Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera en aparecer en el desarrollo cognitivo del alumno (Duval, 1998). Para Duval, “la aprehensión perceptiva tiene la función epistemológica de identificación de los objetos en dos o tres dimensiones. Esto es hecho por procesos cognitivos efectuados automáticamente, y así, de forma inconsciente" (Duval, 1994, p.124) Por ejemplo,

Figura 2.2

la configuración anterior puede ser vista como el tejado de una casa, como la parte superior de una mesa, como cuatro rayas dibujadas en el papel, como la representación (el dibujo) de una figura geométrica (objeto mental), etc.

2.1.2. Aprehensión Discursiva

La aprehensión discursiva es la acción que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas, ...). Es la puerta de entrada matemática a la figura (Duval, 1998). Dicha asociación puede realizarse de dos maneras según el sentido de la transferencia realizada. Los dos sentidos de la transferencia implican lo que se llama cambio de anclaje:

a) Del anclaje visual al anclaje discursivo (aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo, *aprehensión visual-discursiva*)

Al dibujo de la Figura 3 se le pueden asociar distintas afirmaciones matemáticas:

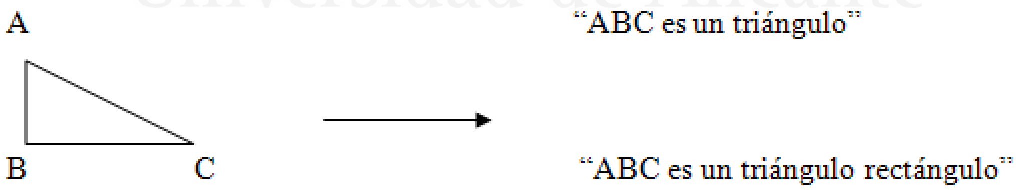


Figura 2.3

El observador debe haber identificado en la configuración de la figura 3 lo que caracteriza a cada una de las afirmaciones. Lo que supone la principal diferencia con respecto a la aprehensión perceptiva descrita anteriormente.

b) Del anclaje discursivo al anclaje visual (aprehensión discursiva con cambio de anclaje de discursivo a visual, *aprehensión discursiva-visual*)

Ante la afirmación "ABCD es un paralelogramo", el observador es capaz de realizar una configuración que refleja alguna de las características de los paralelogramos. Esta no tiene por qué ser la misma para todos los observadores. De igual modo, las afirmaciones matemáticas que podemos asociar a las distintas configuraciones no han de coincidir necesariamente (como se da en el caso de la equivalencia de caracterizaciones-definiciones). Por ejemplo, (Figura 4)

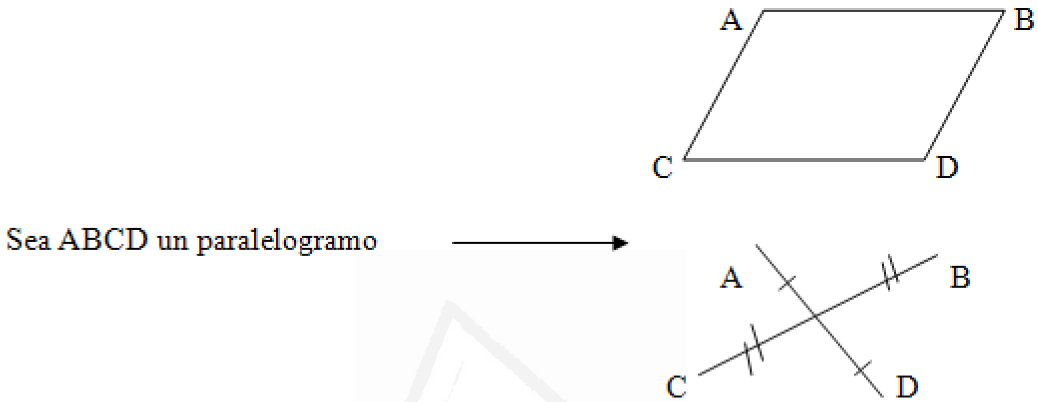


Figura 2.4

2.1.3. Aprehensión Operativa

La aprehensión operativa se produce cuando, para resolver un problema geométrico, el resolutor realiza alguna modificación física o mental de la configuración inicial. Esta "manera de ver" una figura va en contra de la percepción común y requiere la deconstrucción dimensional de las formas. Además, es totalmente independiente de la base de conocimientos del resolutor, pues no está subordinada a un conocimiento de propiedades geométricas (Duval, 2016a). Si bien en estudios anteriores (Prior y Torregrosa, 2013) hemos considerado los dos tipos de aprehensión operativa que describe Duval (1998), consideramos que es conveniente separar la acción de quitar, que implica identificar en la configuración inicial alguna subconfiguración y descartar el resto de elementos, de la acción añadir un nuevo elemento. Por tanto, dependiendo de la modificación producida, hemos distinguido tres tipos de aprehensión operativa:

2.1.3.1. Aprehensión operativa de identificación (AOi).

Se da cuando el resolutor selecciona una subconfiguración, *eliminando*, aunque sea mentalmente, el resto de los elementos geométricos de la configuración inicial. Por ejemplo, en el siguiente enunciado: “Sobre una circunferencia de centro O, marca tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB]. Probar que las líneas rectas (OD) y (CI) son paralelas”.

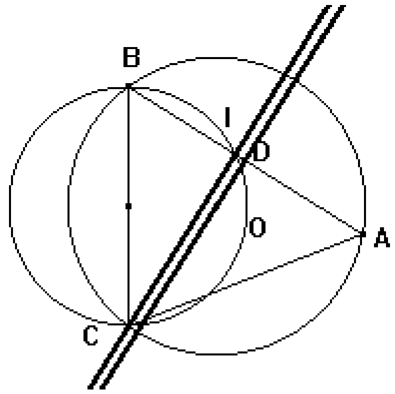


Figura 2.5

Una solución consiste en identificar la subconfiguración formada por la circunferencia de diámetro [BC] con el triángulo BCI para deducir la perpendicularidad de (CI) y (AB), (Figura 2.6).

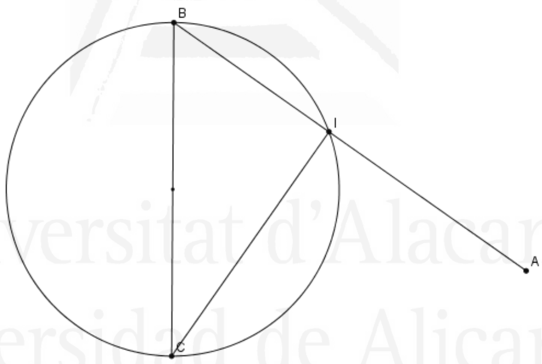


Figura 2.6

Por otro lado, identificar la subconfiguración que forman la circunferencia de centro O, el segmento (AB) con su punto medio y la recta (OD), nos permitirá deducir la perpendicularidad de (OD) y (AB), (Figura 2.7).

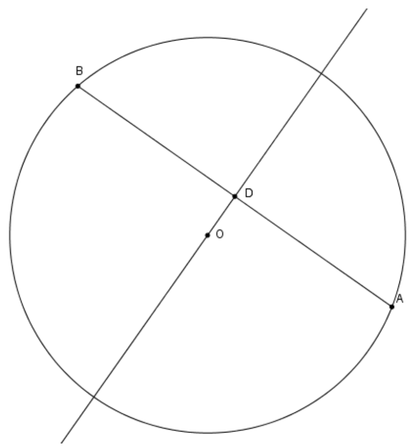


Figura 2.7

(CI) y (OD) son perpendiculares a (AB) de lo que se sigue la tesis solicitada. En ambos casos, todos los elementos de las subconfiguraciones pertinentes para la resolución del problema están presentes en la configuración inicial. El resolutor debe distinguir, de entre todas las subconfiguraciones posibles, aquellas que facilitan la resolución del problema, sin añadir nuevos elementos a la configuración inicial.

2.1.3.2. Aprehensión operativa de cambio figural (AOcf).

Se da cuando el resolutor *añade* algún elemento geométrico a la configuración inicial. Por ejemplo, el siguiente problema “Calcular el área de la figura sombreada” (formada por dos circunferencias concéntricas), teniendo en cuenta que la longitud de la cuerda tangente a la circunferencia interior mide 10 cm”, (Figura 2.8).

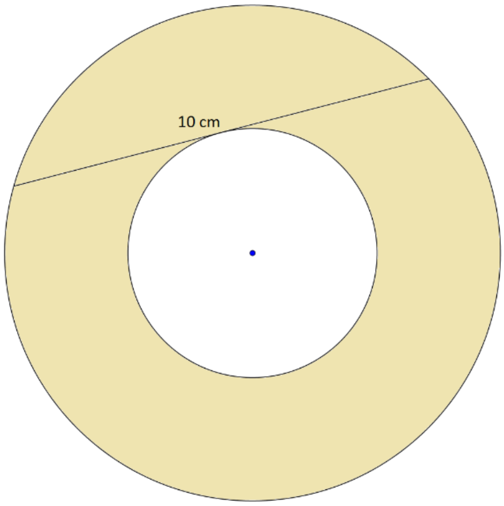


Figura 2.8

Una posible solución pasa por introducir nuevos elementos geométricos en la configuración inicial: el radio de la circunferencia interior que une su centro con el punto de tangencia de la cuerda (r) y el radio de la circunferencia exterior que une su centro con uno de los puntos en los que la cuerda interseca a dicha circunferencia exterior (R), (Figura 2.9).

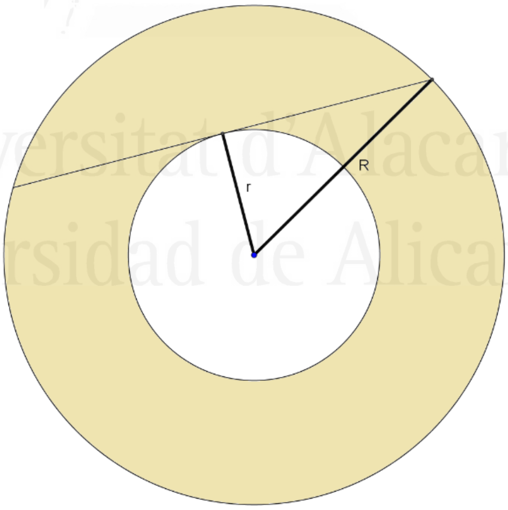


Figura 2.9

El triángulo rectángulo que forman los radios y la mitad de la cuerda nos permite calcular el área pedida:

$A_{sombreada} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo obtenido, $R^2 = r^2 + 5^2$, tenemos que $R^2 - r^2 = 25$, por lo que el área pedida es $A_{sombreada} = \pi\ 25$.

Al proceso de introducir uno o varios elementos en la configuración inicial, en este caso los radios de las circunferencias concéntricas, es a lo que llamamos aprehensión operativa de cambio figural.

2.1.3.3. Aprehensión operativa de reconfiguración (AOr).

Se produce cuando el resolutor *manipula* las subconfiguraciones iniciales moviéndolas como si fueran piezas de un puzzle.

A continuación, en la Figura 10, mostramos una prueba del Teorema de Pitágoras, realizada por Bhaskara (s.XII), donde se pone de manifiesto la aprehensión operativa de reconfiguración. En esta prueba aparecen las siguientes configuraciones:

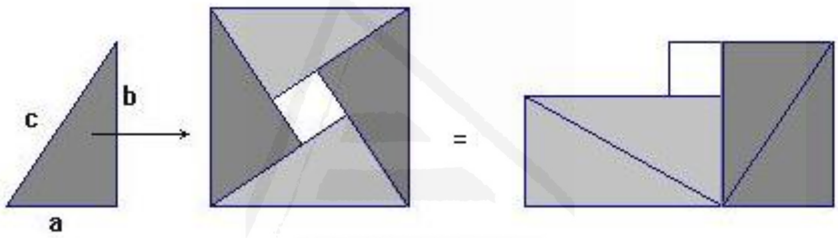


Figura 2.10, obtenida del libro Proofs Without Words, Roger Nelsen, 1993, p.4

El triángulo rectángulo inicial se incluye en una configuración más amplia, un cuadrado de lado c (Figura 2.11).

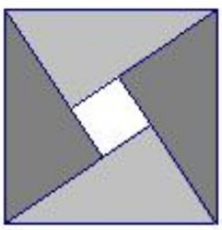


Figura 2.11

A continuación, se modifica la configuración moviendo las subconfiguraciones bidimensionales, cuatro triángulos rectángulos congruentes con el triángulo inicial y un cuadrado central de lado (b-a), como si fueran piezas de un puzzle, para obtener otra configuración (Figura 2.12) de igual área, formada por dos rectángulos de dimensiones a y b, y el mismo cuadrado de lado (b-a).

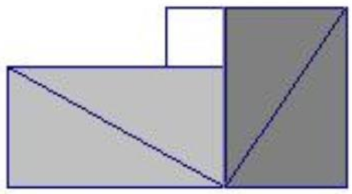


Figura 2.12

A este proceso lo denominamos *aprehensión operativa de reconfiguración*. La igualdad de las áreas de las dos configuraciones nos permite elaborar el siguiente discurso que demuestra el teorema de Pitágoras: $c^2 = (b - a)^2 + 2ab$, de donde se sigue que $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab + 2ab$ para, finalmente, obtener la expresión del teorema $c^2 = b^2 + a^2$.

A la vista de las características que acabamos de describir, se puede afirmar que la aprehensión perceptiva no es una acción específica de la actividad matemática, aunque está conectada con las otras dos aprehensiones (Quesada, 2014). Las aprehensiones discursiva y operativa son la puerta de entrada matemática a una figura, y su desarrollo y coordinación, la clave para la capacitación de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos como han mostrado diversas investigaciones (Torregrosa et al., 2007, 2010; Prior y Torregrosa, 2013; Torregrosa, 2015; Clemente y Llinares, 2014, 2015; Clemente et al., 2017). En la resolución de un problema geométrico, lo que tiene que ser reconocido en una figura original se establece en función del enunciado del problema (aprehensión discursiva), pero su visibilidad, es decir, el carácter más o menos espontáneo de su reconocimiento, depende de operaciones visuales de reorganización (aprehensión operativa).

Se ha encontrado la existencia de factores que pueden facilitar o dificultar la visualización tanto de las subfiguras como de las transformaciones figurales a tener en cuenta en la solución de un problema geométrico (Mesquita, 1989; Duval, 1999, Marmolejo, 2007). Un estudio más detallado de estos factores vinculados a la operación de reconfiguración, relacionados con las modificaciones posicionales, o vinculados a las modificaciones ópticas se puede encontrar en Marmolejo (2014). Algunos ejemplos de estos factores son: si la división en las subfiguras relevantes viene dada o no, la convexidad de la figura relevante, la complementariedad, el doble uso de una subfigura, si la subfigura relevante tiene o no la misma orientación que la figura inicial, la preferencia de las direcciones horizontales y verticales, si la subfigura está dentro del contorno de la figura inicial, etc.

El desarrollo de las aprehensiones discursiva y operativa y de su coordinación (entendida como el desarrollo de la acción coordinada aprehensión discursiva/aprehensión operativa que efectúa el estudiante cuando resuelve un problema de geometría, y que, por tanto, genera una interacción entre (1) la configuración inicial y sus posibles modificaciones y (2) las afirmaciones matemáticas adecuadas) se convierte, pues, en una cuestión crucial en la enseñanza de la geometría.

La aprehensión discursiva se relaciona con los conocimientos matemáticos del alumno que surgen en el diálogo interno que establece el resolutor al observar la figura; pero, ¿hay una forma natural de observar una figura? ¿Qué manera de ver requiere la geometría en la educación secundaria? Por ejemplo, en el caso de la siguiente figura,

Figura 2.13

el alumno puede asociar a dicha figura cualquiera de las siguientes afirmaciones matemáticas: “los lados AB y AC son paralelos”, o una afirmación análoga para los lados AC y BD; “el ángulo ACD es recto”, o cualquier afirmación idéntica para cada uno de los ángulos del rectángulo; “la figura ABDC es un rectángulo”; “los lados AC y BD son congruentes”; “las rectas que contienen a los lados AC y AB son perpendiculares”, y otros muchos enunciados similares. Una configuración tan simple como la de la Figura 13 puede provocar muchas asociaciones, y eso ¡sin modificar la configuración inicial! Se entiende, por tanto, la afirmación de Duval (1998): *“un alumno no tiene el mismo discurso interior acerca de las configuraciones identificadas perceptivamente como el que tiene un matemático”.*

Un alumno no puede *pensar* matemáticamente en un problema geométrico si no tiene una base de conocimientos de donde obtener las asociaciones que puedan llevarlo a su resolución. (Weber, 2001; Llinares, Clemente, 2019. Cuanto más amplia sea la base de conocimientos del resolutor, más rico será el discurso interno acerca de las distintas afirmaciones matemáticas que se pueden asociar a una configuración. En consecuencia, se hace necesaria la adquisición por parte de los estudiantes de un bagaje mínimo de conocimientos acerca de las configuraciones elementales, sin el cual no pueden introducirse en el trabajo geométrico característico de la etapa secundaria ni desarrollar su conocimiento estratégico (Llinares y Clemente, 2019) que se entiende como "*la capacidad de ver algunos enunciados geométricos específicos como premisas de una proposición geométrica que se puede utilizar para deducir proposiciones intermedias o la conclusión*".

En cuanto al desarrollo de la aprehensión operativa, debemos distinguir sus tipos (Identificación, cambio figural y reconfiguración) y los factores internos que facilitan o inhiben la visibilidad de las aprehensiones operativas. En una figura tan sencilla como la Figura 2.13 podemos añadir diagonales, mediatrices de los lados, ángulos externos, puntos medios.… Estos cambios figurales pueden llevarnos a identificar triángulos, rombos, paralelogramos…, que a su vez podrán ser manipulados como piezas de un puzzle para obtener reconfiguraciones de la configuración inicial. ¡El número de posibilidades parece inagotable!

Parece ingenuo pensar que un alumno enfrentado a la tarea de resolver un problema geométrico que no sólo demanda la visualización de ciertas configuraciones, sino también las asociaciones matemáticas pertinentes y la elaboración de un discurso adecuado al contexto matemático en el que se presenta la tarea al estudiante, podrá descubrir todas las posibilidades heurísticas que una configuración proporciona. Se hace necesario un entrenamiento que proporcione al alumno experiencias en la visibilidad de las configuraciones que una figura permite para que puedan ser utilizadas con posterioridad en la resolución de problemas geométricos.

La práctica de los distintos procesos de visualización, de las distintas aprehensiones, debería abordarse de manera independiente y, sólo tras este periodo, el alumno estaría en condiciones de desarrollar su coordinación, necesaria para el éxito en la resolución de problemas geométricos.

2. 2. Modelo de razonamiento configural

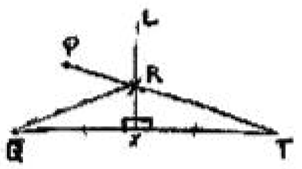
El estudio de la coordinación necesaria entre las aprehensiones operativa y discursiva en la resolución de problemas de probar geométricos con estudiantes para maestro ha permitido desarrollar un modelo teórico al que se ha denominado *razonamiento configural* (Torregrosa y Quesada, 2007) y (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010). La resolución de problemas de probar en geometría en los que se proporciona una configuración geométrica implica la coordinación de aprehensiones discursivas y operativas, y puede desembocar en dos tipos de desenlaces: 1) cuando la coordinación da una solución al problema, y 2) cuando la coordinación no consigue ninguna solución.

1. La coordinación da una solución al problema. Y en este caso se distinguen:
    a. *Truncamiento*, que se produce cuando la coordinación proporciona la idea para resolver deductivamente el problema.

A continuación, tenemos un ejemplo en el que se analiza el proceso configural seguido en la resolución del siguiente problema y que permite identificar la característica específica del truncamiento.

Problema 1.- En un plano, la recta L es mediatriz del segmento $\overline{QT}$. Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R. Probar que mPT = mPR + mRQ.

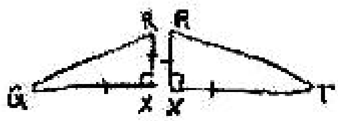
1.



2) La mediatriz L es perpendicular a $\overline{QT}$_(forma ángulos rectos)._

3) Hay que demostrar que la distancia *RQ* es la misma que la de *RT*.

4) Determino los triángulos ΔQRX y ΔTRX y tengo:



5) Congruencia LAL.

6) Lado $RX \equiv XR$ (lado común).

7) Ángulo RXQ ≡ RXT (la mediatriz es perpendicular y forma ángulos rectos: $\widehat{RXQ}$ = 90º = $\widehat{RXT}$).

8) Lado QX ≡ TX (la mediatriz divide al segmento en partes iguales, es perpendicular y pasa por el punto medio).

9) La distancia de RQ ≡ RT .

Figura 2.14. Fragmento de la transcripción de la solución

Observamos que en el punto 1) hay un cambio de representación del texto discursivo hacia una configuración inicial (aprehensión discursiva que muestra un cambio de anclaje de discursivo a visual). El texto en el punto 2) denota otra aprehensión discursiva (el estudiante asocia la definición de mediatriz a la configuración y añade las marcas de ángulo recto, es decir, modifica la configuración inicial). En 3) el estudiante identifica la igualdad a demostrar (aprehensión discursiva que proporciona la idea que lleva a la solución) y en el punto 4) extrae de la configuración inicial los dos triángulos ΔQRX y ΔTRX (aprehensión operativa de reconfiguración). Conjetura a la que puede aplicarse el criterio de congruencia lado-ángulo-lado (LAL) en 5) aparentemente una aprehensión discursiva y en 6), 7) y 8) verifica las hipótesis de esta congruencia obteniendo la tesis de la afirmación en 9), realizando un discurso teórico.

b. *Conjetura sin demostración*, cuando la coordinación permite resolver el problema aceptando conjeturas mediante percepción simple.
Ejemplo de conjetura sin demostración

Problema 2. -Sea el cuadrado ACDF que tiene como área 1 m^2. B y E son puntos medios de AC y FD respectivamente. Calcula el área del paralelogramo BCEF.

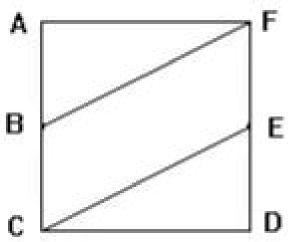


Figura 2.15

Solución:

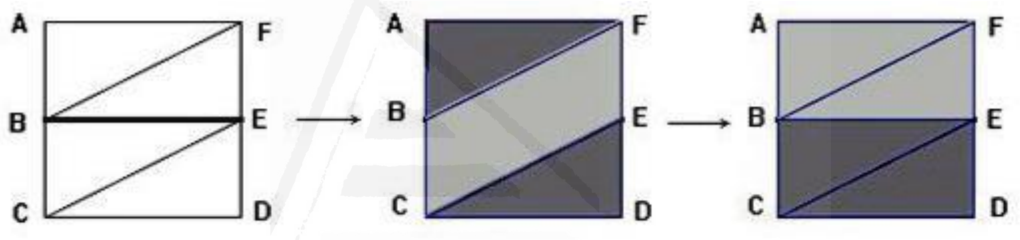


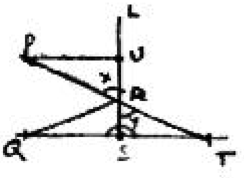
Figura 2.16

Este problema puede resolverse perceptivamente mediante una aprehensión operativa de cambio figural, es decir, añadiendo a la configuración inicial algún elemento geométrico (en este caso el segmento BE de la configuración de la izquierda) y manipulando la configuración central como piezas de un rompecabezas (aprehensión operativa de reconfiguración) para obtener una configuración (a la derecha) en donde se percibe que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrado. En este caso, las distintas conjeturas (como por ejemplo considerar que los cuatros triángulos son semejantes) no son probadas, sino admitidas visualmente, es decir, admitidas mediante la percepción simple de la configuración.

2. La coordinación no consigue ninguna solución. Denominamos a esta situación *bucle*.

Utilizando el mismo Problema 1, mostramos en la Figura 2.17 un ejemplo de bucle a partir de la trascripción completa de la solución dada por otro estudiante.

1) Demostrar mPT = mPR + mPQ

2) 

3) QS ≡ ST. Ya que al estar cortada por_la mediana, la corta en dos partes iguales.

4) Por lo tanto deducimos_que QR ≡ RT.

5) Para_demostrar PR ≡ RT ? ΔPRU ≡ ΔRST.

6) 1) RU ≡ RS

7) 2) ST ≡ PU x lados opuestos a ángulos congruentes.

^ ^_

8) 3) PXU ≡ TYS_

9) LAL por lo_que ΔPRU ≡ ΔRST ? PR ≡ RT

10) Por lo_que RT_ ≡ RQ

11) PT = PR + RT

Figura 2.17. Transcripción de la solución

2.3. Procedimientos de validación de una proposición

Una característica esencial de las afirmaciones que se pueden asociar a una configuración es que éstas deben ser verdaderas. Pero, ¿de cuántas formas verifican nuestros alumnos las afirmaciones que utilizan? ¿Cuáles son válidas en el contexto matemático? (Chazan, 1993; Pedemonte, 2007; Dimmel, Herbst, 2020)

La resolución de un problema geométrico en el que se demanda que se pruebe una propiedad geométrica requiere que el resolutor elabore un discurso que conecte las hipótesis del enunciado con la tesis. Obviamente, las proposiciones que utilice deben ser ciertas. Por tanto, se hace necesario distinguir el papel de los procedimientos de validación en la práctica profesional de los matemáticos y sus diferencias en la práctica escolar. Cabassut et al. (2012) describen las conceptualizaciones de la prueba de los matemáticos y las contrastan con las de los educadores matemáticos. Los autores argumentan que los matemáticos en ejercicio no se basan en ninguna definición formal específica de prueba, pero parecen saber qué es una prueba. Por otro lado, las concepciones de prueba de los educadores matemáticos derivan de la necesidad de enseñar a los estudiantes a construir pruebas y reconocer las sutiles diferencias entre argumentación y prueba matemática. Enfrentado a la necesidad de probar una proposición, el matemático únicamente puede hacer uso de proposiciones previamente probadas (teoremas) y de los axiomas del marco teórico en el que se enuncia la proposición. En las matemáticas escolares, el alumno acepta la verdad de ciertas proposiciones por medio de procedimientos de validación externos, en general, la autoridad del profesor. Estas argumentaciones se apoyan en fuentes supra-racionales, es decir, basadas en los motivos personales de quien argumenta (Villoro, 2002). Rigo et al. (2011), en un estudio de caso longitudinal, describen un patrón de racionalidad que denominan *Racionalidad por Autoridad* en el que la verdad de un enunciado con contenido matemático se sustenta en la autoridad del libro, de las matemáticas o del profesor. Así pues, en el contexto de nuestro estudio, cuando un estudiante asocie una afirmación matemática que forma parte de su experiencia escolar a una configuración, entenderemos que dicha asociación es válida aunque el estudiante no pueda probar su veracidad. En nuestro trabajo hablamos de procedimiento de validación para establecer la verdad de tal o cual afirmación. Esto es, el procedimiento utilizado por el alumno para establecer la verdad, desde su punto de vista, de una proposición que utiliza en su cadena de razonamientos para probar la propiedad geométrica solicitada. Distinguimos los siguientes tipos:

1. *Procedimiento de validación perceptivo o empírico*. Más allá del registro de la lengua, hay un acceso a lo representado dado por el contenido de las proposiciones. Este acceso puede ser inmediato o instrumental, es decir, directo o sometido a procedimientos experimentales.

2. *Procedimiento de validación externo*. La certeza de la proposición proviene de que otros estén de acuerdo con su verdad (profesor, resto del grupo, conocimientos anteriores, …). La afirmación se tiene por cierta y no se cuestiona dicho valor.

3. *Procedimiento de validación deductivo*. La proposición se puede situar deductivamente en una serie de otras proposiciones, donde las proposiciones anteriores tienen valor de verdad.

2.4. Paradigmas geométricos y espacio de trabajo geométrico

Usamos el marco teórico de los Paradigmas Geométricos y el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) desarrollado por Houdement y Kuzniak, que toma en cuenta la naturaleza del trabajo geométrico cuando un resolutor se enfrenta a un problema en geometría. Como ya hemos comentado, la palabra Geometría adopta diferentes significados que dependen de la propia evolución de las Matemáticas como ciencia y de las instituciones escolares. Esta diversidad es abordada por Houdement y Kuzniak (1999, 2000, 2006) a través de la noción de paradigma introducida por Kuhn (1962). Los Paradigmas y Espacios de trabajo geométrico nos invitan a replantear la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, pues ofrecen elementos para que el alumno (y el profesor) construya un espacio de trabajo apropiado para enfrentar un problema geométrico.

Los autores plantean la existencia de tres tipos de geometrías o paradigmas geométricos, a saber, Geometría natural (GI), Geometría axiomática natural (GII) y Geometría axiomática formalista (GIII), cuyas características explicamos a continuación:

1. Geometría natural (GI). Esta geometría se construye en relación con el mundo real, y los objetos, definidos por el modelo geométrico, se corresponden con objetos de la realidad espacial y local del individuo. Las pruebas pueden apoyarse en dibujos o en observaciones realizadas con el uso de instrumentos de medición, tales como regla, compás o transportador, y se utilizan artefactos para la representación del objeto (no

son objetos abstractos, sino objetos concretos). La Geometría natural puede ser vista como modelo del espacio.

2. Geometría axiomática natural (GII). Aquí la geometría se construye sobre un modelo cercano a la realidad, concebida como el esquema de la realidad. Sin embargo, el razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático, que puede ser incompleto y parcial pero ligado a la intuición. En esta Geometría, objetos como figuras existen sólo mediante su definición, incluso si esta definición está basada en algunas características de objetos verdaderos y existentes. La Geometría Axiomática Natural puede interpretarse como un ejemplo de sistema deductivo.

3. Geometría axiomática formal (GIII). La principal característica de este paradigma es su desconexión con la realidad física. Los objetos geométricos en esta geometría provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo geométrico elegido. El sistema de axiomas es completo y desconectado de la intuición. El razonamiento de validación se realiza exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente.

El Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) es un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven problemas geométricos (Kuzniak et a., 2016 p. 241), diseñado por y para el resolutor mediante la articulación de dos planos (Kuzniak, 2011): uno de naturaleza epistemológica, en relación estrecha con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado y, el otro, de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas. Las componentes características de la actividad geométrica en el plano epistemológico son:

1. Un espacio real y local como soporte material con un conjunto de objetos concretos y tangibles.
2. Un conjunto de artefactos como instrumentos de dibujo o programas informáticos.
3. Un sistema teórico de referencia basado en definiciones y propiedades.

El plano cognitivo viene determinado por los procesos involucrados en la actividad geométrica según Duval (1998): *visualización*, *construcción* y *razonamiento* que hemos descrito anteriormente. Los dos planos se articulan mediante las denominadas génesis, tal y como se muestra en la siguiente imagen

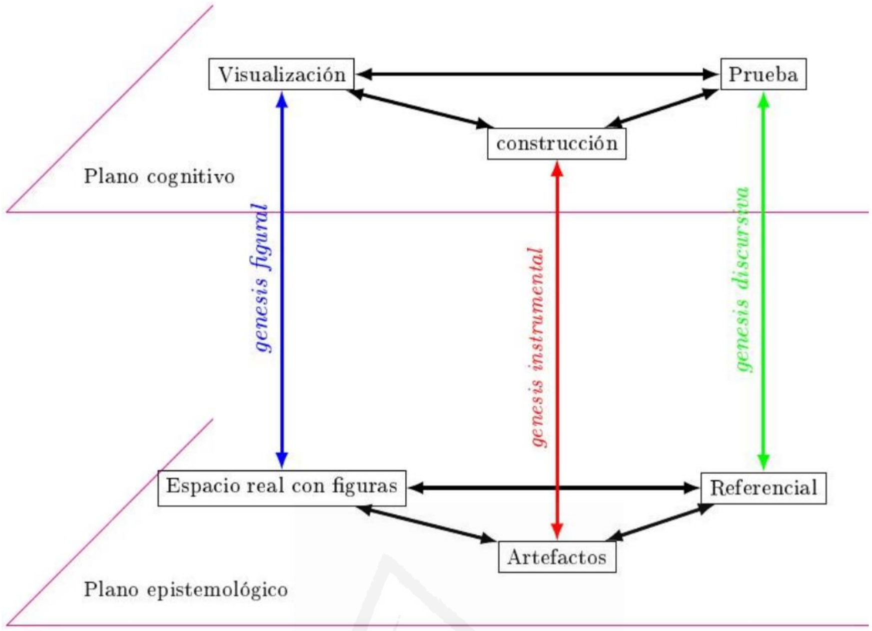


Figura 2.18. ETG y sus génesis en Kuzniak et al. (2016)

Tal y como afirma Kuzniak (2011), ser geómetra es no confundir una evidencia nacida de la intuición con una información nacida de la experimentación, y el resultado de una experimentación con la conclusión de un razonamiento. El ETG es un sistema dinámico en el que se articulan las componentes de los planos cognitivo y epistemológico, y en el que se evidencian las distintas relaciones que dependen de la tarea geométrica (Montoya-Delgadillo, 2014). En relación con la justificación de afirmaciones matemáticas, los distintos ETG nos permiten conceptualizar el significado de la demostración en el sentido de Stylianides (2007). El autor define una demostración como un argumento matemático, una sucesión de aseveraciones sobre una afirmación matemática con las siguientes características:

1. Usa enunciados aceptados por la comunidad (en este caso el aula) que son verdaderos y cuya veracidad no ha de ser justificada.
2. Emplea formas de razonamiento (modos de argumentación) válidas y conocidas o al alcance de su comunidad.
3. Escribe sus pruebas utilizando las formas de expresión (modos de representación de un argumento) propias y conocidas por su comunidad

El trabajo matemático en un entorno escolar se puede describir gracias a tres tipos de ETG dependiendo de la función y de la reflexión del resolutor cuando se enfrenta a un problema geométrico. Estos son: el ETG de referencia, el ETG idóneo y el ETG personal.

1. *ETG de referencia*. Se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Se dice que el utilizador es un experto epistémico. Se puede considerar como el ETG institucional de la comunidad de los matemáticos (Ibid, 2006, p.15).
2. *ETG idóneo*. Se refiere al espacio definido en términos didácticos. En este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo geométrico. Es el ETG del profesor que acondiciona el ETG de referencia para permitir su uso en clase.
3. *ETG personal*. Se refiere al espacio definido por un resolutor real (estudiante, profesor o investigador), fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas.

A continuación, utilizamos un ejemplo para ilustrar las implicaciones que los diferentes espacios de trabajo personales tienen en las respuestas a un mismo problema. Se describen dos posibles respuestas a un mismo enunciado. Ambas se basan en el mismo razonamiento por reducción al absurdo. Sin embargo, la diferencia en el espacio de trabajo geométrico asumido por los resolutores les conduce a producir distintos razonamientos configurales que les permiten resolver el problema de acuerdo con las características de su ETG personal.

Problema: Dado el triángulo ΔABC rectángulo en B tal que $\overline{AB}$= 4 cm y $\overline{BC}$= 2 cm. La semirrecta [Ax) es perpendicular a la recta (AB). M es un punto de la semirrecta [Ax). ¿Existe un punto M tal que el triángulo ΔACM sea equilátero? Justifique.

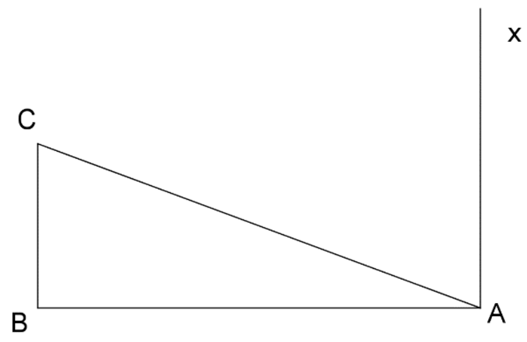


Figura 2.19

Respuesta 1:

Es imposible. Se puede explicar teniendo en cuenta que en un triángulo equilátero cada uno de los ángulos interiores mide 60º. He medido el ángulo $\widehat{CAM}$ con un transportador y he obtenido 64º, por tanto, no se podrá formar un triángulo equilátero.

Respuesta 2:

No existe. La tangente del ángulo $\widehat{BAC}$ es igual al cociente de los lados $\overline{BC}$=2 y $\overline{AB}$=4, por tanto, se puede obtener el valor del ángulo $\widehat{BAC}$ = arc tg 0,5 = 26,565 º lo que implica que el ángulo $\widehat{CAM}$ = 90 - 26,565= 63,435º ≠ 60º, por lo que el triángulo ΔCAM no puede ser equilátero.

Analizamos la organización discursiva de la respuesta 1:

La estructura de la respuesta 1 al problema planteado se basa en el siguiente razonamiento por reducción al absurdo: "Suponemos que el triángulo equilátero existe, esta suposición nos lleva a una contradicción, y por tanto dicho triángulo es imposible".

Hay un primer paso deductivo, propio de la Geometría Axiomática Natural, que tiene la siguiente estructura (Figura 2.20)

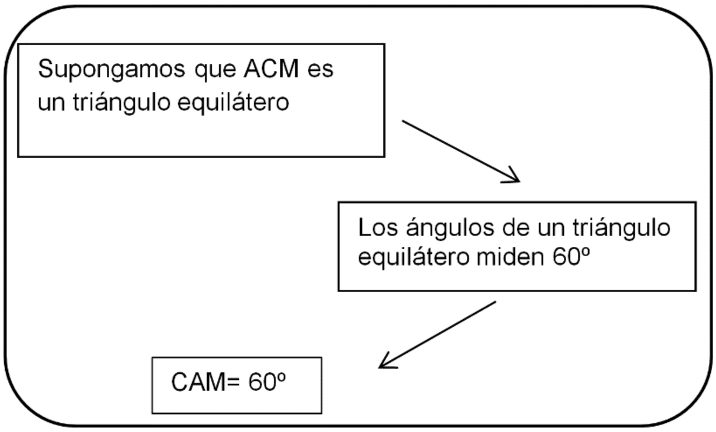


Figura 2.20

En el segundo paso, identifica el ángulo $\widehat{CAM}$ y lo mide, obteniendo un valor de 64º. Este procedimiento experimental es característico del trabajo en el espacio que hemos denominado Geometría Natural. Este valor del ángulo $\widehat{CAM}$ genera una contradicción que le lleva a descartar la hipótesis de partida, concluyendo que el triángulo equilátero es imposible.

Razonamiento configural asociado a la respuesta 1:

De la respuesta a la tarea podemos inferir que el resolutor desarrolla el siguiente razonamiento configural:

1. Aprehensión operativa de cambio figural (AOcf). El resolutor añade (mentalmente) el punto M y el segmento CM.

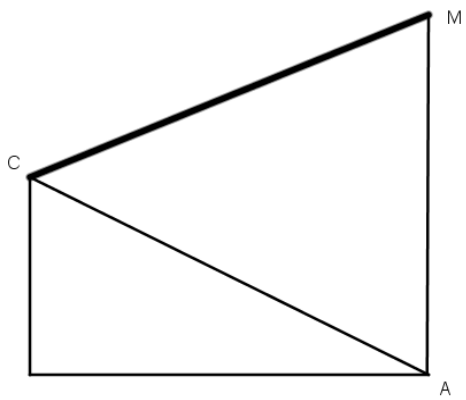


Figura 2.21

2. Aprehensión operativa de identificación (AOi). Aísla el triángulo ACM.

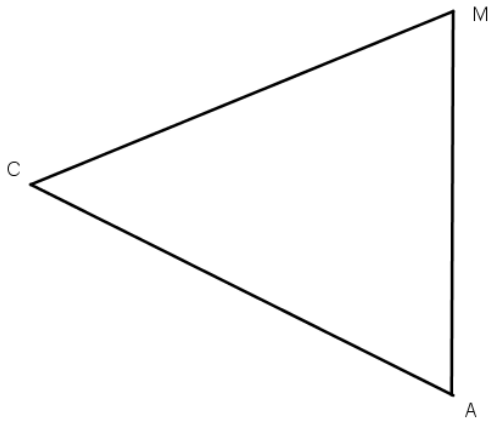


Figura 2.22

3. Aprehensión discursiva. Al triángulo ∆ACM le asocia la afirmación matemática “el triángulo ∆ACM es equilátero”.

Este razonamiento configural (pasos 1, 2 y 3) le permite deducir, utilizando la proposición que afirma que todos los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60º, que el ángulo $\widehat{CAM}$ mide 60º. Así concluye su primer paso deductivo.

A continuación,

4. Realiza una aprehensión operativa de identificación, aislando los elementos que forman el ángulo $\widehat{CAM}$ (Figura 2.23)

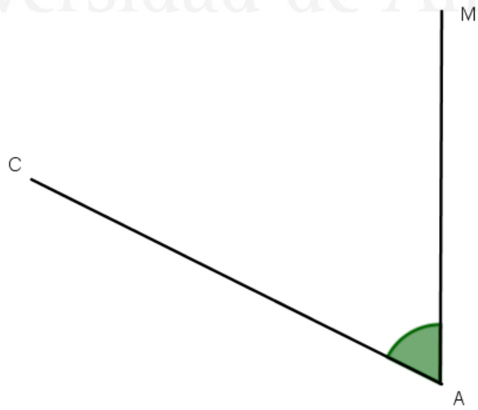


Figura 2.23

5. Identifica el elemento que debe obtener, en este caso el valor del ángulo $\widehat{CAM}$, y lo mide utilizando un instrumento de medida. Obtiene un valor de 64º, una contradicción que le permite concluir dando una respuesta negativa a la pregunta del problema.

Organización discursiva de la respuesta 2:

El razonamiento por reducción al absurdo que se realiza en esta segunda respuesta es idéntico al de la primera, al igual que el primer paso deductivo. Sin embargo, su segundo paso deductivo toma ahora la siguiente forma:

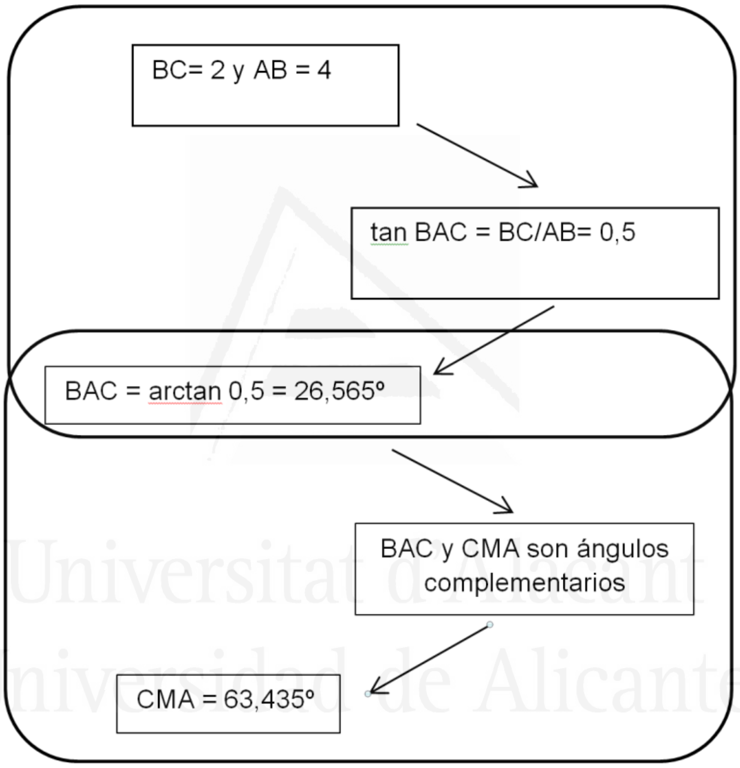


Figura 2.24

Estos pasos deductivos enlazados le proporcionan la contradicción que le permite afirmar que no existirá tal triángulo equilátero.

Razonamiento configural asociado a la respuesta 2:

El razonamiento configural que le permite afirmar la necesidad de que el ángulo $\widehat{CAM}$ tenga una amplitud de 60º es exactamente el mismo que en la respuesta 1. Sin embargo, ahora para obtener el valor del ángulo $\widehat{CAM}$ que proporcione la contradicción que soluciona el problema, realiza el siguiente razonamiento configural.

1. Aprehensión operativa de identificación, al aislar el triángulo ΔCBA.

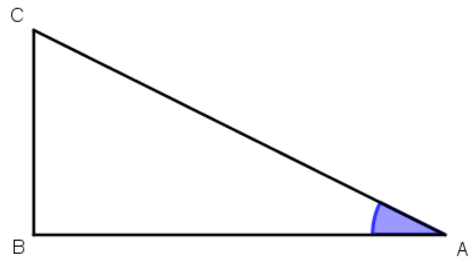


Figura 2.25

2. Aprehensión discursiva. "tag $\widehat{BAC}$ = $\overline{BC}/\overline{BA}$", lo que implica $\widehat{BAC}$ = arctag $\overline{BC}/\overline{BA}$.

3. Aprehensión operativa de identificación. Aísla la siguiente configuración (ángulos complementarios)

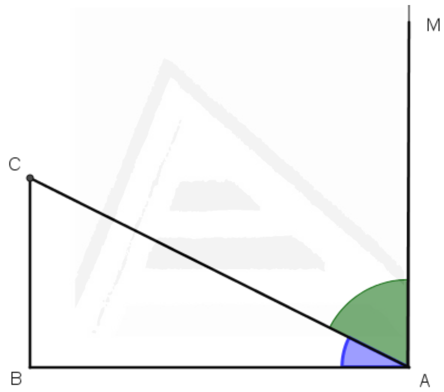


Figura 2.26

4. Aprehensión discursiva. Los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{CAM}$ son complementarios.

Las hipótesis de partida $\overline{BC}$=2 y $\overline{AB}$ = 4 le permiten realizar un razonamiento configural que desemboca en un truncamiento para obtener deductivamente que el valor del ángulo $\widehat{CAM}$ es de 63,435º aproximadamente, y obtener así la contradicción que permite afirmar que no existe el punto M sobre la semirrecta [Ax) que forme un triángulo equilátero con los puntos C y A.

Un solo enunciado y un mismo razonamiento por reducción al absurdo producen respuestas diferentes. La diferencia radica en que la respuesta 1 se construye con características propias de los dos paradigmas geométricos: Geometría Natural y Geometría

Axiomática Natural, mientras que la respuesta 2 se produce en el ámbito de la Geometría Axiomática Natural. ¿Cuál es la clave para entender la complejidad que encontramos?

Respecto a esta problemática, asunto clave de nuestra investigación, los estudios sobre el razonamiento en contexto geométrico han revelado que son necesarias dos tomas de conciencia por parte de los alumnos: la distinción entre dibujo y figura (Duval, 2007), que hemos explicado en el capítulo 1, y el cambio de valor epistémico de una proposición en una prueba (Llinares, Clemente, 2019), que explicamos en la siguiente sección.

2.5. Procesos discursivos en la justificación de una propiedad geométrica.

Razonar en matemáticas no funciona de la misma forma que razonar dentro de una discusión que se dirige a convencer a otras personas en un contexto no matemático.

Comprender las dificultades de aprender a resolver problemas de probar en contexto geométrico requiere un análisis pormenorizado de las características de los procesos que han de coordinarse para su resolución (Prior y Torregrosa, 2013; Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010). Lo que se ve en la figura (subconfiguraciones, nuevos elementos geométricos que se pueden añadir, posibles reorganizaciones de la configuración inicial, ...) ha de coordinarse con lo que se sabe (definiciones, teoremas, ...) para producir un discurso con unas características específicas que dependen del contexto matemático (Clemente y Llinares, 2013, 2014, 2015; Llinares y Clemente, 2014; Clemente et al., 2015). Durante el razonamiento configural el alumno manipula la figura (aprehensión operativa) pero es posible que las definiciones y teoremas conocidos guíen, de alguna manera, el proceso de identificación de subconfiguraciones relevantes (Clemente y Llinares, 2015). Sin embargo, este razonamiento configural no es suficiente para producir una prueba matemática aun cuando proporciona las ideas clave.

El razonamiento no puede circunscribirse únicamente al ámbito configural, sino que está indisociablemente unido a los procesos de razonamiento discursivos propios de cada contexto. No tiene sentido analizar el razonamiento configural que un estudiante realiza cuando intenta resolver un problema en el que se le pide demostrar una propiedad geométrica sin tener en cuenta los procesos discursivos, pues el proceso configural está influenciado por el tipo de discurso que el resolutor considera que debe realizar para dar respuesta al problema planteado, y este está influenciado por las creencias sobre qué es un razonamiento matemático válido.

El problema crucial desde un punto de vista cognitivo, y por lo tanto para la enseñanza, es: ¿el paso de la argumentación o explicación a la demostración sucede de forma natural o requiere una aproximación específica para aprenderlo? A menudo los profesores creen que este tránsito es fácil porque sienten que la principal dificultad es descubrir qué propiedades usar, visualizar las imágenes sugerentes o llegar a las ideas correctas. Es decir, creen que el *razonamiento configural* es suficiente para proporcionar una prueba y que lo que resta, el discurso, es únicamente necesario para explicar dicho razonamiento. Sin embargo, tras el truncamiento hay una segunda etapa cuasi-independiente del razonamiento configural en la que el estudiante, que ha descubierto cuál o cuáles son las hipótesis y teoremas necesarios para alcanzar la tesis pedida, aborda la organización discursiva de una prueba matemática en base a los dos niveles de organización discursiva que describiremos más adelante, pudiendo *olvidarse* de las imágenes que le posibilitaron conseguir las *ideas* que le permiten resolver deductivamente el problema (Clemente et al., 2017). Por tanto, para resolver la tarea, el resolutor debe organizar un discurso atendiendo ahora no a la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas, sino a la organización discursiva propia de la prueba matemática válida. Y esta no es una actividad trivial ni natural para el estudiante, sino algo que debe ser aprendido y que, en la mayoría de los casos, requiere de una instrucción directa.

Si argumentamos que no hay un tránsito natural de la explicación a la prueba matemática (el razonamiento matemático válido) y que, por tanto, es necesaria una aproximación didáctica a su enseñanza/aprendizaje, es imprescindible hacerse las siguientes preguntas: ¿Por qué escribir una prueba matemática? ¿Qué es un razonamiento matemático válido? ¿Por qué es diferente de un razonamiento en otro ámbito? ¿Qué consigue un razonamiento matemático válido? Duval (2007) afirma que el resultado de cualquier razonamiento (matemático o no) no es sólo producir nueva información, sino también, y, sobre todo, cambiar el *valor epistémico* de una proposición cuya verdad queremos probar o de la que intentamos convencer a alguien.

Cuando una tarea geométrica nos demanda probar una afirmación matemática, no nos pide que encontremos nueva información, puesto que la tesis a demostrar viene dada en el enunciado, sino que cambiemos su valor epistémico. Por tanto, nos centraremos en el valor epistémico, donde radica la clave que nos va a permitir diferenciar lo que una explicación consigue de lo que una prueba matemática consigue.

Una proposición enunciada tiene un valor lógico (verdadero, falso o indecidible) de acuerdo con el marco teórico en el que se enuncia. Por ejemplo, en el marco de la geometría euclidiana, el valor lógico de la proposición *"Por un punto P exterior a una recta r pasa una única recta paralela a r"* es verdadero. Sin embargo, esta misma proposición es falsa en el marco de la geometría hiperbólica. En general, una tarea geométrica de probar adecuada implica que el resolutor desconozca el valor lógico de una proposición enunciada y, por tanto, asigne un **valor epistémico** (evidente, probable, imposible, razonable, poco probable, verosímil, …) a la tesis a probar. La primera característica específica de la demostración matemática es de naturaleza cognitiva: el valor epistémico de una proposición depende de su estatus y no de su contenido (Duval, 2007). Cuando esta asignación se realiza de acuerdo con la base de conocimientos del sujeto, hablamos de valor epistémico semántico, que centra su atención en el contenido del enunciado. Benítez et al. (2016, p. 190) caracterizan algunos valores epistémicos semánticos que se pueden asociar a una proposición (tabla 2.1)

Valor epistémico semántico	Caracterización
Evidente	Es el valor inducido por la comprensión del contenido de la proposición; este valor será tanto más fuerte cuanto corresponda a una evidencia perceptiva de una figura o dibujo.
Posible	Es el valor epistémico que puede tener la necesidad de convencimiento de la proposición.
Necesario	Es el valor epistémico propio del seguimiento para dar continuidad a una proposición en relación a otras.
Neutro	Es el valor epistémico imparcial, donde se trata de proposiciones cuyo contenido no se comprende sea por el vocabulario o por falta de conocimientos previos.
Absurdo	El valor epistémico de la proposición es imposible, se rechaza su pertinencia.

Tabla 2.1. Caracterización de los valores epistémicos semánticos

Tal y como hemos mencionado, en la prueba matemática el estatus operativo de cada proposición se fija por su estatus teórico y, por tanto, su valor epistémico depende de su valor teórico y no de su contenido. Cuando esta asignación se realiza de acuerdo con el marco de referencia elegido para el conocimiento, en base al estatus de la proposición dentro del marco teórico en el que se enuncia, se denomina valor epistémico teórico. En la siguiente tabla se recoge los diferentes valores epistémicos teóricos que una proposición tiene en función de su estatus dentro del marco de conocimiento teórico en el que es enunciada.

Valor epistémico teórico	Caracterización
Evidente	Es el valor epistémico que se ha de asociar a una proposición que tiene el estatus de axioma dentro del marco teórico de conocimiento.
Posible	Es el valor epistémico asociado a una proposición que tiene el estatus de conjetura en el marco teórico de conocimiento.
Cierto	Es el valor epistémico propio de un teorema en el marco teórico de conocimiento.

Tabla 2.2. Caracterización de los valores epistémicos teóricos

El valor epistémico semántico que un individuo asocia a una proposición viene determinado por la comprensión del contenido de la proposición. Así, dos individuos distintos (experto y aprendiz) darán, con frecuencia, diferentes valores epistémicos a una misma proposición, como consecuencia de su distinta comprensión de la misma. Mientras que un experto puede asignar a una proposición el valor epistémico *probable*, a un estudiante le puede parecer *seguro* o *absurdo*. Sin embargo, el valor epistémico teórico depende, exclusivamente, del estatus de la proposición en el marco teórico en el que ha sido enunciada. Así, axioma se corresponde con *evidente*, teorema con *cierto*, conjetura con *plausible*, y no entra en juego la comprensión del contenido de la proposición por parte del individuo.

Y aquí nos encontramos con la segunda característica, la distinción más importante a tener en cuenta, de naturaleza epistemológica: en otros campos como la botánica, historia, geología o química, o en la geometría natural propia de la etapa primaria, la verdad de una proposición se puede conectar a diferentes valores epistémicos en relación a datos procedentes de la percepción, de algún aparato técnico o de testimonios (procedimientos de verificación perceptivos o externos en Prior y Torregrosa, 2013); en cambio, en la geometría propia de la etapa secundaria, así como en la Matemática profesional en general, la veracidad de una proposición únicamente se puede conectar con el valor epistémico *necesario*, es decir, de lo que anteriormente se ha dicho se sigue la necesidad de la afirmación realizada, o dicho de otro modo, su inevitabilidad. En palabras de Duval (2007) *"siempre que se ve que expresar una determinada proposición es la única conclusión posible de lo que se ha afirmado previamente, aunque vaya en contra de la evidencia perceptual o de un acuerdo general."* (p. 149)

Una de las principales dificultades a las que se enfrenta la enseñanza de la prueba matemática es que la convicción de la veracidad de una proposición no se consigue exclusivamente con una prueba, de hecho, éstas no tienen sentido para los estudiantes en los casos evidentes o fácilmente verificables (de Villiers, 1993). Lo que la prueba matemática consigue sólo se requiere en el ámbito matemático. Dicha organización discursiva (prueba) es un proceso costoso generalmente y sólo es abordado cuando ya existe un convencimiento personal o consensuado sobre la veracidad de la proposición. Cuando se demuestra una proposición, primero se construye una explicación (argumento informal que convence a uno mismo, o a otros, de la veracidad de la afirmación) y entonces se usa como base para construir una demostración (Zazkis y otros, 2016).

Una explicación puede ser vista como una forma de persuasión que convence a uno mismo, o a otros, de la veracidad de una afirmación matemática. Una explicación consigue, por tanto, un cambio en el valor epistémico semántico de la proposición enunciada. En cambio, una prueba matemática es una forma de validación en la que uno se convence de que una afirmación matemática es una consecuencia lógica de otras afirmaciones que se sabe que son ciertas (Douek, 2009), por tanto, consigue cambiar el valor epistémico teórico y, en consecuencia, el valor lógico de la afirmación matemática enunciada. Lo que era una conjetura en el marco teórico en el que se propone la tarea pasa ser un teorema por causa de la prueba matemática realizada.

En la organización discursiva propia de la prueba matemática, el estatus de las proposiciones es el componente predominante de significado, más que su contenido. El estatus de cada proposición (premisa, conclusión, tercera afirmación) se fija por su estatus teórico (axioma, definición, teorema, conjetura, ...) y, por lo tanto, su valor epistémico se hace dependiente de su valor teórico y no de su contenido. Es decir, una proposición tiene un valor epistémico teórico que no depende en absoluto de la subjetividad del individuo sino de su estatus en el marco teórico en el que dicha proposición es enunciada. Esto es casi siempre lo contrario de lo que ocurre en una explicación en un discurso ordinario (Duval, 2007).

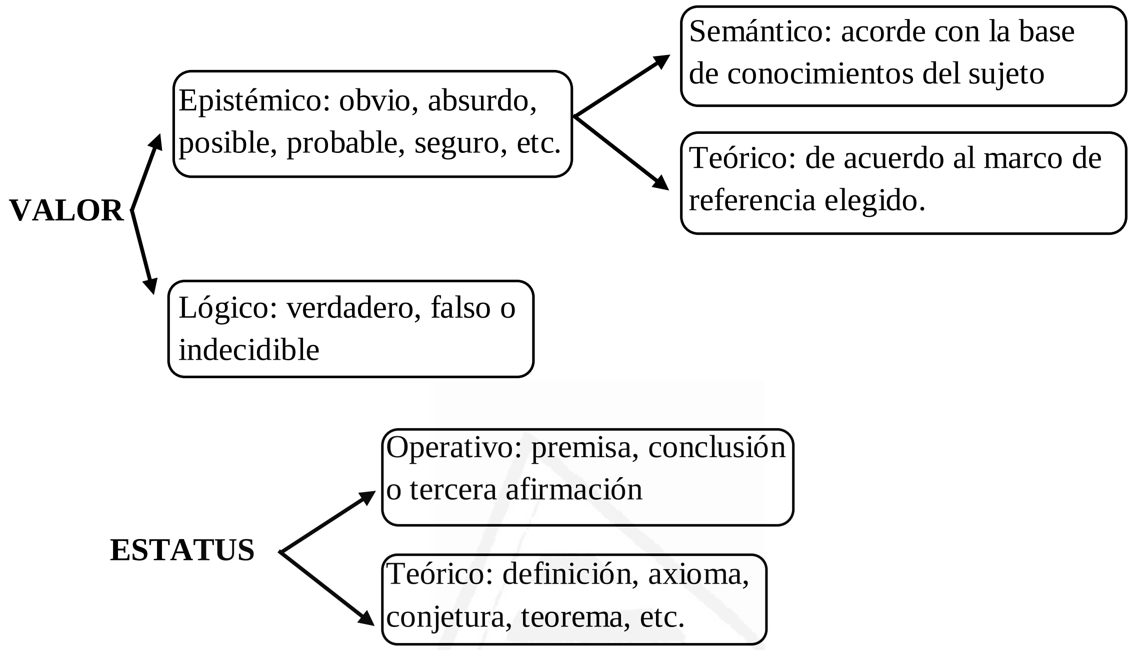


Figura 2.27. Componentes del significado de una proposición (valor y estatus) en una explicación y en una prueba (Duval, 2007)

La cuestión es que una explicación puede ser, y con frecuencia lo es, incluso entre matemáticos, más convincente que una demostración. Un ejemplo de lo que acabamos de decir lo podemos encontrar en la prueba de Cauchy de la Fórmula de Euler para poliedros que proporciona Lakatos en su libro *Pruebas y Refutaciones* (1968). Si consideramos un poliedro convexo y contamos sus vértices, aristas y caras, se tiene que $C + V - A = 2$.

Si suponemos un poliedro que está hecho de goma al cual le eliminamos su cara frontal y lo aplanamos, obtenemos una figura plana con el mismo número de vértices y aristas que el poliedro y con una cara menos (la cara eliminada). A continuación, mostramos el experimento para el caso del cubo ($V=8$, $C=6$ y $A=12$). Al eliminar una cara y aplanar o proyectar la figura sobre un plano, obtenemos la siguiente figura plana en la que podemos contar los mismos 8 vértices, 12 aristas y ahora tan solo 5 caras, lo que nos da un valor para C + V – A = 1.

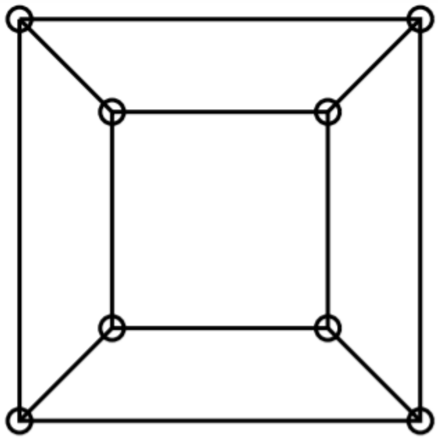


Figura 2.28

Si ahora trazamos una diagonal sobre toda cara que no sea un triángulo. Cada arista que añadimos (que resta) divide una cara en dos, apareciendo una nueva cara (que suma), por lo que C + V – A no ha cambia.

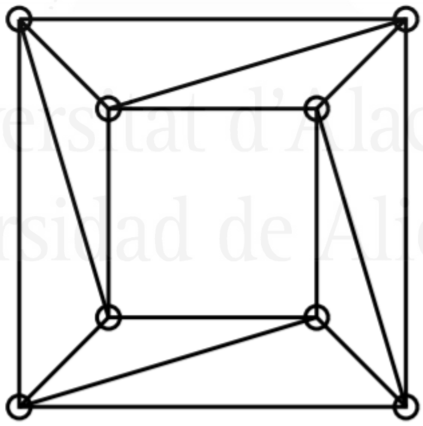


Figura 2.29

Empezamos a eliminar triángulos de dos formas:

1. En primer lugar, eliminamos los triángulos que tengan una arista externa, como el sombreado en la siguiente figura.

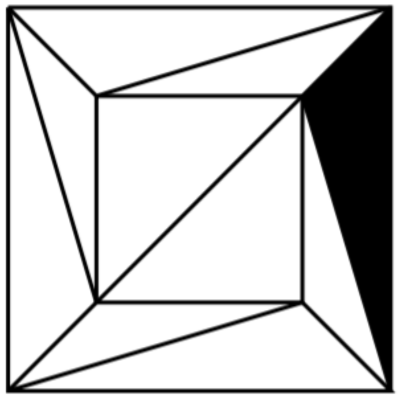


Figura 2.30

De este modo eliminamos una arista (que resta) y una cara (que suma) por cada triángulo eliminado, y de nuevo el número C + V – A no cambia.

2. En segundo lugar, eliminamos los que tienen dos aristas y un vértice 'externos';

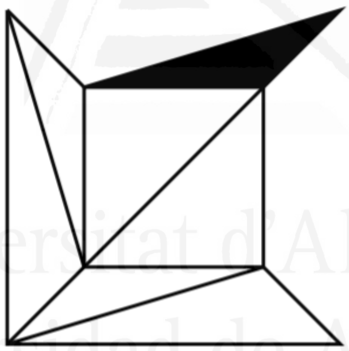


Figura 2.31

En este caso se eliminan dos aristas (que restan) pero también un vértice (que suma) y una cara (que suma) por cada triángulo. Nuevamente el número C + V – A no varía. Repetimos este proceso de eliminación de triángulos hasta que sólo nos queda un triángulo para el que se cumple V – A + C = 1. Y, puesto que a nuestra red le quitamos una cara, tenemos que V – A + C = 2 para el poliedro completo. Por supuesto, esta 'prueba' sufrió críticas relacionadas con la forma en que se desarrolló. Puede que no todos los poliedros puedan estirarse en un plano; que no todos los que se puedan estirar en el plano puedan dividirse en triángulos y que el orden de esta eliminación influya en el resultado. Sin embargo, en el contexto escolar estos 'experimentos mentales' son calificados como demostraciones con mucha frecuencia. Por otro lado, estas explicaciones evidentes pueden no ser siempre ciertas. El ejemplo de la falacia geométrica del cuadrado que se transforma en un rectángulo nos debe prevenir del uso de los razonamientos puramente configurales en la validación de afirmaciones matemáticas.

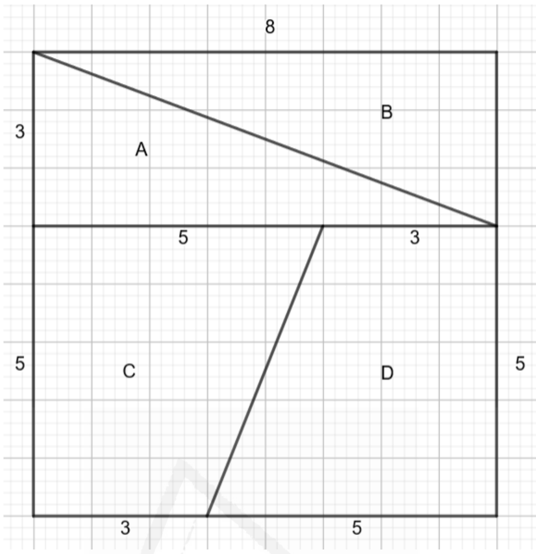


Figura 2.32

Si cortamos en las cuatro partes indicadas el cuadrado de la figura, estas pueden reorganizarse en el rectángulo que mostramos a continuación

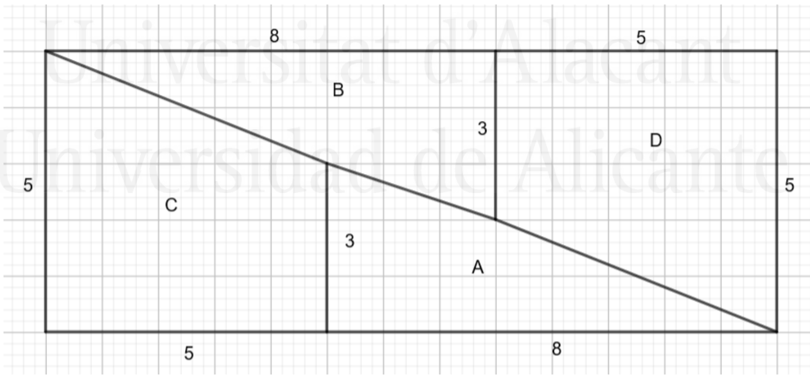


Figura 2.33

De manera que las cuatro figuras que forman un cuadrado de 8 x 8 se transforman en un rectángulo de dimensiones ¡5 x 13!

Además, la aparición de software de geometría dinámica ha provocado el florecimiento de 'pruebas visuales dinámicas', explicaciones que tienen un gran poder de convicción por lo 'evidente' de los argumentos visuales, como podemos observar en la demostración visual de la suma de los ángulos adyacentes de un paralelogramo (Figura 2.37), pero pueden convertirse en un obstáculo para el descubrimiento de lo que es un razonamiento matemático válido.

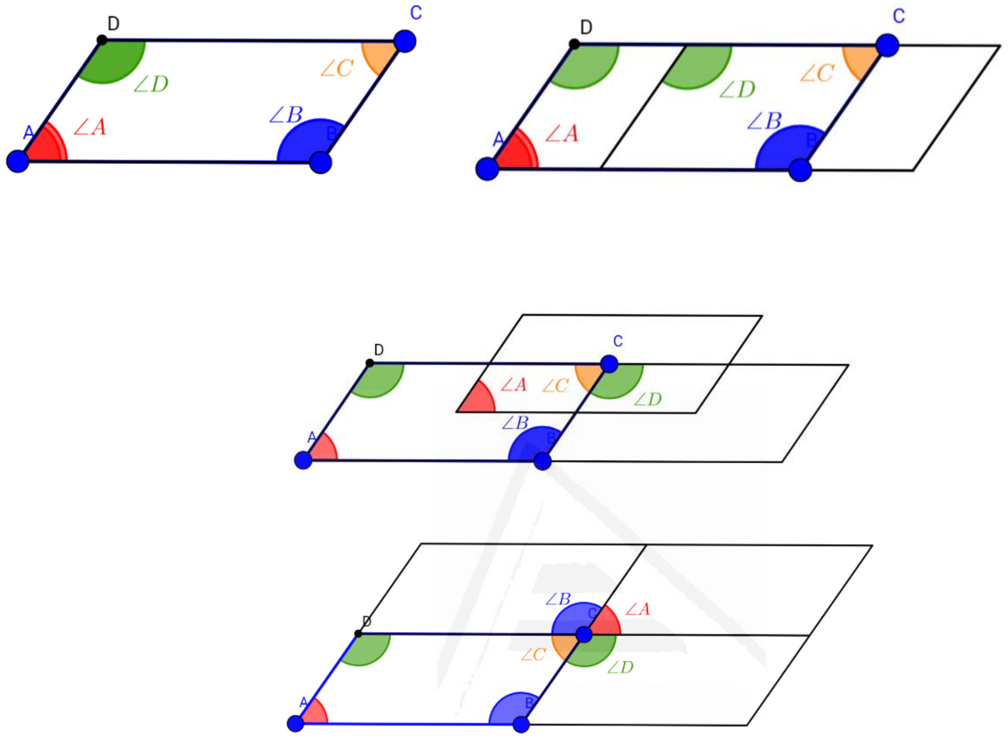


Figura 2.34

Secuencia de imágenes de la prueba dinámica

https://www.geogebra.org/m/vqBVf9cf#material/br4kdPZ2 (Fleitas, 2013)

De ninguna manera pretendemos minusvalorar la aportación de este tipo de justificaciones, sin embargo, creemos que es necesario un adecuado tratamiento y distinción en la clase de matemáticas. Porque una explicación no prueba, una explicación convence y, por tanto, si bien puede conseguir cambiar el valor epistémico semántico de una proposición, por ejemplo, de "probable" a "evidente", incluso con mucha mayor efectividad que una demostración, no puede cambiar el valor lógico, pues, como hemos afirmado anteriormente, el valor lógico "verdadero" sólo se conecta al valor epistémico "necesario". Esto crea confusión acerca de lo que se considera una prueba, es decir, un razonamiento matemático válido.

En resumen, el razonamiento configural que ha de desarrollarse para alcanzar la solución a un problema de probar en contexto geométrico viene determinado por múltiples características. De un lado, las determinadas por la variedad de aprehensiones discursivas y operativas relevantes para la solución del problema. De otro, el conocimiento por parte del resolutor de las afirmaciones matemáticas pertinentes para alcanzar una solución al problema planteado. Paralelamente, el razonamiento configural puede estar 'condicionado' por el tipo de discurso que el alumno entiende que el problema demanda, que puede ser muy diferente de las expectativas del profesor.

Esta aproximación nos invita a analizar los discursos que producen nuestros alumnos en respuesta a tareas de probar geométricas con el fin de considerar qué es lo que realmente consiguen con su discurso. Clemente y Llinares (2015) diferencian dos momentos característicos durante el proceso de resolución de un problema de probar geométrico:

1. El proceso desarrollado hasta que el estudiante es capaz de encontrar la solución al problema mediante un razonamiento, es decir, el razonamiento configural, la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas con las que encuentra las subconfiguraciones y los hechos matemáticos que le permiten resolver el problema.
2. La comunicación de dicha solución mediante un discurso escrito compuesto por afirmaciones matemáticas.

Las características del primer momento en la resolución de problemas de probar han sido ampliamente descritas en el epígrafe anterior (2.2.). A continuación, vamos a analizar las distintas formas que puede adoptar la comunicación de la resolución de un problema de probar geométrico.

Duval (1998), diferencia dos tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos:

1. Razonamiento discursivo natural: Este proceso es espontáneamente realizado en la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación o argumentación. Aquí la visualización y la verbalización están muy cerca una de la otra. Las aprehensiones operativas realizadas son encajadas en un discurso que se estructura en dos niveles (global e interno).
2. Razonamiento discursivo teórico: Este proceso se realiza a través de la deducción. Puede realizarse en un registro puramente simbólico o en el registro de la lengua natural, pero

siempre la conclusión de cada paso debe ser necesaria y entre dos pasos no debe haber ‘huecos’.

2.5.1. Razonamiento discursivo natural

La visualización se puede encajar en un proceso discursivo natural. El conjunto de aprehensiones operativas que se realizan sobre una configuración nos permite distinguir aquellas que son relevantes en el contexto del problema. Pero esto no es suficiente para su resolución. Es necesario que el proceso configural sea encajado en un proceso discursivo que consta de dos niveles y que mostramos con ayuda del siguiente ejemplo:

El teorema de Viviani nos ofrece la siguiente propiedad de los triángulos equiláteros.

Teorema: la suma de las distancias desde un punto interior a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo.

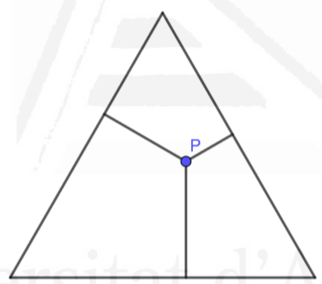


Figura 2.35

Una solución pasa por la visualización de las siguientes configuraciones a partir de las cuales, y mediante operaciones discursivas básicas, se puede elaborar un proceso discursivo natural a través de explicaciones, descripciones o argumentaciones.

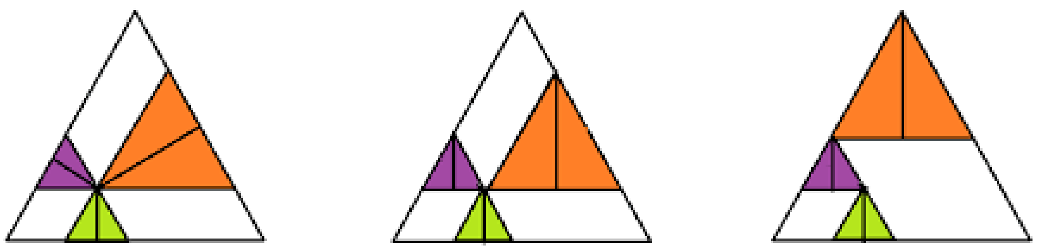


Figura 2.36

A continuación se muestra la secuencia de operaciones necesarias para elaborar el proceso discursivo natural.

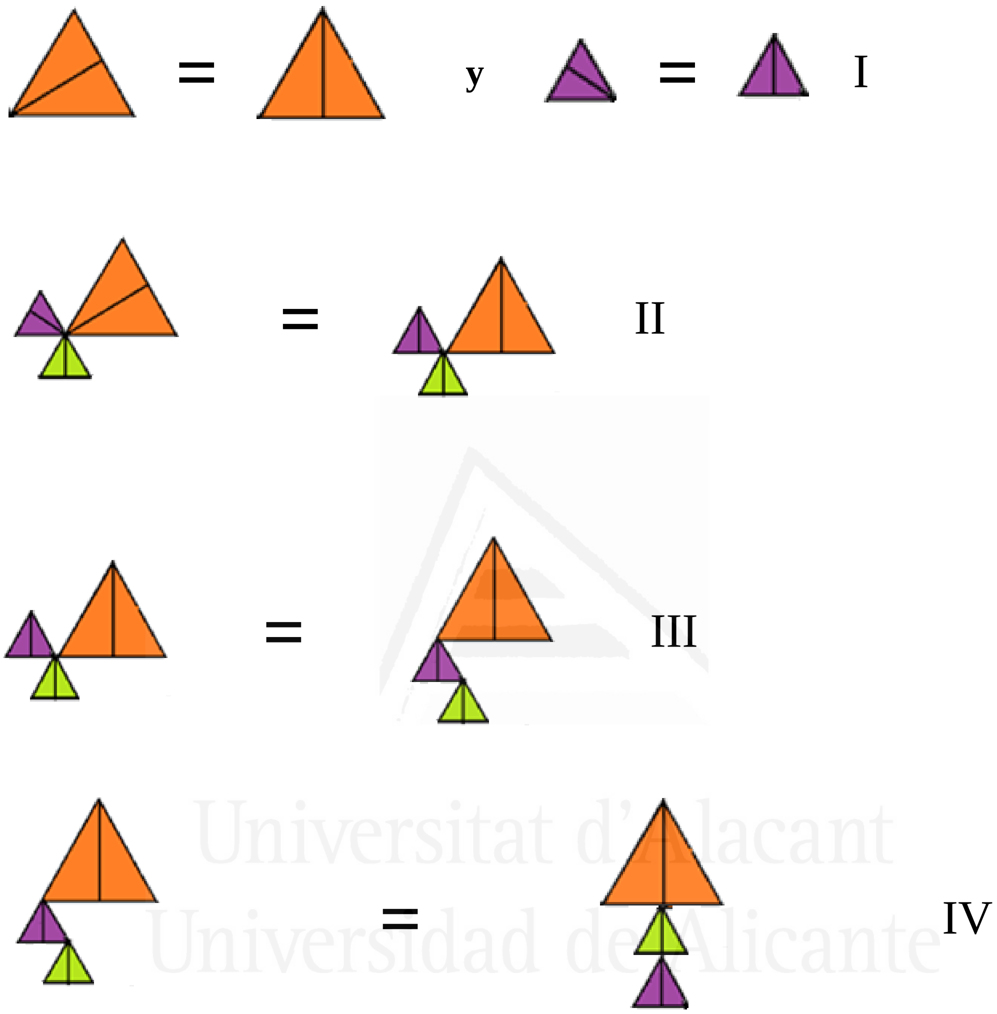


Figura 2.37

Se puede observar un nivel global en los pasos I, II, III y IV, que se ven como proposiciones, y un nivel local interno a cada paso donde las subconfiguraciones se ven como palabras (las alturas de estos triángulos, los triángulos correspondientes, etc.) y el símbolo "=" significa "congruencia de segmentos". Se puede hacer la presentación lingüística de este proceso discursivo natural más explícita describiéndola. Por ejemplo, podríamos afirmar:

A partir del punto P podemos formar tres triángulos equiláteros cuyas alturas coincidan con cada una de las distancias de P a cada uno de los lados del triángulo equilátero inicial. En cada uno de los triángulos equiláteros formados, las tres alturas son idénticas. Por lo tanto, reorganizando los triángulos adecuadamente, se observa que la suma de las tres alturas coincide con la altura del triángulo equilátero inicial.

2.5.2. Razonamiento discursivo teórico

Tal y como afirmamos previamente, tras el truncamiento, el estudiante que conoce las características de un razonamiento matemático válido, de una prueba, aborda la elaboración de un discurso utilizando las hipótesis y teoremas que ha descubierto necesarios para alcanzar la tesis pedida. Este discurso, razonamiento discursivo teórico o prueba, utiliza solo proposiciones, cada una con su estatus teórico: axioma, definición, teorema, hipótesis, conjetura, etc. Y se estructura en diferentes niveles de organización independientemente del tipo de demostración que se lleve a cabo: directa, por contraposición, reducción al absurdo o inducción, etc. Estos son:

1. Un nivel global en el que los pasos se enlazan de acuerdo a su conclusión.
2. Un nivel local o nivel de paso deductivo, en el que al menos tres proposiciones se organizan de acuerdo a su estatus operativo: hipótesis, definición o teorema y conclusión local, fijado por su estatus teórico.
3. Un micro-nivel interno a las proposiciones utilizadas como propiedades (definiciones, teoremas, etc.) en las que se debe distinguir dos partes: condiciones a verificar y conclusión a establecer.

El siguiente ejemplo nos muestra la articulación de los diferentes niveles de organización de la prueba matemática.

Teorema: Sea ΔABC un triángulo cualquiera y $\overline{AM}$ la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$ tal y como se muestra en la figura. Entonces los triángulos ΔABM y ΔAPC son semejantes.

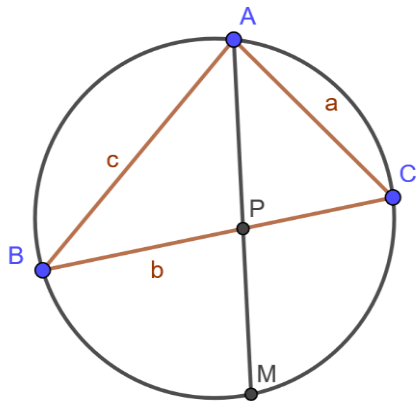


Figura 2.38

Mediante el gráfico proposicional que se presenta en la siguiente Figura (2.39), podemos observar la articulación de los niveles local y global.

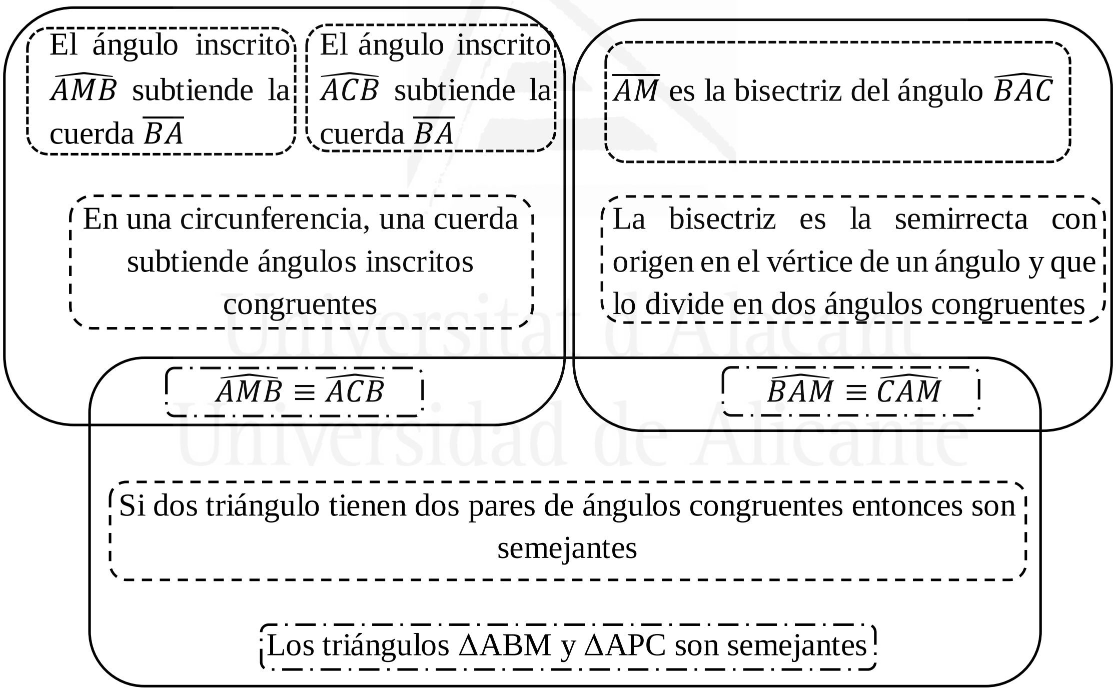


Figura 2.39: Niveles de organización deductiva del discurso en la prueba matemática

Comprender la organización discursiva de una prueba requiere entender la manera operativa de utilizar los teoremas dentro de cada paso (los tres formatos discontinuos de recuadro se corresponden con las tres categorías de estatus operativo: premisa, proposición, hipotesis), y la reutilización de las conclusiones de un paso deductivo como premisas en el siguiente paso deductivo describe la relación entre los niveles locales entre sí para generar el nivel global de la prueba matemática (Duval, 2007).

2.6. Objetivos de la investigación

Nuestro trabajo, pretende aportar información sobre la coordinación de lo visual y lo analítico en la resolución de problemas geométricos. Los objetivos de la investigación son:

1. Caracterizar los procesos de visualización de los alumnos de secundaria obligatoria cuando resuelven problemas geométricos de probar.
2. Identificar los procedimientos de validación que utilizan los alumnos en sus demostraciones y caracterizar la interacción de estos procedimientos de validación con los desenlaces del razonamiento configural.
3. Caracterizar la relación entre el razonamiento configural y la organización discursiva durante la resolución de problemas de probar en contexto geométrico.
4. Caracterizar el espacio de trabajo geométrico personal de estudiantes de enseñanza secundaria desde el modelo de razonamiento configural cuando resuelven problemas geométricos de probar.

Extender el modelo de razonamiento configural a otras etapas educativas enriquece su valor como teoría para interpretar las acciones y procesos propios de la actividad geométrica. Asimismo, considerar el razonamiento configural como instrumento para ayudar al profesor a determinar características de los espacios de trabajo personales de los estudiantes puede ser de gran ayuda tanto para diseñar métodos de enseñanza adaptados a las necesidades de los estudiantes, como para intervenir eficazmente en el aprendizaje geométrico de los alumnos.

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología empleada para la realización de nuestra investigación es fundamentalmente de naturaleza cualitativa, es decir, centrada en aspectos descriptivos que se extraen a partir de observaciones (LeCompte, 1995; Hart et al., 2009). En nuestro caso, estas observaciones se han obtenido a partir de un registro escrito en forma de cuestionario y una entrevista individual semiestructurada. Únicamente se realiza un recuento cuantitativo de la frecuencia absoluta y se calculan los porcentajes de los diferentes desenlaces de los razonamientos configurales de los participantes en sus respuestas al cuestionario propuesto. En relación con la temporalización, nuestra investigación es de corte transversal, puesto que los datos recopilados se han recogido en un corto periodo de tiempo. La perspectiva bajo la que se ha llevado a cabo nuestro trabajo, es decir, nuestro paradigma de investigación en palabras de Shulman (1986), es principalmente interpretativa, pues perseguimos documentar qué conocimientos ponen en juego los alumnos, cómo son creadas las anotaciones y los registros, qué recursos utilizan, y cómo aparecen sus creencias acerca de la demanda de las tareas propuestas; todo ello a partir del análisis de desempeño en una prueba *ad hoc* y de entrevistas realizadas a los alumnos por parte del profesor-investigador No obstante, la investigación tiene cierto carácter positivista, ya que uno de sus objetivos es comprobar que el modelo de razonamiento configural, desarrollado a partir de estudios con estudiantes universitarios para maestro, es extrapolable al ámbito de los estudiantes de educación secundaria obligatoria.

3.1. Participantes y contexto

En el estudio participaron un total de 38 estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), 20 de ellos en el tercer curso y 18 en el cuarto, con edades comprendidas entre los 14 años y 10 meses y los 17 años y 6 meses, aunque la gran mayoría se encontraba entre los 15 y 16 años. En cuanto al género, 21 eran chicas y 17 chicos.

	3º ESO	4º ESO	Total
Numero participantes	20	18	38

Tabla 3.1: Número de participantes por curso.

La selección de los participantes se puede considerar no aleatoria, ya que los seleccionados son alumnos del profesor-investigador, e intencional, debido a la pretensión de extender los resultados obtenidos en estudios anteriores con estudiantes universitarios a estudiantes de educación secundaria obligatoria. Estos estudiantes no habían recibido instrucción directa acerca de la demostración matemática. En la Ley Orgánica de Educación (2006) hay múltiples referencias al razonamiento matemático, pero no se indica qué clase de pruebas (comprobaciones, justificaciones, explicaciones, demostraciones, etc.) se puede esperar que los alumnos dominen en esta etapa educativa, y tampoco se dice nada de las distintas técnicas de demostración. Los estudiantes resolvieron cuatro problemas durante una sesión de una hora en la clase habitual de matemáticas.

3.2. Instrumentos para la recogida de datos

Para la recogida de datos en nuestro estudio, hemos utilizado dos fuentes de información directa: un cuestionario creado ad hoc para la investigación, y una entrevista individual semiestructurada. A continuación, describimos sus características principales.

3.2.1. Cuestionario

La prueba que han realizado los participantes en el estudio ha consistido en un cuestionario con cuatro problemas de probar geométricos. De acuerdo con su forma, las preguntas/problemas Los problemas se han elegido teniendo en cuenta el nivel de los alumnos y las propiedades geométricas implicadas.

Para la determinación del instrumento se tuvo en cuenta también que:

— En cada uno de los problemas, se les solicitó que probaran una propiedad geométrica elemental: que un ángulo es recto; que dos rectas son paralelas; que un punto equidista de otros dos; y que un segmento tiene longitud doble que otro. La elección de estas propiedades geométricas viene motivada porque son ampliamente trabajadas por los estudiantes tanto en la etapa Primaria como en los primeros cursos de Secundaria, es decir, los conocimientos teóricos necesarios para resolver los problemas planteados formaban parte del currículo matemático de los participantes. Pensamos que esto facilitaría que los alumnos se implicasen en la producción de argumentos para responder a los problemas ya que comprenden la tesis que deben probar.

— En cada uno de los problemas, el enunciado iba acompañado de una figura. Nuestro modelo teórico sobre el razonamiento en contexto geométrico describe la coordinación necesaria entre procesos de visualización en la resolución de problemas de probar geométricos por lo que incluir una configuración en el enunciado de cada problema permitiría observar dichos procesos de visualización en las respuestas de los participantes. Además, en los distintos paradigmas geométricos descritos en nuestro marco teórico, el papel de las configuraciones resulta crucial para inferir las características del ETG personal del resolutor.

— En la elección de los problemas y de las configuraciones se han tenido en cuenta los estudios que describen la existencia de factores que facilitan o dificultan la visualización tanto de las subconfiguraciones, como de las transformaciones figurales que han de tenerse en cuenta en la solución de un problema geométrico dado (Duval, 1995, 1998; Mesquita, 1989, 1998; Padilla, 1990; Marmolejo y Vega, 2005, 2012). Estos son los factores que influyen en la manera en que es identificada y transformada la configuración en los procesos de probar que hemos considerado en la elaboración de nuestro cuestionario:

1. División en subfiguras, es decir, si las subconfiguraciones relevantes ya vienen dadas en la configuración inicial o, por el contrario, deben ser encontradas.
2. Contorno de la configuración inicial, si las subconfiguraciones relevantes escapan o no al marco creado por la configuración inicial.
3. Complementariedad de las subconfiguraciones constituyentes, es decir, si las subconfiguraciones relevantes se combinan para constituir una forma familiar (círculo, cuadrado, rectángulo, etc).
4. Convexidad de las subconfiguraciones relevantes.
5. Doble uso de una subfigura, es decir, el mismo objeto (segmento, polígono, …) puede ser usado simultáneamente como dos objetos diferentes en la misma operación de comparación o razonamiento.
6. Existencia de subconfiguraciones visualmente predominantes.

Además, la elección de los problemas que componen el cuestionario se basó en la intersección de dos variables:

1. Necesidad de modificar la configuración inicial o no. Tal y como apuntamos en nuestro marco teórico, dependiendo de la modificación producida, la aprehensión operativa puede ser dividida en tres tipos: de identificación, de cambio figural y de reconfiguración. Esta última no ha sido considerada para este cuestionario porque pensamos que los alumnos a los que va dirigido el cuestionario no tienen apenas experiencias de resolución de problemas geométricos en los que se deban realizar reorganizaciones de subconfiguraciones.

2. Que la proposición a demostrar resultase "visualmente evidente" o no. La evidencia de los hechos a probar es un obstáculo en el aprendizaje de la demostración

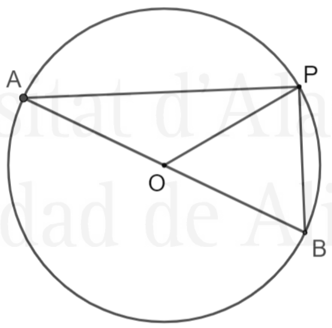
(Balacheff, 2000): "el racionalismo de la demostración se opone a esta clase de sensualidad que sirve de base a la evidencia". Se trata, pues, de problematizar la evidencia. En nuestro marco teórico, consideramos distintos paradigmas geométricos en los que el participante puede enfrentar la resolución de un problema geométrico. Nos parece interesante que los problemas de nuestra prueba contemplen la presencia o no de tesis visualmente evidentes para estudiar si este factor se relaciona con las características del espacio de trabajo personal del resolutor.

Estas dos dimensiones articularon la prueba aplicada de forma que los problemas planteados en el cuestionario se pueden clasificar con arreglo a la intersección de estas dos dimensiones en un diseño 2x2.

A continuación, se muestran los problemas del cuestionario, un análisis de sus características y una posible solución:

PROBLEMA 1 (P1)

Demuestra que el ángulo APB es recto.



En relación con las variables descritas anteriormente, el problema 1 no necesita la modificación de la configuración inicial para su resolución y consideramos que la tesis no resulta visualmente evidente. Llamando O al centro de la circunferencia, una posible solución pasa por aislar las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔOAP y ΔOPB, y asociar a estos triángulos la definición de triángulo isósceles y la propiedad que afirma que los triángulos isósceles tienen dos ángulos congruentes (los opuestos a los lados congruentes). Esto implica que $\widehat{OAP} \equiv \widehat{APO}$ y $\widehat{OPB} \equiv \widehat{PBO}$. Si ahora identificamos la subconfiguración formada por el triángulo ΔAPB y le asociamos la propiedad “la suma de los ángulos interiores de un triángulo plano es 180º”, podemos concluir que

$$\widehat{OAP} + \widehat{APO} + \widehat{OPB} + \widehat{PBO} = 180°$$

de donde, teniendo en cuenta las congruencias establecidas anteriormente y que $\widehat{APO} + \widehat{OPB} \equiv \widehat{APB}$, se sigue inmediatamente la tesis pedida.

Las subconfiguraciones relevantes para esta solución del problema son las siguientes:

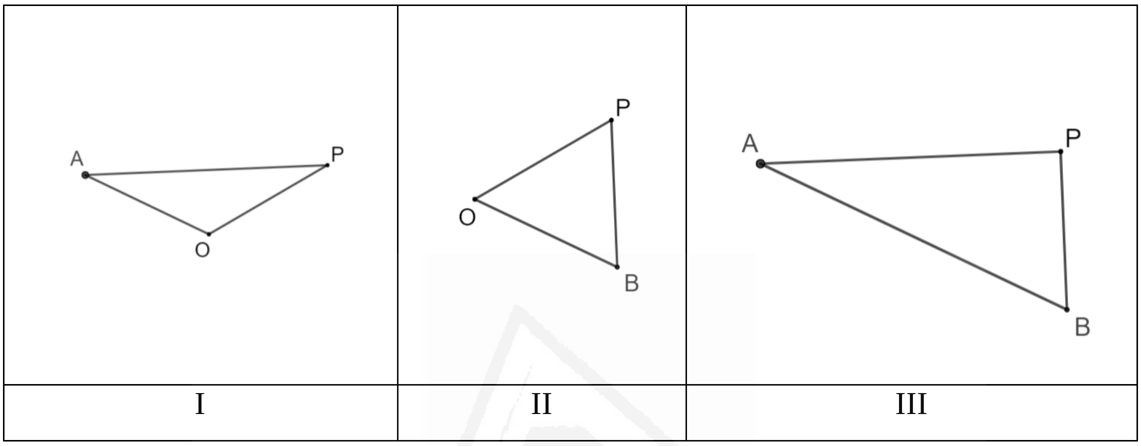


Figura 3.1: Subconfiguraciones relevantes en la solución propuesta a P1.

En relación con los factores que influyen en la forma en que es identificada y transformada la configuración en los procesos de probar, las subconfiguraciones relevantes en la solución de este problemas son convexas, complementarias (I y II juntas forman III) y no existen ni áreas sombreadas ni líneas destacadas por su diferente grosor o estilo tipográfico en la configuración inicial.

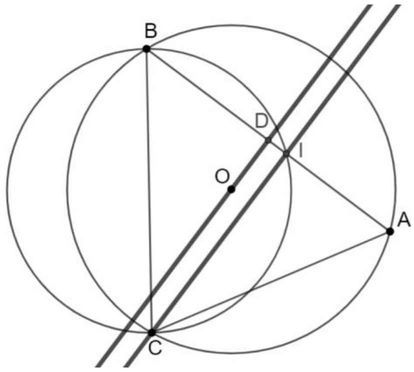
La tabla 3.2 muestra los conocimientos geométricos susceptibles de ser utilizados en la resolución de P1

P1
• Definición de circunferencia. • Definición de radio de una circunferencia. • Definición de diámetro de una circunferencia. • Definición de ángulo plano. • Definición de perpendicularidad de dos rectas. • Definición de ángulos adyacentes. • Definición de ángulos consecutivos. • Definición de triángulo. • Definición de triángulo isósceles. • Definición de segmentos congruentes. • Los triángulos isósceles tienen dos ángulos (los opuestos a los lados congruentes) congruentes. • La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. • Definición de ángulo central de una circunferencia. • Definición de ángulo inscrito en una circunferencia. • El ángulo central de una circunferencia mide el doble que el ángulo inscrito que abarca el mismo arco. • Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Tabla 3.2: Conocimiento geométrico susceptible de ser utilizado en la resolución de P1.

PROBLEMA 2 (P2)

Sobre una circunferencia de centro O, marca tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB]. Probar que las líneas rectas (OD) y (CI) son paralelas.

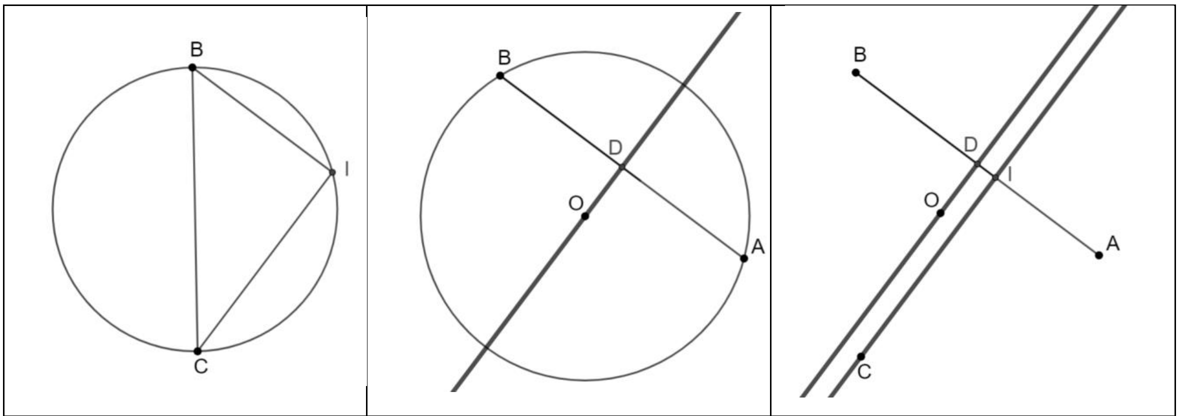


En este problema se pide al estudiante establecer el paralelismo de las líneas en negrita en la figura. Este paralelismo resulta visualmente evidente y no es necesario añadir nuevos elementos a la configuración inicial para resolver el problema.

Una posible solución del problema se basa en aislar la subconfiguración formada por la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$, el propio diámetro $\overline{BC}$ y el punto I. A continuación, asociar a esta subconfiguración la propiedad matemática que afirma que el triángulo ΔIBC es rectángulo en I, es decir, el problema anterior. De inmediato, se deduce que $\overline{CI}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.

Si ahora identificamos la subconfiguración formada por la circunferencia de centro O, la cuerda $\overline{AB}$ y el punto medio D, tenemos que O equidista de A y B por ser el centro de la circunferencia ABC, y D equidista de A y B por ser el punto medio de $\overline{AB}$. Si un punto equidista de los extremos de un segmento entonces dicho punto pertenece a la mediatriz del segmento. Esta proposición es el recíproco del problema siguiente (P3). Lo anterior implica que $\overline{OD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$ y, por tanto, $\overline{OD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Establecidas las perpendicularidades de $\overline{CI}$ y $\overline{OD}$ respecto al segmento $\overline{AB}$, la propiedad matemática que establece "Si dos rectas contenidas en el plano son perpendiculares a la misma recta entonces son paralelas entre sí", nos permite concluir la tesis pedida.

Las subconfiguraciones relevantes para esta solución al problema son:



I	II	III

Figura 3.2: Subconfiguraciones relevantes en la solución propuesta a P2.

La tabla 3.3 muestra los conocimientos geométricos susceptibles de ser utilizados en la resolución de P2

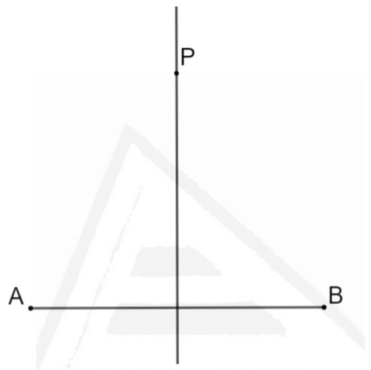
P2
• Definición de circunferencia. • Definición de radio de una circunferencia. • Definición de diámetro de una circunferencia. • Definición de cuerda de una circunferencia. • Definición de perpendicularidad de dos rectas. • Definición de paralelismo de dos rectas. • Definición de triángulo rectángulo. • Definición de mediatriz de un segmento. • Definición de triángulo. • Definición de ángulo. • Definición de ángulo inscrito en una circunferencia. • Definición de punto medio de un segmento. • Las mediatrices de los lados de un triángulo intersecan en el circuncentro. • Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

• Dos rectas contenidas en un plano perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

Tabla 3.3: Conocimiento geométrico susceptible de ser utilizado en la resolución de P2.

PROBLEMA 3 (P3)

Si P es un punto de la mediatriz del segmento AB, demuestra que P equidista de los puntos A y B.



En este caso, la propiedad geométrica que el enunciado pide establecer es la congruencia de dos segmentos. Consideramos que los alumnos deben añadir los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, por lo que se hace necesario realizar modificaciones en la configuración inicial. Entendemos que la tesis es visualmente evidente. Una posible solución al problema seria: si llamamos M al punto de intersección de la mediatriz y del segmento $\overline{AB}$ y añadimos los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, podemos identificar en la nueva configuración los triángulos ΔAPM y ΔBPM. Asociando a dichas subconfiguraciones el criterio de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado, y la definición de mediatriz, se tiene la congruencia de los dos triángulos e inmediatamente se deduce la tesis del enunciado.

Las subconfiguraciones relevantes para esta solución al problema son:

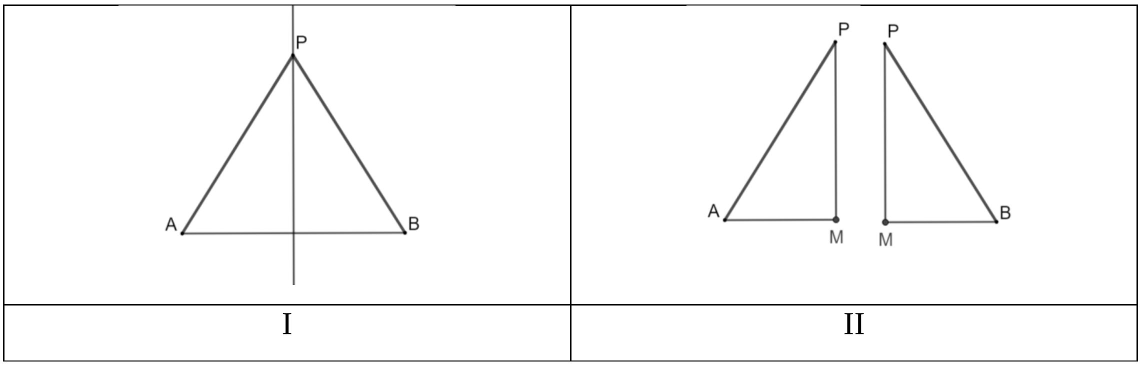


Figura 3.3: Subconfiguraciones relevantes en la solución propuesta a P3.

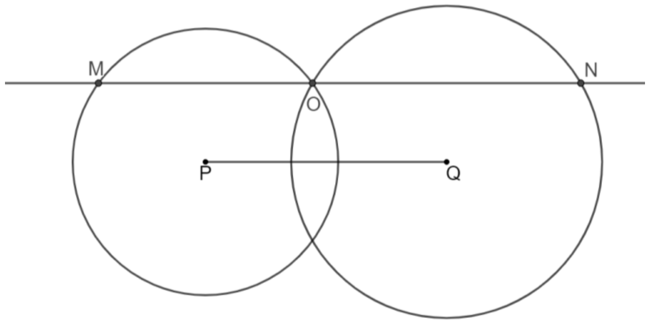
La tabla 3.4 muestra los conocimientos geométricos susceptibles de ser utilizados en la resolución de P3

P3
• Definición de mediatriz de un segmento. • Definición de punto medio de un segmento. • Definición de perpendicularidad. • Definición de ángulo. • Definición de segmentos congruentes. • Definición de triángulo. • Criterio de congruencia de triángulos L-A-L

Tabla 3.4: Conocimiento geométrico susceptible de ser utilizado en la resolución de P3.

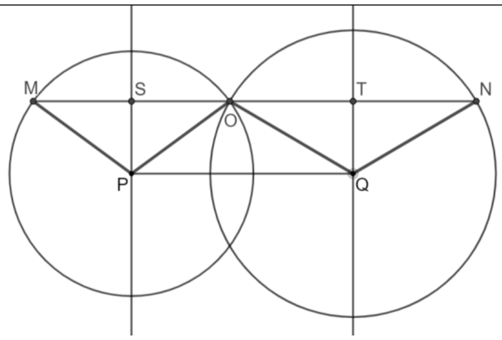
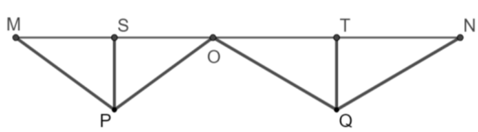
PROBLEMA 4 (P4)

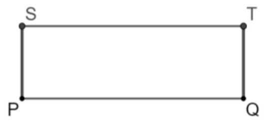
Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q. Por uno de los puntos de corte, O, se traza una paralela al segmento PQ, que interseca a las circunferencias en los puntos M y N. Demuestra que MN=2PQ.



De nuevo, el problema 4 demanda establecer la congruencia de dos segmentos. En este caso, se hace necesario modificar la configuración inicial y la tesis no resulta visualmente evidente. Una posible solución pasa por realizar las siguientes acciones: añadir los radios $\overline{PM}$ y $\overline{PO}$ en la circunferencia de centro P y los radios $\overline{QO}$ y $\overline{QN}$ en la circunferencia de centro Q, y añadir las perpendiculares al segmento $\overline{MN}$ que pasan por P y Q y los puntos de intersección (S y T). A partir de estas modificaciones podemos identificar las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔMPS y ΔOPS, así como los triángulos ΔOQT y ΔNQT. Utilizando, en ambos casos, el criterio de congruencia para triángulos rectángulos (si dos triángulos rectángulos tienen un cateto y la hipotenusa correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes), se deducen las siguientes congruencias de segmentos $\overline{MS} \equiv \overline{SO}$ y $\overline{OT} \equiv \overline{TN}$. Ahora identificamos la subconfiguración formada por el rectángulo SPQT, donde se tiene que $\overline{PQ} \equiv \overline{ST}$ y, como $\overline{MN} = \overline{MS} + \overline{SO} + \overline{OT} + \overline{TN}$, deducimos inmediatamente que $\overline{MN} = 2\overline{PQ}$, tal y como afirma el enunciado del problema.

Las subconfiguraciones relevantes para esta solución al problema son:

	
I	II



III

Figura 3.4: Subconfiguraciones relevantes en la solución propuesta a P4.

La tabla 3.5 muestra los conocimientos geométricos susceptibles de ser utilizados en la resolución de P4

P4
• Definición de congruencia de segmentos. • Definición de circunferencia. • Definición de radio de una circunferencia. • Definición de perpendicularidad. • Definición de triángulo. • Criterio de congruencia para triángulos rectángulos: Dos triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa congruentes son congruentes. • Definición de rectángulo. •

Tabla 3.5: Conocimiento geométrico susceptible de ser utilizado en la resolución de P4.

En la siguiente tabla se recogen las características de los factores implicados en la visibilidad de las subconfiguraciones relevantes para cada uno de los problemas del cuestionario:

Factores internos que disparan o inhiben la visualización de las operaciones de cambio figural	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
División en subfiguras (dadas o no en la configuración inicial)	Sí	Sí	No	No
Contorno de la figura inicial	Sí	Sí	Sí	Sí
Complementariedad	Sí	No	Sí	No
Convexidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Doble uso de una figura	Sí	No	No	Sí
Existencia de subconfiguraciones visualmente predominantes	No	Sí	No	No

Tabla 3.6: Factores que facilitan o inhiben la visualización de las transformaciones figurales necesarias para la resolución de los problemas del cuestionario

En la siguiente tabla se recogen las definiciones y propiedades matemáticas que se pueden movilizar para resolver los problemas del cuestionario.

Definiciones y propiedades matemáticas	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
Definición de circunferencia.	X	X		X
Definición de radio de una circunferencia.	X	X		X
Definición de diámetro de una circunferencia.	X	X		
Definición de cuerda de una circunferencia		X		
Definición de ángulo plano.	X	X	X	
Definición de perpendicularidad de dos rectas.	X	X	X	X
Definición de paralelismo de dos rectas		X		
Definición de ángulos adyacentes.	X			
Definición de ángulos consecutivos.	X			
Definición de triángulo.	X	X	X	X
Definición de triángulo isósceles.	X			
Definición de triángulo rectángulo		X		

Los triángulos isósceles tienen dos ángulos (los opuestos a los lados congruentes) congruentes.	X			
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.	X			
Definición de ángulo central de una circunferencia.	X			
Definición de ángulo inscrito en una circunferencia.	X	X		
El ángulo central de una circunferencia mide el doble que el ángulo inscrito que abarca el mismo arco.	X			
Definición de punto medio de un segmento		X	X	
Las mediatrices de los lados de un triángulo intersecan en el circuncentro.		X		
Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.	X	X		
Dos rectas contenidas en un plano perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.		X		
Definición de rectángulo				X
Definición de mediatriz de un segmento		X	X	
Definición de segmentos congruentes	X		X	X
Criterio de congruencia de triángulos L-A-L			X	
Dos triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa congruentes son congruentes.				X

Tabla 3.7: Conceptos y propiedades matemáticas susceptibles de ser utilizados en la resolución de los problemas del cuestionario

Tanto para el factor contorno de la figura inicial, como para el factor convexidad, hemos optado por elegir problemas con características que siempre faciliten la visualización de las subconfiguraciones y transformaciones relevantes para la solución de los problemas, debido a la corta edad y poca experiencia de los participantes de nuestro estudio en la resolución de problemas de probar geométricos. En el problema 4 hemos resaltado las líneas sobre las que el problema plantea la hipótesis de paralelismo. Con esta acción, tratamos de facilitar a los participantes la visualización de las subconfiguraciones relevantes para solucionar el problema, porque es el más difícil de la colección.

3.2.2. Entrevista

Se realizó una entrevista a cada alumno de forma individual (n=38), con el objetivo de averiguar el procedimiento de validación utilizado en cada una de las afirmaciones de la resolución de los problemas. La importancia de determinar dichos procedimientos de validación en nuestra investigación es manifiesta, pues uno de los objetivos específicos de nuestra investigación es identificar dichos procedimientos y caracterizar su interacción con los desenlaces del razonamiento configural. Se grabó el audio para su posterior transcripción y análisis con el fin de registrar con fidelidad todas las interacciones verbales entre entrevistador y entrevistado. Antes de utilizar la grabadora, se mantuvo una pequeña conversación introductoria con los alumnos para explicarles la finalidad de la grabación. Durante la entrevista, el profesor-entrevistador fue tomando notas que le ayudaron a formular nuevas cuestiones.

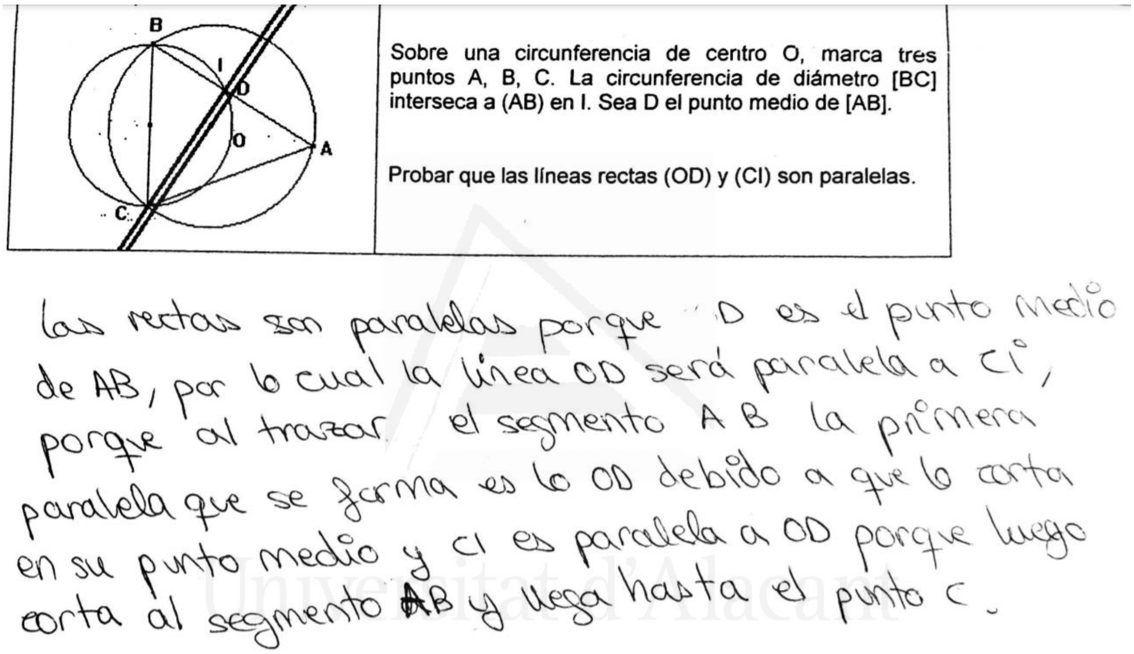
El procedimiento de validación, tal y como hemos descrito en nuestro marco teórico, es el procedimiento utilizado por el alumno para establecer la verdad, desde su punto de vista, de una proposición que utiliza en su cadena de razonamientos. Este “punto de vista” no se suele explicitar, por lo que se hace necesario realizar una entrevista para interrogar al alumno sobre dichos procedimientos. Esta tuvo lugar poco tiempo después de la realización del cuestionario para que éstos pudiesen recordar los razonamientos, ideas, visualizaciones o conocimientos que les permitieron construir sus respuestas a los problemas del cuestionario planteado.

El intervalo de tiempo entre la realización del cuestionario y la entrevista fue de dos días y se dedicó a preparar esta última ya que, para inferir el procedimiento de validación de cada una de las afirmaciones realizadas, había que segmentar las respuestas, es decir, separar las distintas afirmaciones que componían la respuesta al problema, para determinar cuáles eran éstas.

Según la clasificación de los tipos de entrevista en la investigación cualitativa que describe Folgueiras (2016), nuestra entrevista se puede considerar como semiestructurada. Los estudiantes podían expresar sus opiniones y/o matizar sus respuestas, de manera que el resultado de la entrevista era asociar su procedimiento de validación a cada una de las afirmaciones matemáticas realizadas. Sin embargo, para obtener dichos resultados, el profesor-investigador a partir de las respuestas que los alumnos iban dando a sus preguntas, debía inferir la fuente de validez de sus afirmaciones. Para ello, el profesor-investigador debía usar las respuestas y matizaciones para orientar la entrevista con el fin de determinar dichos procedimientos de validación.

El entrevistador debe tener una actitud abierta y flexible para poder ir saltando de pregunta según las respuestas que se vayan dando, o incorporar alguna nueva cuestión a partir de las respuestas dadas por el entrevistado.

A modo de ejemplo, mostramos a continuación la respuesta de A17 a P2 y, posteriormente, la transcripción de la entrevista realizada:



Sobre una circunferencia de centro O, marca tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB].

Probar que las líneas rectas (OD) y (CI) son paralelas.

las rectas son paralelas porque D es el punto medio de AB, por lo cual la línea OD será paralela a CI, porque al trazar el segmento A B la primera paralela que se forma es la OD debido a que lo corta en su punto medio y CI es paralela a OD porque luego corta al segmento AB y llega hasta el punto C.

Figura 3.5: Respuesta de A15 a P3.

En la siguiente tabla, transcribimos un fragmento de la entrevista que realizó el profesor-investigador a A15 con el fin de inferir los procedimientos de validación de las distintas afirmaciones que componen su respuesta a P3:

Profesor-investigador: En la primera frase, afirmas la tesis que debes demostrar: "las rectas son paralelas", luego lo que viene después del "porque" sería la respuesta al problema, ¿verdad? *Participante: ....Sí, eso es.* *P-I: Dices que "D es el punto medio de $\overline{AB}$", ¿cómo sabes que esto es cierto?*

P: Porque lo dice el enunciado.

P-I: De acuerdo, después afirmas: "por lo cual la línea $\overline{OD}$ será paralela a $\overline{CI}$", ¿por qué la línea $\overline{OD}$ es paralela a $\overline{CI}$?

P: Pues, es que no se cortan.

P-I: ¿Qué líneas no se cortan?

P: Estas (señala a $\overline{OD}$ y $\overline{CI}$)

P-I: Bien, tú afirmas que $\overline{OD}$ y $\overline{CI}$ no se cortan. No discuto que eso sea cierto o no. Lo que me interesa conocer es ¿por qué sabes que no se cortan?

P: Porque aunque continúen, no se tocan.

.....

Figura 3.6: Transcripción de un fragmento de la entrevista a A15 en respuesta a P3

En el siguiente epígrafe se describe el procedimiento de análisis realizado con el fin de dar respuesta a los objetivos de nuestra investigación.

3. 3. Procedimiento de análisis

Se realizó un análisis de los datos obtenidos en diferentes fases. En primer lugar, se obtuvieron las respuestas de los estudiantes al cuestionario. A continuación, y antes de realizar las entrevistas, se segmentaron y transcribieron las respuestas de los participantes, con el fin de separar las distintas afirmaciones realizadas en sus respuestas. Esto se hizo en este momento para facilitar el objetivo de la entrevista: recopilar los procedimientos de validación de las afirmaciones realizadas en sus respuestas.

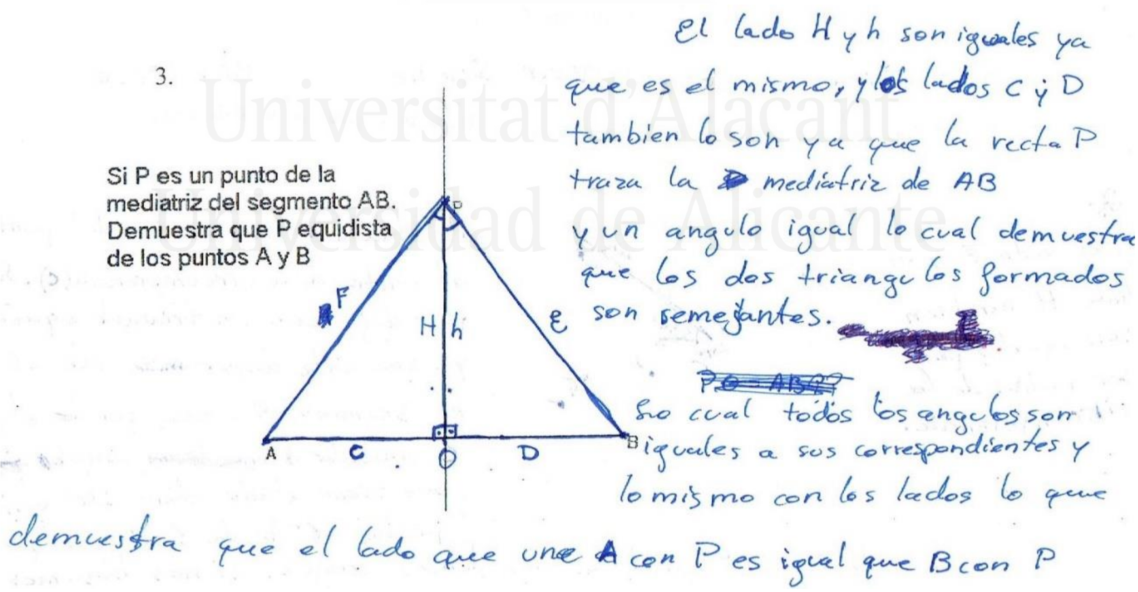
Se analizaron los procesos de visualización, es decir, se identificaron evidencias de los diferentes tipos de aprehensiones (perceptiva, discursiva y operativa). Se identificaron los procedimientos de validación que utilizaron en cada una de sus afirmaciones. A continuación, se analizó la coordinación de los procesos de visualización con el fin de determinar el desenlace de sus razonamientos configurales. En la siguiente fase, se describió la organización discursiva de las respuestas a los problemas con el fin de inferir el tipo de discurso utilizado para validar la proposición a probar. Por último, apoyándonos en el análisis realizado, recopilamos algunas características del ETG personal que los alumnos pusieron de manifiesto en la resolución de los problemas del cuestionario.

3.3.1. Fase I: Transcripción y segmentación de las respuestas

En esta etapa del análisis de los datos, transcribimos y segmentamos las respuestas de los estudiantes, con la finalidad de facilitar la identificación de las diferentes proposiciones que conforman su respuesta, y preparar la entrevista posterior en la que se tratará de identificar los procedimientos de validación utilizados. La transcripción y segmentación de las respuestas nos facilitará el análisis posterior de la coordinación de los diferentes procesos de visualización, y nos ayudará a estudiar la organización discursiva de las respuestas dadas por los estudiantes.

Consideramos como unidad de análisis cada una de las partes de la respuesta escrita, incluyendo las marcas sobre la configuración inicial o los dibujos realizados por el resolutor que pongan de manifiesto la identificación o aplicación de teoremas, propiedades, definiciones o hechos matemáticos observados por el resolutor. Para ilustrar esta fase usamos como ejemplo el análisis realizado a la respuesta A30 a P3:

En la siguiente figura, mostramos la segmentación de la respuesta de A30 a P3.



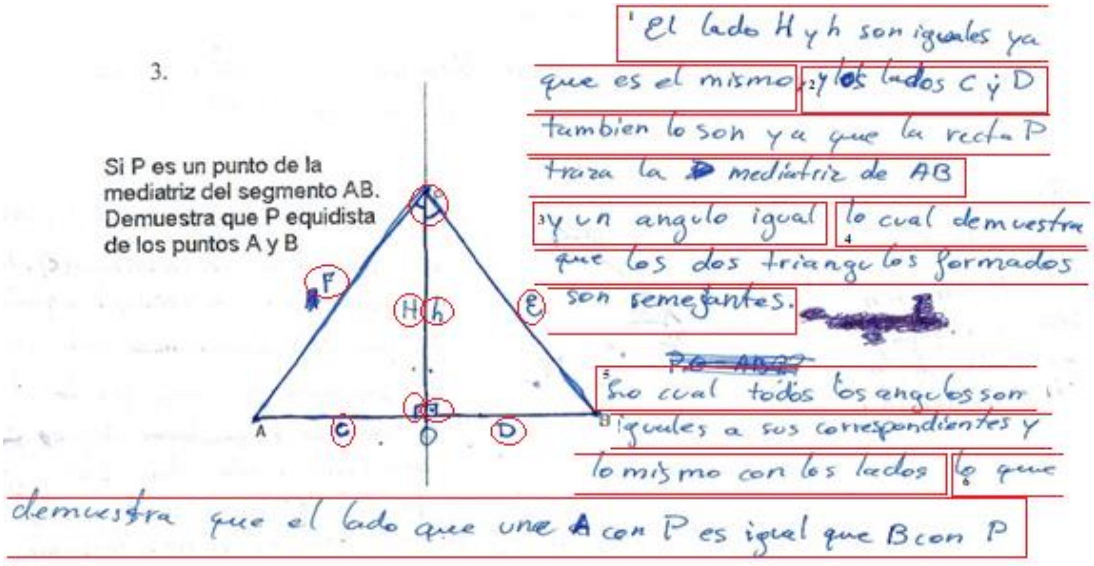


Figura 3.7: Respuesta de A30 a P3 y unidades de análisis (Fase I)

Segmentamos la respuesta de modo que cada elemento se corresponde con una afirmación realizada por el alumno, sea o no correcta, obteniendo la siguiente secuencia:

1. El lado H y h son iguales ya que es el mismo.
2. Y los lados C y D también lo son ya que la recta P traza la mediatriz de AB.
3. Y un ángulo igual.
4. Lo cual demuestra que los dos triángulos formados son semejantes.
5. Lo cual todos los ángulos son iguales a sus correspondientes y lo mismo con los lados.
6. Lo que demuestra que el lado que une A con P es igual que B con P.

Figura 3.8: Transcripción y segmentación de la respuesta de A30 a P3.

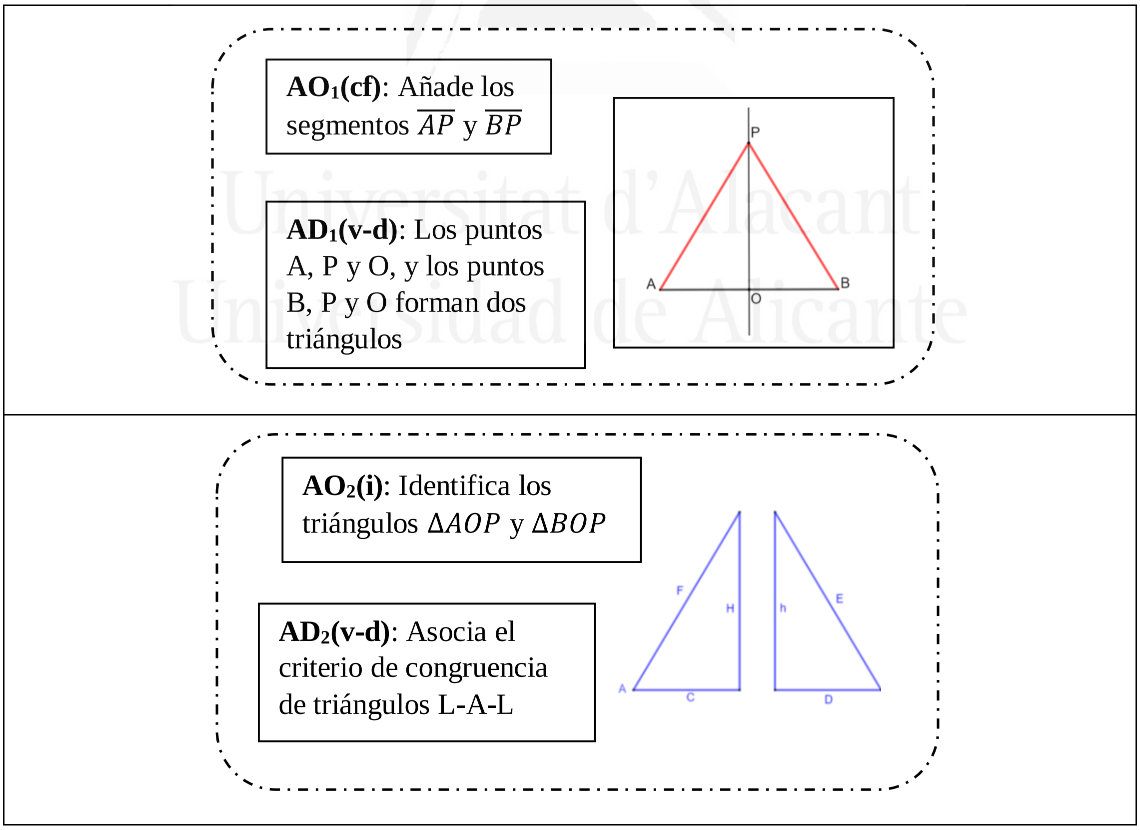
3.3.2. Fase II: Identificación de los procesos de visualización

Los procesos de visualización implicados en la resolución de problemas de geometría (aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa) no son observables, ya que, como acciones mentales, no son explícitamente declarados. No obstante, podemos encontrar evidencias de éstos en las respuestas escritas: marcas, modificaciones, asociaciones, etc.

Además, el orden en el que se producen los procesos de visualización no es fácil de determinar, pues no tenemos un registro de las acciones mentales del resolutor. Para poder inferir dichas acciones, debemos examinar sus registros escritos. No obstante, no vamos a considerar como aprehensión operativa cualquier modificación que realiza el alumno en la imagen que acompaña al enunciado (marcas de congruencia, indicadores de ángulos, etiquetado de puntos o segmentos, etc.), sino solo a aquellas que se puedan conectar con su resolución del problema.

En esta segunda fase, identificamos los procesos de visualización de los participantes a partir de las unidades de análisis extraídas en la transcripción y segmentación de las respuestas realizada en la fase I. Esto implica identificar las subconfiguraciones relevantes, identificadas o modificadas por el resolutor, y las asociaciones de afirmaciones matemáticas. Mostramos un ejemplo de esta segunda fase del análisis a partir de la siguiente respuesta de A30 a P3 que hemos utilizado para la descripción de la fase I de análisis:

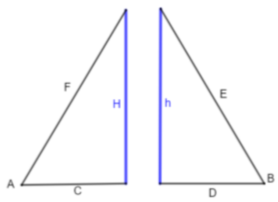
En la figura 3.9 mostramos los ciclos de aprehensiones operativa/discursiva realizados por A30 en respuesta a P3



AO₃(i)

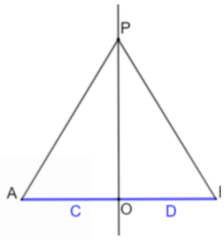
AO_3(i): Identifica los segmentos H y h en los triángulos ΔAOP y ΔBOP

AD_3(v-d): Dos segmentos coincidentes son congruentes.



AO_4(i): Identifica los segmentos C y D en los triángulos ΔAOP y ΔBOP

AD_4(v-d): Les asocia la afirmación: "la mediatriz divide al segmento en dos partes iguales"



AO_4(i): Identifica en la configuración inicial los ángulos $\widehat{AOP}$ y $\widehat{BOP}$

AD_4(v-d): Establece que la mediatriz corta perpendicularmente al segmento

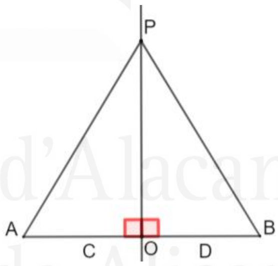


Figura 3.9: Ciclos de aprehensiones operativa/discursiva de A30 en respuesta a P3 (Fase II). AO_n: Aprehensión operativa "n"; AD_n: Aprehensión discursiva "n"
(cf): Cambio figural; (i): identificación; (v-d): visual – discursiva.
En rojo, los elementos geométricos añadidos.
En azul, los elementos geométricos identificados.

En nuestro marco teórico describimos una aprehensión discursiva como la acción que produce una asociación de una afirmación matemática (definición, teorema, axioma, etc) y una configuración. Esta asociación puede darse en las dos direcciones: visual-discursiva o discursiva-visual. Sin embargo, en nuestro estudio con alumnos de etapa secundaria hemos encontrado que algunos alumnos asocian a una configuración no una afirmación matemática dentro de un marco de conocimientos, sino hechos matemáticos como congruencias, equivalencias o relaciones entre las configuraciones, o medidas de magnitudes como la longitud de un segmento. Veamos un ejemplo en la respuesta de A10 a P4:

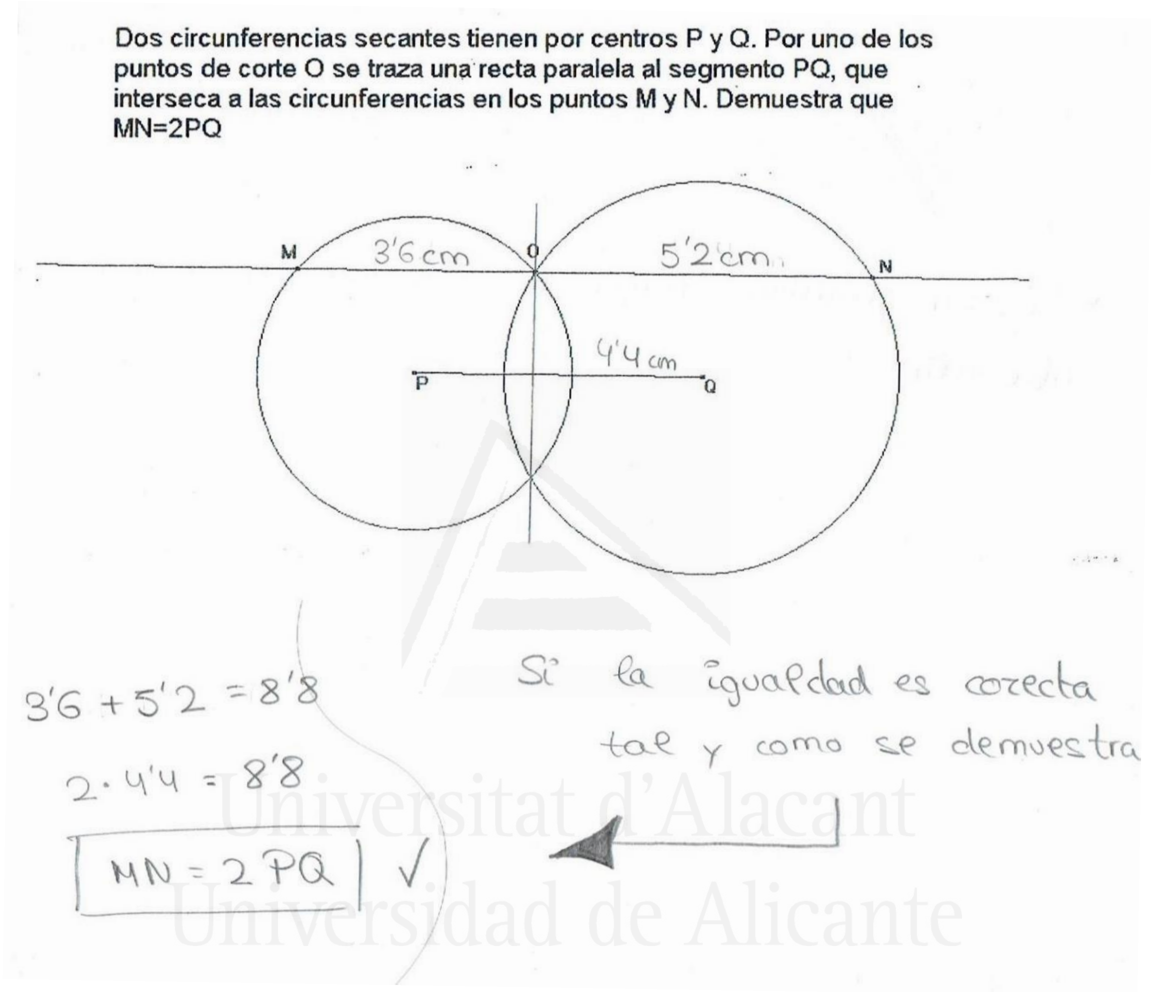


Figura 3.10: Respuesta de A10 a P4.

Esta respuesta nos sugiere la secuencia de aprehensiones operativas/discursivas que mostramos esquematizada en la siguiente figura.

AO₁(i): Identifica los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$

AD₁(v-d): Mide la longitud de cada uno de ellos: $m(\overline{MO}) = 3{,}6\ cm$; m$(\overline{ON}) = 5{,}2\ CM$; y $m(\overline{PQ}) = 4{,}4\ cm$

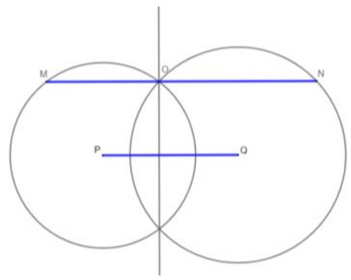


Figura 3.11: Ciclos de aprehensiones operativa/discursiva de A10 en respuesta a P4 (Fase II)

En primer lugar, identifica los segmentos $\overline{MO}, \overline{ON}$ y $\overline{PQ}$ (aprehensión operativa de identificación) para, a continuación, asociarles a cada uno de ellos un hecho matemático (aprehensión visual-discursiva), que en este caso es el valor de su magnitud longitud, medida mediante una regla graduada. Esta es una novedad respecto a los estudios realizados con estudiantes universitarios, ya que este tipo de asociaciones, propias de la Geometría Natural, son progresivamente abandonadas por los estudiantes que comprenden las características del trabajo geométrico en el paradigma de la Geometría Axiomática Natural en el que se desarrollan los problemas geométricos de probar.

3.3.3. Fase III: Identificación de los procedimientos de validación

En esta etapa queremos averiguar de dónde obtiene el estudiante la garantía de que las proposiciones que usa en su respuesta al problema son ciertas.En la siguiente tabla tenemos la transcripción y segmentación de la respuesta de A30 a P3 y los procedimientos de validación de la respuesta identificados con ayuda de la entrevista

Segmentación de la respuesta	**Procedimiento de validación**
1. El lado H y h son iguales ya que es el mismo.	Deductivo
2. C y D también lo son ya que la recta P traza la mediatriz de AB	Deductivo

3. Un ángulo igual	Deductivo
4. Lo cual demuestra que los dos triángulos formados son semejantes.	Deductivo
5. Lo cual todos los ángulos son iguales a sus correspondientes y lo mismo con los lados	Deductivo
6. Lo que demuestra que el lado que une A con P es igual que B con P	Deductivo

Tabla 3.8: Procedimientos de validación de A30 en su respuesta a P3 (Fase III)

En la siguiente tabla tenemos un extracto de la transcripción de la entrevista para la determinación de los procedimientos de validación utilizados en las afirmaciones 2 y 3.

Afirmación matemática	Procedimiento de validación
2. C y D también lo son ya que P es la mediatriz de AB	En la entrevista manifiesta que los lados C y D miden lo mismo “ya que la mediatriz divide al segmento (señala AB) en dos partes iguales”. Inferimos que usa el *procedimiento de validación deductivo*
3. Un ángulo igual	Afirma que “la mediatriz es perpendicular”. *Procedimiento de validación deductivo*

Tabla 3.9: Extracto de la entrevista de A30 a P3.

En respuesta a P3, A30 únicamente utiliza el procedimiento deductivo para validar sus afirmaciones, para mostrar otros procedimientos utilizados por los participantes, mostramos a continuación la respuesta de A25 a P3 en la figura 3.13

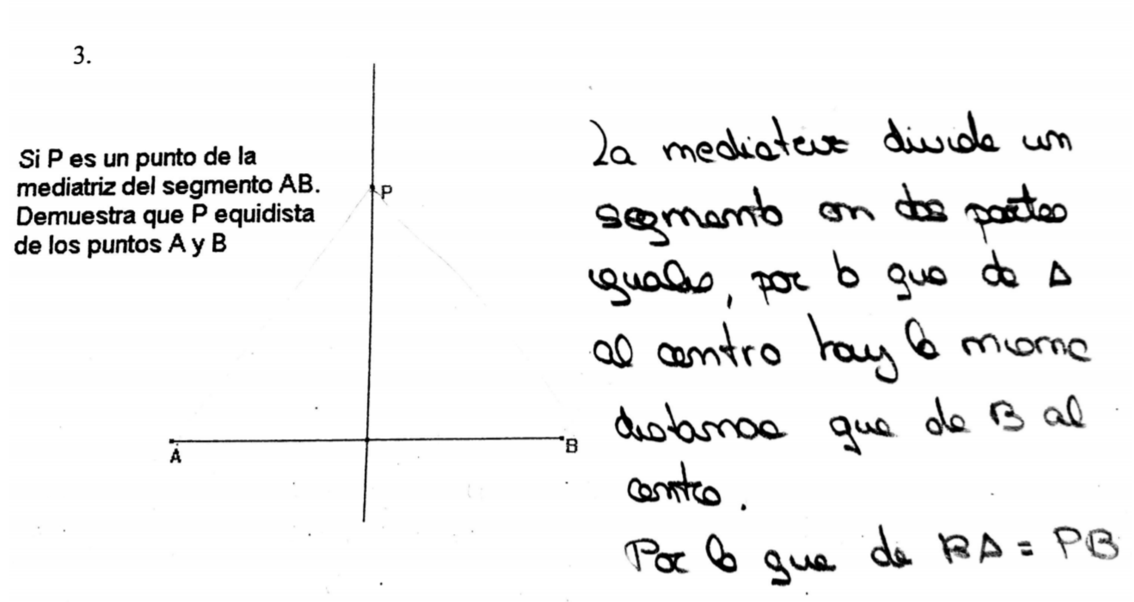


Figura 3.12: Respuesta de A25 a P3

y un fragmento de una transcripción del audio grabado durante la entrevista a A15 para determinar el procedimiento de validación de las afirmaciones realizadas en su respuesta a P3 (Figura 3.13):

Profesor-investigador: Afirmas que "la mediatriz divide un segmento en dos partes iguales". ¿Cómo sabes que eso es cierto?

Participante: Bueno, … la mediatriz es la línea que corta (al segmento) por la mitad

P-I: Bien. A continuación, dices que "de A al centro hay la misma distancia que de B al centro", ¿es cierto?

P: Sí

P-I: ¿Por qué?

P: ¡Está claro! Esta línea (señala la mediatriz) corta al segmento $\overline{AB}$ por la mitad, pues la distancia de la mitad a cada lado es la misma.

P-I: De acuerdo. Por último, afirmas que "por lo que de $\overline{PA} = \overline{PB}$ ".

P: Porque desde aquí (señalando P) hasta aquí (A) hay la misma distancia que desde aquí (P) hasta aquí (B).

P-I: Sí, eso es lo que afirmas, pero yo quiero saber cómo sabes que es cierto.

P: …. (piensa). Es que está claro, lo corta por la mitad

P-I: Sí, el punto de corte está a la misma distancia de A y B, pero lo que dices es que P también está a la misma distancia de A y B. ¿Por qué?

P: No sé,… se ve que miden lo mismo (señala los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$).

Figura 3.13: Transcripción de la entrevista de A15 a P3.

El profesor-investigador pregunta directamente el porqué de la afirmación "*la mediatriz divide un segmento en dos partes iguales*". Aunque en su respuesta el participante no menciona la perpendicularidad de la mediatriz, su respuesta induce a pensar que conoce la definición y que su afirmación se sustenta en dicho conocimiento. Establecido el procedimiento de validación de esa primera afirmación, continúa la entrevista con la siguiente. El profesor-investigador pregunta por la afirmación "*de A al centro hay la misma distancia que de B al centro*". Su respuesta y sus gestos, ponen de manifiesto que dicha afirmación es una consecuencia lógica de la definición de mediatriz. Por tanto, otra afirmación validada deductivamente. Así, se llega a la última afirmación que realiza en su respuesta: "*por lo que de* $\overline{PA} = \overline{PB}$". Al principio, el participante insiste en la veracidad de la afirmación sin más argumento que la evidencia visual de que esto es así, señalando la distancia entre P y los puntos A y B. Ante la insistencia del profesor-investigador, finalmente, afirma que "*se ve que miden lo mismo*", lo que nos permite inferir que el procedimiento de validación de esta última afirmación es el perceptivo.

En la siguiente tabla recogemos las afirmaciones y los procedimientos de validación utilizados por A25 en respuesta a P3.

Unidades de análisis	Procedimiento de validación
1. La mediatriz divide un segmento en dos partes iguales	Deductivo
2. de A al centro hay la misma distancia que de B al centro	Deductivo
4. por lo que de $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$	Perceptivo

Tabla 3.10: Procedimientos de validación de A25 en respuesta a P3 (Fase III)

3.3.4. Fase IV: Determinación del razonamiento configural

Los análisis realizados hasta este momento (descripción de los procesos de visualización, transcripción y segmentación de las respuestas e identificación de los procedimientos de validación) nos permiten determinar el desenlace de los razonamientos configurales de los estudiantes en su resolución de los problemas propuestos en el cuestionario. Mostramos esta etapa del análisis con ayuda de la respuesta de A30 a P3:

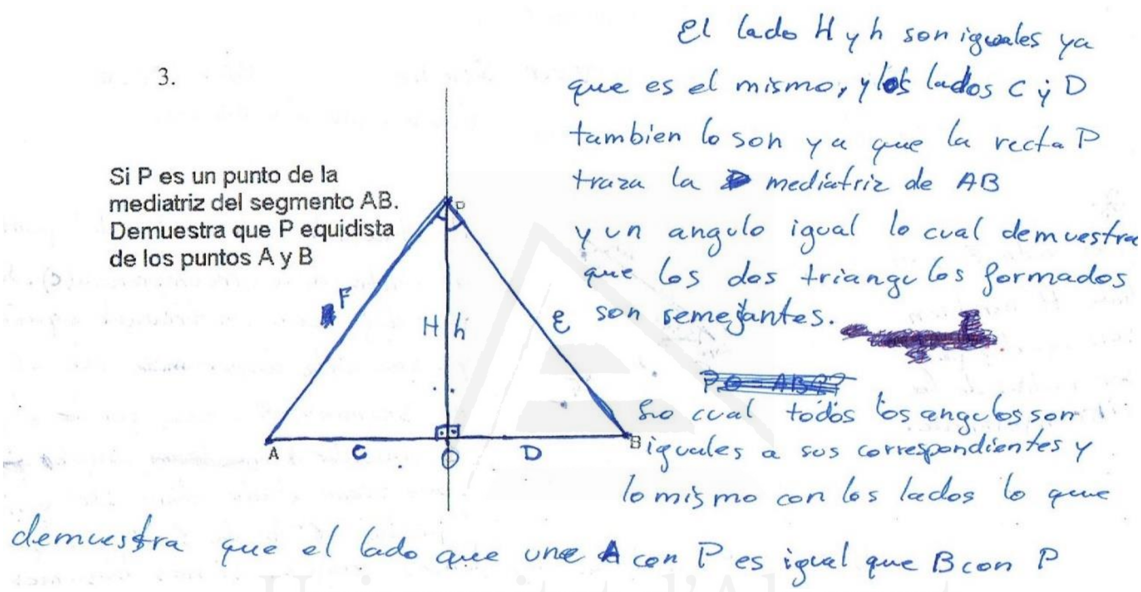


Figura 3.14: Respuesta de A30 a P3.

Los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas identificadas en la fase II del análisis proporcionan las subconfiguraciones relevantes y las ideas matemáticas que le permiten resolver deductivamente el problema. La identificación de los procedimientos de validación realizada en la fase III con ayuda de la entrevista nos ayuda a confirmar que el razonamiento configural de A30 en la resolución de P3 desemboca en un *truncamiento* (Fase IV), una de las categorías de posibles desenlaces descrita en nuestro marco teórico.

Sin embargo, algunos razonamientos configurales observados no se adaptan a la clasificación de nuestro marco teórico, generada a partir de respuestas de estudiantes universitarios. La respuesta de A13 a P2 que mostramos a continuación es un ejemplo de ello.

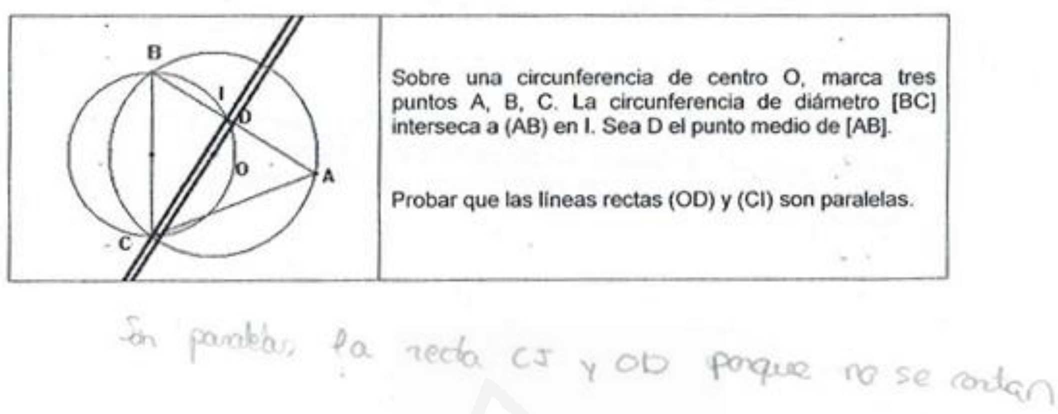


Figura 3.15: Respuesta de A13 a P2.

La transcripción y segmentación de la respuesta se reduce a su única afirmación, tal y como mostramos a continuación.

Segmentación de la respuesta	*Procedimiento de validación*
1. Son paralelas, la recta CI y OD porque no se cortan.	Perceptivo. En la entrevista manifiesta que "*se ve*" que son paralelas

Tabla 3.11: Segmentación y procedimiento de validación de A13 en respuesta a P2. (Fases I y II)

En cuanto a los procesos de visualización que podemos observar, solo se puede identificar un ciclo de aprehensión operativa/discursiva que mostramos a continuación:

AO_1(i): Identifica las rectas (CI) y (OD)

AD_1(v-d): Establece el paralelismo de las rectas (CI) y (OD)

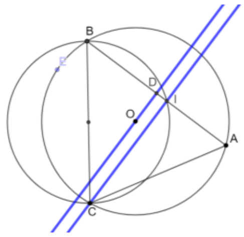


Figura 3.16: Procesos de visualización de A13 en respuesta a P2.

En este tipo de razonamiento configural la única aprehensión operativa es la identificación de los elementos involucrados en la tesis a probar, a los que se les asocia directamente la propia tesis validada perceptivamente. A este desenlace del razonamiento configural lo llamaremos *truncamiento naif* (Fase IV) (Prior y Torregrosa, 2020).

A la luz de nuestro análisis, dentro de la categoría Conjeturas sin demostración, es decir, aquellos razonamientos en los que la coordinación permite resolver el problema aceptando conjeturas mediante percepción simple, hemos considerado pertinente distinguir dos subcategorías diferentes. La primera, que mostramos con ayuda de la respuesta de A14 a P4, la hemos denominado *Conjetura sin demostración empírica* (Prior y Torregrosa, 2020). En esta subcategoría, las aprehensiones discursivas son siempre asociaciones con hechos matemáticos observados en la figura: congruencia, perpendicularidad, equidistancia, paralelismo, igualdad de áreas, etc. No hay asociaciones con definiciones o teoremas. Su razonamiento es un proceso "puramente configural" (Duval, 1998, pp. 44). Mostramos un ejemplo de esta categoría con ayuda de la respuesta de A14 a P4.

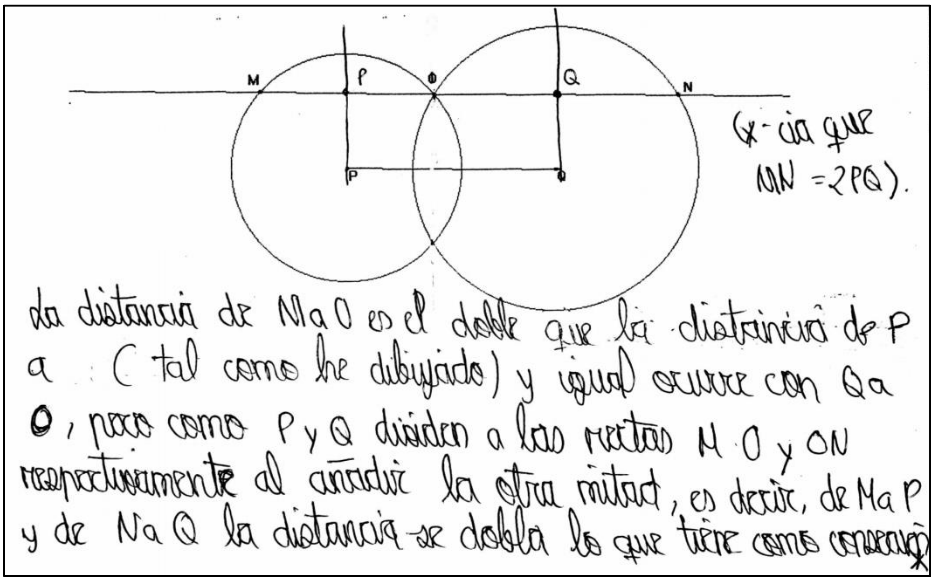


Figura 3.17: Respuesta de A14 a P4

En la siguiente figura, describimos, esquemáticamente, el razonamiento configural que desarrolla el alumno para dar su respuesta a la tarea:

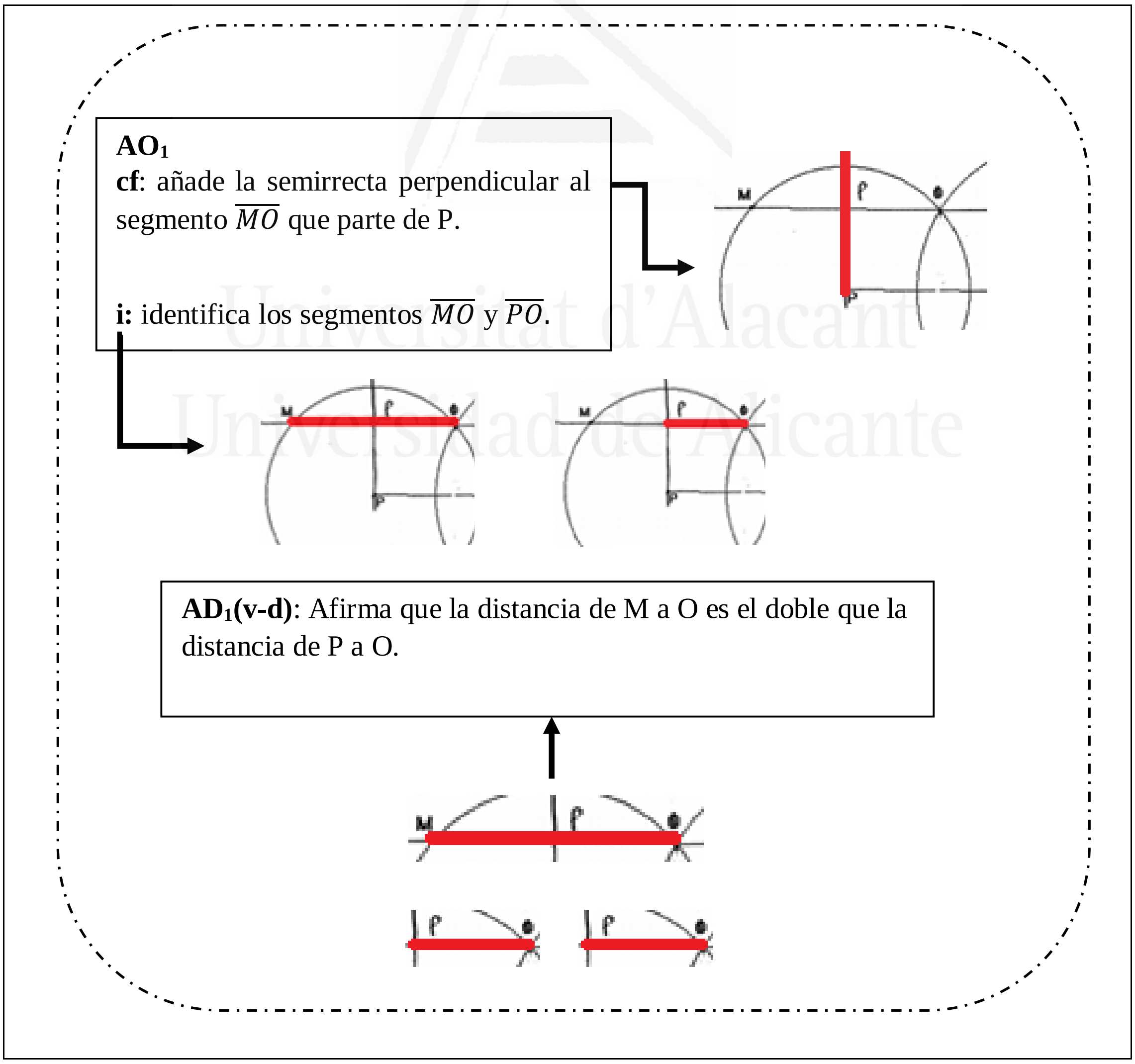


Figura 3.18: Primer ciclo de aprehensiones operativas/discursivas de la respuesta a P3 de A14

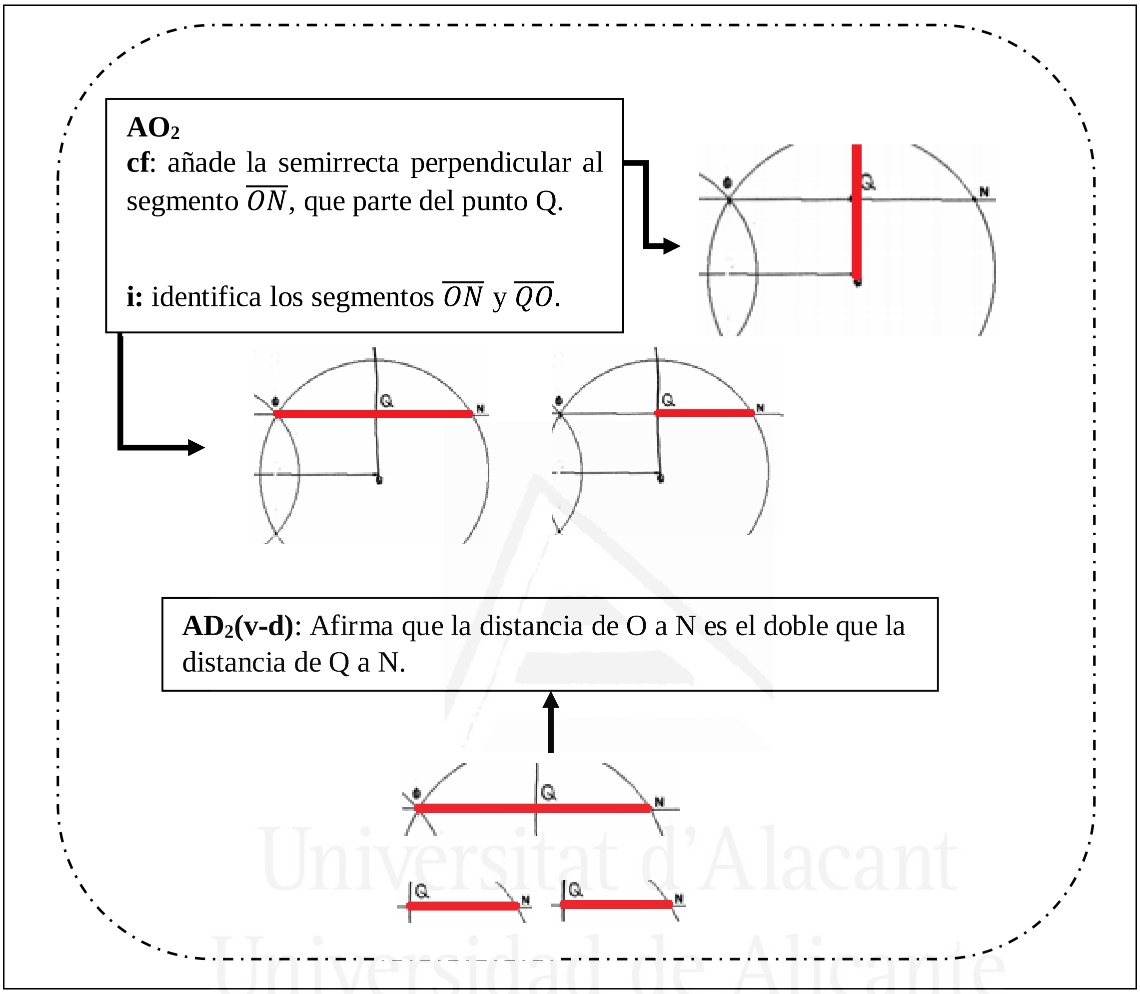


Figura 3.19: Segundo ciclo de aprehensiones operativas/discursivas de la respuesta a P3 de A14

Aquí, la visualización es el único proceso que guía la resolución del problema. Todo ocurre sin que se realice verificación alguna más allá de la evidencia visual que proporciona la figura que acompaña al enunciado y las modificaciones que se han realizado sobre ella. El razonamiento del alumno no parte de las hipótesis del problema dadas por el enunciado, sino de las evidencias que extrae de la configuración que lo acompaña. El estatus de las proposiciones no juega ningún papel en su “solución” al problema. Como hemos señalado anteriormente, a este tipo de desenlace de la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas lo hemos denominado *Conjetura sin demostración empírica* (Fase IV).

La segunda subcategoría se observa cuando la coordinación de aprehensiones operativas y discursivas permite resolver el problema en el contexto de la Geometría Axiomática Natural, es decir, cuando la coordinación permite resolver el problema deductivamente, pero aceptando alguna conjetura perceptivamente. En esta categoría, generalmente, las aprehensiones discursivas asocian afirmaciones matemáticas (definiciones o teoremas) a las subconfiguraciones, y, excepcionalmente, para completar su razonamiento, realizan alguna asociación con algún hecho matemático validado perceptivamente. A estas las hemos denominado *Conjeturas sin demostración conceptuales*. Volvemos a la respuesta de A32 a P1 para mostrar un ejemplo de esta categoría.

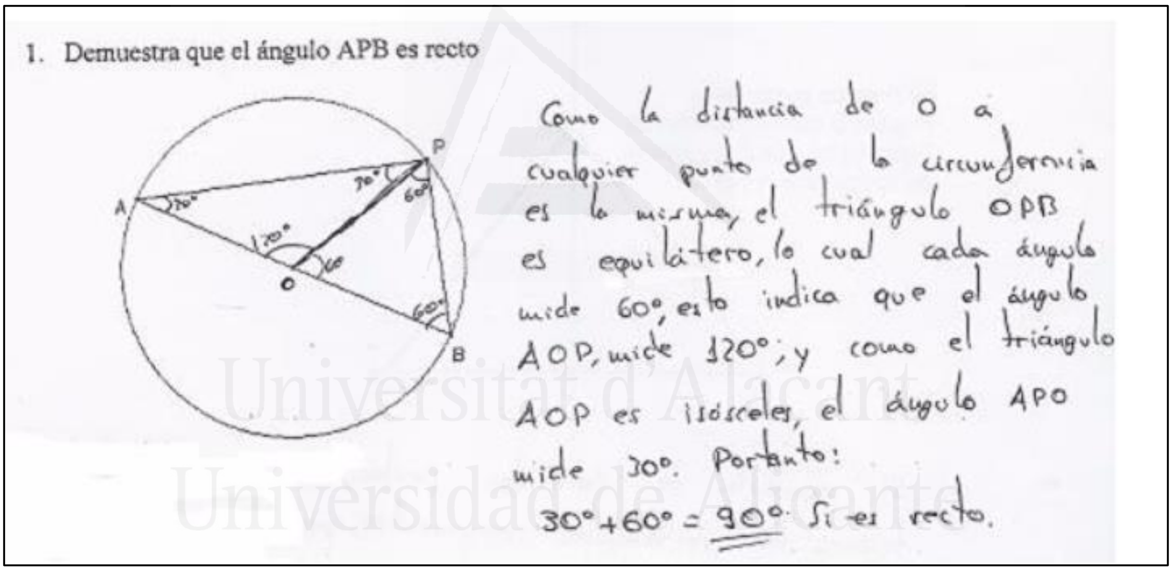
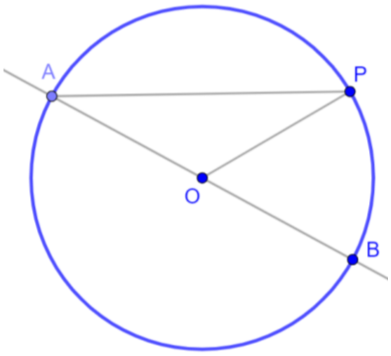


Figura 3.20: Respuesta de A32 a P1.

Analizamos, en el siguiente esquema, el razonamiento configural seguido por el estudiante en su respuesta:

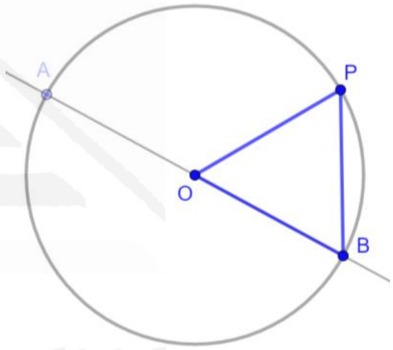
AO$_1$(i): Identifica la subconfiguración formada por el centro de la circunferencia (O), la propia circunferencia y los puntos A, P y B.

AD$_1$(v-d): Establece que la distancia de O a cualquier punto de la circunferencia es la misma.



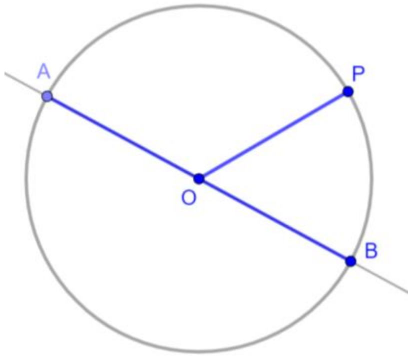
AO$_2$(i): Identifica la subconfiguración que forma el triángulo ΔOPB

AD$_2$(v-d): Establece que ΔOPB es un triángulo equilátero, por lo que cada uno de sus ángulos mide 60º



AO$_3$(i): Identifica la subconfiguración los puntos A, O, P y B, y los segmentos que los unen

AD$_3$(v-d): Establece que el ángulo $\widehat{AOP}$ mide 120º



AO$_4$(i): Identifica el triángulo ΔOPA

AD$_4$(v-d): Establece que El triángulo ΔAOP es isósceles y el ángulo $\widehat{APO}$ mide 30º

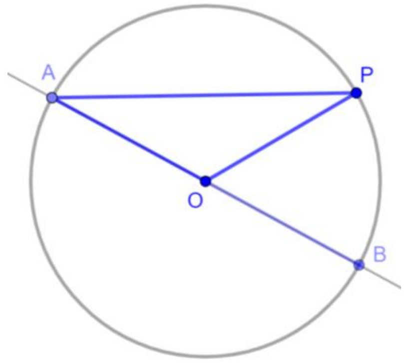


Figura 3.21: Razonamiento configural de A32 a P1

En la siguiente figura describimos el razonamiento que se deduce de los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas que acabamos de mostrar.

1) En primer lugar, asocia a la configuración inicial la siguiente propiedad matemática: "la distancia de O a cualquier punto de la circunferencia es la misma".
2) A continuación, lo que acaba de establecer le permite deducir erróneamente, que el triángulo ΔOPB es equilátero.
3) Establecida la equilateralidad de ΔOPB, determina que el ángulo $\widehat{OBP}$ mide 60º, pues todos los ángulos de un triángulo equilátero miden 60º.
4) Continúa deduciendo que el ángulo que el ángulo $\widehat{AOP}$ mide 120º, ya que $\widehat{BOP}$ mide 60º y $\widehat{AOP}$ y $\widehat{BPO}$ son ángulos adyacentes, es decir, tienen el vértice y un lado común, y los otros lados, situados uno en prolongación del otro, forman un ángulo llano (180º).
5) Como el triángulo ΔOPA es isósceles, y el ángulo desigual mide 120º, se deduce que el ángulo $\widehat{APO}$ mide 30º.
6) Finalmente, el ángulo $\widehat{APB}$ está formado por los ángulos consecutivos $\widehat{APO}$ y $\widehat{OPB}$ de 30º y 60º, respectivamente. De lo que se deduce inmediatamente la tesis solicitada.

Figura 3.22: Descripción del razonamiento configural de A32 a P1 (Fase IV)

Su razonamiento configural desemboca en lo que hemos denominado una Conjetura sin Demostración Conceptual (Fase IV). La coordinación le permite resolver el problema, pero aceptando perceptivamente la hipótesis falsa de la equilateralidad del triángulo ∆OPB.

La determinación de los razonamientos configurales de los participantes en respuesta a los problemas del cuestionario ha permitido observar los distintos desenlaces de la coordinación necesaria para dar respuesta a los problemas, así como refinar nuestro modelo, añadiendo la categoría *truncamiento naif* y las dos subcategorías que acabamos de describir: *Conjetura sin demostración empírica* y *Conjetura sin demostración conceptual*.

3.3.5. Fase V: Identificación de los tipos de discurso

En palabras de Balacheff (1988), en el seno de una comunidad matemática sólo pueden aceptarse como pruebas aquellas explicaciones que toman una forma particular como secuencias de enunciados, organizados según reglas determinadas, que se deducen a partir de otros que les preceden.

En esta etapa de nuestro análisis queremos clasificar los discursos generados en sus respuestas a los problemas del cuestionario. Trataremos de describir la organización discursiva, sus niveles, el papel del estatus de las proposiciones afirmadas, si existe o no reutilización, si los pasos se encuentran encadenados, si podemos observar la estructura de un paso deductivo, etc. Para ello, vamos a elaborar un gráfico proposicional que muestre las conexiones entre las diferentes afirmaciones matemáticas.

Siguiendo a Duval (1998, 2007), en nuestro marco teórico hemos contemplado dos organizaciones discursivas para la justificación de propiedades en contexto geométrico:

- razonamiento discursivo natural y

-razonamiento discursivo teórico.

Sin embargo, al analizar las respuestas de los participantes en el estudio, nos hemos visto en la necesidad de añadir dos categorías nuevas:

- comprobación y

- prueba ingenua.

A continuación, con ayuda de la respuesta a P3 de A30, que hemos utilizado para mostrar las fases anteriores, mostramos un ejemplo del análisis realizado.

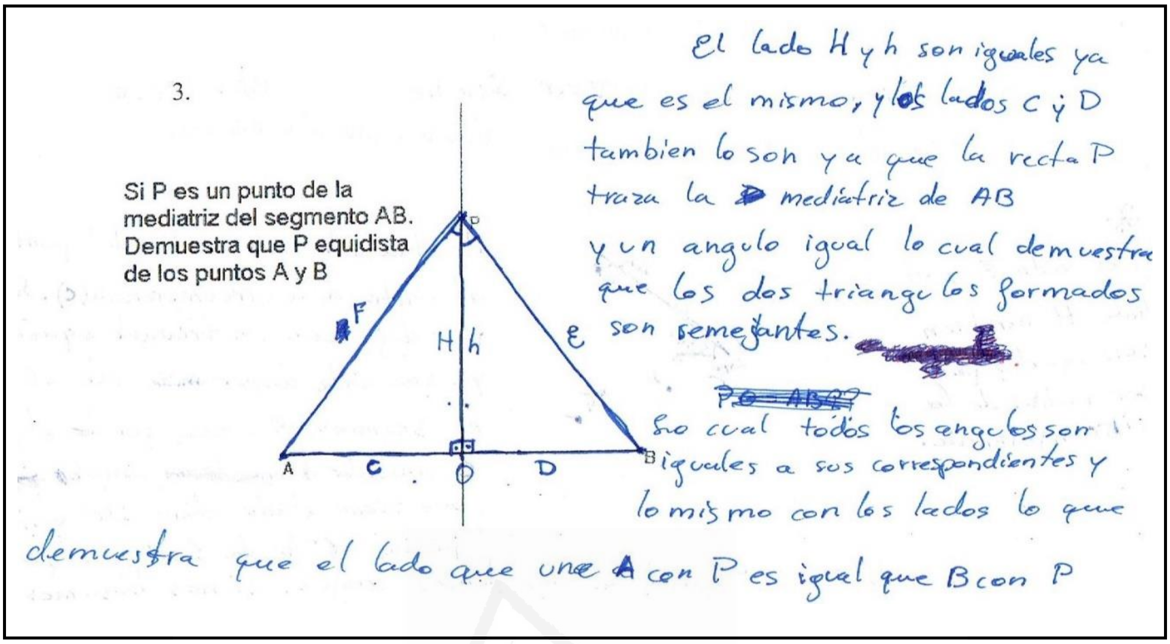


Figura 3.23: Respuesta de A30 a P3.

Partiendo de los análisis realizados en las fases anteriores, estamos en condiciones de realizar el análisis de la organización discursiva de su respuesta:

Paso 1: Premisa: H ($\overline{OP}$) y h ($\overline{OP}$) son el mismo segmento → Teorema: Todo segmento es congruente consigo mismo → Conclusión: $H \equiv h$

Paso 2: Premisa: La recta P ($\overline{PO}$) es la mediatriz de $\overline{AB}$→ La mediatriz corta al segmento en su punto medio → Conclusión: $C(\overline{AO}) \equiv D\ (\overline{OB})$

Paso 3: La recta P ($\overline{PO}$) es la mediatriz de $\overline{AB}$ → La mediatriz corta perpendicularmente al segmento → $\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}$

Paso 4: $H \equiv h$, $C \equiv D$ y $\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}$ → Criterio de congruencia L-A-L →ΔAOP ≡ ΔBOP

Paso 5: ΔAOP ≡ ΔBOP → Definición de triángulos congruentes → $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$

Las conclusiones de los pasos 1, 2 y 3 se convierten en premisas del paso 4, donde, utilizando como propiedad el criterio de congruencia de triángulos L-A-L, se deduce que los triángulos ΔAOP y ΔBOP son congruentes. Utilizando esta conclusión como premisa del paso 5 y la definición de triángulos congruentes, se deduce la tesis que se pretende demostrar.

En el siguiente esquema se ilustra esta organización discursiva:

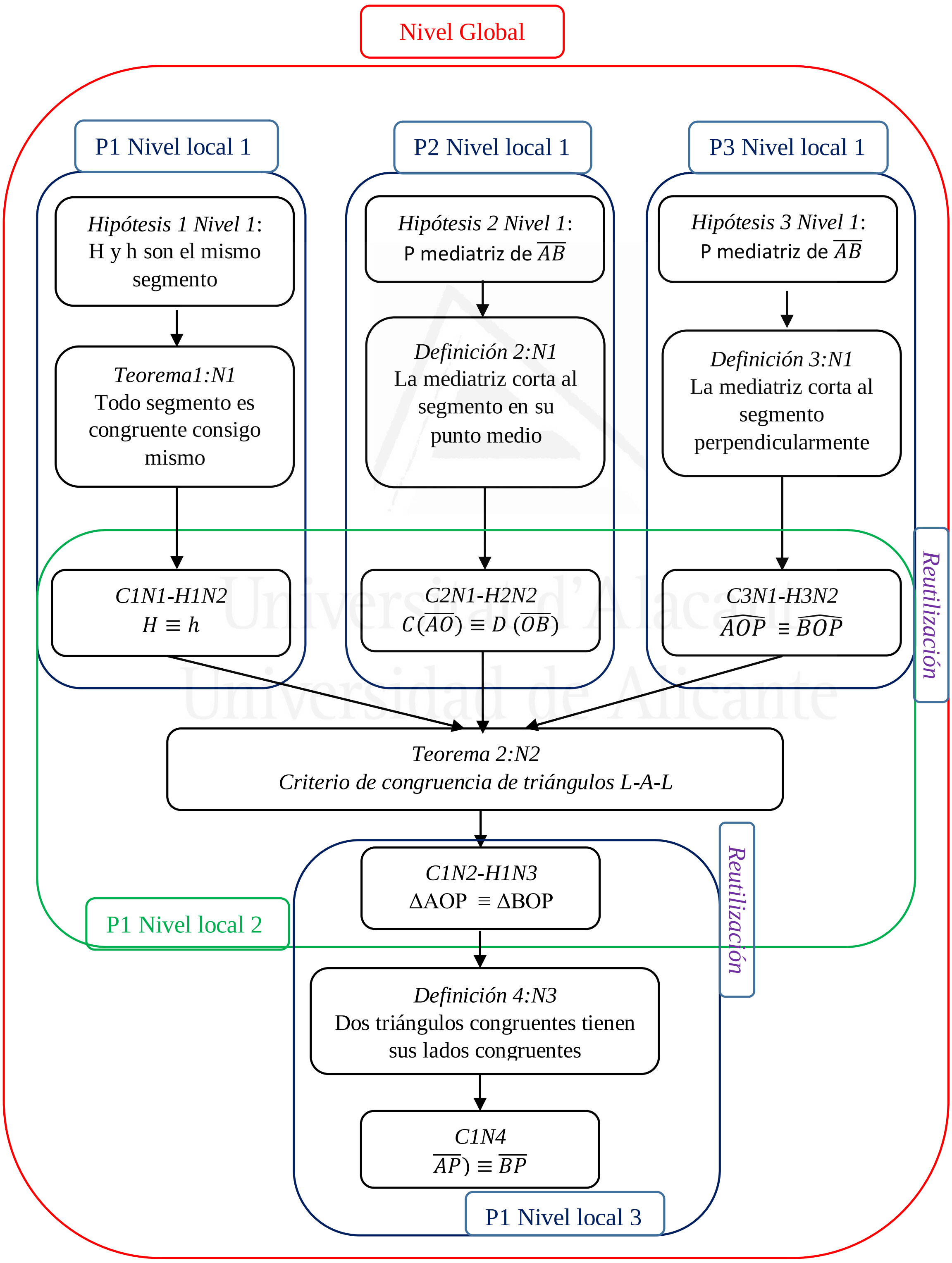


Figura 3.24: Organización discursiva de la respuesta de A30 a P3.
Cambio de estatus: CiNj-HkNl Conclusión i Nivel j-Hipótesis k Nivel l
Pi:: Paso deductivo i

Si bien la falta de rigor en la redacción es la habitual en la mayoría de alumnos de estas edades, podemos observar en el discurso las características propias de razonamiento discursivo teórico:

1. Un nivel local (paso deductivo), donde cada afirmación adquiere una de las tres categorías (premisa, definición/teorema o conclusión), es decir, su estatus operativo dentro del paso deductivo en función de su estatus teórico.
2. Un nivel global (organización de varios pasos), donde las conclusiones de pasos anteriores son reutilizadas como premisas en los pasos siguientes.

Cada una de las conclusiones se hace necesaria a partir de lo que previamente ha sido enunciado, por lo que el valor lógico *verdadero*, es decir, el valor de verdad dentro del marco teórico en el que se produce el razonamiento, *se transfiere* desde las hipótesis hasta la conclusión, sin importar el valor epistémico inicial que el resolutor pudiese haber otorgado a la tesis del enunciado. De esta manera, podemos concluir que la respuesta tiene las características de una *prueba matemática*. La organización de su discurso es la propia de un *razonamiento discursivo teórico*.

A continuación, vamos a analizar la respuesta de A11 a P4 como un ejemplo de *razonamiento discursivo natural*. Este tipo de organización del discurso en las respuestas es interesante puesto que se reduce a afirmar la tesis. Sin embargo, las marcas en la configuración inicial, las modificaciones realizadas y el etiquetado de determinados segmentos permiten, con ayuda de la entrevista realizada, reconstruir un discurso que no es más que la descripción de su razonamiento configural.

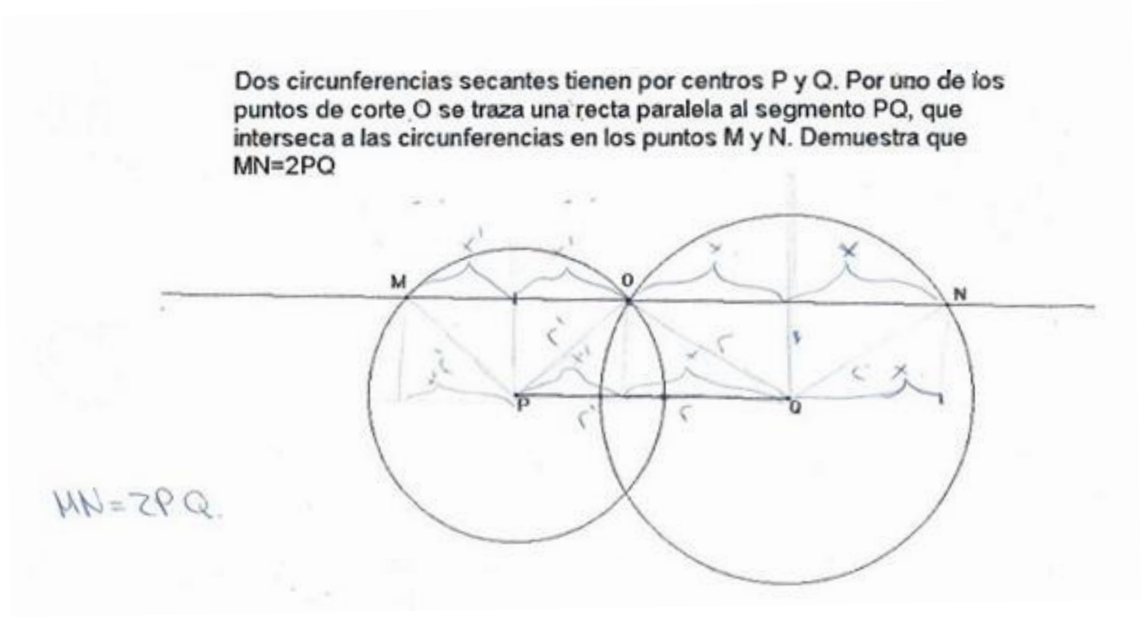


Figura 3.25: Respuesta de A11 a P4.

En esta respuesta tomamos las modificaciones realizadas sobre la figura con el objetivo de reconstruir las operaciones discursivas básicas que permiten generar un discurso a partir del razonamiento configural realizado. Antes de realizar la descripción, vamos a analizar los procesos de visualización que podemos inferir de las modificaciones realizadas sobre la configuración inicial.

Modifica la configuración inicial añadiendo los segmentos $\overline{QO}$ y $\overline{QN}$, lo que revela una aprehensión operativa de cambio figural. A continuación, etiqueta estos nuevos segmentos con la misma letra *r*. Podemos inferir que se trata de una aprehensión visual-discursiva al asociar a dichos segmentos el hecho matemático de su congruencia.

Realiza un ciclo aprehensión operativa/discursiva idéntico para establecer la congruencia de los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{PO}$,que etiqueta con la letra *r'*.

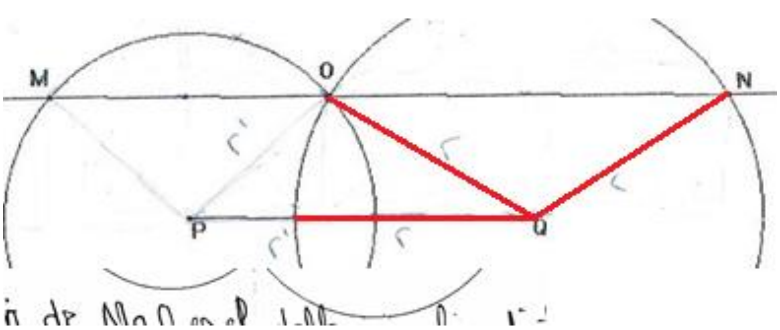


Figura 3.26: Fragmento de la respuesta de A11 a P4.

A continuación, modifica de nuevo la configuración inicial añadiendo segmentos *perpendiculares* que parten de los centros de las circunferencias P y Q e intersecan a la recta $\overline{MN}$ en unos puntos que no etiqueta pero marca en la configuración. También añade segmentos *perpendiculares* a $\overline{PQ}$ o a sus prolongaciones que pasan por los puntos O, M y N. Por tanto, se trata de nuevo de una aprehensión operativa de cambio figural que mostramos en la siguiente figura

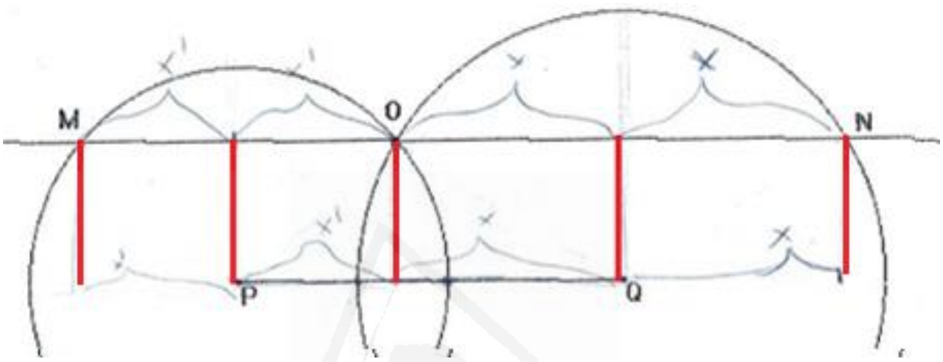


Figura 3.27: Fragmento de la respuesta de A11 a P4.

Las etiquetas de los diferentes segmentos que identifica como *x* y *x'* nos permiten inferir que asocia el hecho matemático de su congruencia, lo que interpretamos como aprehensiones visual-discursivas.

Siguiendo las fases de nuestro análisis, nos interesa ahora establecer el procedimiento de validación de las asociaciones que se deducen de los procesos de visualización descritos. Para facilitar la redacción de las afirmaciones matemáticas que se infieren de las modificaciones y marcas realizadas en la configuración, hemos etiquetado algunos puntos en otro color para dejar claro que son modificaciones realizadas por el investigador.

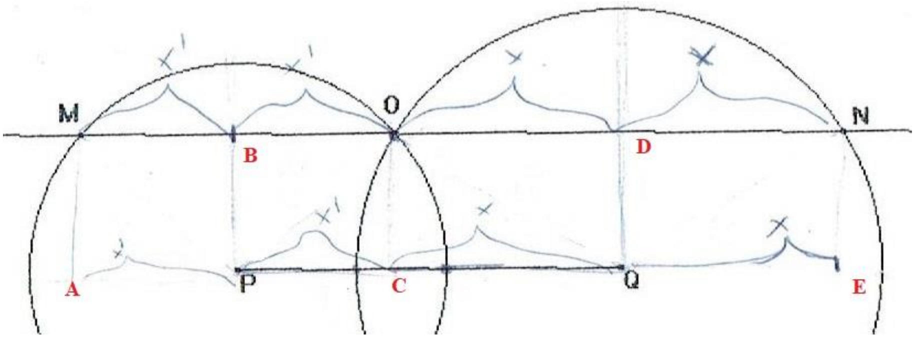


Figura 3.28: Imagen con modificaciones realizadas en rojo por el investigador de la respuesta de A11 a P4.

En la siguiente tabla realizamos un análisis de los procedimientos de validación de las afirmaciones matemáticas que inferimos a partir de los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas descritas y de la entrevista realizada.

Segmentación de la respuesta	*Procedimiento de validación*
1. Los segmentos $\overline{QO}$ y $\overline{QN}$ son congruentes	Deductivo. En la entrevista afirma que "$\overline{QO}$ *y* $\overline{QN}$ *son radios de la circunferencia de centro Q*"
2. Los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{PO}$ son congruentes	Deductivo. En la entrevista afirma que "$\overline{PM}$ y $\overline{PO}$ *son radios de la circunferencia de centro P*"
3. Los segmentos $\overline{MB}$, $\overline{BO}$, $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ son congruentes	Perceptivo. Afirma que "*se forma como un rectángulo (AMOC) donde P y (B) son los puntos medios*"
4. Los segmentos $\overline{OD}$, $\overline{DN}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{QE}$ son congruentes	Perceptivo. Afirma que "*se forma como un rectángulo (ONEC) donde Q y (D) son los puntos medios*"

Tabla 3.12: Segmentación y procesos de visualización de A11 en respuesta a P4.

Descritos los procesos de visualización que realiza y los procedimientos de validación de sus afirmaciones, podemos concluir que el razonamiento configural de A11 a P4 desemboca en una *conjetura sin demostración empírica.* Este razonamiento configural le permite dar una respuesta al problema basada en la aceptación de conjeturas sin demostración. Clasificamos el discurso que hemos podido reconstruir como un *razonamiento discursivo natural* cuya estructura se puede describir de la siguiente manera:

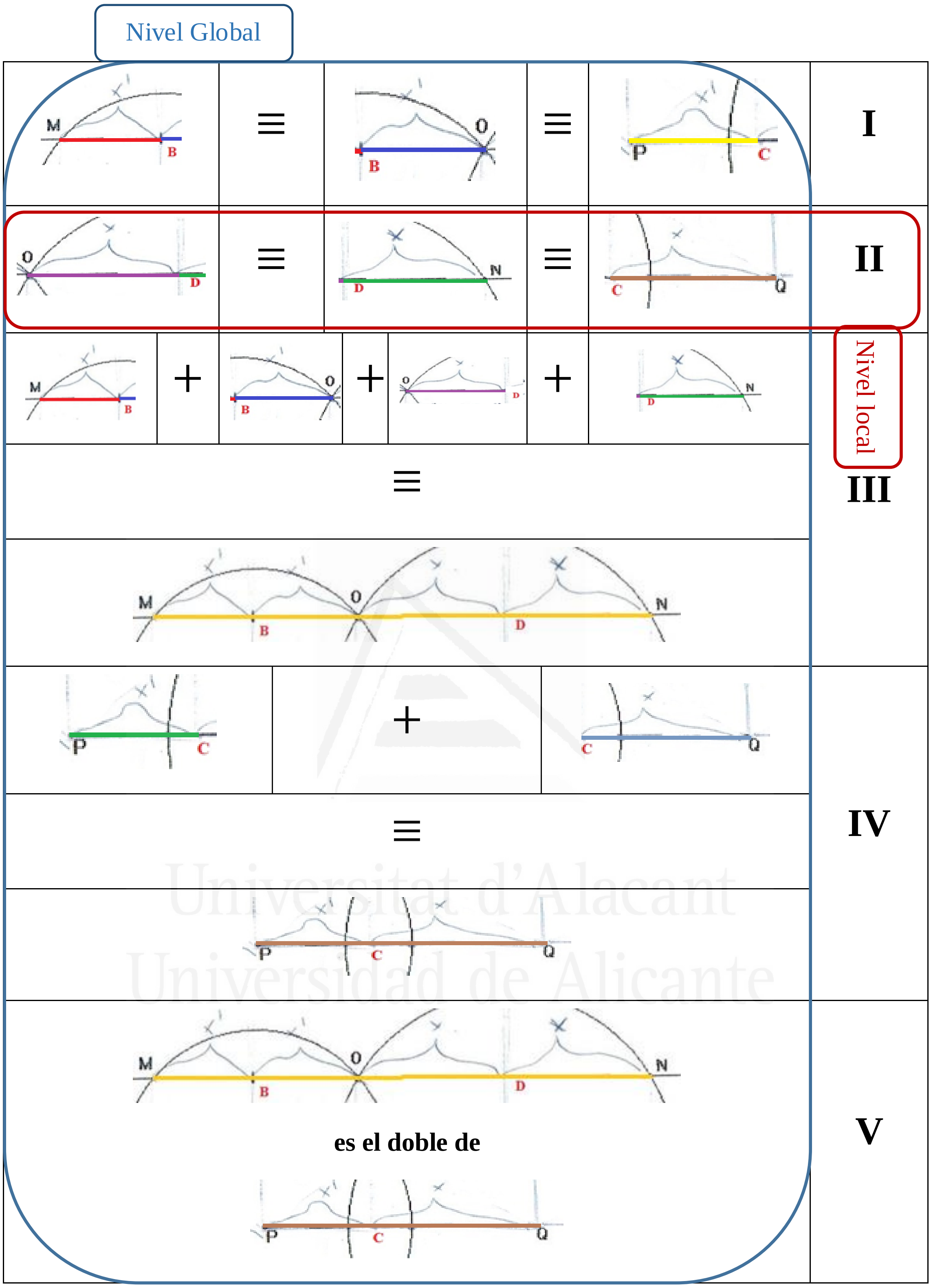


Figura 3.29: Organización discursiva de la respuesta de A11 a P4. Segmentos destacados en color por el profesor-investigador.

Se puede observar un nivel global en los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 que se ven como tres proposiciones, y un nivel local interno a cada paso donde hemos sustituido los símbolos matemáticos ("≡" significa "igual longitud", el símbolo "+" significa "concatenar segmentos").

Algunos alumnos no parecen entender el carácter general de las afirmaciones matemáticas que se pide probar en los problemas y tratan de verificar la tesis para el caso particular de la configuración que acompaña al enunciado. Mostramos la respuesta al problema 4 de A21 como ejemplo:

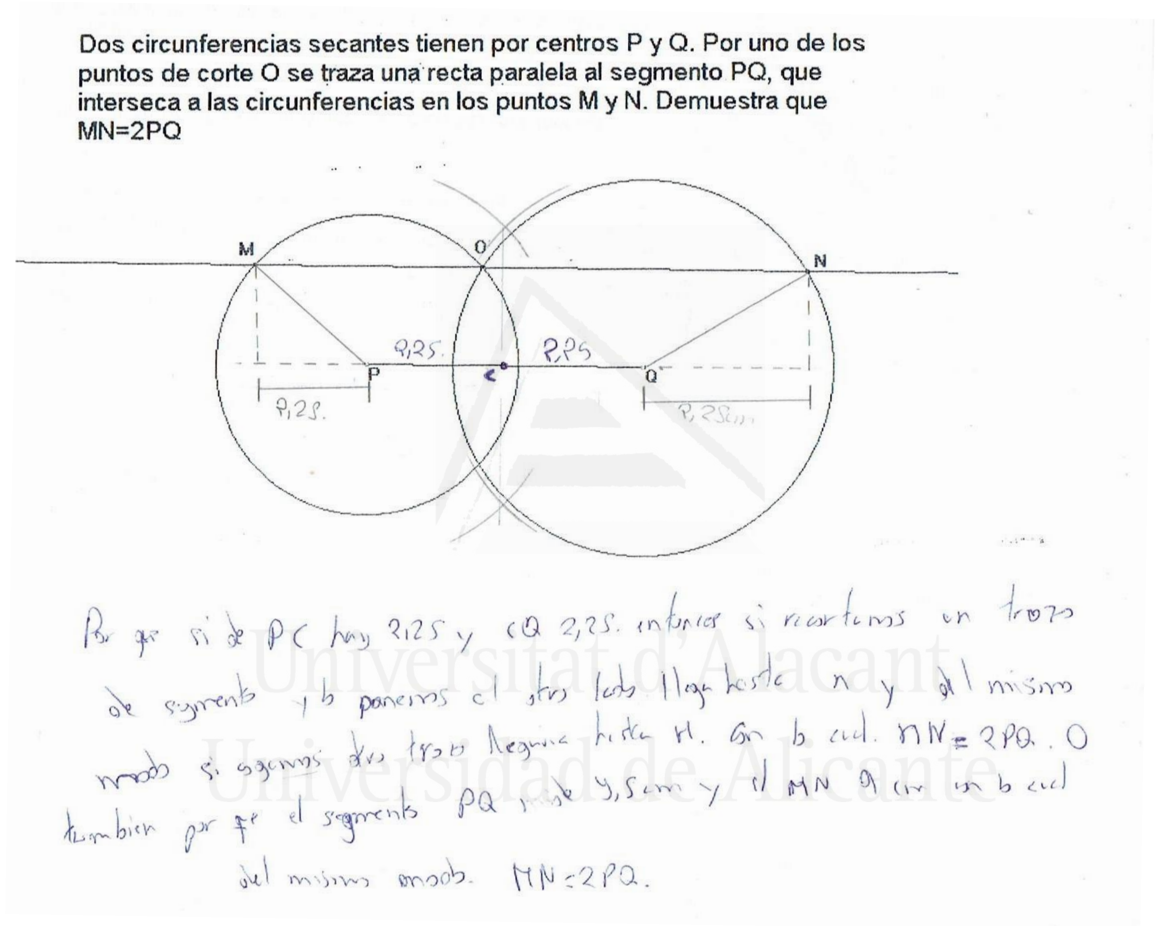


Figura 3.30: Respuesta de A21 a P4.

Para realizar el análisis de su producción discursiva reproducimos en la siguiente figura la segmentación de su respuesta con los procedimientos de validación:

Segmentación de la respuesta	*Procedimiento de validación*
1. Si de PC hay 2,25 y CQ 2,25	Perceptivo, mediante el uso de instrumentos de medida (regla)
2. Si recortamos un trozo de segmento y lo ponemos en el otro lado llega hasta N	Perceptivo, cuando escribe "un trozo" se refiere a $\overline{PC}$. La afirmación le parece visualmente evidente, "*se ve que llega hasta N*"
3. Y del mismo modo si cogemos otro trozo llegará hasta M	Perceptivo, la afirmación le parece visualmente evidente.
4. Con lo cual NM = 2PQ	Deductivo, de las afirmaciones anteriores se deduce que la longitud del segmento $\overline{NM}$ es doble que la del segmento $\overline{PQ}$
5. O también porque el segmento PQ mide 4,5 cm y el MN 9 cm	Perceptivo, mediante el uso de instrumentos de medida (regla)
6. Con lo cual del mismo modo MN = 2PQ	Deductivo, de las afirmaciones anteriores se deduce que la longitud del segmento $\overline{NM}$ es doble que la del segmento $\overline{PQ}$

Tabla 3.13: Segmentación y procedimientos de validación de A21 a P4.

En su discurso, A21 nos da dos respuestas.

1. Si consideramos las afirmaciones 2, 3 y 4, tenemos un razonamiento discursivo natural mediante el cual describe el siguiente razonamiento configural:

En primer lugar, realiza una aprehensión secuencial que le permite construir la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ con la intención de obtener su punto medio C. Siguiendo a Duval (1995), la aprehensión secuencial es requerida siempre que se desea construir una figura o describir su construcción, y trata del orden de construcción de una figura. Ese orden no solo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas técnicas utilizadas (la regla y el compás). A continuación, añade a la configuración principal segmentos congruentes con $\overline{PC}$ y $\overline{CQ}$ prolongando el segmento $\overline{PQ}$ a izquierda y derecha, tal y como se muestra en la siguiente figura, donde hemos añadido las etiquetas P' y Q' para facilitar la comprensión de la aprehensión operativa realizada.

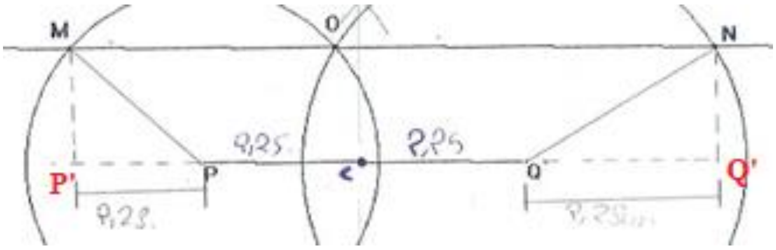


Figura 3.31: Fragmento de la respuesta de A21 a P4 con modificaciones en rojo realizadas por el investigador.

La respuesta formada por los segmentos 2, 3 y 4 de su producción escrita es la representación lingüística del razonamiento configural que acabamos de describir en la figura 3.26. Por tanto, concluimos que produce un razonamiento discursivo natural. Utilizando el registro gráfico mostramos en la siguiente figura el nivel global de organización de las proposiciones enunciadas:

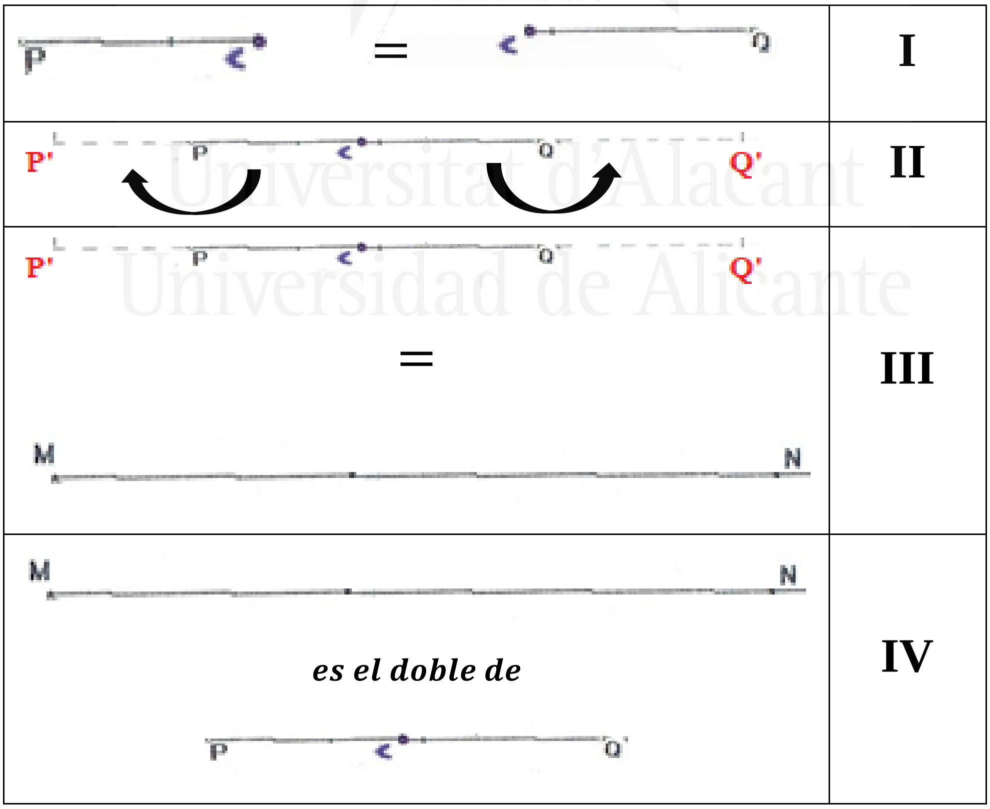


Figura 3.32: Nivel global de la organización discursiva.

Sin embargo, las afirmaciones analizadas no componen la totalidad del discurso.

2. Si analizamos los segmentos 1, 5 y 6 de su respuesta, tenemos que con ellos A21 describe el siguiente razonamiento configural:

Tras la aprehensión secuencial descrita anteriormente, mediante la cual determina el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, identifica los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{CQ}$ (aprehensión operativa) para, a continuación, asociarles el valor de la medida de su longitud, obtenida mediante el uso de una regla graduada. Esta asociación visual-discursiva difiere de las descritas en nuestro marco teórico. Obviamente, la afirmación "*el segmento* $\overline{PC}$ *mide 2,25 cm*" no es ni una definición, ni un teorema, ni un axioma. Sin embargo, consideramos esta asociación una aprehensión discursiva, puesto que asocia a una subconfiguración de la configuración inicial una afirmación sobre un hecho matemático. Otra cuestión es que este tipo de asociación no sea propia de la Geometría Axiomática Natural, sino de la Geometría Natural.

A partir de aquí, muestra una coordinación similar realizando una aprehensión operativa para identificar el segmento $\overline{PQ}$ y asociarle el hecho matemático del valor de su longitud "*el segmento* $\overline{PQ}$ $mide$ 4,5 cm". Un nuevo ciclo aprehensión operativa/discursiva le lleva a concluir que "*el segmento* $\overline{MN}$ *mide 9 cm*", de donde deduce inmediatamente la tesis del enunciado (según la entiende A21). El desenlace de su razonamiento configural se puede clasificar como un *truncamiento naif*.

El discurso formado por las afirmaciones 1, 5 y 6 no encaja con las tipologías de discursos descritas en nuestro marco teórico: razonamientos discursivos naturales y teóricos. Por tanto, tenemos que generar una nueva categoría de discurso para encajar la organización discursiva de estas respuestas propias de un contexto de Geometría Natural. A la organización del discurso de este tipo de respuesta, en la que el alumno se limita a comunicar la verificación de la tesis para el caso particular de la configuración de puntos que acompaña al enunciado, lo denominamos *comprobación*.

Otro ejemplo de tipo de discurso que encontramos en algunos alumnos es el que hemos denominado *prueba ingenua*. En este discurso el alumno pretende llegar a la tesis mediante un razonamiento discursivo teórico. Se pueden observar los niveles local y global de la prueba matemática, así como el papel del estatus de cada proposición. Sin embargo, utiliza puntualmente alguna hipótesis no contemplada en el enunciado y, generalmente validada perceptivamente, para completar su razonamiento discursivo teórico. En la respuesta de A112 a P1 podemos ver un ejemplo de prueba ingenua

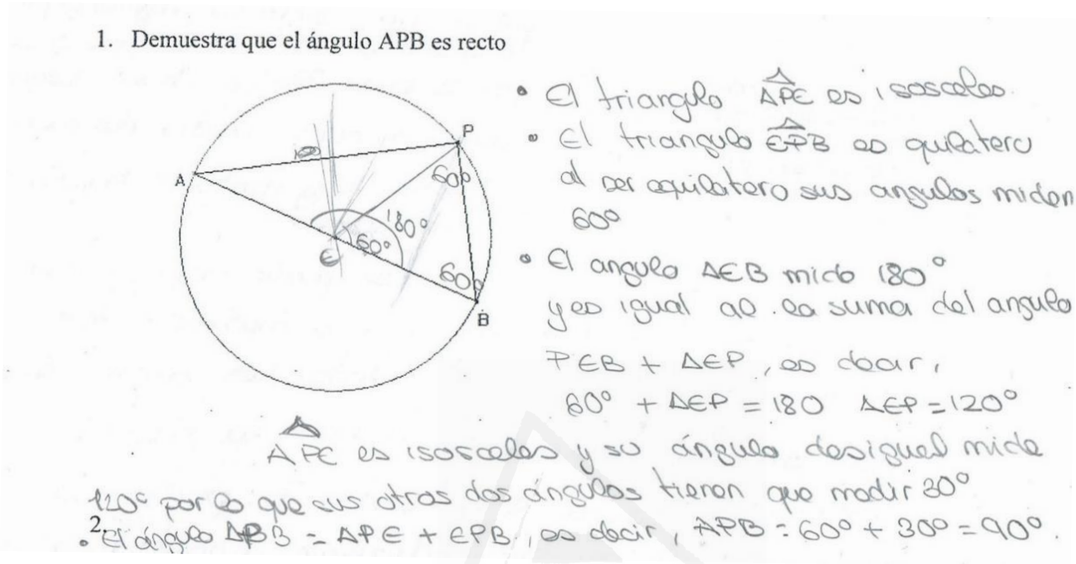


Figura 3.33: Respuesta de A23 a P1.

En la siguiente figura mostramos la organización discursiva de su respuesta:

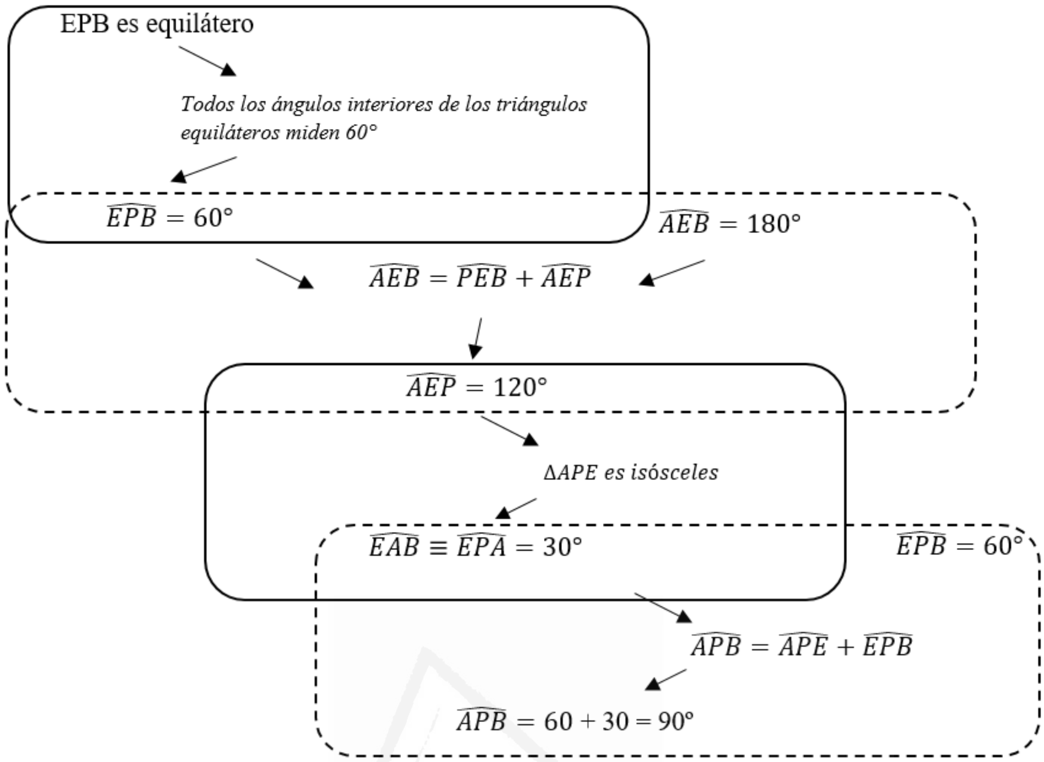


Figura 3.34: Organización discursiva de la respuesta de A23 a P1.

En nuestro ejemplo, establece que el triángulo ΔEPB es equilátero mediante una validación perceptiva. El resto de sus operaciones discursivas son las propias de un razonamiento discursivo teórico, pero la organización discursiva de la prueba matemática no admite excepciones. Por esto, entendemos que debemos clasificar este discurso en una categoría diferente que hemos denominado *prueba ingenua* (Prior y Torregrosa, 2020).

El análisis de la organización de los discursos de los participantes en respuesta al cuestionario propuesto nos ha permitido clasificar estos en cuatro tipos que acabamos de mostrar y cuyas características resumimos en la siguiente tabla

Tipo de discurso	**Características**
Razonamiento discursivo natural (RDN)	- Un nivel global en el que cada uno de los pasos se ve como proposiciones. - Un nivel interno en cada paso donde las subconfiguraciones y los símbolos se ven como palabras.

	- El valor epistémico semántico es el componente principal de significado de las proposiciones. - El procedimiento de validación utilizado principalmente es el perceptivo.
Razonamiento discursivo teórico (RDT)	- Un nivel global en el que los pasos se enlazan de acuerdo a su conclusión. - Un nivel local o nivel de paso deductivo, en el que al menos tres proposiciones se organizan de acuerdo a su estatus operativo: hipótesis, definición o teorema y conclusión local, fijado por su estatus teórico. - Un micro-nivel interno a las proposiciones utilizadas como propiedades (definiciones, teoremas, etc.) en las que se debe distinguir dos partes: condiciones a verificar y conclusión a establecer. - El valor epistémico teórico es el componente principal de significado de las proposiciones. - El único procedimiento de validación utilizado principalmente es el deductivo, aunque puntualmente se valida perceptivamente alguna afirmación.
Comprobación (C)	- Es la organización propia de la comprensión del enunciado como caso particular. - Se produce al considerar la configuración que acompaña al enunciado con el rol de dibujo. - Utiliza el procedimiento de validación perceptivo mediante el uso de instrumentos de medida.
Prueba ingenua (PI)	- Un nivel global en el que los pasos se enlazan de acuerdo a su conclusión. - Un nivel local o nivel de paso deductivo, en el que al menos tres proposiciones se organizan de acuerdo a su estatus operativo: hipótesis, definición o teorema y conclusión local.

	- Un micro-nivel interno a las proposiciones utilizadas como propiedades (definiciones, teoremas, etc.) en las que se debe distinguir dos partes: condiciones a verificar y conclusión a establecer. - El procedimiento de validación utilizado principalmente es el deductivo, aunque puntualmente se valida perceptivamente alguna afirmación.

Tabla 3.14: Características de los tipos de discurso empleados por los participantes para validar las proposiciones de los problemas geométricos.

3.3.6. Fase VI: Identificación del rol de la configuración inicial

Tal y como hemos mencionado en nuestro marco conceptual, la distinción entre dibujo y figura es clave en el tránsito desde la geometría natural (GI), propia de la etapa primaria, a la geometría axiomática natural (GII) que se desea que los alumnos alcancen durante su etapa secundaria. En esta fase analizamos el modo en que los alumnos interactúan con la configuración inicial que acompaña a cada uno de los problemas geométricos de probar del cuestionario propuesto.

A continuación, para mostrar esta etapa del análisis, reproducimos el procedimiento de análisis completo de todas las respuestas al cuestionario de A11, que comenzamos con el problema 1:

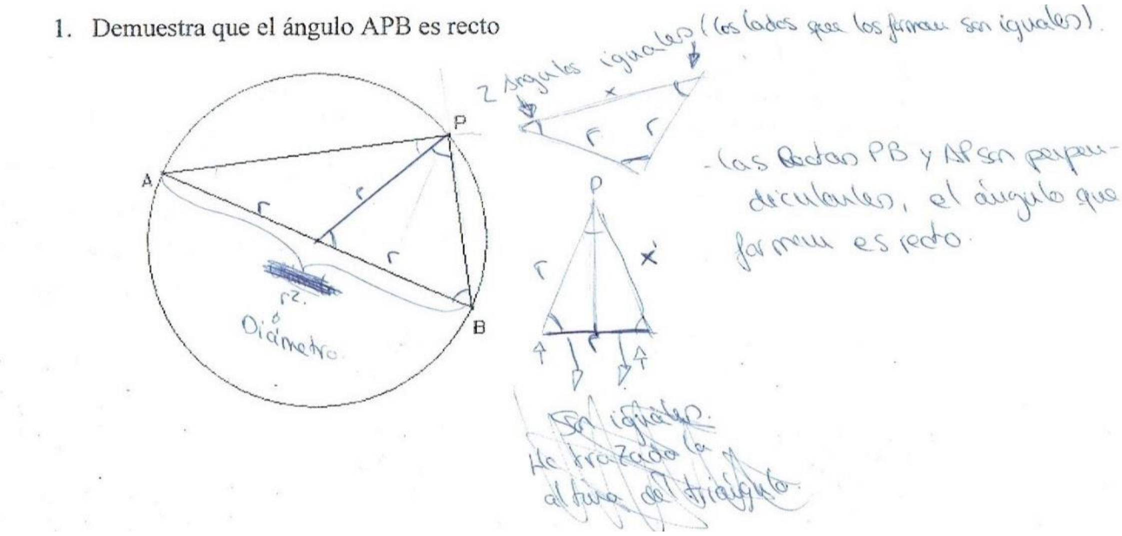


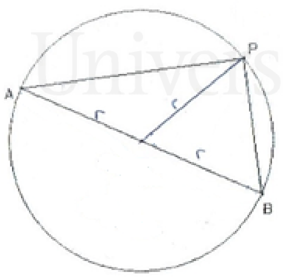
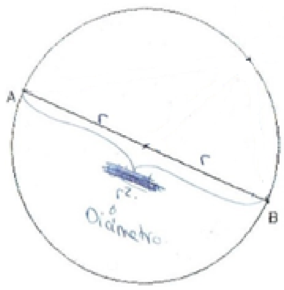
Figura 3.35: Respuesta de A11 a P1.

En este primer problema, el resolutor etiqueta los segmentos que van desde el centro de la circunferencia hasta los puntos A, P y B con la letra r, típica de la etiqueta del radio de una circunferencia. Entendemos que conecta dichos segmentos de la configuración con la definición de radio, por lo que inferimos que en esta acción considera la configuración como una figura. Posteriormente, y erróneamente, escribe r^2 en lugar de 2r, etiquetando el segmento $\overline{AB}$ con la palabra diámetro, lo que de nuevo es una conexión de un elemento de la configuración con una definición matemática. Además, extrae de la configuración el triángulo ΔAOP y etiqueta los dos ángulos, $\widehat{OAP}$ y $\widehat{APO}$, como iguales en amplitud, justificando dicha igualdad en la congruencia de los lados que los forman, de nuevo realizando una conexión de un elemento en la configuración con una afirmación matemática verdadera, aunque en este caso no esté debidamente justificada. Sin embargo, estas deducciones no continúan hacia la tesis solicitada. A continuación, directamente afirma la validez de la tesis a probar sin más soporte que unas modificaciones en la configuración que podemos observar en la siguiente figura (resaltamos en rojo dichas modificaciones). De donde se puede inferir que el rol de la configuración es el de dibujo.

Figura 3.36: Fragmento de la respuesta a P1 de A11 y modificaciones en rojo realizadas por el investigador.

Por tanto, concluimos que en la resolución de P1, A11 combina los roles de dibujo y figura para el tratamiento de la configuración inicial que acompaña al enunciado.

Recogemos en la siguiente tabla, el proceso de análisis del papel de la configuración en la resolución de P1 dada por A11

Acción sobre la configuración	Análisis	Rol de la configuración
	Etiqueta los segmentos que van desde el centro de la circunferencia a A, P y B como radios.	Figura
	Asocia al segmento $\overline{AB}$ la definición de diámetro	Figura

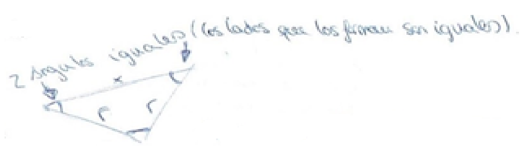
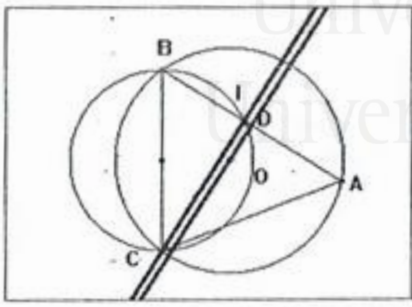
	Extrae el triángulo ΔAOP y marca los dos ángulos afirmando que son iguales y justificándolo a partir de la congruencia de los lados que los forman	Figura
	Establece la perpendicularidad del ángulo $\widehat{APB}$ apoyándose en las prolongaciones de los segmentos AP y BP que el mismo realiza sobre la configuración	Dibujo

Tabla 3.15: Procedimiento de análisis del rol de la configuración de P1 en la resolución de A11

En relación al problema 2, la respuesta de A11 es reproducida en la siguiente figura:



Sobre una circunferencia de centro O, marca tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB].

Probar que las líneas rectas (OD) y (CI) son paralelas.

- Si prolongamos la OD es ~~el~~ diámetro de la circunferencia de centro O.
- la recta C I es la altura del triángulo ABC. (Por tanto perpendicular a la ~~circunferencia~~ recta BA)

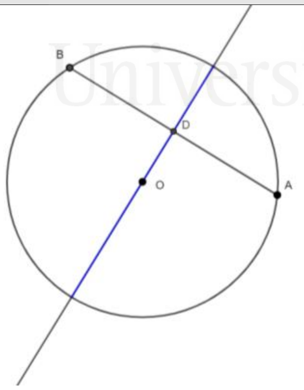
Las dos son perpendiculares a la recta BA, las dos son paralelas.

Figura 3.37: Respuesta de A11 a P2.

Para analizar el rol de la configuración que acompaña al enunciado, en la respuesta de A11 a P2 podemos observar que establece la siguiente hipótesis: *“$\overline{OD}$ es el diámetro de la circunferencia de centro O”*. Entendemos que quiere expresar que la recta que contiene al segmento $\overline{OD}$ contiene un diámetro de la circunferencia de centro O. No se observa que pueda establecer esta conjetura más que a partir de la evidencia visual. Por tanto, está utilizando la configuración de puntos para validar afirmaciones perceptivamente. De modo análogo, establece la perpendicularidad de (CI) respecto de (AB) en base a la percepción de que *“(CI) es la altura del triángulo ΔABC”*, y lo hace sin mencionar en ningún momento las hipótesis del enunciado, lo que nos permite inferir que utiliza la configuración que acompaña al enunciado como un dibujo sobre el que realiza verificaciones subjetivas.

La verificación subjetiva de las hipótesis que le permiten construir su respuesta al problema nos lleva a concluir el carácter particular de su comprensión del enunciado del problema.

Recogemos en la siguiente tabla, el proceso de análisis del papel de la configuración en la resolución de P1 dada por A11

Acción sobre la configuración	Análisis	Rol de la configuración
	Identifica el segmento que pasa por los puntos O y D como diámetro de la circunferencia de centro O sin justificarlo.	Dibujo

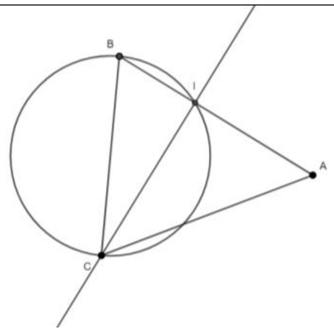
	Establece la perpendicularidad de (CI) respecto de (AB) en base a la percepción de que *"(CI) es la altura del triángulo ΔABC"*, sin mencionar las hipótesis del enunciado	Dibujo

Tabla 3.16: Procedimiento de análisis del rol de la configuración de P2 en la resolución de A11

A continuación, mostramos el análisis de la respuesta a P3:

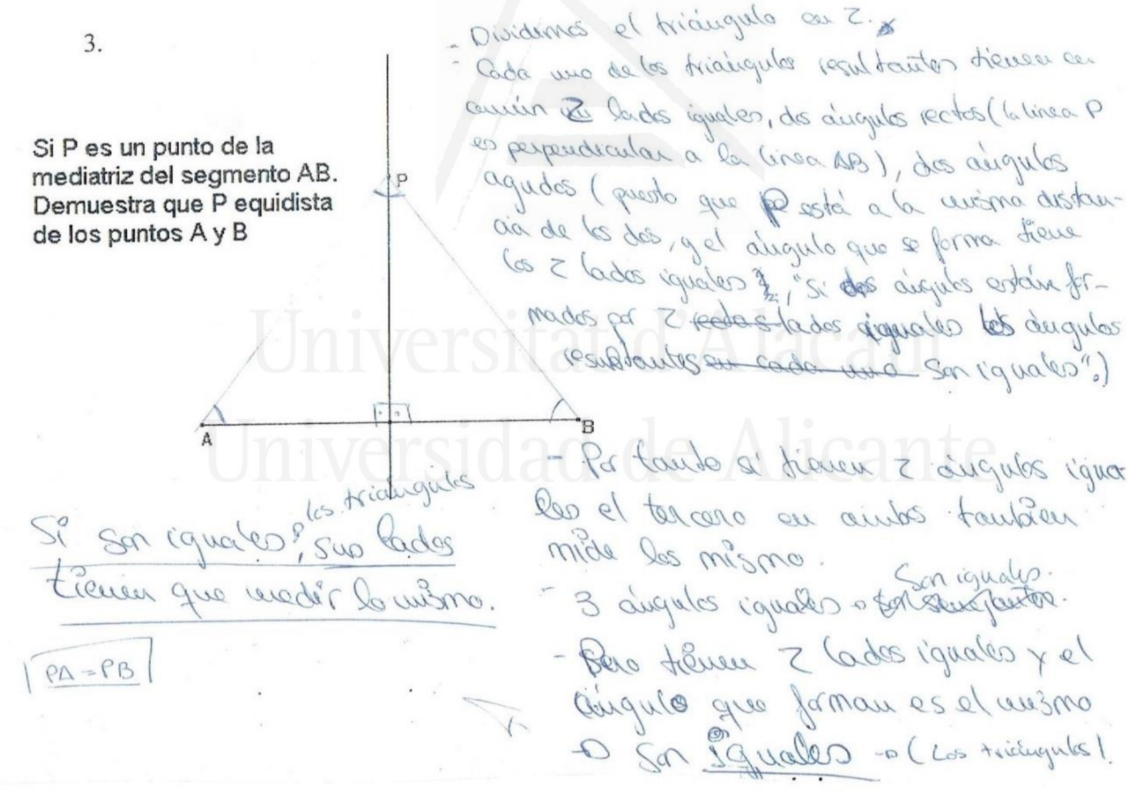
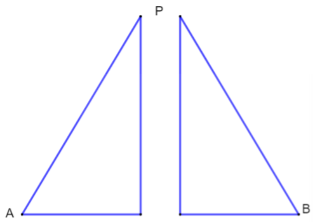
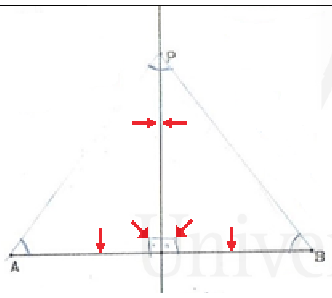
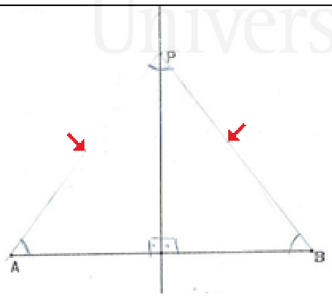
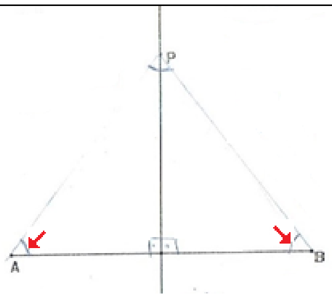


Figura 3.38: Respuesta de A11 a P3.

En relación con el rol de la configuración que acompaña al enunciado de P3, A11 utiliza la configuración para realizar asociaciones con criterios de congruencia de triángulos, aunque, puntualmente, utiliza la evidencia de la configuración para establecer la congruencia de los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Esto muestra no solo un cambio en el rol de la configuración, sino también un problema de comprensión del funcionamiento de la prueba, pues utiliza la tesis que desea probar como hipótesis. Concluimos que en su utilización de la configuración adopta características tanto de figura como de dibujo.

Acción sobre la configuración	Análisis	Rol de la configuración
	Identifica los dos triángulos que se forman al añadir los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a la configuración inicial.	Figura
	Observa las congruencias de lados y ángulos que se deducen de las hipótesis del enunciado. *(“Dos ángulos rectos (línea P es perpendicular a la línea AB”)*	Figura
	La congruencia de los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ no puede deducirse más que a partir de la evidencia perceptiva puesto que dicha congruencia es la tesis a probar.	Dibujo
	Deduce la congruencia de los ángulos A y B porque *“si dos ángulos están formados por 2 lados iguales los ángulos resultantes son iguales”* Si	Figura

	bien esto no es condición suficiente, inferimos que el justifica su deducción a partir de hipótesis previas	

Tabla 3.17: Procedimiento de análisis del rol de la configuración de P3 en la resolución de A11

Por último, tenemos el análisis de la respuesta a P4:

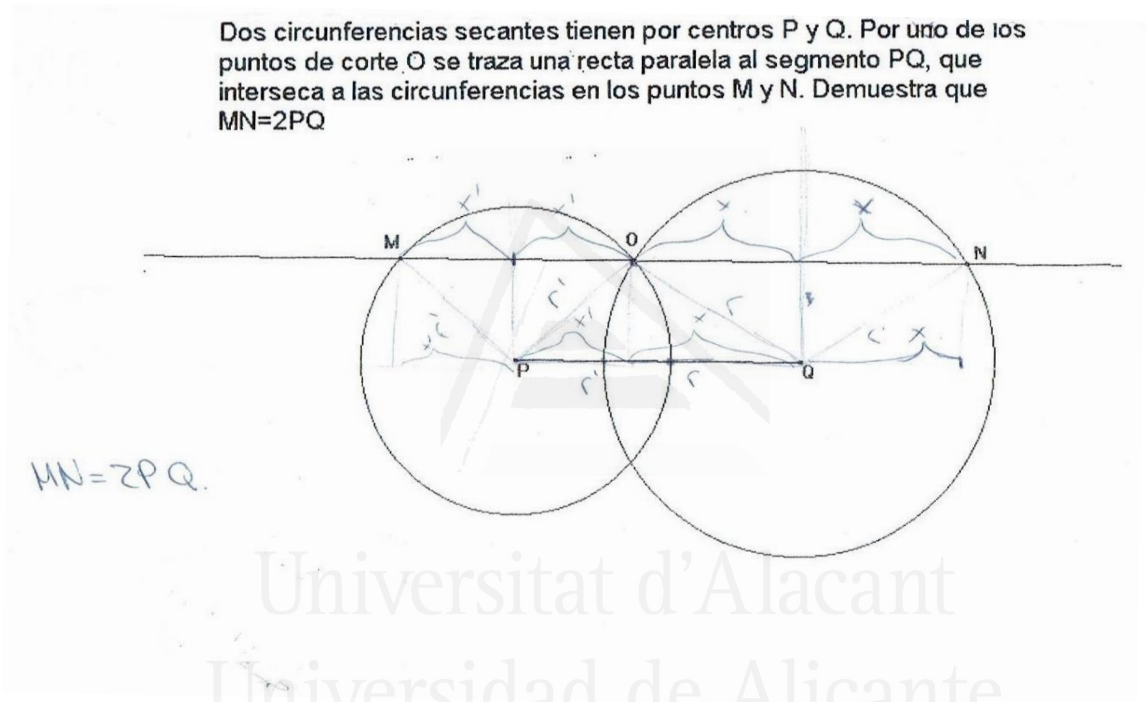


Figura 3.39: Respuesta de A11 a P4.

La respuesta de A11 a P4 ha sido ampliamente descrita en el apartado sobre el análisis de la organización discursiva (Fase V). Concluimos que realiza un razonamiento puramente configural, validando sus afirmaciones en la representación gráfica. Su razonamiento configural desemboca en una conjetura sin demostración empírica y hemos podido reconstruir su discurso a través de las distintas marcas trazadas en la configuración y de la entrevista realizada.

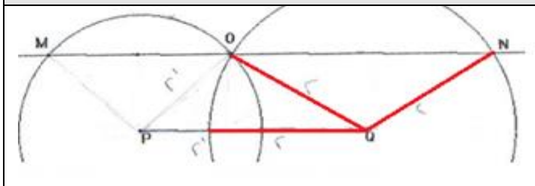
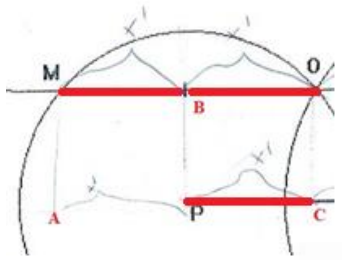
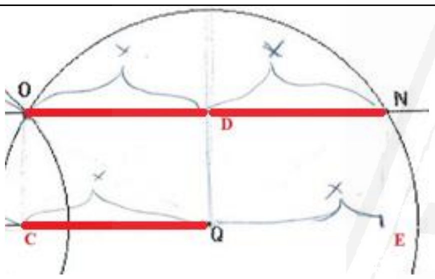
Acción sobre la configuración	Análisis	Rol de la configuración
	Identifica y etiqueta los segmentos en rojo y establece su congruencia por ser radios de la circunferencia de centro Q.	Figura
	Establece la congruencia de los segmentos $\overline{MB}$, $\overline{BO}$ y $\overline{PC}$ en base a la evidencia visual.	Dibujo
	De manera similar, establece la congruencia de los segmentos $\overline{OD}$, $\overline{DN}$ y $\overline{CQ}$ en base a la evidencia visual.	Dibujo

Tabla 3.18: Procedimiento de análisis del rol de la configuración de P4 en la resolución de A11

En la siguiente tabla recopilamos las características del rol de la configuración de puntos que acompaña a los enunciados por A11 en sus respuestas a los problemas del cuestionario:

Problema	Rol (dibujo/figura)
P1	D/F
P2	D
P3	D/F
P4	D/F

Tabla 3.19: Análisis de las respuestas de A11 al cuestionario.
D: Dibujo; F: Figura

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4. RESULTADOS

En este capítulo describiremos los resultados obtenidos de los análisis de las respuestas de los participantes a los problemas geométricos. La organización de este capítulo se hace en relación con las fases de análisis descritas anteriormente y los objetivos de la investigación. En la primera sección, mostramos la clasificación de los desenlaces de los razonamientos configurales de los participantes en respuesta a los problemas. En la segunda sección, identificamos la forma en que cada estudiante utiliza los diferentes procedimientos de validación en sus respuestas al cuestionario, lo que nos ha permitido clasificar a los participantes en tres grupos. En la tercera sección, presentamos la relación observada entre los desenlaces del razonamiento configural y los tipos de discurso. Encontramos una correspondencia biunívoca entre los distintos desenlaces del razonamiento configural cuando el resolutor encuentra una solución al problema y el tipo de discurso que proporciona. En la cuarta sección, analizamos los comportamientos de los participantes ante la tarea de resolver un problema de probar geométrico a partir de los desenlaces de sus razonamientos configurales, el tipo de discurso, los procedimientos de validación de sus afirmaciones matemáticas y el rol de las configuraciones en sus respuestas a los problemas planteados;

este análisis nos ha permitido clasificar a los participantes en seis perfiles que caracterizan el ETG personal de cada participante. En la quinta y última sección, clasificamos a los participantes en el estudio atendiendo a su perfil y al curso académico al que pertenecen.

4.1. Desenlaces del razonamiento configural

El primer objetivo de nuestro trabajo es probar el modelo de razonamiento configural desarrollado con estudiantes para maestro con estudiantes de secundaria ante la tarea de resolver problemas de probar geométricos. En primer lugar, el análisis nos ha permitido refinar la clasificación de los desenlaces del razonamiento configural descrita en nuestro marco teórico, dividiendo la categoría *Conjetura sin demostración* en dos subcategorías: *conceptual* y *empírica*, dependiendo de si la coordinación estaba o no inmersa en un procedimiento discursivo de carácter deductivo y de la utilización o no de procedimientos de validación experimentales (Prior y Torregrosa, 2013). También hemos añadido la categoría que hemos denominado *Truncamiento naif*, destinada a clasificar los razonamientos cuya única aprehensión operativa es la identificación de los elementos involucrados en la tesis a probar, a los que se les asocia directamente la propia tesis validada perceptivamente (Prior y Torregrosa, 2020). Este tipo de razonamientos no se observó en estudiantes universitarios. Inferimos que este tipo de respuestas son progresivamente abandonadas durante la etapa secundaria, por lo que no se pudieron observar en las investigaciones con estudiantes universitarios, germen del modelo de razonamiento configural (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010).

Finalmente, los razonamientos configurales de los alumnos en la solución de los problemas del cuestionario se han clasificado en seis grupos: truncamiento naif (TN), conjetura sin demostración empírica (CsDe), conjetura sin demostración conceptual (CsDc), truncamiento (T), bucle (B) y sin respuesta (SR).

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias absolutas agrupadas por curso de los desenlaces del razonamiento configural para cada uno de los problemas de nuestra investigación. En la primera fila dividimos los desenlaces en dos grupos: los que permiten alcanzar una solución al problema, independientemente del contexto matemático se considere a la respuesta una solución válida, y los que no logran una solución al problema. En la segunda fila se muestran los diferentes desenlaces del razonamiento configural:

Truncamiento naif (TN), Conjetura sin demostración empírica (CsDe), Conjetura sin demostración conceptual (CsDc) y Truncamiento (T), para los desenlaces que consiguen una solución al problema, y Bucle (B) y Sin respuesta (SR), para aquellos que no permiten encontrar una solución. Por último, en cada celda se muestran las frecuencias de cada tipo de desenlace para los participantes que cursan 3º y 4º respectivamente.

	Con solución al problema				**Sin solución al problema**	
	TN	**CsDe**	**CsDc**	**T**	**B**	**Sr**
P1	(4-3)	(4-1)	(3-3)	(0-0)	(4-8)	(1-4)
P2	(7-5)	(8-2)	(2-3)	(0-0)	(3-6)	(2-5)
P3	(3-5)	(4-1)	(4-3)	(2-5)	(5-4)	(0-1)
P4	(5-3)	(6-0)	(4-4)	(0-0)	(5-5)	(2-3)
Total	(19-14)	(24-4)	(13-13)	(2-5)	(17-23)	(5-15)

Tabla 4.1 – Desenlaces del Razonamiento configural para cada uno de los problemas del cuestionario agrupados por curso 3º-4º

A la vista de los desenlaces del razonamiento configural en la resolución de los problemas, se observa que: los truncamientos naif disminuyen muy levemente en las respuestas de los participantes de un curso al siguiente (19 en tercero y 14 en cuarto). Sin embargo, existe una diferencia muy significativa en el número de Conjeturas sin Demostración empírica, CsDe, entre tercero (24) y cuarto (4). El número de Conjeturas sin Demostración conceptual, CsDc es el mismo para los dos grupos (13). Los truncamientos aumentan ligeramente en cuarto (5) frente a tercero (2); los razonamientos que no consiguen encontrar una solución al problema y desembocan en un bucle son un poco más frecuentes en cuarto (23) que en tercero (17) y, finalmente, encontramos un número mucho mayor de respuestas en blanco en cuarto (15) que en tercero (5).

Estos resultados sugieren que, a pesar del paso de curso, se mantiene un grupo de participantes para los que una respuesta basada en un razonamiento naif es una respuesta válida a un problema de probar geométrico; sin embargo, el número de alumnos para los que una Conjetura sin Demostración empírica, CsDe, es un razonamiento válido a este tipo de problemas disminuye drásticamente, aumentando el número de razonamientos que no alcanzan una solución al problema (bucle) y las respuestas en blanco.

Esta diferencia en el comportamiento de los diferentes grupos sugiere que los participantes del grupo de cuarto reconocen en mayor medida que la CsDe no permite producir una respuesta válida en el contexto deductivo en el que se plantean los problemas geométricos de probar. Esta toma de conciencia lleva a un aumento de las respuestas en blanco y de los bucles cuando no les es posible encontrar un razonamiento deductivo que les proporcione una solución a los problemas.

No se observan diferencias en los resultados en las distintas tareas, lo que puede ser debido al pequeño tamaño de la muestra o porque las respuestas de los estudiantes dependen más de los esquemas de prueba de los alumnos que de las características de las tareas. Aun así, es destacable que solo en la resolución del problema 3 los razonamientos configurales de algunos participantes (7) desembocan en un truncamiento. Sin embargo, se mantienen porcentajes parecidos para el resto de los desenlaces en los diferentes problemas.

En relación con las variables que articulaban la elección de los problemas (modificación de la configuración inicial y evidencia visual de la tesis a probar), no hemos observado grandes diferencias entre los razonamientos configurales de los estudiantes que se puedan atribuir a dichas variables. Únicamente aparece un mayor porcentaje de truncamientos naif en el P2 que en el resto de tareas. No obstante, no podemos atribuir dicho incremento a la evidencia visual de la tesis, en este caso el paralelismo de dos rectas.

4.2.Procedimientos de validación utilizados en la resolución de problemas de probar geométricos

El segundo objetivo de nuestro trabajo es identificar los procedimientos de validación que utilizan los alumnos en sus demostraciones y caracterizar su interacción con los desenlaces del razonamiento configural. Para dar respuesta a este objetivo, en esta sección se considera el uso de los procedimientos de validación de cada participante a lo largo de la resolución de los distintos problemas del cuestionario. En la fase III de nuestro análisis identificamos dichos procedimientos para cada una de las afirmaciones matemáticas realizadas. Esto nos ha permitido agrupar a los participantes en tres grupos en relación con el uso de los procedimientos de validación empíricos.

En primer lugar, un grupo de participantes para los que los procedimientos de validación *guían su práctica* en la resolución de problemas (G en la tabla 4.2). Forman este grupo aquellos que utilizan principalmente como fuente de validación de sus afirmaciones matemáticas los procedimientos de validación empíricos con o sin uso de instrumentos de medida. Si bien pueden utilizar procedimientos de validación deductivos, estos tienen para ellos la misma validez que los procedimientos empíricos. Se observa una disminución de este tipo de comportamientos en el grupo de 4º (38.9%) frente al grupo de 3º (70%). Los razonamientos configurales de estos participantes cuando encuentran una respuesta al problema, desembocan en truncamientos naif (TN) o conjeturas sin demostración empíricas (CsDe).

En segundo lugar, participantes que utilizan principalmente procedimientos de validación deductivos en sus respuestas a los problemas del cuestionario pero que *puntualmente aceptan* validar alguna proposición por métodos empíricos (PA en la tabla 4.2). En relación con este comportamiento, se observa un aumento en el porcentaje de estos alumnos al pasar de 3º (25%) a 4º (55,6%). Cuando encuentran una solución al problema de probar geométrico, los razonamientos configurales de estos alumnos desembocan en conjeturas sin demostración conceptuales (CsDc) o truncamientos (T). Si no lo consiguen, dejan la respuesta en blanco o quedan atrapados en un razonamiento en bucle, sin conseguir conectar deductivamente las hipótesis del problema con la tesis pedida.

En tercer lugar, hemos encontrado un único participante que *descarta completamente* el uso de procedimientos de validación empíricos en sus respuestas a problemas geométricos de probar (CD en la tabla 4.2). Si no encuentra la subconfiguración relevante o las afirmaciones matemáticas que le permiten resolver deductivamente el problema, no trata de continuar con su razonamiento utilizando procedimientos de validación perceptivos. Sus razonamientos configurales solo pueden concluir en truncamientos (T), si consigue resolver deductivamente el problema, o en bucles (B), en caso de que no consiga una solución deductiva al problema.

Por último, hay un alumno que ha dejado todas sus respuestas en blanco, por lo que no cabe análisis sobre su utilización de los procedimientos de validación (SR en la tabla 4.2). En la siguiente tabla se muestran las frecuencias encontradas para cada uno de los grupos

	G	PA	CD	SR
3º	14	5	1	0
4º	7	10	0	1

Tabla 4.2 – Procedimientos de validación en la resolución de los problemas agrupados por curso 3º-4º

G: Guían la práctica; PA: Puntualmente aceptados; CD: Completamente descartados; SR: Sin respuestas.

Encontramos que un porcentaje de alumnos de 4º mantiene un comportamiento en relación con los procedimientos de validación, mayoritario en el grupo de 3º, en el que los procedimientos de validación perceptivos son utilizados para resolver problemas de probar geométricos con la misma validez que los procedimientos de validación deductivos. Sin embargo, al analizar los resultados del grupo de 4º se observa que este porcentaje baja significativamente, y aunque aún permanece un grupo de alumnos para los que los procedimientos de validación perceptivos son igualmente aplicables en situaciones de resolución de problemas de probar geométricos, son ahora mayoría los alumnos que los utilizan solo puntualmente para alcanzar la solución al problema, decantándose, cuando les es posible, por los procedimientos de validación deductivos.

Se observa así, un posible estadio intermedio entre los alumnos que validan sus afirmaciones por medio de todo tipo de procedimientos y con la misma validez, como se ha descrito en nuestro marco teórico que ocurre con cualquier disciplina no matemática, y el comportamiento típico de la ciencia matemática, en el que el único procedimiento de validación admitido es el deductivo.

Por último, solo un participante del estudio utiliza los procedimientos de validación como lo haría un matemático y es un alumno del grupo de 3º.

4.3.Relación entre los desenlaces del razonamiento configural y los tipos de discurso

En esta sección damos respuesta a qué relación existe entre el tipo de discurso que produce un estudiante que resuelve un problema de probar geométrico y las características del razonamiento configural que genera. Para ello, relacionamos los desenlaces de los razonamientos configurales, inferidos en la fase IV de nuestro análisis, con los tipos de discurso que los estudiantes producen para dar respuesta a los problemas del cuestionario, establecidos en la fase V de nuestro análisis.

Los resultados muestran que cada tipo de razonamiento configural (Truncamiento Naif, CsDEmpírica, CsDConceptual o Truncamiento) se relaciona con un tipo de discurso específico (Comprobación, Razonamiento discursivo natural, Prueba Ingenua o Razonamiento discursivo teórico). De este modo, nuestro modelo se convierte en un instrumento que nos podría permitir, a partir de las respuestas, inferir el razonamiento que el resolutor desarrolla, su comprensión de la demanda de la tarea y, por tanto, determinar algunas características del espacio de trabajo geométrico personal del estudiante.

Teniendo en cuenta la relación entre los desenlaces del razonamiento configural y la organización del discurso, se han identificado cuatro relaciones:

- Truncamiento naif ↔ Comprobación
- Conjetura sin demostración empírica ↔ Razonamiento discursivo natural o explicación
- Conjetura sin demostración conceptual ↔ Prueba ingenua
- Truncamiento ↔ Razonamiento discursivo teórico o demostración

A continuación, mostramos las características de las relaciones entre los desenlaces del razonamiento configural y los tipos de discurso, analizando las respuestas que ilustran esta relación (Prior y Torregrosa, 2020).

4.3.1 Truncamiento naif↔comprobación

Este binomio se caracteriza por un razonamiento configural que desemboca en un *truncamiento naif*. Este consiste en la realización de una aprehensión operativa para identificar la subconfiguración relacionada con la tesis a verificar, seguida de su validación experimental para el *caso particular* proporcionado por el enunciado. El discurso que el estudiante genera, propio de la Geometría Natural, no es más que la conversión al lenguaje natural del razonamiento configural realizado. Vamos a ver un ejemplo de esta relación en la respuesta de A6 a P3 que mostramos a continuación:

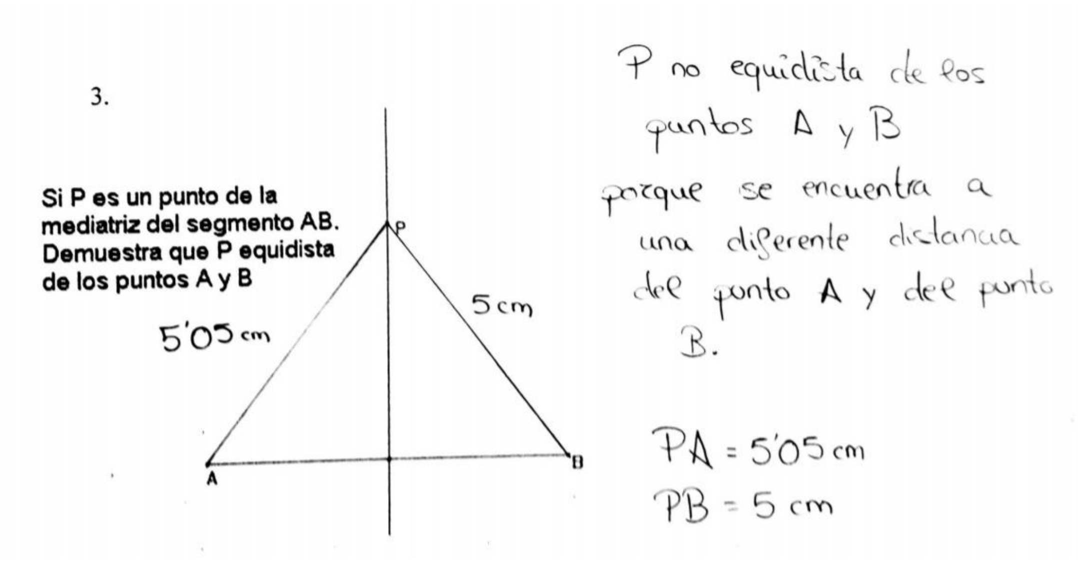


Figura 4.1 - Respuesta de A6 a P3

A continuación, se muestran los resultados de los análisis correspondientes a la identificación de los procedimientos de validación, la identificación de los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas y de la organización discursiva de la respuesta de A6 a P3

Segmentación de la respuesta	*Procedimiento de validación*
1. $\overline{PA}$ = 5,05 cm	Perceptivo, mediante el uso de instrumentos (regla graduada)
2. $\overline{PB}$ = 5 cm	Perceptivo mediante el uso de instrumentos (regla graduada)
3. P no equidista de los puntos A y B	Deductivo
4. Porque se encuentra a una diferente distancia del punto A y del punto B	Aunque la incluimos en la segmentación de la respuesta, no es una proposición propiamente dicha, ya que se limita a dar una explicación redundante a lo que acaba de afirmar en el segmento anterior.

Tabla 4.3 - Procedimientos de validación de A6 al resolver P3

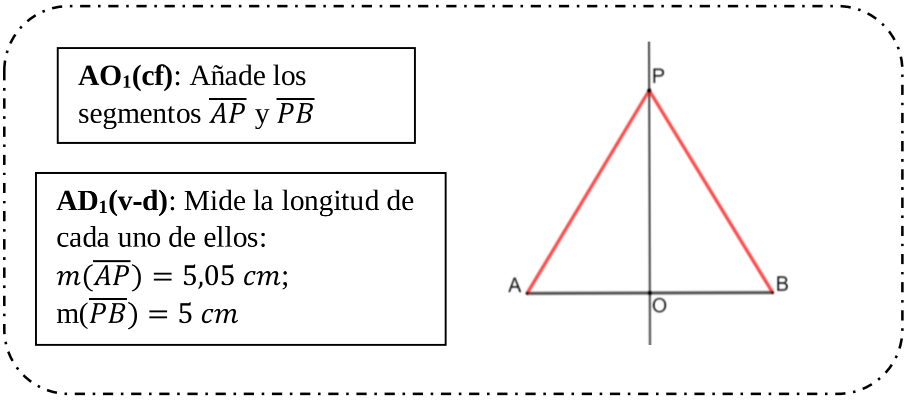


Figura 4.2 - Aprehensiones operativas/discursivas de A6 al resolver P3

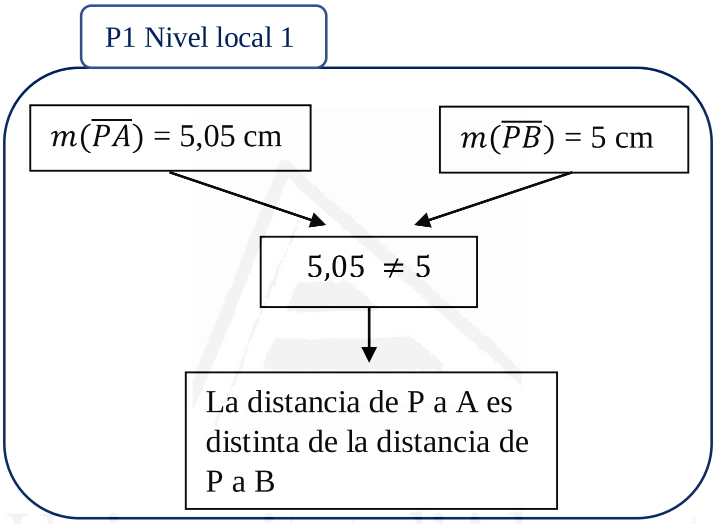


Figura 4.3 - Organización discursiva de la respuesta a P3 de A6

Su razonamiento configural consiste en la realización de la aprehensión operativa de cambio figural que añade los dos elementos geométricos, segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, a los que se refiere la proposición a demostrar. Tras esto, se limita a medir su longitud, usando un instrumento de medida (regla graduada). Su discurso consiste en la traducción de las acciones que realiza sobre la figura. Obtiene una medida de 5,05 cm para el segmento $\overline{PA}$, y de 5 cm para el segmento $\overline{PB}$. Por tanto, concluye que la tesis del enunciado es falsa puesto que 5 $\neq$ 5,05. Esto supone una muestra de que el estudiante asume las características de la Geometría Natural, utilizando la imagen que acompaña al enunciado como objeto de estudio y validación, es decir, como dibujo.

4.3.2. Conjetura sin demostración empírica↔razonamiento discursivo natural

Se produce un razonamiento configural en el que no es necesario un conocimiento geométrico explícito (definición, teorema, ...), lo que se traduce en un discurso en el que no se observan los niveles propios de la prueba matemática. El discurso es una explicación, que puede resultar más o menos convincente en función de la evidencia de los argumentos visuales, pero no es una demostración desde el punto de vista de la organización discursiva. En el discurso podemos observar el nivel global de la estructura discursiva de la prueba matemática, pero no se observa el nivel local o paso deductivo.

En la respuesta de A14 a P4, analizada en el capítulo dedicado al procedimiento de análisis, mostramos un ejemplo del binomio encontrado:

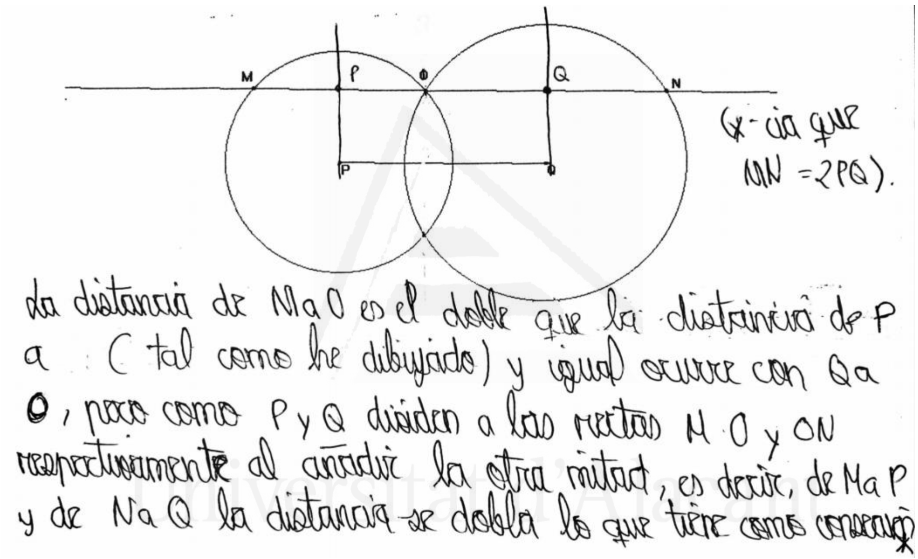
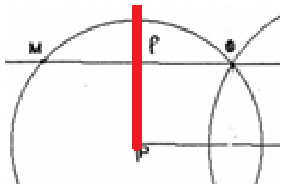


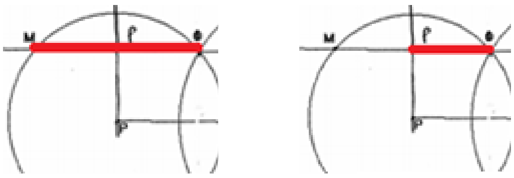
Figura 4.4 - Respuesta de A14 a P4

A continuación, describimos el razonamiento configural que desarrolla el participante para dar su respuesta a la tarea:

AO$_1$
cf: añade la semirrecta perpendicular al segmento $\overline{MO}$ que parte de P.

i: identifica los segmentos $\overline{MO}$ y $\overline{PO}$.





AD$_1$(v-d): Afirma que la distancia de M a O es el doble que la distancia de P a O.

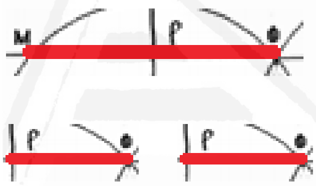


Figura 4.5 - Primer ciclo de aprehensiones operativas/discursivas de la respuesta a P3 de A14

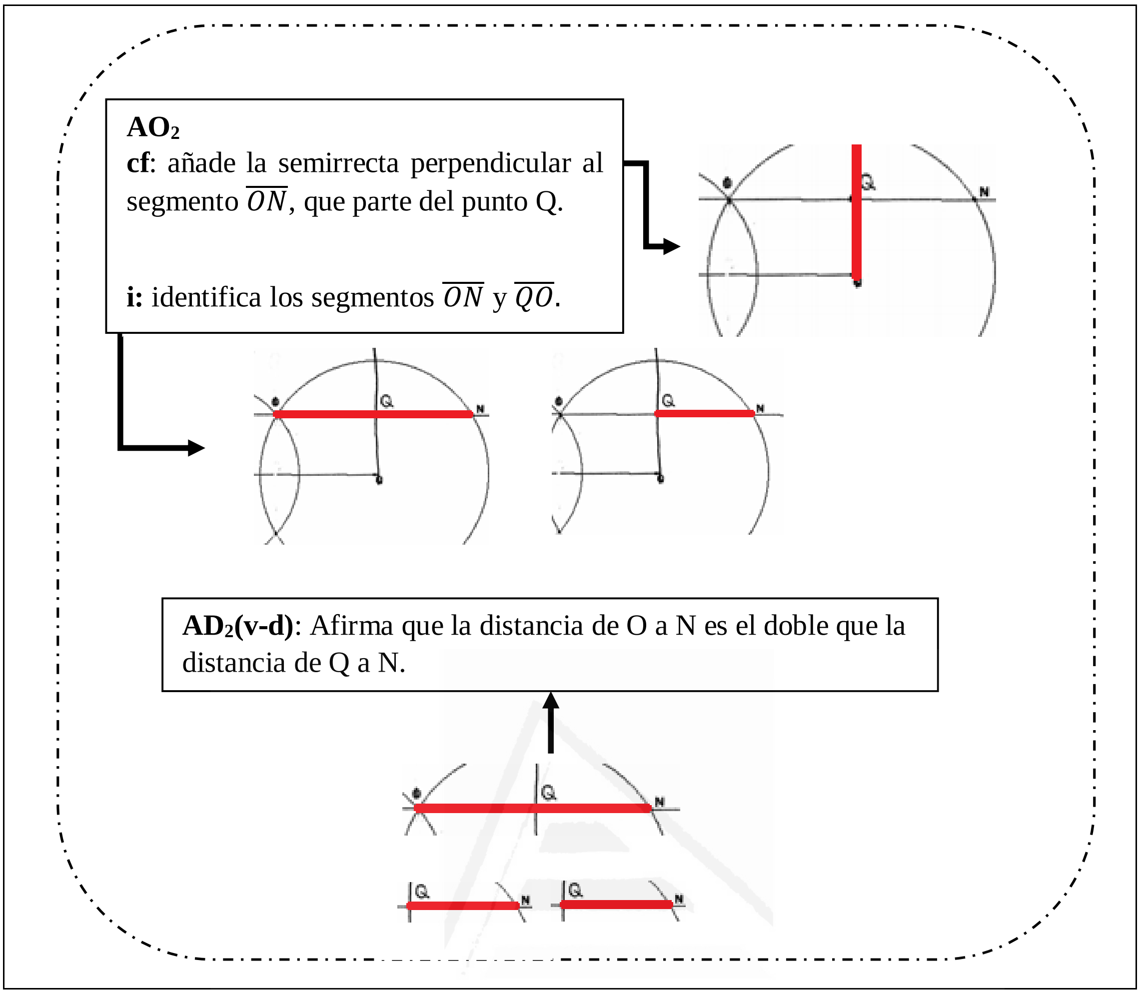


Figura 4.6 - Segundo ciclo de aprehensiones operativas/discursivas de la respuesta a P3 de A14

En este ejemplo, además, se puede distinguir la realización del ciclo aprehensión discursiva/aprehensión operativa, si bien en este caso las asociaciones realizadas (por ejemplo, los dos segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{PO}$ tienen longitudes iguales) no sean estrictamente con afirmaciones matemáticas. Aquí, la visión es el único proceso que guía la resolución del problema. Todo esto ocurre sin que se realice verificación alguna, más allá de la evidencia visual que proporciona la figura que acompaña al enunciado y las modificaciones que se han realizado sobre ella. Su razonamiento configural desemboca en lo que hemos denominado una conjetura sin demostración empírica.

En la siguiente tabla, detallamos los procedimientos de validación de las distintas afirmaciones que realiza en su producción discursiva:

Unidades de análisis	Procedimiento de validación
1. La distancia de M a O es el doble de la distancia de P a O.	Perceptivo
2. Igual ocurre con Q a O.	Perceptivo
3. P y Q dividen a las rectas $\overline{MO}$ y $\overline{ON}$, respectivamente	Perceptivo
4. Al añadir la otra mitad, es decir, de M a P y de N a Q, la distancia se dobla.	Deductivo
5. Lo que tiene como consecuencia que $\overline{MN} = 2\overline{PQ}$	Deductivo

Tabla 4.4 - Procedimientos de validación de A14 al resolver P4

Su respuesta traduce el razonamiento configural realizado al lenguaje natural. Las afirmaciones realizadas son validadas perceptivamente, hasta que establece las hipótesis sobre la congruencia de los segmentos $\overline{MP}, \overline{PO}, \overline{OQ}$ y $\overline{QN}$. A partir de ahí, las afirmaciones 4 y 5 son "*consecuencia*" de lo afirmado anteriormente.

En el siguiente esquema, organizamos la estructura de su discurso:

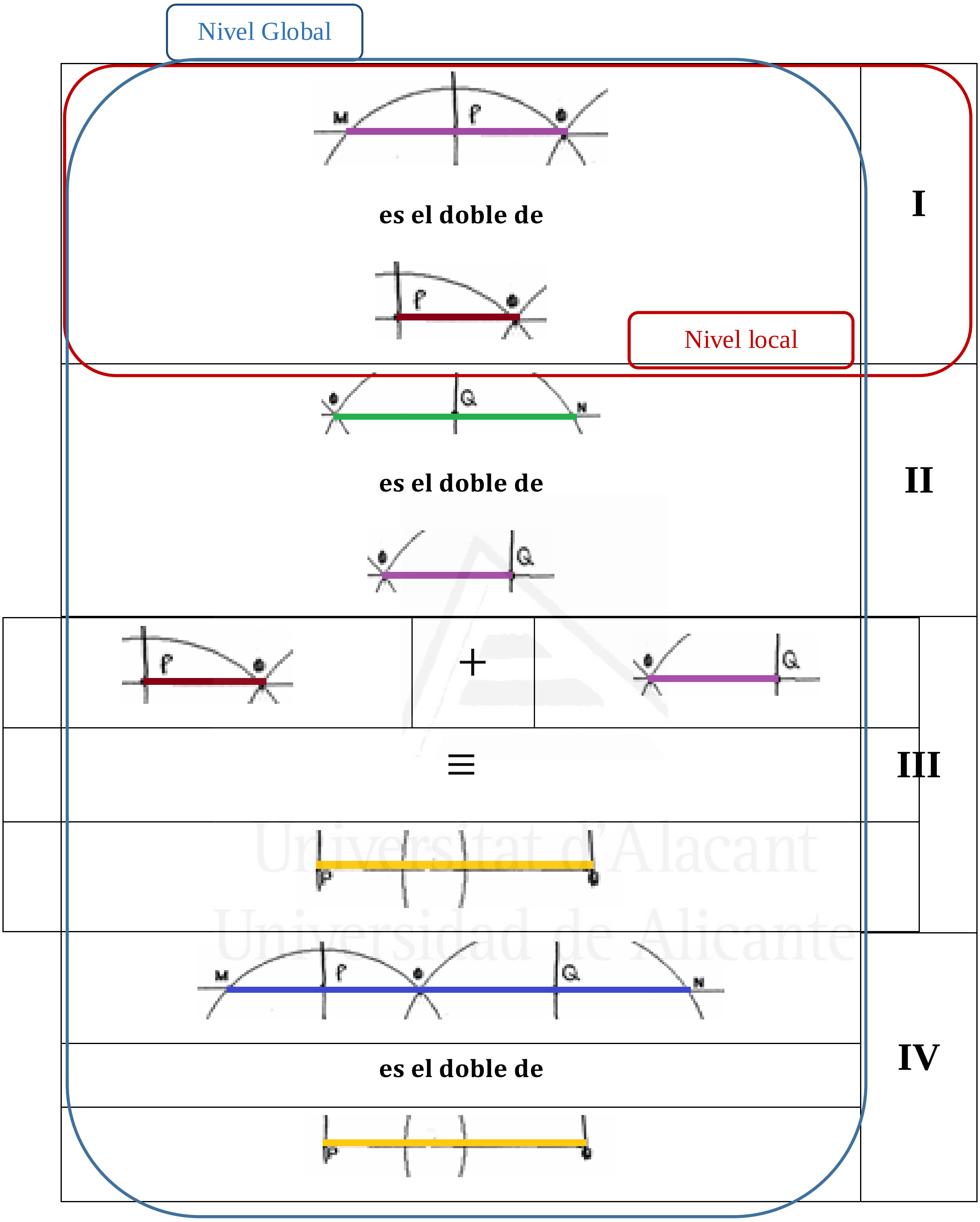


Figura 4.7 - Organización discursiva de la respuesta de A14 a P4

Ninguna afirmación matemática (definición, teorema, ...) es asociada para la resolución del problema. Se produce una o varias aprehensiones operativas que *convencen* al alumno de la veracidad de la afirmación solicitada. Para ello, el estudiante valida las afirmaciones que realiza mediante percepción. Por supuesto, el rol que el participante asigna a la configuración es el de dibujo, ya que sus afirmaciones iniciales son validadas perceptivamente a través de la observación de la configuración. Su razonamiento configural es la solución del problema; la elaboración de un discurso para comunicar dicha solución es tan solo una conversión en el registro de representación semiótico, en este caso del registro figural al discursivo. Este discurso es una explicación que convence, pero no posee las características del discurso que denominamos demostración matemática. No hay cambio de estatus de las proposiciones, pues este solo puede producirse en la organización de proposiciones propia del razonamiento discursivo teórico.

4.3.3. Conjetura sin demostración conceptual↔prueba ingenua

En el razonamiento configural se observa la coordinación de aprehensiones discursivas y operativas necesarias en un contexto de Geometría Axiomática Natural para la demostración de una proposición. La respuesta tiene la organización discursiva propia de la demostración matemática, pero se acepta alguna o algunas afirmaciones matemáticas por procedimientos de validación perceptivos. La validez de todo el discurso descansa en la veracidad o no de las afirmaciones verificadas mediante procedimientos perceptivos, por lo que denominamos *Pruebas Ingenuas* a este tipo de respuestas. La respuesta de A22 a P1 nos sirve de ejemplo de este binomio encontrado.

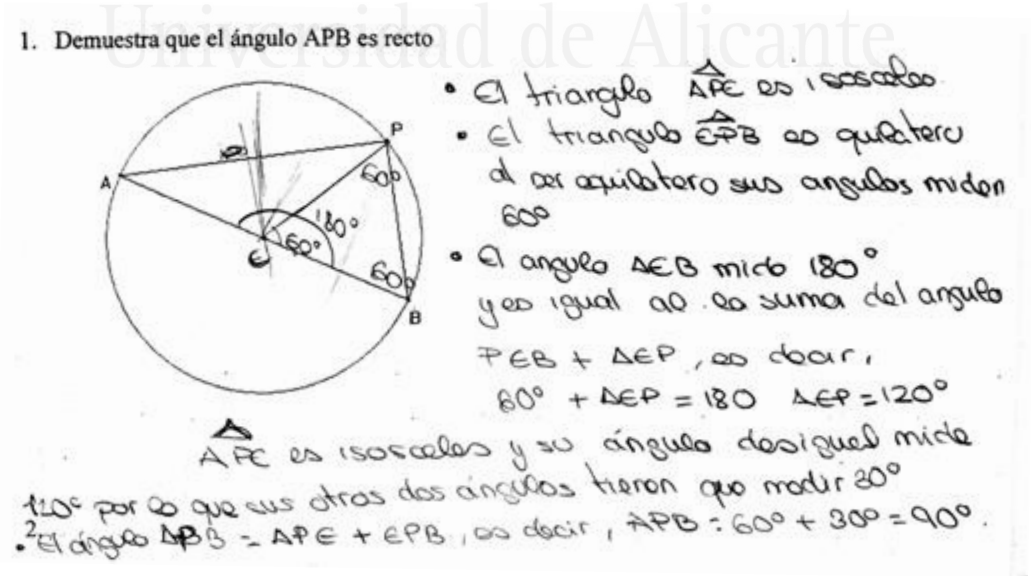


Figura 4.8 - Respuesta de A22 a P1

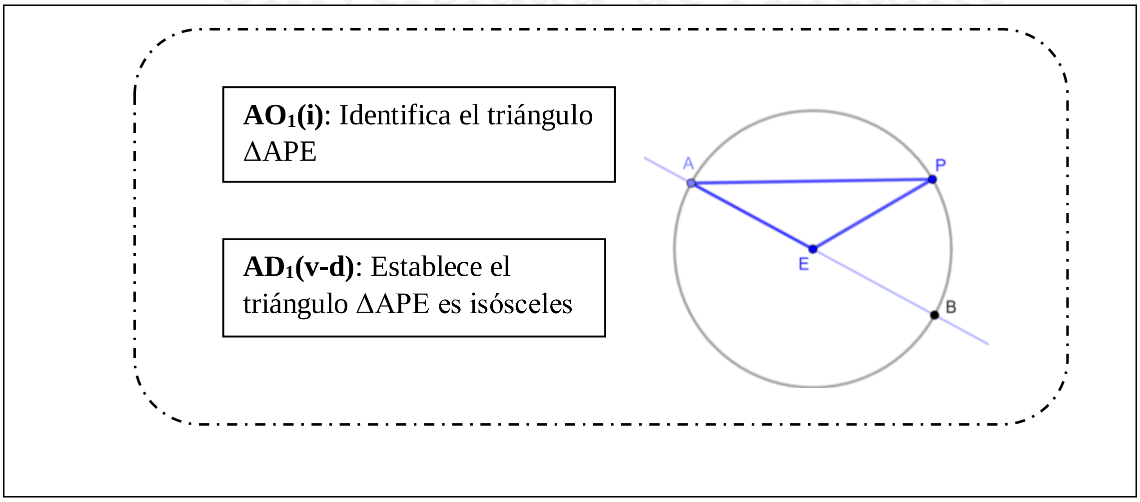
En primer lugar, mostramos los procedimientos de validación que utiliza en su discurso a partir de la transcripción y segmentación de su respuesta al problema:

Unidades de análisis	Procedimiento de validación
1. El triángulo ΔAPE es isósceles	Deductivo
2. El triángulo ΔPEB es equilátero	Perceptivo
3. El ángulo $\widehat{AEB}$ mide 180º	Deductivo
4. El ángulo $\widehat{AEB}$ es igual a la suma de los ángulos $\widehat{PEB} + \widehat{AEP}$	Deductivo
5. ΔAPE es isósceles y su ángulo desigual mide 120º por lo que sus otros dos ángulos tienen que medir 30º	Deductivo
6. El ángulo $\widehat{APB}$ = $\widehat{APE} + \widehat{EPB}$ = 60º + 30º = 90º	Deductivo

Tabla 4.5 - Procedimientos de validación de A22 al resolver P1

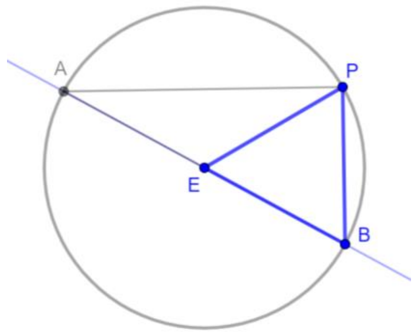
Como podemos observar, todas las afirmaciones que componen su discurso son validadas deductivamente, salvo la afirmación número dos, para cuya validación no aporta ningún argumento, y en la entrevista se limita a afirmar que "*se ve que es equilátero*".

A continuación, mostramos el resultado del análisis de su razonamiento configural. Para ello, en primer lugar, describimos los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas:



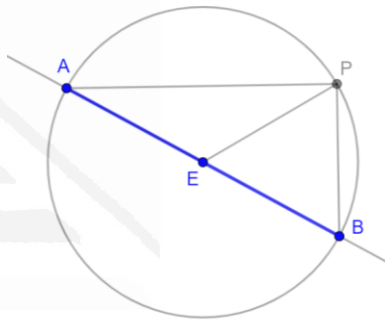
AO$_2$(i): Identifica la subconfiguración que forma el triángulo ΔEPB

AD$_2$(v-d): Establece que el triángulo ΔEPB es equilátero, por lo que cada uno de sus ángulos mide 60º



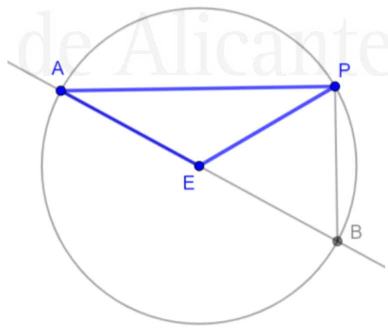
AO$_4$(i): Identifica el ángulo $\widehat{AEB}$

AD$_4$(v-d): Establece que el ángulo $\widehat{AEB}$ mide 180º



AO$_5$(i): Identifica el triángulo ΔEPB

AD$_5$(v-d): Establece que el ángulo $\widehat{AEP}$ mide 120º y los otros dos ángulos ($\widehat{APE}$ y $\widehat{EAP}$) miden 30º



AO₆(i): Identifica el ángulo $\widehat{APB}$ formado por los ángulos consecutivos $\widehat{APE}$ y $\widehat{EPB}$

AD₆(v-d): Establece que el ángulo $\widehat{APB}$ mide 90º

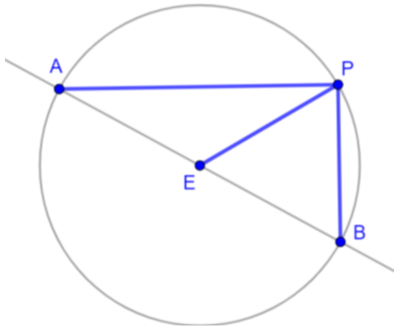


Figura 4.9 – Ciclos de aprehensiones operativas/discursivas de A32 en P1

El desenlace de esta coordinación de aprehensiones operativas/discursivas es lo que hemos denominado una conjetura sin demostración conceptual. La coordinación le permite resolver el problema, pero aceptando perceptivamente que el triángulo ΔEPB es equilátero. Independientemente de la falsedad de dicha hipótesis para el ejemplo en cuestión, la validez de una hipótesis en una prueba matemática solo puede descansar en su estatus operativo (premisa, conclusión o tercera afirmación), nunca en una validación perceptiva.

Veamos ahora el resultado esquematizado del análisis de su organización discursiva:

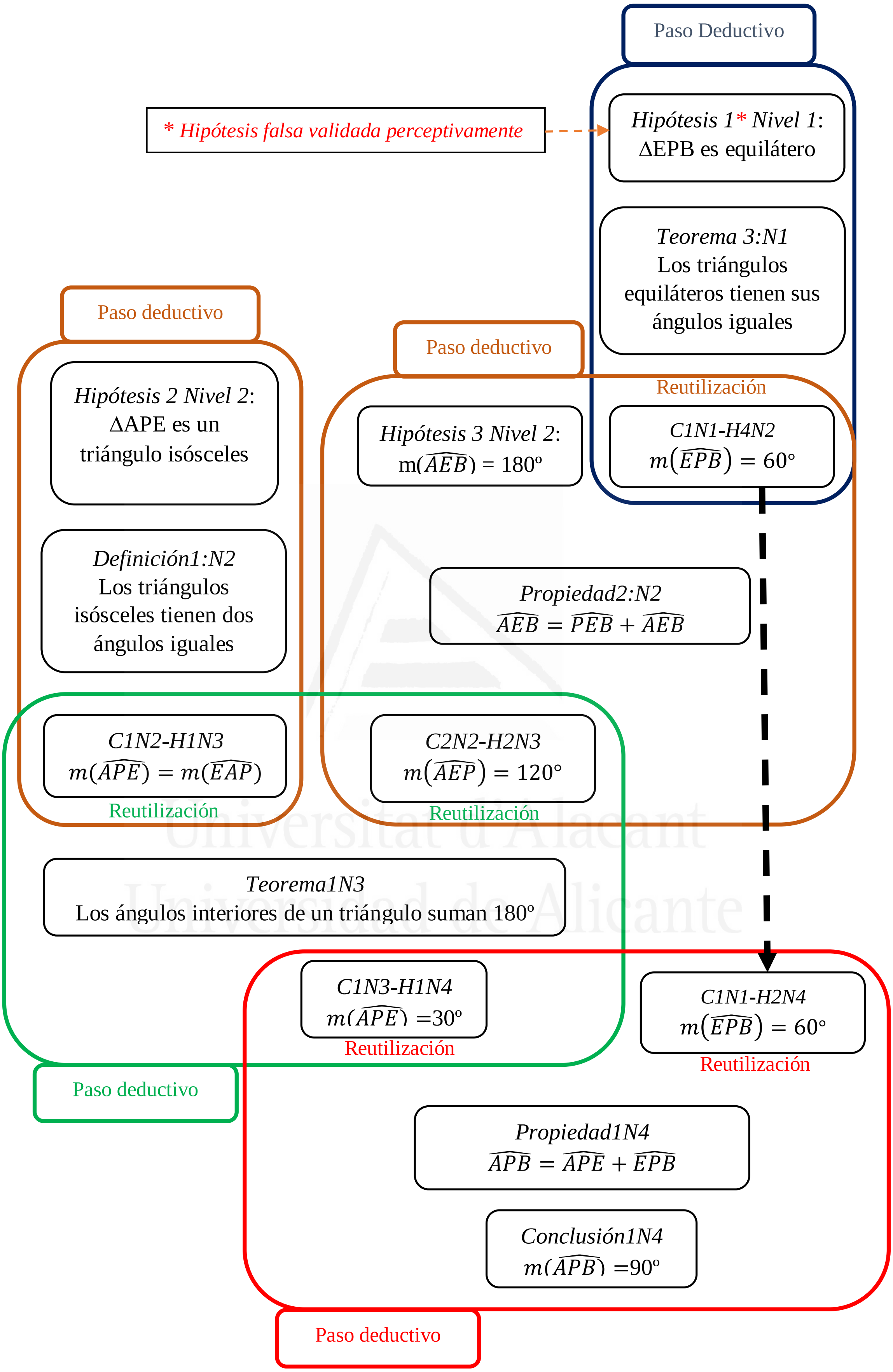

Paso Deductivo
* Hipótesis falsa validada perceptivamente
Hipótesis 1 Nivel 1*:
ΔEPB es equilátero
Teorema 3:N1
Los triángulos equiláteros tienen sus ángulos iguales
Reutilización
C1N1-H4N2
$m(\widehat{EPB}) = 60°$
Paso deductivo
Hipótesis 2 Nivel 2:
ΔAPE es un triángulo isósceles
Definición1:N2
Los triángulos isósceles tienen dos ángulos iguales
C1N2-H1N3
$m(\widehat{APE}) = m(\widehat{EAP})$
Reutilización
Paso deductivo
Hipótesis 3 Nivel 2:
$m(\widehat{AEB}) = 180°$
Propiedad2:N2
$\widehat{AEB} = \widehat{PEB} + \widehat{AEB}$
C2N2-H2N3
$m(\widehat{AEP}) = 120°$
Reutilización
Teorema1N3
Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º
C1N3-H1N4
$m(\widehat{APE})$ =30º
Reutilización
Paso deductivo
C1N1-H2N4
$m(\widehat{EPB}) = 60°$
Reutilización
Propiedad1N4
$\widehat{APB} = \widehat{APE} + \widehat{EPB}$
Conclusión1N4
$m(\widehat{APB})$ =90º
Paso deductivo

Figura 4.10 – Organización discursiva de la respuesta de A32 a P1

Del análisis conjunto de su razonamiento configural y de su organización discursiva podemos inferir que, a pesar de un discurso poco elaborado, el participante conoce la organización específica de la demostración matemática, ya que realiza pasos deductivos en los que el estatus de cada proposición (premisa, propiedad o conclusión) es el correcto. No obstante, comete un error al principio de su razonamiento: utiliza una premisa falsa (ΔEPB es equilátero), verdadera para él porque resulta visualmente aceptable en la imagen que acompaña al enunciado (entrevista). Este es uno de los errores más comunes de los estudiantes que transitan desde de la Geometría Natural a la Geometría Natural Axiomática: la validación de alguna de las premisas mediante procedimientos de verificación perceptivos sin uso de instrumentos (Prior y Torregrosa, 2013).

Como vimos anteriormente, la validación de una proposición mediante procedimientos perceptivos es un recurso natural y común en la resolución de problemas geométricos empíricos dentro del contexto escolar. El uso de este recurso en el contexto demostrativo se suma a la teoría de que no existe un paso natural desde la argumentación a la demostración matemática. Se hace necesaria una ruptura con la práctica matemática escolar y una enseñanza específica de las características de la demostración matemática. (Duval, 2007).

4.3.4. Truncamiento↔razonamiento discursivo teórico

*S*u razonamiento configural desemboca en un truncamiento, único desenlace posible cuando se alcanza la solución al problema en el contexto de la Geometría Axiomática Natural. La validez de sus afirmaciones depende siempre de su estatus operativo, y nunca de su contenido, por lo que ninguna afirmación es validada mediante procedimientos perceptivos. Aunque el razonamiento configural guía el discurso generado, proporcionando las subconfiguraciones y las afirmaciones matemáticas pertinentes para la solución del problema, el discurso (demostración), una vez generado, es completamente independiente, pues la estructura del paso deductivo y la concatenación de pasos por solapamiento es una operación puramente discursiva. Es decir, la demostración es una operación discursiva que tiene entidad independientemente del razonamiento configural que haya guiado su construcción; su validez descansa únicamente en las operaciones proposicionales (paso deductivo y solapamiento de proposiciones) que conectan las hipótesis del enunciado con la tesis solicitada.

La respuesta de A31 a P3 es un ejemplo de esta relación entre truncamiento y demostración.

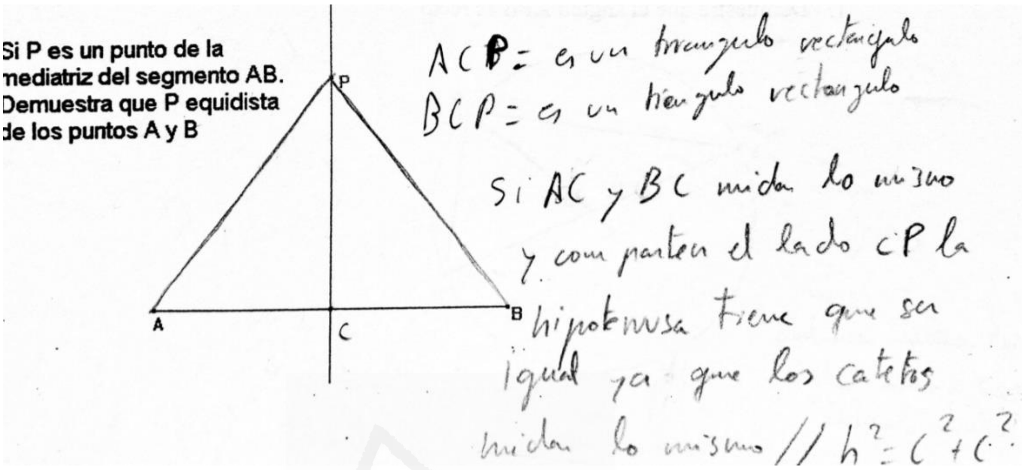


Figura 4.11 –Respuesta de A31 a P3

Revisamos a continuación los análisis realizados. En primer lugar, podemos observar los procedimientos de validación en su respuesta en la siguiente tabla:

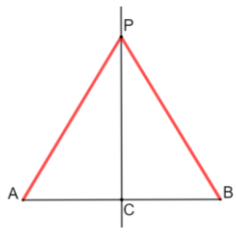
Unidades de análisis	Procedimiento de validación
1. ΔACP es un triángulo rectángulo	Deductivo
2. ΔBCP es un triángulo rectángulo	Deductivo
3. Si $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ miden lo mismo	Deductivo
4. y comparten el lado $\overline{CP}$	Deductivo
5. la hipotenusa tiene que ser igual	Deductivo
6. ya que los catetos miden lo mismo	Deductivo
7. $h^2 = c^2 + c^2$	Deductivo

Tabla 4.6 - Procedimientos de validación de A31 al resolver P3

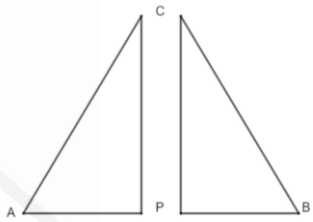
Todas sus afirmaciones en respuesta a P3 son validadas deductivamente, como se pudo comprobar con ayuda de la entrevista. Las afirmaciones 1 y 2 se deducen de que *"la recta $\overline{PC}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$ y la mediatriz es perpendicular"*. La afirmación 3 también es deducida de las propiedades de la mediatriz: *"la mediatriz corta perpendicularmente al* *segmento".* La afirmación 4 es una obviedad, y 5, 6 y 7 se deducen inmediatamente por encontrarnos en las hipótesis del teorema de Pitágoras.

A continuación, mostramos el resultado del análisis de su razonamiento configural. Para ello, en primer lugar, describimos los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas:

AO₁
(cf): Añade el punto C, $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$
(i): Identifica las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔAPC y ΔBCP

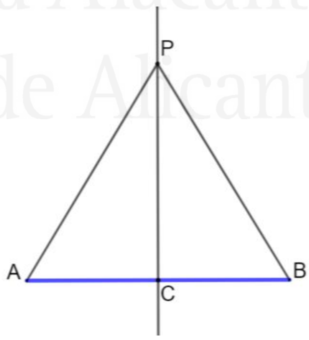


AD₁(v-d): Establece que ΔAPC y ΔBCP son triángulos rectángulos



AO₂(i): Identifica los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$

AD₂(v-d): Establece los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son congruentes



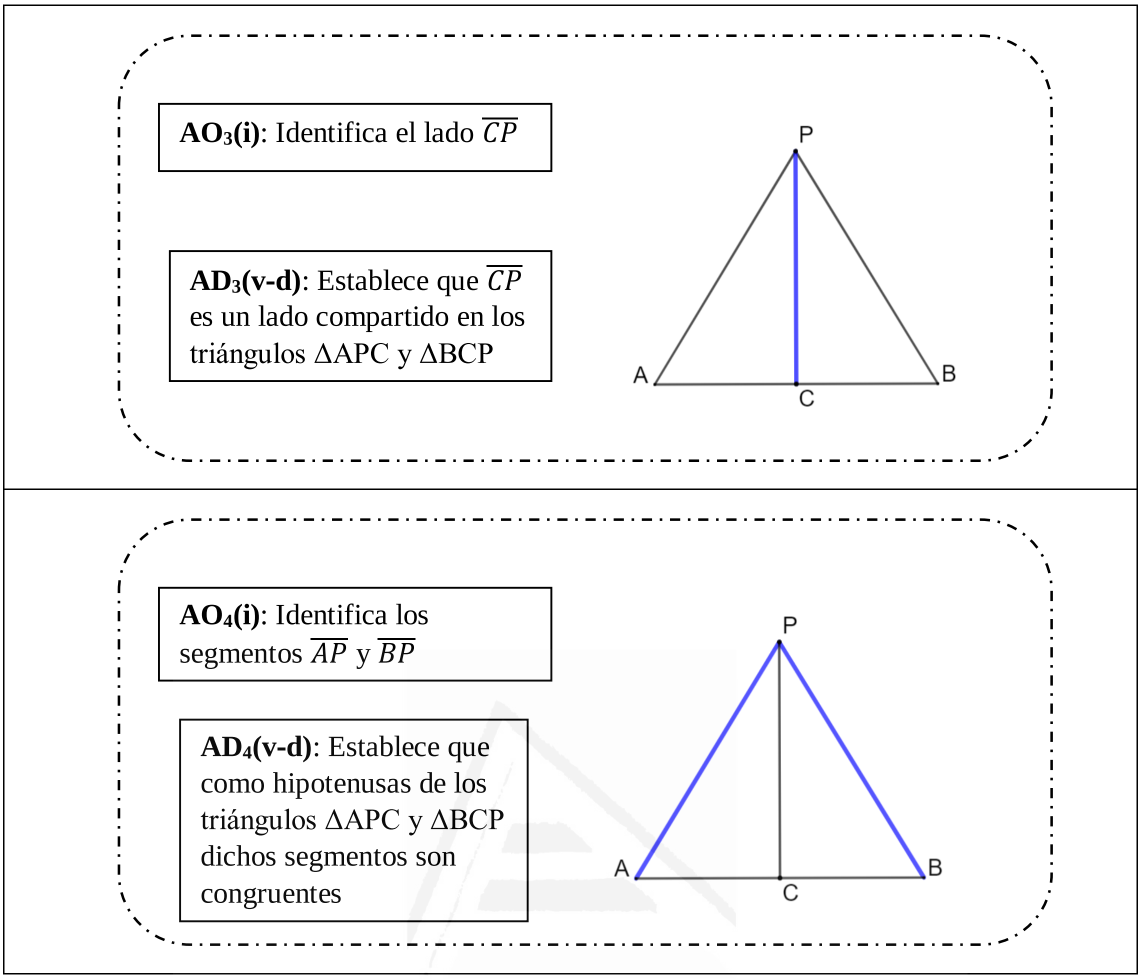


Figura 4.12 – Ciclos de aprehensiones operativas/discursivas de A31 en P3

El razonamiento configural de este estudiante en respuesta a la tarea desemboca en un truncamiento que le permite resolver deductivamente el problema. La coordinación de ciclos de aprehensiones operativas y discursivas le ha llevado a deducir que los dos triángulos ACP y BCP son triángulos rectángulos con catetos iguales, aunque comete un error al asignar la misma incógnita, c, a los dos catetos, que no son necesariamente congruentes. En esta situación, el teorema de Pitágoras le garantiza la congruencia de las hipotenusas, que es la tesis que pretende demostrar.

Por último, realizamos el análisis de la organización discursiva de su respuesta:

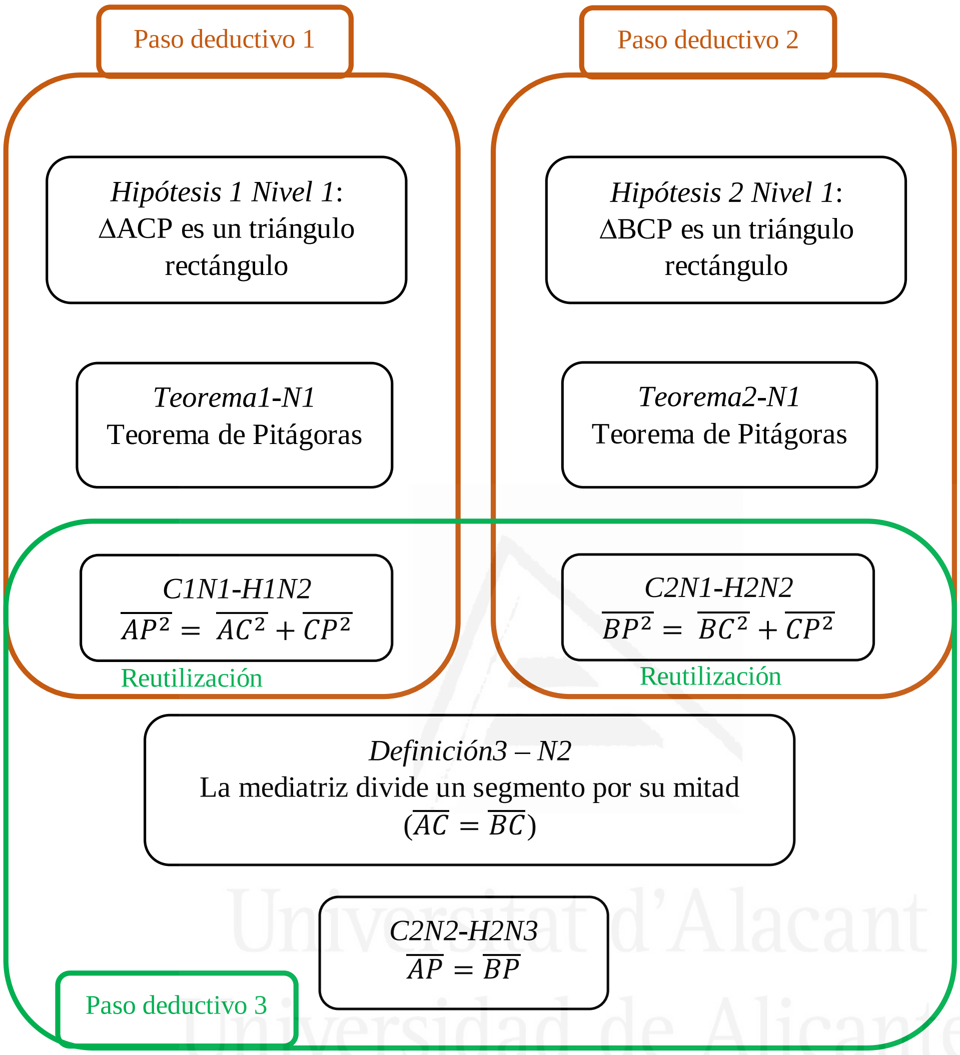


Figura 4.13 – Organización discursiva de A31 en P3

Si bien la falta de rigor en la redacción es la habitual en la mayoría de alumnos de estas edades, podemos observar en el discurso las características propias de la prueba matemática: nivel local (paso deductivo), donde cada afirmación adquiere una de las tres categorías (premisa, definición/teorema o conclusión) y nivel global (organización de varios pasos), donde las conclusiones de pasos anteriores son reutilizadas como premisas en pasos siguientes.

- Paso 1: Premisa: ΔACP es un triángulo rectángulo → Teorema de Pitágoras → Conclusión: $\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2$

- Paso 2: ΔBCP es un triángulo rectángulo → Teorema de Pitágoras → Conclusión: $\overline{BP}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CP}^2$

Las conclusiones de los pasos 1 y 2 se convierten en premisas del Paso 3 donde, utilizando que $\overline{AC}$=$\overline{BC}$ (definición de mediatriz), podemos concluir que $\overline{AP}$ = $\overline{BC}$, que es la tesis que se pretende demostrar.

4.4. Perfiles de los participantes considerando el espacio de trabajo geométrico personal

Para caracterizar el ETG personal de cada estudiante desde el modelo de razonamiento configural, hemos considerado el análisis (1) de los razonamientos configurales de los alumnos, (2) de sus procedimientos de validación, (3) de los tipos de discurso en sus respuestas y (4) del rol que otorgan a la configuración que acompaña a los enunciados de los problemas. Este análisis conjunto nos ha permitido identificar diferentes perfiles de los participantes en relación con la prueba matemática que determinan características del ETG personal que cada participante pone en práctica en la resolución de los problemas de probar geométricos:

- si muestra una comprensión del carácter general de la tesis que se pide probar, o si una mera comprobación del caso particular a partir de la configuración que acompaña al enunciado le parece una solución al problema;

- si los procedimientos de validación perceptivos guían su práctica, son admitidos puntualmente, o están completamente descartados;

- si, en el caso de las configuraciones, confunden el objeto geométrico y su representación;

- si conocen la organización discursiva propia de la demostración o si, por el contrario, una explicación convincente o una mera comprobación de un caso particular se considera una respuesta válida.

El análisis descrito nos ha permitido inferir características del Espacio de Trabajo Geométrico personal en el que cada estudiante resuelve cada uno de los problemas. Además, hemos podido estudiar la permanencia o no de las características de dicho ETG personal a lo largo de los diferentes problemas del cuestionario.

A partir del análisis conjunto realizado, hemos podido clasificar a los participantes de nuestro estudio en 6 perfiles o categorías cuyas características resumimos en la siguiente tabla:

Dimensiones/ Perfiles	**Pf1**	**Pf2**	**Pf3**	**Pf4**	**Pf5**	**Pf6**
Razonamiento Configural	TN	TN/CsDe	CsDe	CsDe/CsDc	CsDc/T	T
Procedimientos de validación empíricos	G	G	G	P	P	CD
Tipo de discurso	C	C/RDN	RDN	RDN/PI	PI/RDT	RDT
Configuración inicial	D	D	D*	D/F	D/F	F

Tabla 4.7 - Características de los perfiles en relación con las dimensiones analizadas:

- *Razonamiento configural: TN; CsDe; CsDc; T*
- *Procedimientos de validación empíricos: Guían su práctica (G); Puntualmente admitidos (P); Completamente descartados (CD)*
- *Rol de la configuración inicial: Objeto geométrico-Figura (F); Representación-Dibujo (D)*
- *Tipo de discurso: Comprobación (C); RDN-Explicación (E)-Prueba ingenua (PI)- RDT-Demostración (D)*

** Estos alumnos tratan la configuración inicial como un dibujo, pero sin utilizar procedimientos de medida.*

A continuación, describimos las características de los distintos perfiles y mostramos ejemplos de alumnos representativos de cada uno de los perfiles encontrados.

4.4.1 Perfil 1: Empírico ingenuo

El razonamiento configural, cuando alcanza una solución al problema, desemboca en **truncamientos naif**. En el mejor de los casos, realizan mediciones para establecer la verdad de la conclusión; si no es así, validan o refutan directamente la tesis a partir de su percepción. Los procedimientos para medir se consideran procedimientos experimentales, por lo que asumimos que el procedimiento de validación utilizado es el perceptivo. Su discurso es una comprobación del caso particular. Finalmente, la configuración que acompaña al enunciado adopta el rol de dibujo sobre el que realizar comprobaciones experimentales o verificaciones perceptivas. El ETG personal de estos participantes es el propio de la Geometría Natural, es decir, el contexto matemático de estos participantes es un espacio en el que los objetos están conectados con el mundo real, no son objetos abstractos sino concretos.

A continuación, mostramos las respuestas de A10 y la tabla resumen de sus razonamientos configurales, su utilización de los procedimientos de validación, producciones discursivas y rol de la configuración para ilustrar esta categoría:

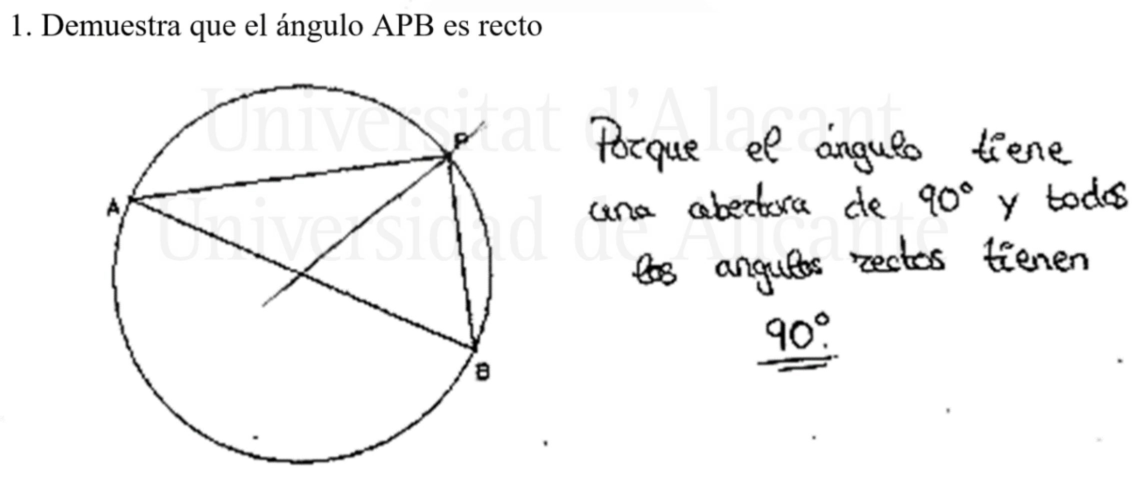


Figura 4.14 - Respuesta de A10 a P1

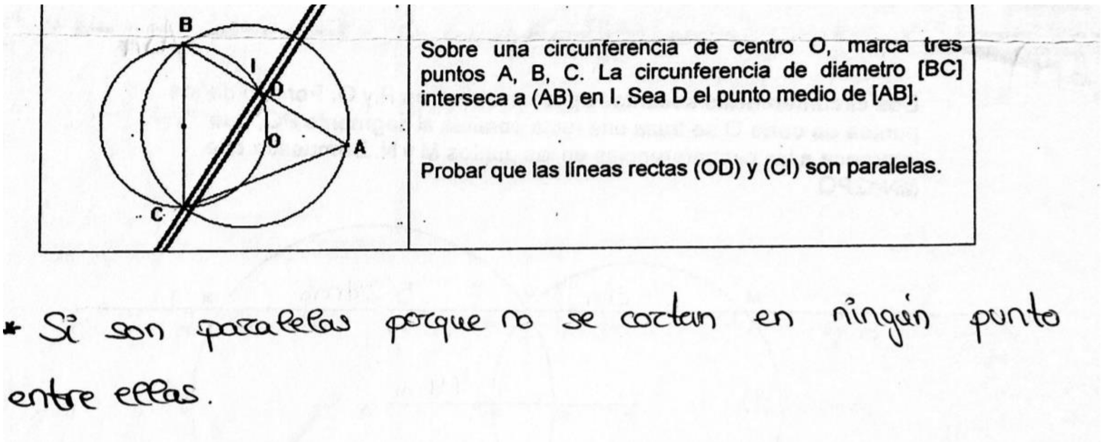


Figura 4.15 - Respuesta de A10 a P2

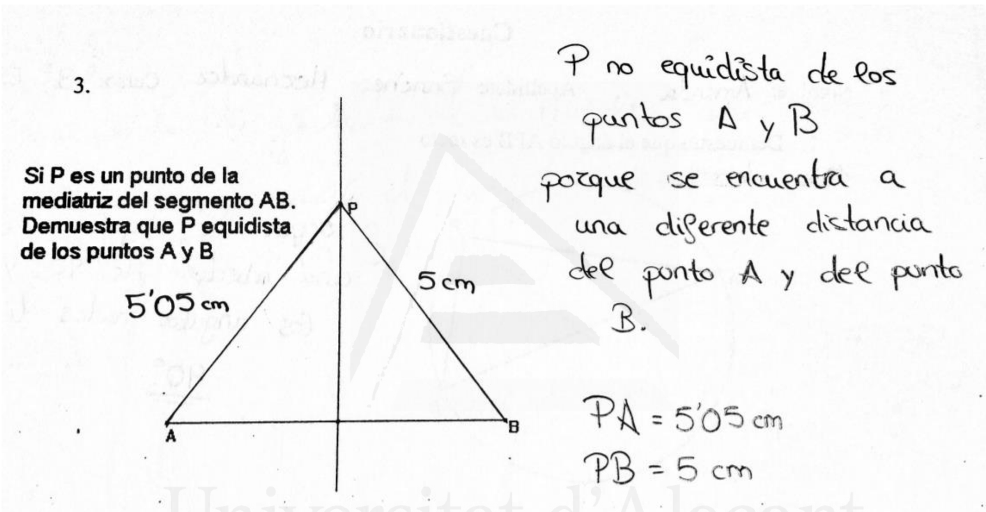


Figura 4.16 - Respuesta de A10 a P3

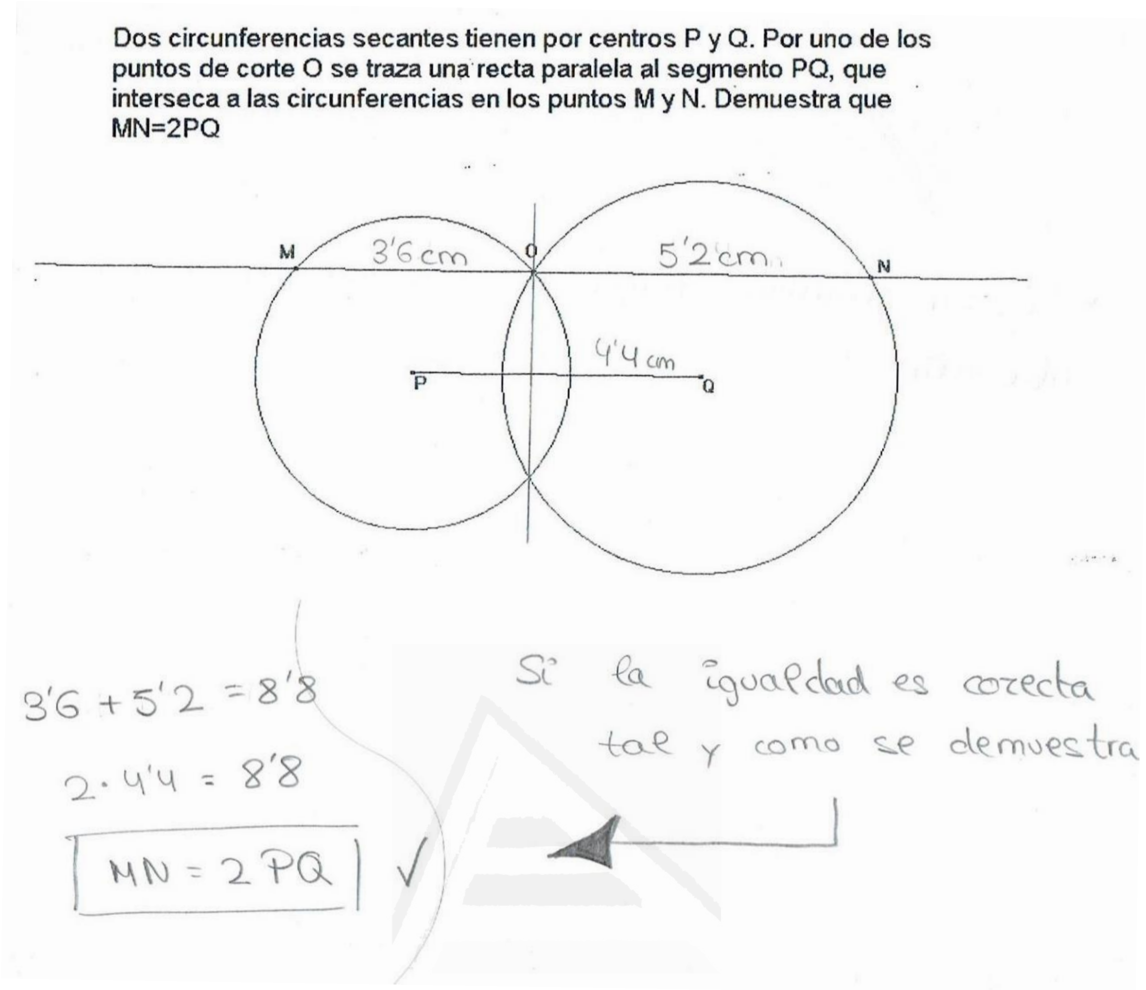


Figura 4.17 - Respuesta de A10 a P4

A continuación, mostramos la tabla resumen del procedimiento de análisis de las respuestas de A10 a los problemas del cuestionario:

Problema	Razonamiento Configural	Procedimientos de validación	Tipo de discurso	Rol de la configuración inicial
P1	TN	P	C	D
P2	TN	P	C	D
P3	TN	P	C	D
P4	TN	P	C	D

Tabla 4.8 – Análisis de las respuestas de A10 al cuestionario (Fase VI)

TN: Truncamiento naif; P: Perceptivos ; C: Comprobación; D: Dibujo;

En relación con el razonamiento configural, en respuesta a P1, aísla los segmentos involucrados en el enunciado y mide el ángulo que forman, es decir, realiza modificaciones sobre la configuración inicial (aprehensión operativa de identificación) y les asocia la definición de ángulo recto (aprehensión discursiva). Su ciclo aprehensión operativa / aprehensión discursiva, es decir, su razonamiento configural, se limita a aislar los elementos involucrados en la conclusión solicitada por el enunciado y a asociar la definición para una comprobación particular de la tesis pedida, desembocando en lo que hemos denominado truncamiento naif.

En sus respuestas, el participante realiza una comprobación de la tesis a demostrar para el caso particular que aparece en la figura. Percibe, a través del uso de instrumentos de medida (transportador en P1, regla graduada en P3 y P4) o bien perceptivamente (P2), que la afirmación es cierta. Es evidente que la configuración sirve de apoyo a sus justificaciones.

En P2, aísla las rectas involucradas en la tesis solicitada por el enunciado, y les asocia la definición de paralelismo para, en este caso, realizar una comprobación perceptiva de la asociación realizada: "*son paralelas porque no se cortan en ningún punto*".

Las respuestas a P3 y P4 son análogas a la respuesta a P1, la única diferencia radica en que la magnitud a la que se refiere la tesis del enunciado es ahora la longitud y, por ello, las mediciones se realizan con otro instrumento de medida de magnitudes, la regla graduada.

4.4.2. Perfil 2: Empírico generalizador

Agrupamos en esta categoría a participantes cuyos razonamientos configurales en respuesta a los problemas del cuestionario acaban en **truncamientos naif y conjeturas sin demostración empíricas**. Su ETG personal se caracteriza por mantener los procedimientos y concepciones propias de la Geometría Natural (GI). No obstante, en alguna de las soluciones se observa un primer intento de encontrar una respuesta que proporcione una justificación del caso general planteado. En esos casos, su desenlace es una conjetura sin demostración empírica y su discurso se limita a describir su razonamiento 'puramente configural'. Aunque pueda validar alguna afirmación deductivamente, los procedimientos de validación perceptivos guían su práctica. Sus discursos pueden ser comprobaciones o razonamientos discursivos naturales, en estos últimos se pone de manifiesto la adquisición de cierto grado de generalización en su respuesta. El rol de las configuraciones sigue siendo el dibujo, propio de la Geometría Natural. Las respuestas al cuestionario de A18 son un ejemplo de este tipo de comportamiento frente a la demostración de propiedades geométricas.

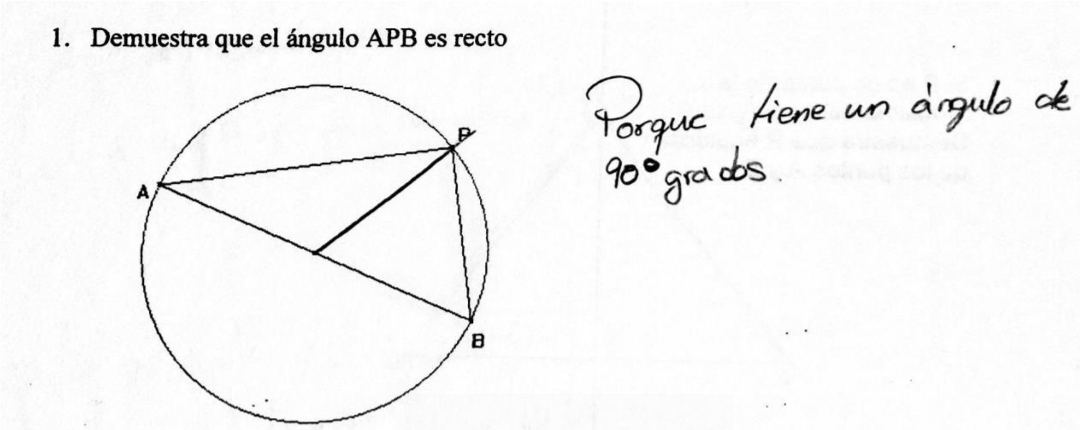


Figura 4.18 - Respuesta de A18 a P1

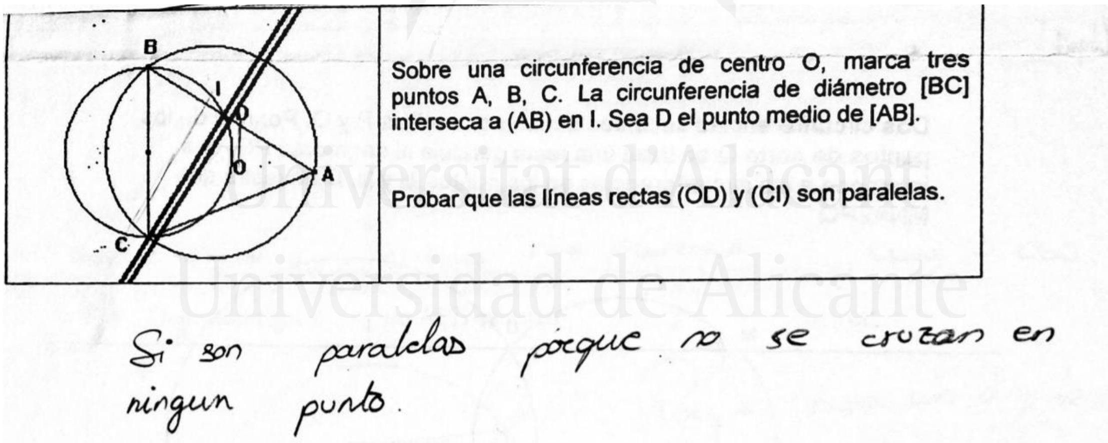


Figura 4.19 - Respuesta de A18 a P2

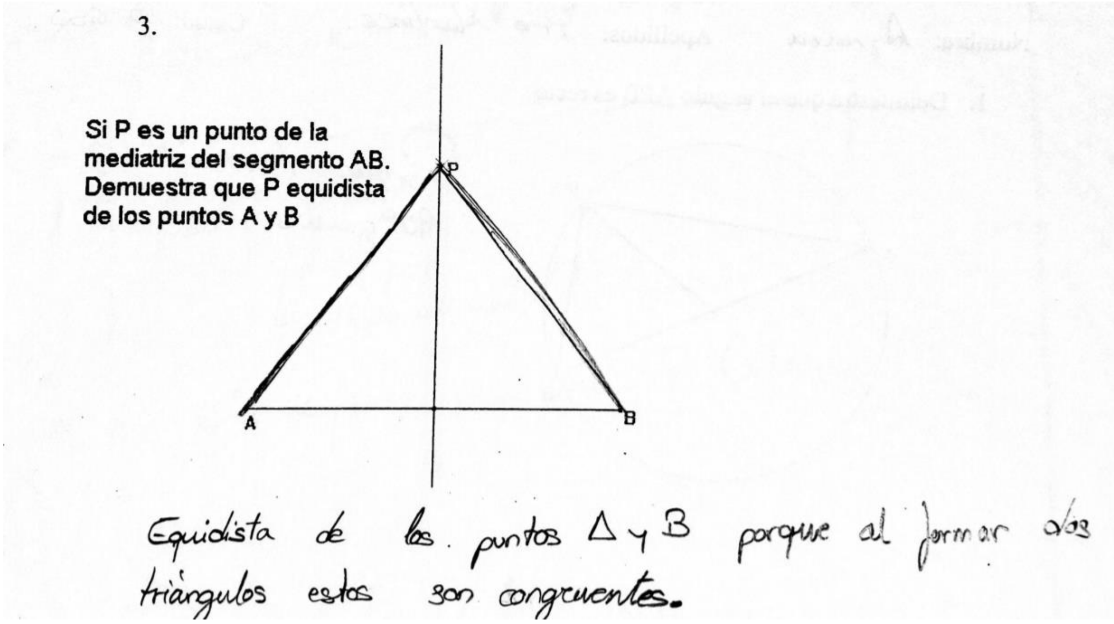


Figura 4.20 - Respuesta de A18 a P3

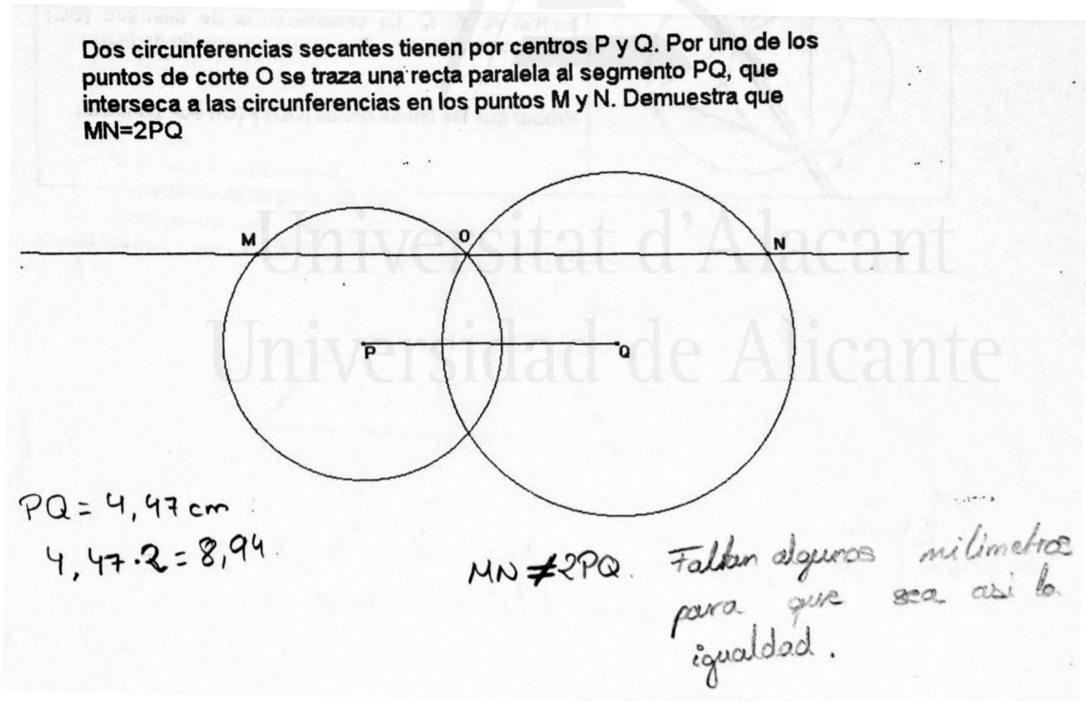


Figura 4.21 - Respuesta de A18 a P4

Las respuestas a los problemas P1, P2 y P4 son propias del perfil 1 que hemos descrito anteriormente. Sin embargo, en su respuesta a P3 abandona los procedimientos experimentales para comprobar el caso particular y nos describe su razonamiento configural.

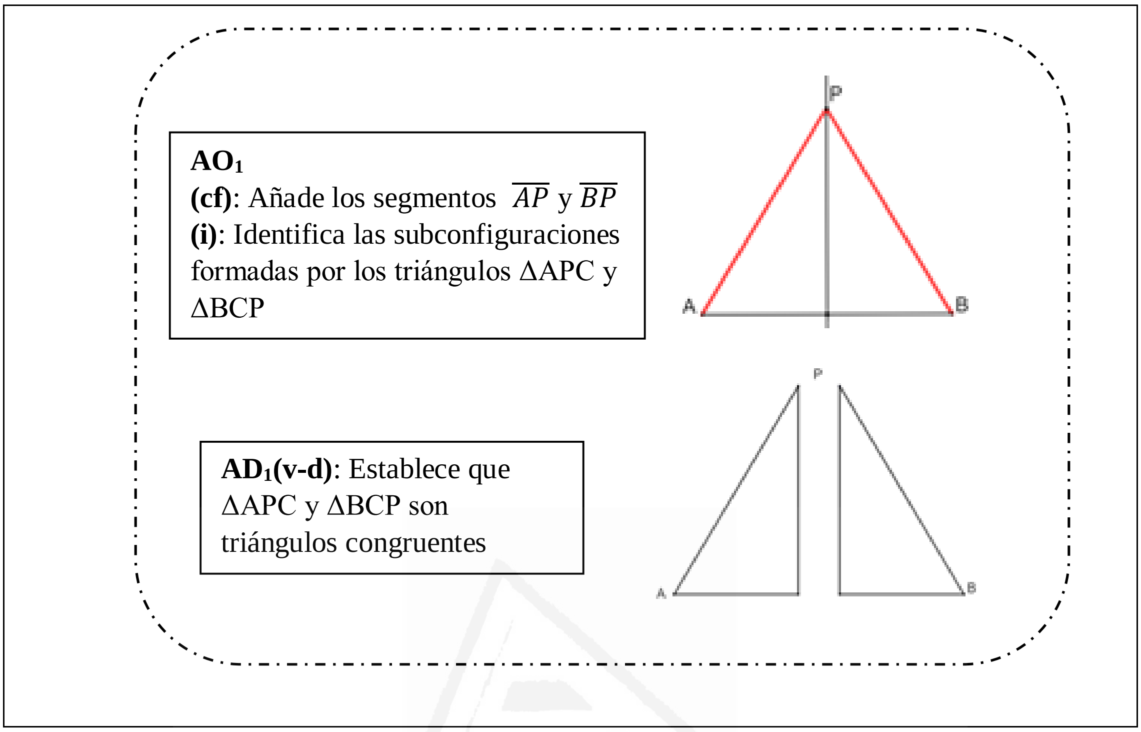


Figura 4.22 - Razonamiento configural de A18 en P3

Mostramos la tabla resumen realizada:

Problema	Razonamiento Configural	Procedimiento de validación	Tipo de discurso	Rol (dibujo/figura)
P1	TN	P	C	D
P2	TN	P	C	D
P3	CsDe	P	RDN	D
P4	TN	P	C	D

Tabla 4.9 – Análisis de las respuestas de A10 al cuestionario (Fase VI)

TN: Truncamiento naif;CsDe: Conjetura sin demostración empírica; P: Perceptivo

C: Comprobación; RDN: Razonamiento discursivo natural; D: Dibujo

La configuración sigue siendo fuente de validación de sus afirmaciones.

4.4.3. Perfil 3: Generalizador

Agrupamos en esta categoría a los participantes que abandonan la comprobación del caso particular como respuesta a los problemas geométricos de probar pero que, sin embargo, no muestran conocimiento de la organización discursiva propia de la demostración matemática, puesto que no se observa presencia del nivel local de la prueba, propio del paso deductivo. El desenlace de sus razonamientos configurales es siempre una **conjetura sin demostración empírica**. Sus procedimientos de validación siguen siendo principalmente perceptivos. Y su organización discursiva, la propia del razonamiento discursivo natural. La configuración adopta el rol de dibujo para realizar sobre ella verificaciones perceptivas; sin embargo, ya no realizan comprobaciones experimentales sobre ella. Las respuestas al cuestionario de A1 son un ejemplo de este tipo de comportamiento frente a la demostración de propiedades geométricas. A continuación, mostramos las respuestas a P1, P3 y P4 (P2 lo deja en blanco).

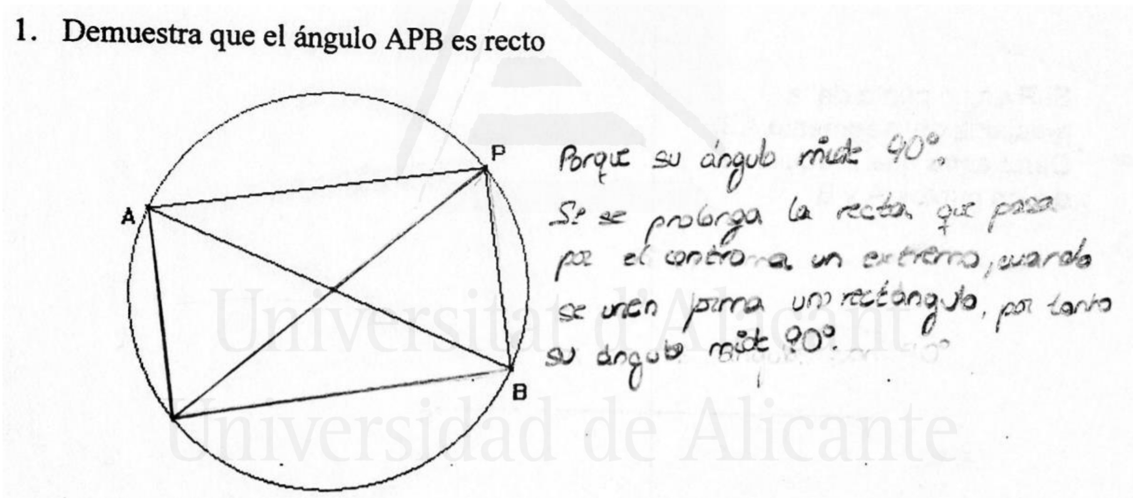


Figura 4.23- Respuesta de A1 a P1

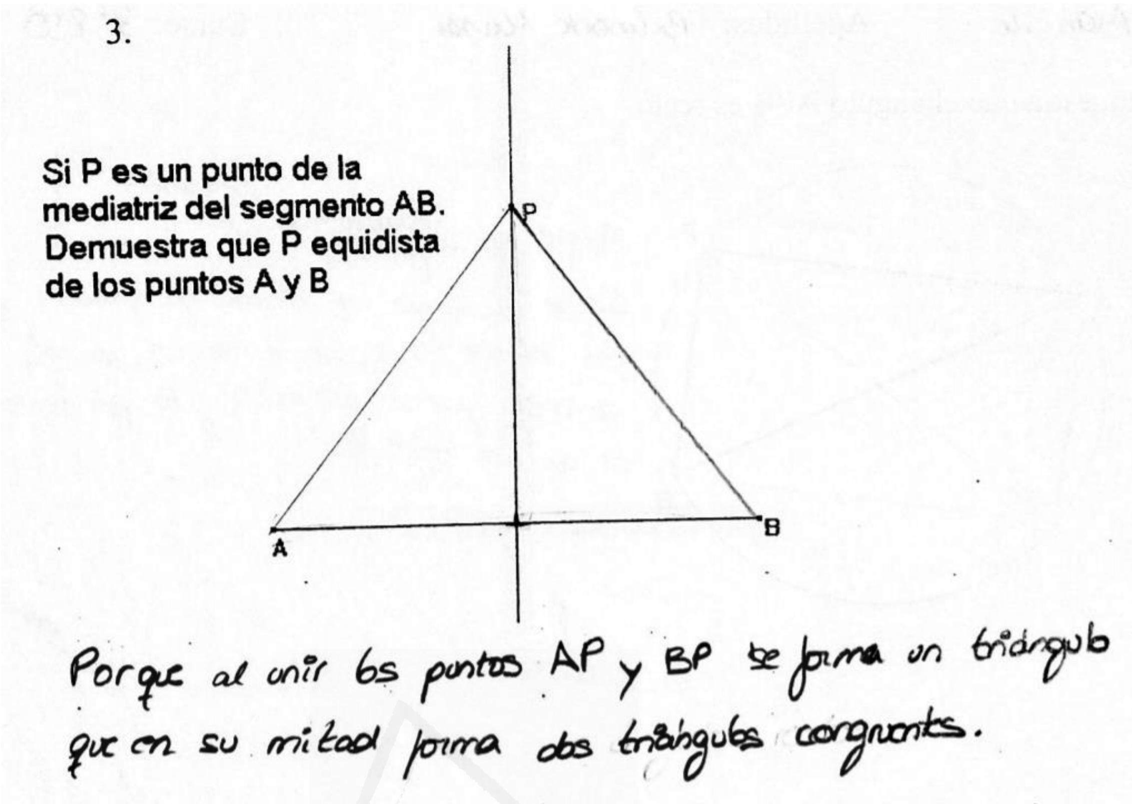


Figura 4.24- Respuesta de A1 a P3

Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q. Por uno de los puntos de corte O se traza una recta paralela al segmento PQ, que interseca a las circunferencias en los puntos M y N. Demuestra que MN=2PQ

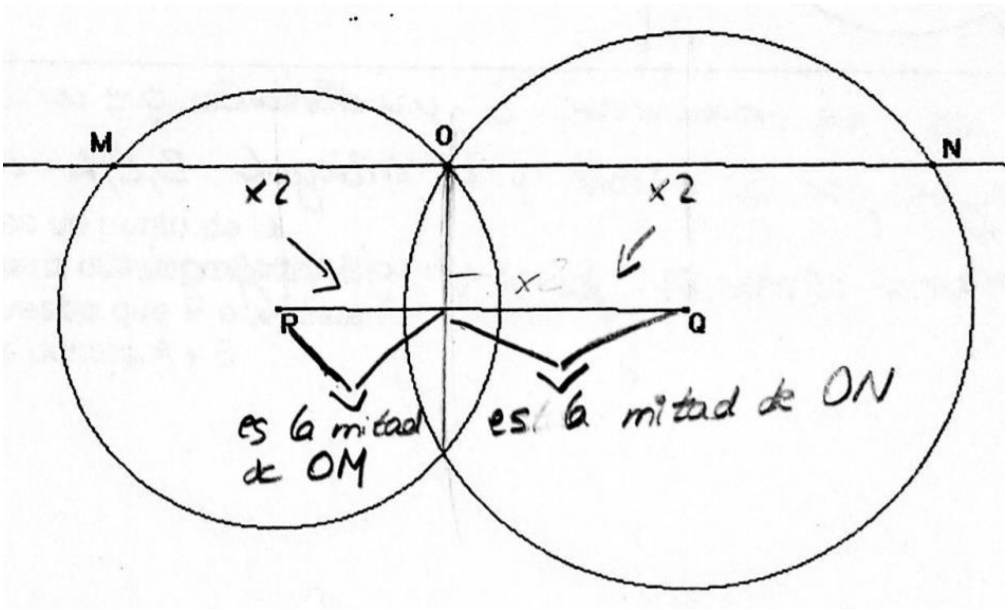


Figura 4.25- Respuesta de A1 a P4

En el análisis del razonamiento configural en respuesta a P4 podemos observar las características de esta categoría.

AO₁
(cf): Añade el segmento que une el punto O con A
(i): Identifica el segmento $\overline{PB}$

AD₁(v-d): Establece que el segmento $\overline{MO}$ tiene longitud doble que el segmento $\overline{PB}$

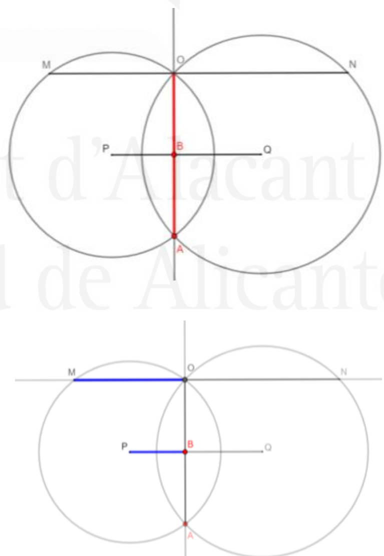


Figura 4.26- Ciclo de aprehensiones operativas/discursivas de A1 en respuesta a P4.

En rojo etiquetas de puntos añadidas por el profesor-investigador para facilitar el análisis

Otro ciclo similar para los segmentos $\overline{ON}$ y $\overline{BQ}$ completa el razonamiento configural de A1 en respuesta a P4. Como podemos observar, su razonamiento configural desemboca en una conjetura sin demostración empírica. Su asociación se limita a la observación, basada en la percepción, de una relación uno a dos entre las longitudes de dos segmentos.

Mostramos la tabla resumen del procedimiento de análisis:

Problema	Razonamiento Configural	Procedimiento de validación	Tipo de discurso	Rol (dibujo/figura)
P1	CsDe	P	RDN	D
P2				
P3	CsDe	P	RDN	D
P4	CsDe	P	RDN	D

Tabla 4.10 – Análisis de las respuestas de A10 al cuestionario (Fase VI)
CsDe: Conjetura sin demostración empírica; P: Perceptivo;
RDN:Razonamiento discursivo natural; D: Dibujo

En sus discursos, descriptivos y no deductivos, se limita a describir el razonamiento configural realizado. No hay entrada en la organización propia de la demostración matemática en el contexto de la Geometría Axiomática Natural.

4.4.4. Perfil 4: Argumentador

En esta categoría clasificamos a los participantes que, aun utilizando las conjeturas sin demostración empírica como desenlaces que les permiten dar una solución a un problema de probar geométrico, muestran conocimiento de las características de una respuesta válida a un problema de probar en el contexto de la Geometría Axiomática Natural. Estos alumnos abandonan la verificación del caso particular como respuesta válida. No obstante, incluso en sus respuestas 'deductivas' continúan aceptando conjeturas perceptivamente de manera puntual. Sus razonamientos configurales, cuando encuentran una solución al problema, desembocan en **Conjeturas sin demostración empíricas o conceptuales**. Sus discursos pueden ser razonamientos discursivos naturales o pruebas ingenuas. El papel de las configuraciones iniciales alterna las características de dibujo y figura. A11, analizado en la fase VI del procedimiento de análisis, es un ejemplo de participante con este perfil. Mostramos de nuevo sus respuestas a los problemas propuestos y la tabla elaborada a partir del procedimiento de análisis.

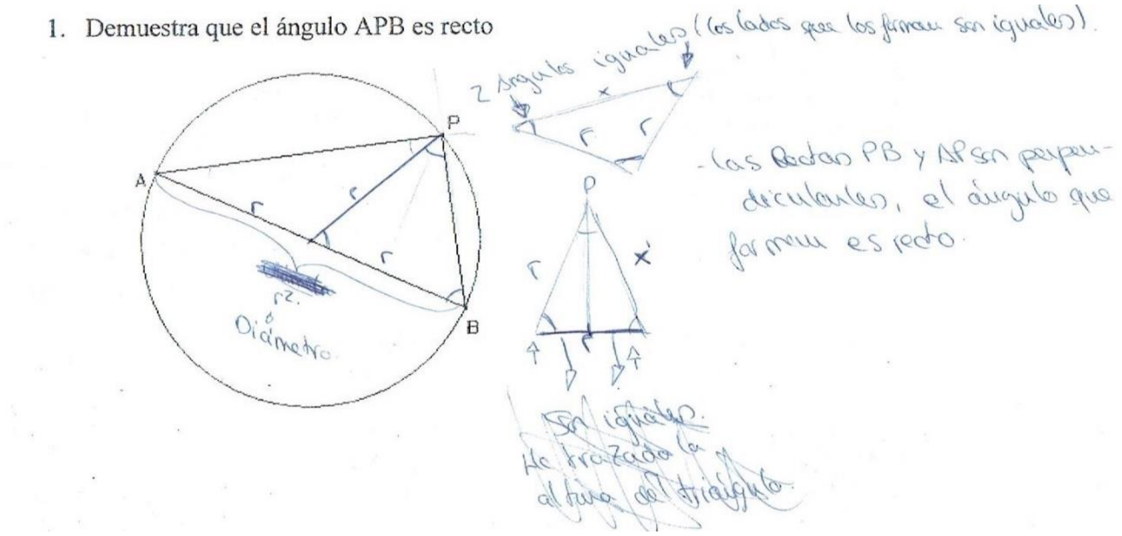


Figura 4.27- Respuesta de A11 a P1

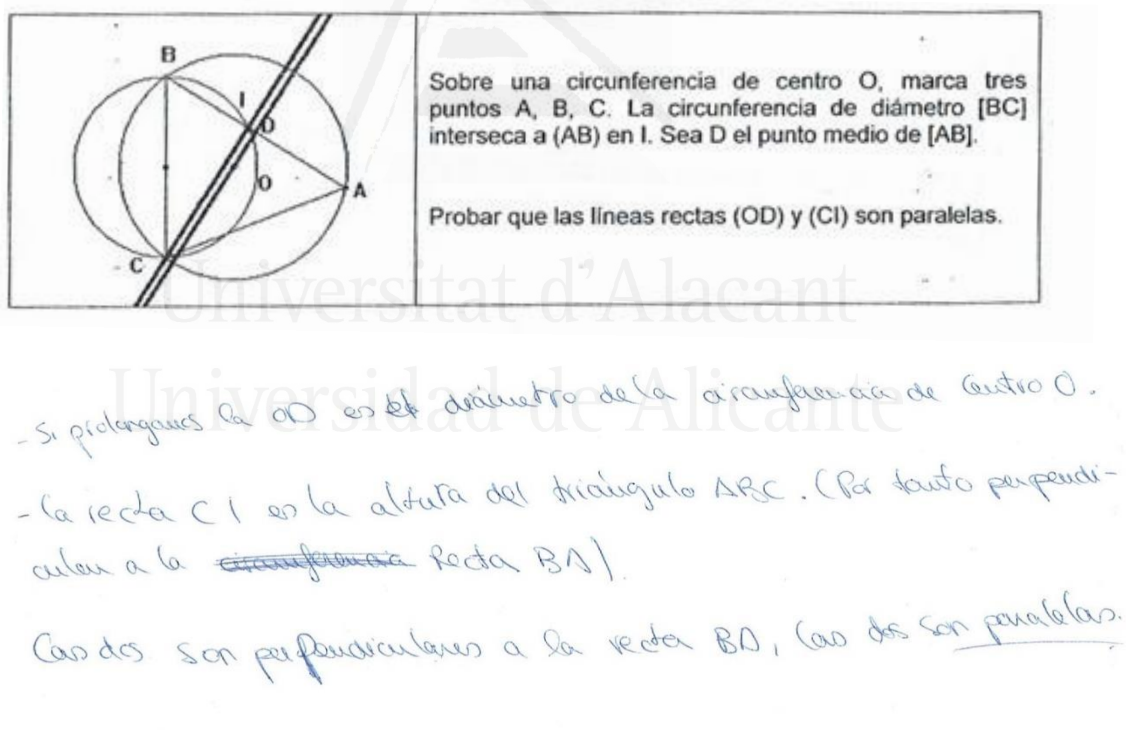


Figura 4.28: Respuesta de A11 a P2.

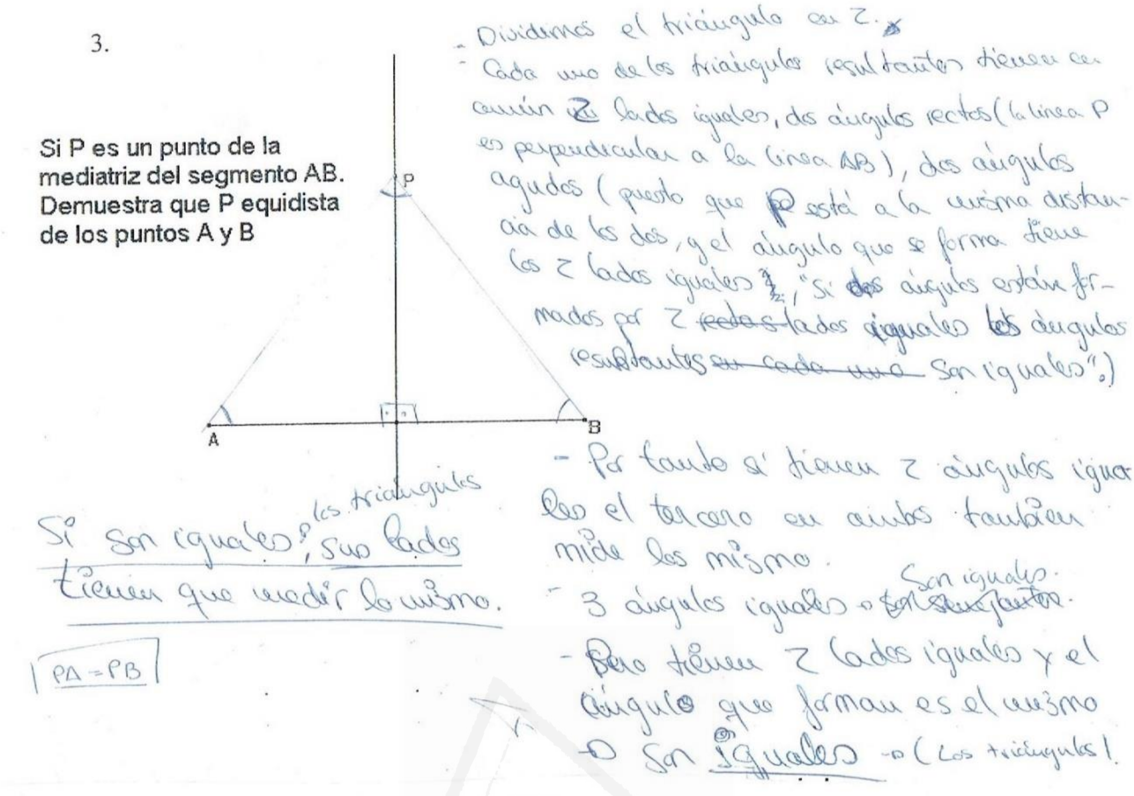


Figura 4.29 - Respuesta de A11 a P3.

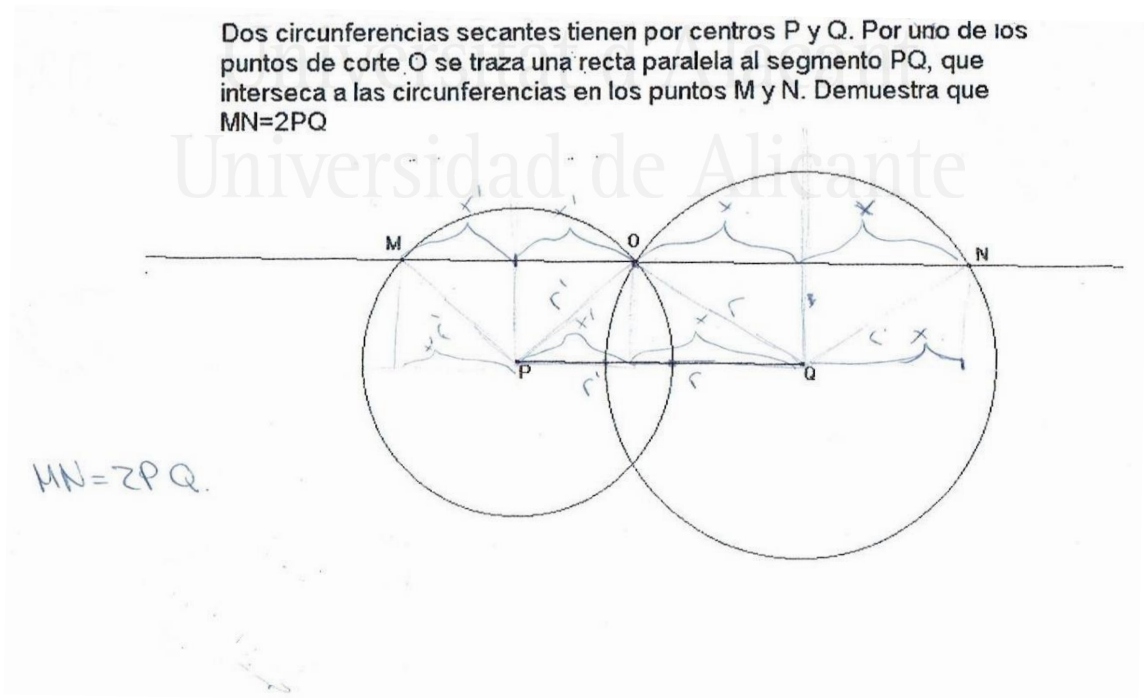


Figura 4.30 - Respuesta de A11 a P4.

Problema	Razonamiento Configural	Procedimientos de validación	Tipo de discurso	Rol (dibujo/figura)
P1	CsDe	P/D	RDN	D/F
P2	CsDc	P/D	PI	D
P3	B	P/D	PI	D/F
P4	CsDe	P/D	RDN	D

Tabla 4.11 - Análisis de las respuestas de A11 al cuestionario.
CsDe: Conjetura sin demostración empírica; B: Bucle; P: Perceptivo; D; Deductivo
RDN: Razonamiento discursivo natural; PI: Prueba ingenua; D: Dibujo; F: Figura

4.4.5. Perfil 5: Demostrador ingenuo

Los participantes que agrupamos en esta categoría han abandonado la descripción de sus razonamientos 'puramente configurales' como desenlaces válidos de sus razonamientos para encontrar las ideas que les permitan resolver deductivamente los problemas de probar geométricos. Cuando encuentran una respuesta al problema, sus razonamientos configurales desembocan en **Conjeturas sin demostración conceptuales o Truncamientos**. Principalmente validan sus afirmaciones por procedimientos deductivos, sin embargo, puntualmente pueden validar perceptivamente alguna afirmación necesaria para completar su razonamiento. En sus respuestas se puede observar la estructura discursiva de la organización propia de la demostración matemática en el contexto de la Geometría Axiomática Natural. Se pueden observar los diferentes niveles, local y global; se percibe el uso del estatus operativo de cada una de las proposiciones (premisa, conclusión o tercera afirmación). Sin embargo, a veces el estatus operativo de alguna afirmación no proviene de su estatus teórico (conjetura, hipótesis, teorema, etc.), sino de una validación perceptiva, procedimiento que no es lícito en el contexto de la demostración de propiedades geométricas en la GAN. Para mostrar un ejemplo de esta categoría utilizamos las respuestas de A30. En respuesta a P3, consigue una solución deductiva que hemos analizado en la fase IV del capítulo sobre el procedimiento de análisis y que describimos como un ejemplo de truncamiento. En respuesta a P1, su razonamiento configural desemboca en una conjetura sin demostración conceptual, lo que le permite organizar un discurso que hemos clasificado como una prueba ingenua. Para los problemas 2 y 4 no encuentra las ideas que le permiten articular una respuesta, pero tampoco se limita a describir sus observaciones. A pesar de realizar algunas modificaciones en la configuración que acompaña al enunciado de P4, deja las respuestas en blanco.

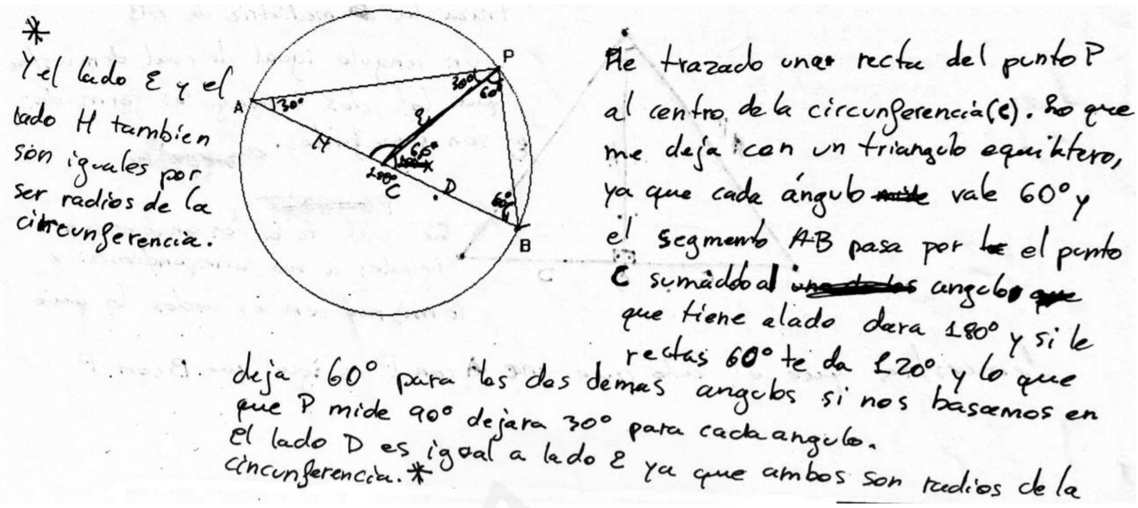


Figura 4.31 - Respuesta de A30 a P1.

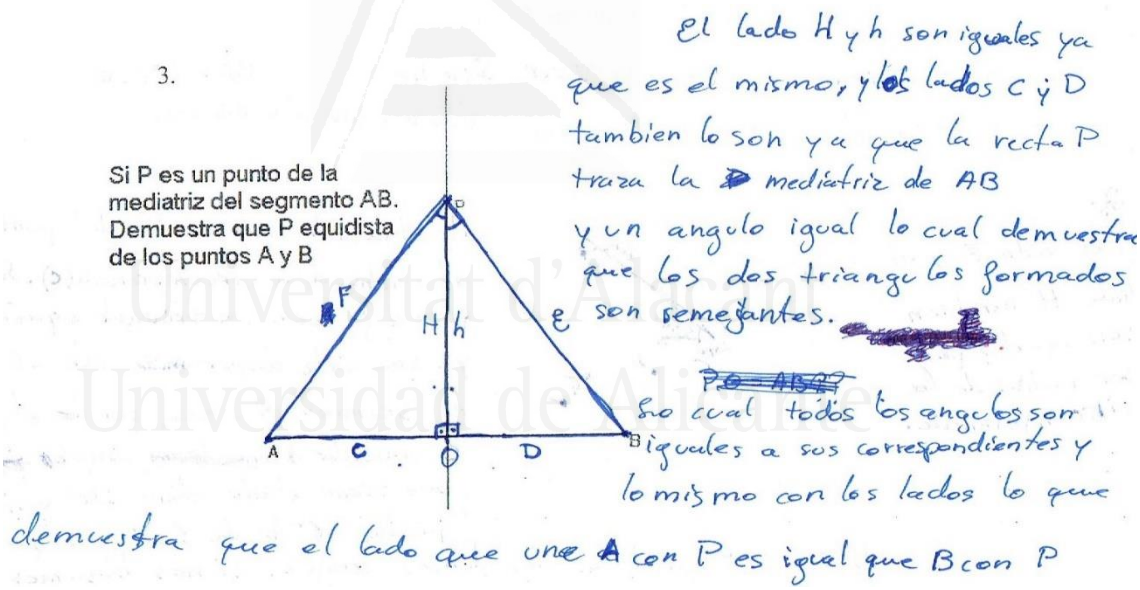


Figura 4.32 - Respuesta de A30 a P3.

Mostramos la tabla resumen del procedimiento de análisis:

Problema	Razonamiento Configural	Procedimiento de validación	Tipo de discurso	Rol (dibujo/figura)
P1	CsDc	P/D	PI	D/F
P2				
P3	T	D	RDT	F
P4				

Tabla 4.12 - Análisis de las respuestas de A30 al cuestionario.
CsDc: Conjetura sin demostración conceptual; T: Truncamiento;
P: Perceptivo; D;Deductivo
PI: Prueba ingenua; RDT: Razonamiento discursivo teórico; D: Dibujo; F: Figura

4.4.6. Perfil 6: Matemático

El estudiante con este perfil descarta todo tipo de conjeturas sin demostración (empíricas o conceptuales) como desenlaces válidos. También desestima los procedimientos de validación perceptivos. El razonamiento configural de un alumno que descarta el procedimiento de validación perceptivo desemboca en un **Truncamiento**, en cuyo caso resuelve deductivamente el problema, o en un bucle, en caso de que el razonamiento configural no consiga obtener la idea que permita solucionar deductivamente el problema. En el primer caso, consigue llegar a la solución del problema; en el segundo caso, no, pero no trata de continuar con su razonamiento utilizando procedimientos de validación perceptivos. Si no encuentran la subconfiguración pertinente, o no conoce la afirmación matemática que le permite solucionar deductivamente el problema, no continuará con la resolución, dejando huecos en el progreso de la prueba o afirmando conjeturas sin demostración. Como hemos afirmado, los procedimientos de validación perceptivos están completamente descartados. Su tipo de discurso es el razonamiento discursivo teórico o demostración. Aquí la configuración inicial adopta el rol de figura sobre la que realizar una exploración heurística. El participante A12 es un ejemplo de este comportamiento. En la siguiente respuesta a P4, A12 descarta explícitamente el uso de procedimientos de validación perceptivos:

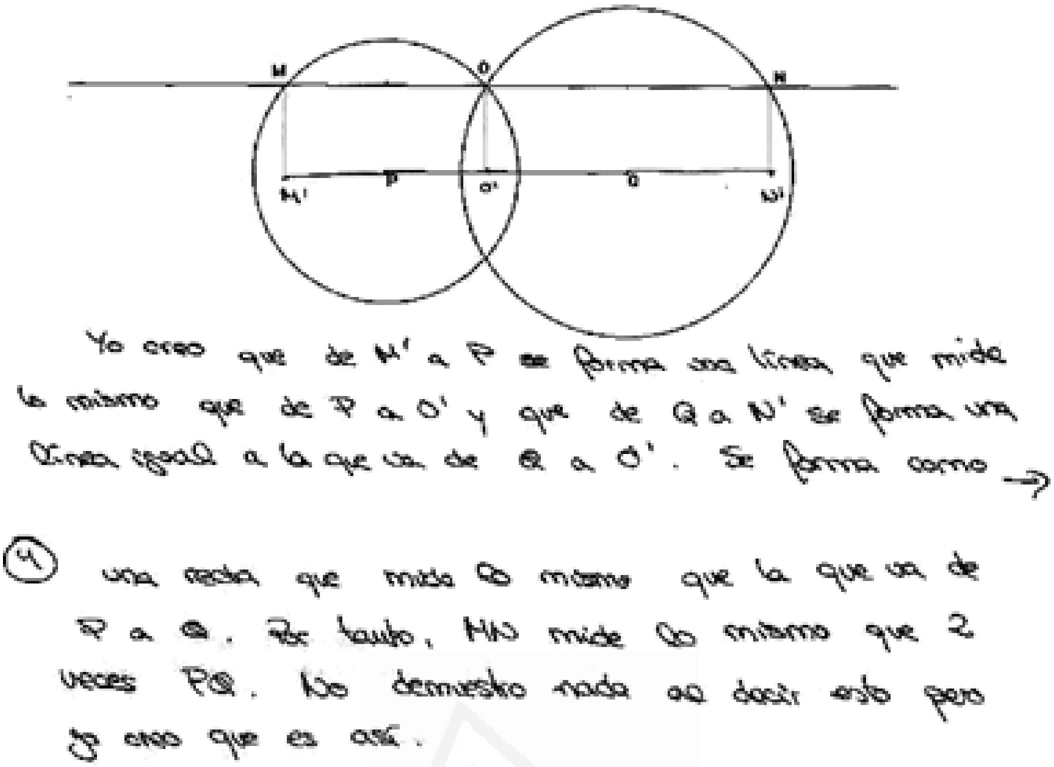


Figura 4.33 - Respuesta de A12 a P4

El razonamiento configural de este participante en esta respuesta desemboca en un bucle. Se realiza el siguiente ciclo aprehensión operativa/aprehensión discursiva:

1. Aprehensión operativa de cambio figural al añadir los segmentos $\overline{M'P}$ y $\overline{ON'}$ y el punto O'.

2. Aprehensión discursiva al afirmar que $\overline{M'P}$ mide lo mismo que $\overline{PO'}$ y que $\overline{QN'}$ mide lo mismo que $\overline{QO'}$.

3. Aprehensión operativa de reconfiguración cuando afirma que "se forma como una recta que mide lo mismo que de P a Q".

El comienzo de las frases "yo creo", "se forma como una", "no demuestro nada", o el final de su última frase "pero yo creo que es así" nos informan de que el procedimiento de validación utilizado es el perceptivo. Sin embargo, al finalizar, después de concluir la tesis pedida afirma que "no demuestro nada al decir esto, pero yo creo que es así". Con esta afirmación muestra su conocimiento de que el procedimiento de validación perceptivo no es lícito en la demostración de propiedades matemáticas, pues él mismo invalida su respuesta a la tarea. No es para él una demostración. Entendemos que su razonamiento configural desemboca en un bucle por no encontrar la subconfiguración o la afirmación matemática pertinente para poder obtener de forma deductiva la tesis del problema.

En cambio, en su resolución a P3, encuentra una idea que le permite resolver deductivamente el problema:

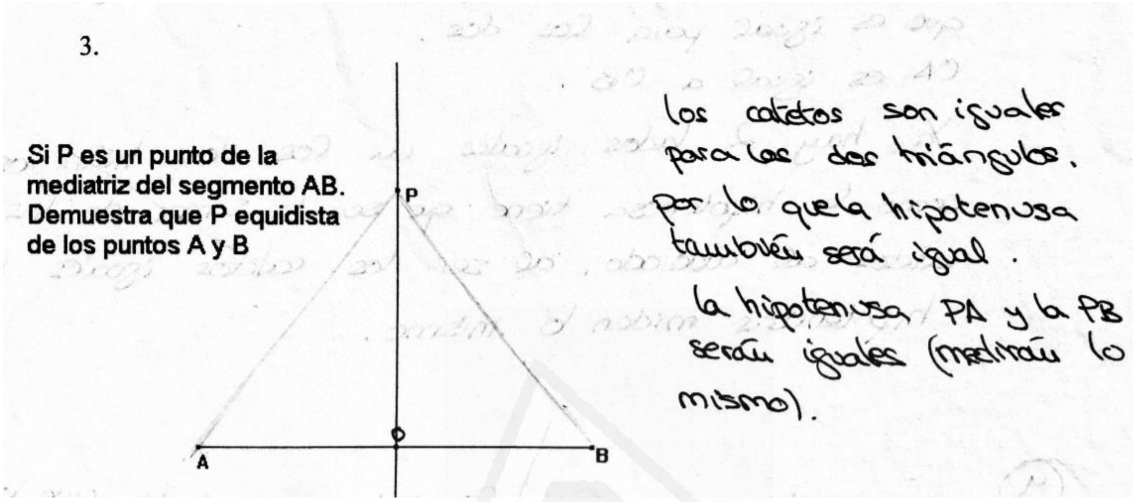
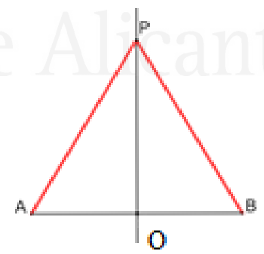


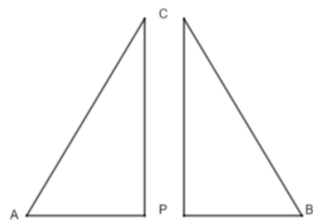
Figura 4.34 - Respuesta de A12 a P3

A continuación, con ayuda de la entrevista realizada, describimos los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas que le proporcionan dicha idea.

AO$_1$
(cf): Añade el punto O, $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$
(i): Identifica las subconfiguraciones formadas por los triángulos ΔAPC y ΔBCP

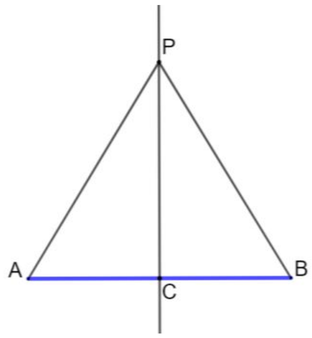


AD$_1$(v-d): Establece que ΔAPC y ΔBCP son triángulos rectángulos



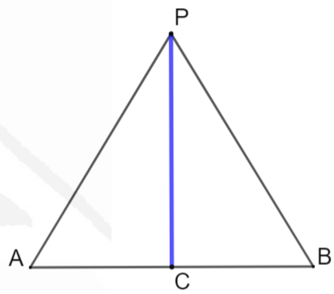
AO₂(i): Identifica los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$

AD₂(v-d): Establece los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son congruentes



AO₃(i): Identifica el lado $\overline{CP}$

AD₃(v-d): Establece que $\overline{CP}$ es un lado compartido en los triángulos ΔAPC y ΔBCP



AO₄(i): Identifica los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$

AD₄(v-d): Establece que como hipotenusas de los triángulos ΔAPC y ΔBCP dichos segmentos son congruentes

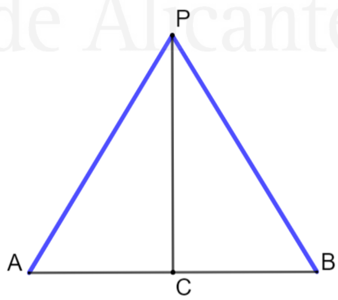


Figura 4.35 – Razonamiento configural de A12 en respuesta a P3

La estructura de su respuesta es similar a la analizada previamente en la respuesta a P3 de A31, y al igual que en aquella, falta rigor en la redacción de la prueba escrita. Sin embargo, con ayuda de la entrevista podemos reconstruir la siguiente organización discursiva:

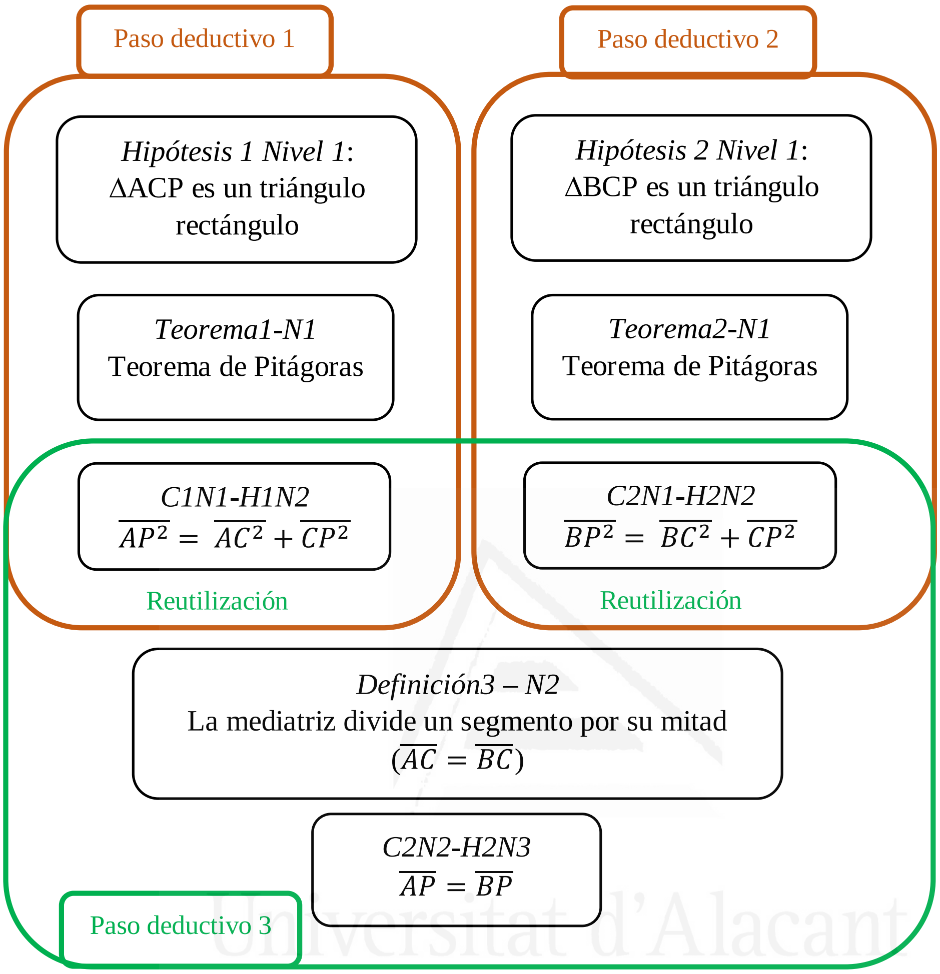


Figura 4. 36 – Organización discursiva de A12 en respuesta a P3

Por último, mostramos la tabla en la que se resumen el rol de la configuración, el desenlace de los razonamientos configurales y la organización discursiva en las respuestas de A12 al cuestionario:

Problema	Razonamiento Configural	Procedimientos de validación	Tipo de discurso	Rol (dibujo/figura)
P1				
P2				
P3	T	D	RDT	F
P4	B	D	RDN*	F

Tabla 4.13 - Análisis de las respuestas de A33 al cuestionario.
T: Truncamiento; B: Bucle; D: Deductivo;
RDT: Razonamiento discursivo teórico; RDN: Razonamiento discursivo natural; F: Figura;

En su respuesta a P4, A12 elabora un discurso que responde a la estructura de un razonamiento discursivo natural. Sin embargo, el participante expresa su invalidez por no responder a las características de lo que considera una prueba matemática.

4.5. Clasificación de los participantes según sus perfiles y desagrupados por cursos

En línea con el último objetivo de nuestra investigación, nos planteamos si podemos encontrar alguna relación de los distintos perfiles descritos en la sección anterior y el curso académico al que pertenecen los participantes. Para ello, en esta sección hemos clasificado a los participantes en los diferentes perfiles descritos en función del curso académico al que pertenecen, como muestra tabla de doble entrada 4.14, con el objetivo de estudiar características de los espacios de trabajo geométrico de los participantes, y las similitudes y diferencias que encontramos en los grupos de tercero y cuarto. Mencionamos que uno de los alumnos de cuarto entregó todas las respuestas en blanco, por lo que no se le ha podido clasificar en ninguno de los perfiles desarrollados.

	Pf1	Pf2	Pf3	Pf4	Pf5	Pf6
3º	2	6	3	5	3	1
4º	3	4	0	3	7	0
Total	5	10	3	8	10	1

Tabla 4.14 – Clasificación de los participantes según su perfil desagrupados por curso académico

A la vista de la tabla anterior, observamos que hay un grupo de 5 alumnos: 2 de 20 (10%) de los alumnos en 3º y 3 de 17 (17,6%) en 4º, que muestran un ETG personal propio de la Geometría Natural, paradigma característico de la enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria. El número de alumnos en este perfil 1 es similar en ambos cursos.

En el perfil 2 encontramos 10 alumnos: 6 de 20 en 3º (30%) y 4 de 17 en 4º (23,5%). El espacio de trabajo personal de estos participantes se corresponde de nuevo con el paradigma de la Geometría Natural. Se deduce que, el espacio de trabajo personal de estos participantes no logra adquirir ninguna de las características propias de la Geometría Axiomática Natural, que se pretende alcanzar en la etapa secundaria, más allá de una aparente comprensión de la necesidad de proporcionar una respuesta al caso general. Podemos inferir que para estos estudiantes la comprobación del caso particular se presenta como un obstáculo que les impide desarrollar un espacio de trabajo geométrico personal acorde con su etapa educativa. Además, el porcentaje de estos alumnos no disminuye significativamente en el curso superior.

Encontramos que hay 3 alumnos de los 20 de tercero que clasificamos en el perfil 3 (15%); sin embargo, no hemos encontrado ningún alumno de cuarto en dicho perfil. A la luz de estos resultados, parece que este perfil de alumno, que abandona la comprobación experimental pero que aún no ha abrazado las reglas de la deducción, se corresponde con una de las etapas de transición entre la Geometría Natural y la Geometría Axiomática Natural, y que su superación podría ser menos problemática.

Los perfiles 1, 2 y 3 agrupan a los participantes cuyos espacios de trabajo personales tienen fundamentalmente características del paradigma geométrico natural. Es destacable que 11 de 20 en 3º (55%) y 7 de 17 en 4º (41,2%), y que representan al 48,6% del total de participantes, se encuentran inmersos completamente en un paradigma propio de la etapa primaria.

Los espacios de trabajo personales de los participantes de los perfiles 4, 5 y 6 van adquiriendo progresivamente características de la geometría axiomática natural.

También podemos observar en la tabla 4.14 que 5 de 20 (25%) en 3º y 3 de 17 (17,6%) en 4º, se encuadran en el perfil 4. Este perfil se caracteriza por que tanto desde el punto de vista del tipo de discurso, del rol de la configuración inicial, de los procedimientos de validación utilizados como del razonamiento configural realizado, el participante se encuentra en un momento de transición entre los dos paradigmas geométricos. Es reseñable que el número de participantes en este perfil es similar en los dos cursos académicos, aunque ligeramente mayor en 3º que en 4º.

En el perfil 5 encontramos a 3 de 20 (15%) participantes en 3º y 7 de 17 en 4º (41,1%). Se puede destacar que el grupo de participantes que abandonan el razonamiento discursivo natural como respuesta válida a un problema de probar geométrico y, consecuentemente, la conjetura sin demostración empírica, es considerablemente mayor en cuarto que en tercero.

Si consideramos que el perfil 6 se corresponde con un espacio de trabajo personal propio de la Geometría Axiomática Natural, encontramos que solo un participante (2,7%) ha desarrollado un ETG personal de acuerdo a los objetivos de la etapa educativa. Además, este participante pertenece al grupo de 3º.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se realiza la discusión de los resultados obtenidos en función de los objetivos planteados en nuestra investigación. En primer lugar, respondemos a la cuestión sobre el uso del modelo de razonamiento configural para describir los razonamientos de estudiantes de secundaria que resuelven problemas de probar geométricos. En segundo lugar, describimos la interacción de los distintos procedimientos de validación y su interacción con los desenlaces del razonamiento configural. En tercer lugar, caracterizamos la relación entre los desenlaces del razonamiento configural y la organización discursiva en sus respuestas a los problemas geométricos de probar. En cuarto lugar, discutimos sobre la capacidad del modelo de razonamiento configural para permitir inferir características del espacio de trabajo geométrico personal de estudiantes de secundaria. Por último, se indican limitaciones de nuestro estudio, algunas perspectivas de futuro que se pueden plantear a partir de nuestra investigación, e implicaciones para la enseñanza de los procesos de probar en educación secundaria.

Nuestra investigación aporta tres ideas en la caracterización de la transición desde las primeras justificaciones a las pruebas deductivas en contexto geométrico. La primera está vinculada a la distinción entre *dibujo y figura,* en línea con Presmeg (2006), que sostiene que es el origen de muchas dificultades en el razonamiento matemático basado en la visualización. La segunda está relacionada con la interacción entre el razonamiento y la organización del discurso, complementaria al trabajo de Clemente (2015), donde se analiza las preferencias (textual-simbólico o visual) de los estudiantes en la resolución de los problemas de geometría de probar respecto a las formas del discurso escrito y el razonamiento configural; y a la investigación de Saorín et al. (2019a, 2019b), donde se estudia dicha interacción desde la perspectiva del desarrollo y organización del discurso escrito que comunica la solución a un problema geométrico de probar con el objetivo de identificar relaciones con los desenlaces del razonamiento configural. La tercera idea se relaciona con la consideración del contexto en el que tiene lugar la actividad geométrica que llevó a Houdement y Kuzniak (1996, 2000) a desarrollar el concepto de espacio de trabajo geométrico, y cómo esta consideración debería llevar a desarrollar herramientas que permitan al profesor sistematizar la observación del desarrollo de los alumnos, para detectar el tipo de justificación que utilizan en un contexto particular, y así mejorar los procesos didácticos (Osorio et al., 2017).

5.1. El modelo de razonamiento configural en estudiantes de secundaria obligatoria.

Los estudios de Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010), basados en el trabajo de Duval (1998) sobre la coordinación entre los procesos de visualización y razonamiento, sacaron a la luz la necesidad de coordinación de las aprehensiones discursiva y operativa en la resolución de problemas de geometría a partir del estudio de unos problemas resueltos por futuros maestros de primaria. En sus trabajos se describe la coordinación de procesos de visualización, es decir, los ciclos de aprehensiones operativas/discursivas que tienen lugar cuando se resuelve un problema de probar geométrico. A este proceso coordinado lo denominaron 'Razonamiento configural', y detallaron los diferentes desenlaces que se podían generar.

Nuestro trabajo nos ha permitido refinar los distintos desenlaces del razonamiento configural con estudiantes de educación secundaria, distinguiendo algunos desenlaces no observados en las respuestas de estudiantes universitarios (truncamiento naif) y dos subtipos dentro de la 'conjetura sin demostración' (empírica y conceptual). En la siguiente tabla se describen los desenlaces observados y sus características.

DESENLACES DEL RAZONAMIENTO CONFIGURAL				
¿Proporciona el razonamiento configural una solución al problema?				
Sí				No
Truncamiento Naif	Conjetura sin demostración empírica	Conjetura sin demostración conceptual	Truncamiento	Bucle
El razonamiento configural proporciona una solución particular al problema basada en la comprobación experimental y/o perceptiva de la tesis a demostrar para el caso particular.	El razonamiento configural proporciona una solución general al problema planteado basada en la validación por procedimientos perceptivos sin uso de instrumentos.	El razonamiento configural proporciona una solución 'cuasideductiva' al problema pero validando alguna proposición mediante la percepción.	El razonamiento proporciona una solución general y deductiva al problema.	El razonamiento configural no proporciona una solución al problema.

Tabla 5.1 – Desenlaces del razonamiento configural y su caracterización

En relación con el primer objetivo planteado, podemos afirmar que el modelo de razonamiento configural proporciona información relevante para describir y comprender los procesos de resolución de problemas de probar geométricos de alumnos de enseñanza secundaria obligatoria. Los razonamientos configurales descritos ponen de manifiesto la relación entre lo que se entiende por solución de un problema de probar geométrico, los procedimientos de validación que son lícitos en un contexto y la noción de prueba matemática del resolutor. Más adelante, discutiremos con más detalle cómo se articulan estos conceptos y qué consecuencias tienen en el comportamiento del resolutor enfrentado a este tipo de problemas.

Los trabajos sobre el modelo de razonamiento configural (Clemente y Llinares, 2013, 2014, 2015; Clemente, Llinares y Torregrosa. 2017; Llinares y Clemente, 2014, 2019; Prior y Torregrosa, 2013, 2020; Quesada, 2014; Clemente, 2015; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2019a, 2019b; Torregrosa, 2015, 2017) nos ayudan a comprender las acciones que desarrolla un alumno, cómo razona y qué dificultades obstaculizan el proceso de coordinación y, en consecuencia, su desarrollo de la demostración matemática en contexto geométrico.

Nuestro modelo de razonamiento configural se muestra, pues, como un instrumento con gran poder explicativo de las interacciones que se producen entre los distintos procesos involucrados en la actividad geométrica. La comprensión de su funcionamiento y de los factores que inciden en sus distintos desenlaces nos ayuda a entender y a explicar la variedad de comportamientos que observamos en los alumnos cuando resuelven problemas geométricos.

5.2. Interacción de los procedimientos de validación y el razonamiento configural

El objetivo de esta sección es dar respuesta al objetivo de investigación que busca explicar la interacción de los procedimientos de validación y los desenlaces del razonamiento configural. Los resultados muestran que el razonamiento configural se relaciona con los procedimientos de validación que el resolutor considera lícitos en la resolución de problemas de probar geométricos, así como con su comprensión de la demanda del problema: general o particular. De modo que, si considera adecuado cualquier tipo de procedimiento de validación, su razonamiento configural, por una especie de 'economía de esfuerzo', se limita a identificar la tesis a demostrar y validarla por procedimientos perceptivos con o sin uso de instrumentos, dependiendo de la naturaleza de la tesis a probar. Esto le lleva a que su razonamiento configural desemboque en un *truncamiento naif*. El hecho de encontrar porcentajes similares de participantes en los perfiles 1 (Empírico ingenua) y 2 (empírico generalizador), tanto en tercero como en cuarto sugiere que la superación de estos perfiles no ocurre de manera 'natural'. Estos resultados están en consonancia con los descritos por Kunimune et al. (2010), que destacan el alto porcentaje de estudiantes de secundaria que continúan considerando suficiente para validar una afirmación geométrica las verificaciones experimentales.

Si el alumno comprende la naturaleza general del problema de probar, entonces descarta este razonamiento que desemboca en un truncamiento naif, y trata de razonar de modo que obtenga una solución 'descriptiva' del problema, lo que hace a su razonamiento configural desembocar en *conjeturas sin demostración empíricas*. De algún modo, parece considerar igualmente válidos los procedimientos de validación deductivos y los procedimientos perceptivos sin uso de instrumentos, ligados estos últimos a la evidencia visual. Los resultados de Ören (2007) con alumnos de décimo grado también mostraron que los estudiantes utilizaron esquemas de prueba empíricos significativamente más que los esquemas de prueba analíticos, incluso aunque la competencia matemática de los estudiantes de su estudio estaba por encima de la media. Muchas investigaciones sugieren que hay una ausencia de esquemas de prueba deductivos y que los esquemas de prueba empíricos son omnipresentes entre los estudiantes en todos los niveles (Fischbein & Kedem,1982; Harel y Sowder, 1998). Harel y Sowder (2007) declararon que la prevalencia de esquemas de prueba empírica para la mayoría de los estudiantes parece ser internacional. Healy y Hoyles (1998) mostraron que incluso los estudiantes de alto rendimiento tenían grandes dificultades para generar pruebas y es más probable que basen sus respuestas a problemas de probar geométricos en pruebas empíricas. Más aun, Manero y Arnal (2020), en una investigación centrada en estudiar los niveles de van Hiele en cuanto a la demostración en geometría, encuentra perfiles con esquemas de prueba empíricos y usos perceptivos de imágenes ¡en profesores de secundaria de matemáticas en formación!

No obstante, algunos participantes de nuestro estudio muestran un comportamiento en el que parecen tomar conciencia de que el procedimiento de validación perceptivo es incompatible con una respuesta deductiva a un problema geométrico de probar. Esto les lleva a coordinar sus aprehensiones operativas/discursivas desde las hipótesis del problema hasta la tesis a probar. Sin embargo, por motivos que no hemos podido dilucidar (nuestra hipótesis es que puede ser debido a que aún no tienen completamente asumido el papel de figura de la configuración que acompaña los enunciados), para establecer la verdad de una proposición intermedia en la cadena de proposiciones, se permiten, excepcionalmente, validar alguna afirmación a partir de la evidencia visual, pero sin utilización de instrumentos de medida. En esta situación, cuando encuentran una solución al problema, sus razonamientos configurales desembocan en *conjeturas sin demostración conceptuales*.

Aunque no de modo concluyente, algunas respuestas nos invitan a pensar que entre nuestros participantes hay algunos que usan los distintos procedimientos de forma equivalente, es decir, dan la misma validez a una afirmación validada por un procedimiento perceptivo, externo o deductivo; sin embargo, en otros casos, se limitan a utilizar el procedimiento de validación perceptivo únicamente cuando se encuentran en una situación de bloqueo, y reconocen esta posibilidad como una vía menos válida para conectar con la tesis que deben demostrar. Relacionamos esta variedad de utilización de los procedimientos de validación con las combinaciones de esquemas de prueba que encontraron

Kanellos et al. (2018) en su ampliación de la taxonomía de los esquemas de Harel y Sowder para caracterizar el aprendizaje de la prueba. Además de seis de los siete esquemas de prueba de la taxonomía, encontraron ocho combinaciones de varios de estos esquemas. Esto podría permitirnos, en futuros estudios, refinar nuestro modelo en atención a esta característica.

Por último, hemos encontrado un único participante (A12) que descarta completamente la validación perceptiva de proposiciones. Cuando esta toma de conciencia es firme, su razonamiento configural solo puede concluir en un *truncamiento*, cuando encuentra la idea que le permite resolver deductivamente el problema, o en un *bucle,* cuando no lo consigue. En su respuesta al problema 4 nos muestra un razonamiento puramente configural que desemboca en una conjetura sin demostración empírica. El comienzo de las frases “yo creo”, “se forma como una”, “no demuestro nada”, o el final de su última frase en su respuesta a P4 “pero yo creo que es así” nos informan de que el procedimiento de validación utilizado es el perceptivo. Sin embargo, al finalizar, después de concluir la tesis pedida, afirma que “no demuestro nada al decir esto, pero yo creo que es así”. Con esta afirmación muestra su toma de conciencia de que el procedimiento de validación perceptivo no es válido en la demostración de propiedades geométricas, por lo que él mismo invalida su respuesta al problema. No es para él una demostración. Entendemos que su razonamiento configural desemboca en un bucle por no encontrar la subconfiguración o la proposición matemática pertinente para obtener una solución deductiva.

5.3. Razonamiento configural y tipo de discurso

En nuestro marco conceptual describimos los siguientes desenlaces del razonamiento configural:

- Truncamiento, cuando la coordinación entre las aprehensiones operativas y discursivas proporciona la idea para resolver deductivamente el problema.
- Conjetura sin demostración, cuando la coordinación entre aprehensiones permite establecer una solución basada en conjeturas no probadas.

Este marco nos plantea dos posibilidades como soluciones a un problema de probar geométrico. La primera es que el resolutor encuentra una solución ‘deductiva’, es decir, una solución que cumple con las características de un razonamiento discursivo teórico (Duval, 2007). En la segunda, el resolutor encuentra una ‘solución’ al problema, pero esta no es 'deductiva' por estar basada en conjeturas no probadas. Estas dos posibilidades son contempladas en nuestro estudio y han sido relacionadas biunívocamente con dos tipos de discurso: razonamiento discursivo teórico y prueba ingenua. Sin embargo, en los resultados de nuestra investigación con alumnos de secundaria, hemos encontrado otras 'soluciones' de distinta naturaleza. La razón de ser de estas distintas soluciones se encuentra en el contexto geométrico en el que el resolutor resuelve la tarea. Para los resolutores inmersos en la Geometría Axiomática Natural, los dos desenlaces permiten describir las coordinaciones que proporcionan las ideas para organizar un discurso con características de razonamiento discursivo teórico, aunque en el caso de la Conjetura sin demostración, éste no se consiga plenamente por la aceptación perceptiva de alguna conjetura no probada. Sin embargo, tal y como hemos observado en nuestros participantes, éstos distan mucho aún de la Geometría Axiomática Natural. Algunos se encuentran totalmente inmersos en la Geometría Natural y otros apenas han iniciado el camino hacia el paradigma deductivo y tomando conciencia de la generalidad de la demanda de un problema de probar geométrico. Así, para nuestros participantes, en función de las características de su espacio de trabajo geométrico personal, también son soluciones al problema: una comprobación particular del caso mostrado por la configuración que acompaña al enunciado o la simple descripción de sus observaciones a partir de la evidencia visual que proporciona la imagen.

Los resultados obtenidos nos han permitido plantear el siguiente esquema (Figura 5.1) en el que se describe el razonamiento configural, la organización discursiva y su interacción con el rol de las configuraciones, el papel de los procedimientos de validación, la comprensión de la demanda de una tarea de probar geométrica y el papel del estatus de las proposiciones declaradas en la resolución de problemas geométricos de probar. La articulación de todos estos componentes describe las características del espacio de trabajo personal del resolutor que aborda un problema geométrico de probar.

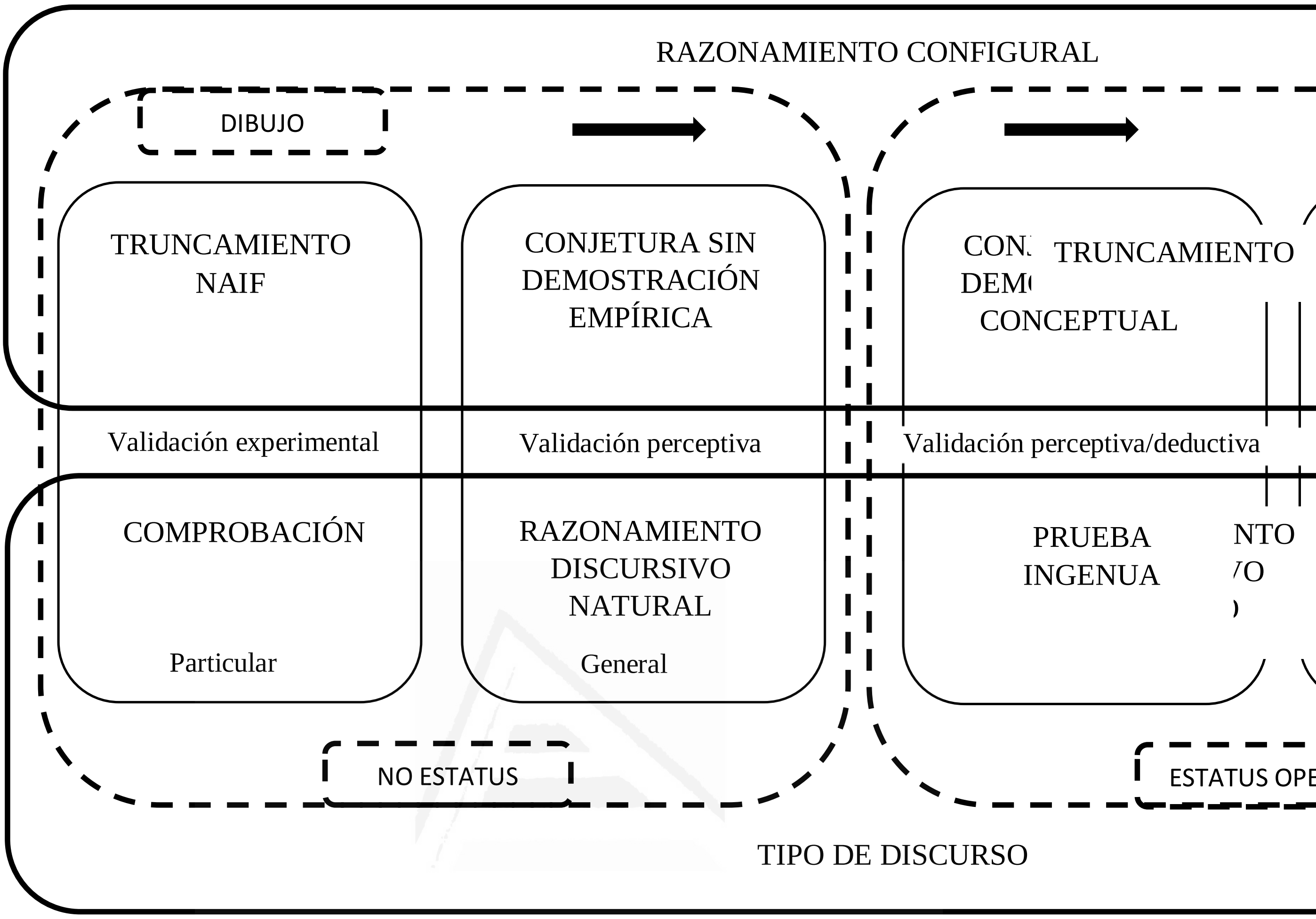


Figura 5.1. Razonamiento configural y tipos de discurso en la resolución de problemas de probar geométricos

En el esquema podemos observar la relación biunívoca entre cada desenlace del razonamiento configural y cada uno de los tipos de discurso. Esta conexión nos permite plantearnos cuestiones sobre la relación causal entre estos dos conceptos. Ante la demanda de una determinada construcción discursiva, nos preguntamos si el resolutor ha de encontrar el razonamiento configural que le proporcione las ideas para construir un discurso con las características predeterminadas por su creencia sobre la prueba de propiedades geométricas, o bien, si construye el discurso a partir de la información que obtiene de su razonamiento configural. Estas cuestiones proporcionan interesantes posibilidades para futuras investigaciones.

También podemos observar en el esquema cómo varían el rol de las imágenes y los diferentes procedimientos de validación. En nuestro estudio hemos observado que los participantes con diferentes perfiles en relación con la prueba se caracterizan por una utilización particular tanto de las imágenes (dibujos o figuras), como de los diferentes procedimientos de validación. Esta interacción de los roles de las imágenes y de los procedimientos de validación resaltan la estrecha conexión entre los procesos de argumentación y/o explicación y los procesos de demostración, como defienden algunos autores (Douek, 1999, 2009; Pedemonte, 2005). Sin embargo, la aparición del estatus operativo en el discurso de un participante supone una toma de conciencia que produce una brecha entre los discursos previos y posteriores, lo que constituye una alineación con la ruptura cognitiva que defienden otros autores (Duval, 1999, 2007; Balacheff, 2000) en el paso desde la argumentación a la demostración.

5.4. Razonamiento configural y contexto geométrico: espacio de trabajo geométrico personal

En esta investigación estudiamos las características del espacio de trabajo geométrico personal de nuestros participantes. Los resultados de nuestro estudio nos han permitido clasificar el comportamiento de los participantes en relación con los problemas de probar geométricos. Dicha clasificación describe seis perfiles de los participantes: desde el que acomete la resolución de un problema de probar geométrico como si el contexto fuese el propio de la Geometría Natural, hasta el que lo aborda desde la Geometría Axiomática Natural. Para ello hemos considerado la comprensión del carácter general de una proposición matemática, el rol de la imagen, los procedimientos de validación que se consideran lícitos y su conocimiento de la organización discursiva propia de cada contexto geométrico. De esta forma, a través de los diferentes perfiles descritos, nuestro estudio establece una progresión de las pruebas de los estudiantes, dando respuesta a la demanda de Lee (2016) sobre la falta de estudios que proporcionen progresiones más finas en las pruebas que realizan los estudiantes. Así, encontramos el perfil 1, que describe al estudiante cuyas pruebas son meras comprobaciones experimentales de un caso particular; el perfil 2, en el que aparece la generalización; el perfil 3, que abandona la comprobación del caso particular; el perfil 4, caracterizado por la aparición de la organización propia de la deducción; el perfil 5, que abandona el razonamiento discursivo natural como respuesta válida en la resolución de problemas de probar pero que puntualmente acepta alguna afirmación llevado por la evidencia visual; y el perfil del matemático, que alcanza a comprender lo que un razonamiento matemático válido produce.

Si analizamos conjuntamente los perfiles 1, 2 y 3, que se corresponden con esquemas inmersos fundamentalmente en el paradigma geométrico natural, y, por otro lado, los perfiles 4, 5 y 6, que van progresivamente abandonando dicho paradigma y adentrándose en la geometría axiomática natural, vemos que el porcentaje de estos grupos es similar en los cursos 3º y 4º (55% y 41.2% para los perfiles 1, 2 y 3 en tercero y cuarto, y 45% y 58,8% para los perfiles 4, 5 y 6, respectivamente). Lo que puede significar que las tomas de conciencia que permiten abandonar el paradigma geométrico natural no se suelen producir y los alumnos cuyos ETG personales pertenecen a dicho paradigma siguen en el mismo un curso académico después. No obstante, si hemos observado que los alumnos que han conseguido dar sus primeros pasos en el contexto geométrico axiomático, parecen experimentar una progresión de 3º a 4º relacionada fundamentalmente con el conocimiento del papel del estatus de las proposiciones en la prueba matemática como muestra el aumento de alumnos con perfil 5 que se produce en el subgrupo de alumnos de 4º.

Además, estos perfiles se pueden describir a partir de los desenlaces de los razonamientos configurales de los participantes, por lo que el análisis de los razonamientos configurales de un resolutor de problemas geométricos (la coordinación de sus aprehensiones operativas y discursivas, lo que ve en una imagen y las asociaciones que genera, así como la naturaleza de los desenlaces de dicha coordinación) nos permite inferir características de su ETG personal.

Así, los resultados de nuestra investigación nos han permitido desarrollar un modelo teórico que describimos en la Figura 5.2. Este nos proporciona un marco teórico para analizar las respuestas de los estudiantes que resuelven problemas geométricos pues nos informa: de las creencias del alumno respecto al contexto en el que tiene lugar la actividad matemática (ETG personal), de su conciencia sobre el alcance de una proposición matemática (caso general o particular), de su conocimiento sobre la organización discursiva de una prueba (comprobación, explicación o prueba matemática), así como de su bagaje de conocimientos matemáticos (aprehensiones discursivas), de sus capacidades de visualización (aprehensiones operativas), y de la coordinación de éstas (razonamiento configural) para la resolución de problemas geométricos.

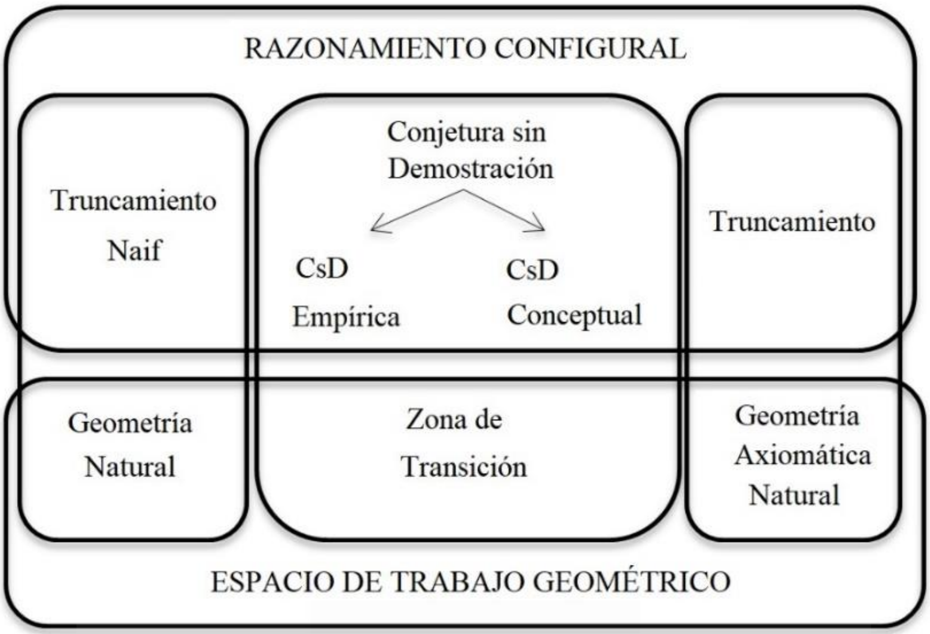


Figura 5.2. Razonamiento configural y espacio de trabajo geométrico

El estudio también ha puesto de manifiesto que nuestro modelo de razonamiento configural puede ser una herramienta de diagnóstico para detectar las dificultades en el tránsito desde la Geometría Natural, propia de las etapas elementales, hasta la Geometría Axiomática Natural, que debe desarrollarse al final de la etapa secundaria y que sienta las bases para el acceso a la Geometría Formal Axiomática. Estas son:

- El rol de la imagen como dibujo, propio de la Geometría Natural, y cuyo conocimiento funciona en dicho contexto, y el rol de la imagen como figura, que es el nuevo conocimiento que debe adquirir en el ámbito de la Geometría Axiomática Natural y para el que el primero constituye un obstáculo, como ha sido considerado en Hershkowitz; Parzysz y Van Dormolen (1996).

- El razonamiento discursivo natural, forma de discurso común y válida en cualquier contexto fuera de la deducción matemática, se convierte en un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la prueba matemática, pues entender lo que una prueba matemática produce (cambio en el valor lógico de la proposición dentro del marco teórico en el que es enunciada (Duval, 2007)) solo se puede lograr si se toma conciencia de la invalidez de la primera en el contexto geométrico deductivo. Este asunto ha sido abordado por Saorín, Torregrosa y

Quesada (2019, p.213), poniendo de manifiesto "la necesidad de un cambio en el estatus de las afirmaciones matemáticas involucradas en el razonamiento que conduce a la solución"

5.5. Implicaciones para futuras investigaciones

El estudio realizado presenta limitaciones que pueden servir a futuras investigaciones:

- Consideramos que análisis posteriores relativos al origen del valor de las distintas proposiciones que se organizan en un discurso, pueden proporcionar una mejor comprensión de la progresión del espacio de trabajo geométrico personal de un estudiante que debe transitar desde las primeras justificaciones elementales hasta alcanzar una necesaria comprensión de la naturaleza de la prueba matemática.
- En nuestra relación de problemas siempre se pedía probar una afirmación cierta, sería interesante contemplar afirmaciones falsas para considerar el uso y la comprensión de los contraejemplos en la validación de afirmaciones.
- Una cuestión interesante para abordar en nuevas investigaciones podría ser: el alumno que ofrece una respuesta en un ETG que no coincide con el ETG idóneo, ¿es consciente de su validez o no? Para ello, sería interesante analizar la valoración de los estudiantes sobre sus propias pruebas.
- Nos preguntamos cómo los perfiles alcanzados por los estudiantes en contexto geométrico en relación con la prueba se trasladan a otros contextos matemáticos.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Ahmadpour, F., Reid, D. y Fadaee, M. (2019). Students' ways of understanding a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 85-104. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570833

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arzarello, F., Micheletti C., Olivero F. y Robutti O. (1998). A model for analiysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of PME*, *22*(2), 24–3.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., y Mariotti, M. A. (2011). Reasoning by contradiction in dynamic geometry. *Proceedings of PME*, *35*(2), *81–88*.

Balacheff, N. (1988). *Une Étude des Processus de Preuve en Mathématique chez des Élèves de Collège*, 2 vols, Univ. J. Fourier, Grenoble (France).

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*. En P. Gómez, (Trad.). Una empresa docente: Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 40*, 501–512.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. y Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *Proceedings for ICM 2002, 3*, 907-920. Beijing: Higher Education Press.

Battista M.T. y Clements D.H. (1995). Connecting research to teaching: geometry and proof. *Mathematics Teacher, 88*(1), 48–54.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Benítez, A., A., Benítez, H. y García, M. L. (2016). La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas. *Educación matemática, 28*(3), 175-216.

Boero, P. (2006). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and provingin school. *Proceedings of PME, 30*(2), 185–192.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of PME, 34*(1), 179–209.

Boero, P., Garuti, R. y Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 249–264). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Boero, P. y Planas, N. (2014). Habermas' construct of rational behavior in mathematics education: New advances and research questions. *Proceedings of PME, 38*(1), 205–235.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387

Chua, B. L., Hoyles, C. y Loh, H. C. (2010). Teachers' perceptions of the purposes of mathematical justification. *Proceedings of PME 34, 2*, 273–280.

Cirillo, M. (2011). "I'm like the Sherpa guide": On learning to teach proof in school mathematics. En Ubuz, B. (Ed.) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 2-241-2-248. Ankara, Turkey: PME.

Clemente, F, (2015). *Características del razonamiento configural en estudiantes para maestro en la resolución de problemas de probar de geometría*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En Berciano, A. et al. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao: Ed. SEIEM, p. 229-236.

Clemente, F. y Llinares, S (2014). *Relación entre el conocimiento de geometría y el "truncamiento" del razonamiento configural.* En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 247-256). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 9-27. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y Razonamiento Configural. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 497-516. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a24

Clemente, F., Torregrosa, G. y Llinares, S. (2016) La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento proporcional. En P. Scott y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas* (pp. 130-140). México: CIAEM.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Cueva, R. (2020). *Regularidades entre los desenlaces del razonamiento configural y el razonamiento discursivo teórico en estudiantes ecuatorianos de nivelación para ingeniería al resolver problemas de geometría en un entorno de lápiz y papel*. Tesis doctoral, Universidad de Alicante, España.

Davies, B.; Alcock, L., Jones, I. (2020). Comparative judgement, proof summaries and proof comprehension. *Educational Studies in Mathematics*, *105,* 181-197.

D'Amore, B., Fandiño, M., Tori, M. y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitive de Duval". *Revista latinoamericana de investigación en educación matemática, 18*(2), 177-212. https://doi.org/10.12802/relime.13.1822

Department for Education. (2013). Mathematics: Programmes of study: Key Stages 1–4 (National Curriculum in England). Recuperado 14 de julio de 2021 de, https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

Dickerson, D. S. y Doerr, H. M. (2008). Subverting the task: Why some proofs are valued over others in school mathematics. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30, 2*, 407–414.

Dimmel, J. y Herbst, P. (2020). Proof transcription in high school geometry: a study of what teachers recognize as normative when students present proofs at the board. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 71-89

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. En I. Schwank (Ed.), *Proceeding of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1, (pp. 125-139). Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.

Douek, N. (2009). Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Viliers (Eds.), *Proceedings of the 19th ICMI Study Conference: proof and proving in mathematics education*, 1, (pp. 142-147). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Dreher, A. y Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 89–114. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8

Duval, R. (1995a). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, (pp. 142–157). doi:10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1995b). Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht/ Boston: Kluver Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Explicar, Argumentar, Demostrar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En: P. Boero (Ed.). *Theorems in schools: from history and cognition to classroom practice,* (pp. 137-161). Rotterdam: Sense Publishers.

Duval, R (2016a). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-125). Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2016b). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp 13-61). Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. London: Springer

Fiallo J., (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*. Tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia, España, 2010.

Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, *31*(2), 181-205.

Fiallo, J. y Gutierrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145-167

Fielding-Wells, J. y Makar, K. (2015). If it doesn't have an apex it is not a pyramid: Argumentation as a bridge to mathematical reasoning. *Proceedings of PME 39, 2,* 297–304.

Fischbein, E. (1982). Intuitions and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-
24.

Fischbein, E. (1987) *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht: Kluwer

Fischbein, E (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), pp. 139-162.

Fischbein, E. y Kedem, I. (1982). Proof certitude in the development of mathematical thinking. *Proceeding of the 6th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 128-131, Antwerp.

Folgueiras, P. (2016). La entrevista. Universidad de Barcelona. Recuperado en http://hdl.handle.net/2445/99003

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 14*, 1-35.

Furinghetti, F. y Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: Hows and whys in the teaching of proof. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43*, 587–599.

Gaud, D. y Guichard, J.P. (1984). Apprentissage de la démonstration. *Petit x, 4*, 5–25.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. En E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21th International Conference of PME, 2. (pp. 313-321). Lahti, Finland.

Godino, J.D. y Recio, Á. M., (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19* (3).

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(2), 109-130. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/254506

Gogou, V., Gagatsis, A., Gridos, P., Elia, I. y Deliyianni, E. (2020). The Double nature of the geometrical figure: Insights from empirical data. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 17, 7*-23.

Gravina, M. A. (2008). Drawing in movement and insights for the proof process. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning, 18*(5/6), 564–574.

Guzmán, I. (2009). Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde un punto de vista cognitivo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19*, 22-33.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20-25.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanantion and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 5-23

Hanna G. y Jahnke N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop y otros (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877–908), Dordrecht, Los Países Bajos, Kluwer.

Hanna, G. y Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, Special Issue, 1-13.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Student's Proof Schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NY. National Council of Teachers of Mathematics.

Hart, L. C., Smith, S. Z., Swars, S. L., y Smith, M. E. (2009). An Examination of Research Methods in Mathematics Education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research, 3*(1), 26–41. https://doi.org/10.1177/1558689808325771

Haverhals, N. (2011). *Students' development in proof: A longitudinal study*. University of Montana. ProQuest Dissertations Publishing.

Heinze, A., Reiss, K. y Groß, C. (2006). Learning to prove with heuristic worked-out examples. *Proceedings of PME 30, 3*, 273–280.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning Geometry. En Nesher y Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 70-95. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International* *handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 161-204). Dordrecht, Netherland: Kluver Academic Publishers.

Healy, L y Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey*. Mathematical Science. London: Institute of Education, University of London.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education JRME, 31*(4), 396-428.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 283-312.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 283-312. http://dx.doi.org/10.1023/A:1003851228212

Houdement C y Kuzniak A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 89-116. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *European research in Mathematics Education*, Paris.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Housman, D. y Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 139–158. https://doi.org/10.1023/A:1025541416693

Huang, R. (2005). Verification or proof: Justification of Pythagoras' theorem in Chinese mathematics classrooms. *Proceedings of PME 29, 3*, 161–168.

Hoyles C. y Küchemann D. (2002). Student's understandings of logical implication, *Educational Studies in Mathematics, 51*, 193–223.

Ibañes, M.J. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Ibañes M. y Ortega T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias 21, 1*, 49–63.

Jaime, A. (1998). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría?. En Gutiérrez, A. y Jaime, A. (Eds), *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at University level. *International Journal of Mathematical Education, 31*(2), 53-60. http://dx.doi.org/10.1080/002073900287381

Kanellos, I., Nardi, E. y Biza, I. (2018) Proof schemes combined: mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof, *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(4), 277-294. DOI: 10.1080/10986065.2018.1509420

Kim, D., y Ju, M. (2012). A changing trajectory of proof learning in the geometry inquiry classroom. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *44*(2), 149–160.

Kuhn, T. S. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Kunimune, S., Jones, K. y Fujita, T. (2010). Strengthening students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), En *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)*, (pp. 756-765), European Society for Research in Mathematics Education (ERME).

Kuntze, S. (2008). Fostering geometrical proof competency by student-centred writing activities. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30, 3,* 289–296.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y su génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 15, 237-251.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. *Em Aberto, 14*(62), 51-62.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 26-44. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.11.005

León, O. (2005). *Experiencia Figural y Procesos Semánticos para la argumentación en geometría*. Disertación doctoral no publicada. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Leung, A. (2009). Written proof in dynamic geometry environment: inspiration from a student's work. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villier, M. (Eds.), *Proceedings of the ICMI 19 study conference: proof and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 15–20). Taipei, Taiwan.

Ley Orgánica de Educación. (2015). Ley Orgánica 8/2013 – Boletín Oficial del Estado. Recuperado 16 de septiembre de 2019, de https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 234-250.

Llinares, S. y Clemente, F. (2019). Characteristics of the shifts from configural reasoning to deductive reasoning in geometry. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 259-277.

Lockwood, E., Ellis, A. y Knuth, E. (2013). Mathematicians' example-related activity when proving conjectures. En S. Brown, G. Karakok, K. H. Roh y M. Oehrtman (Eds.), *Electronic proceedings for the sixteenth special interest group of the MAA on research on undergraduate mathematics education*. Denver, CO: Northern Colorado University.

Manero, V. y Arnal, A. (2020). La demostración en matemáticas. Perfiles de profesores en formación según sus niveles de van Hiele. Aceptado en el *XXIV simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*.

Mariotti M. A. (1997). Justifying and proving: figural and conceptual aspects. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*, Podrebady, República Checa.

Mariotti, M. A. (1998). Intuition and proof: Reflecting on Fischbein's paper. *International Newsletter on the teaching and learning of Mathematical proof*. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/981112Theme/981112TthemeUK.html

Mariotti M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education.*

Past, present and future (pp. 173–204), Rotterdam, Los Países Bajos, Sense Publishers

Mariotti, M. A. (2014). Transforming images in a DGS: The semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement. En S. Rezat, M. Hattermann, y A. Peter- Koop (Eds.), *Transformation—A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 155–172). New York: Springer.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in Classroom Activities. *Educational Studies in Mathematics 34*, 219–248. https://doi.org/10.1023/A:1002985109323

Marmolejo, G. (2007). Análisis de algunos textos escolares en los dos primeros ciclos de la educación básica: el rol de las figuras geométricas, la visualización y los factores de visibilidad en el aprendizaje del área de las figuras geométricas bidimensionales. En P. J. Rojas (Ed.), *Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 43-46). Cali: Gaia.

Marmolejo, G. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. En C. J. Luque (Ed.), *Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética* (pp. 661-693). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Marmolejo, G-A. y Vega, M-B. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática, 24*(3), 9-34.

Marmolejo, G., Prada, R. y Insausty, E. (2020). La visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales en el estudio de las matemáticas. Una revisión bibliográfica descriptiva entre 1981 y 2016. *Revista Espacios*, *41* (26), 292-307.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proof produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer enviroment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Matos, J. F. y Rodrigues, M. (2011). Proof in classroom social practice. *Proceedings of PME 35, 3*, 177–184.

Mesquita, A. (1989). *L´Influence d´aspects figuratifs dans l´argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Université de Strasbourg, Strasbourg. Francia.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry. *The Journal of Mathematical Behaviour, 17*(2), 183-195.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 47-68.

Miyazaki, M., Fujita, T., y Jones, K. (2014). Functions of open flow-chart proving in introductory lessons in formal proving. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36*, 4, 226–233.

Miyakazi, M., Fujita, T. y Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics, 94,* 223-239.

Miyakawa, T. y Herbst, P. (2007). The nature and role of proof when installing theorems: The perspective of geometry teachers. *Proceedings of PME 31, 3*, 281-288.

Monoyiou, A., Xistouri, X. y Philippou, G. (2006). Primary students' reasoning in problem solving and teachers' evaluation of their arguments. *Proceeding of PME 30, 4*, 177-184.

Montañés, J. y Latorre, J. M. (1991). Nuevos estudios sobre el razonamiento matemático en niños. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 5*, 93-100.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*, 3, 227-247.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249–266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

Moutsios-Rentzos, A. y Spyrou, P. (2013). The need for proof in geometry: a theoretical investigation through Husserl's phenomenology. En: A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 329–336). Kiel, Germany.

Nardi E. (2008). *Amongst mathematicians. Teaching and learning mathematics at university level*. New York, USA, Springer.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, España.

National Council of Teachers of Mathematics (2010). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in geometry*. Reston, VA: NCTM.

Ndemo, Z., Mtetwa, D., Zindi, F. (2018). Towards a comprehensive conception of mathematical proof. *Journal of Education and Learning (EduLearn)*, 12 (4), 702-708 DOI: 10.11591/edulearn.v12i4.9557

Ndemo, Z., Mtetwa, D., Zindi, F. (2019). What should be the object of research with respect to the notion of mathematical proof?. *Journal of Education and Learning (EduLearn)*, 13 (1), 7-16 DOI: 10.11591/edulearn.v13i1.9558

Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender* [M.S. - Master of Science]. Middle East Technical University.

Osorio, V.L., Pino-Fan, L. y González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 12*, 39-57.

Padilla, V (1990). *L´influence d´une acquisition de traitementes purement figuraux pour l´apprentissage des Mathematiques*. Thèse U.L.P. Strasbourg, Francia.

Paraskevi, M. y Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 165-179.

Parzysz, B. (1988): Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(3), 313-348.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, (p. 205-235). Sense Publishers

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procesos de verificación en contexto geométrico, *Relime: Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(3), 339-368.

Prior, J. y Torregrosa, G. (2020). Razonamiento configural y espacios de trabajo geométrico en la resolución de problemas de probar, *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 178-198.

Pulaski, M.A.S. (1975). *Para comprender a Piaget*. Barcelona. Península

Quesada, H, (2014). *Análisis de la coordinación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento en la resolución de problemas de geometría*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Radford L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática*, *6*(3), 21–36.

RAE - Real Academia Española, (2001). *Diccionario de la lengua española*. Vigésima segunda edición. Madrid, España: Espasa Calpe S.A.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83–99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103

Rigo, M., Rojano, T. y Pluvinage, F. (2011). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. *PNA, 5*(3), 93-103.

Rodrigo, M.J. (1985) Psicología Evolutiva y Procesamiento de Información. En A. Marchesi, M. Carretero y J. Palacios (Eds.), *Psicología Evolutiva I. Teorías y Métodos*. Madrid: Alianza.

Rodriguez, F., y Gutiérrez, A. (2006). Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software. *Proceedings of PME 30*, *4*, 433–440.

Rodriguez, R. y Rigo, L. (2015). The culture of rationality in secondary school: An ethnographic approach. *Proceedings of PME 39*, *4*, 89–96.

Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación Matemática, 15*(2), 27-53.

Santos, L., Oliveira, J. y Fernandes, E. (2014). Las teorías de las situaciones e de la instrumentación para el pasaje de dibujo a figura. En T. Ramiro y M. Ramiro (Eds.), *Avances en Ciencias de la Educación y del Desarrollo. II Congreso internacional de ciencias de la educación y del desarrollo*, 891-897.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2019). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, 22 (2), 213-244. https://doi.org/10.12802/relime.19.2224

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2019). Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(3), 89-109.

Schoenfeld, A. (1994). Reflexion on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed), *Mathematical thinking and problem solving*, (pp. 53-72), Lawrence Erlbaum Associates.

Schwarz, B., Dreyfus, T. y Hershkowitz, R. (Eds.). (2009). *Transformation of knowledge through classroom interaction*. New York, NY: Routledge.

Sen, C. y Guler, G. (2015). Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes. *Universal Journal of Educational Research*, *3*(9), 617-631.

Senk, S. L. (1985). How Well Do Students Write Geometry Proofs?. *The Mathematics Teacher MT, 78*(6), 448-456. https://doi.org/10.5951/MT.78.6.0448

Shongwe, B. (2021). Learners' beliefs about the functions of proof : building and argument for validity. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 503-523.

Sinclaire, N., Bussi, M.G.B., de Villieres, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 691-719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Sinclaire, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. En J. Cai (Ed.), *Compediun for Research in Mathematics Education* (pp. 457-489). NCTM: Reston, VA.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A.J. (2011). Toward a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras 32,* 1(10).

Stylianides, A.J. (2019), Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education, 7,* 156-182. https://doi.org/10.1002/rev3.3157

Stylianides, A. Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En A. Gutierrez, G. Leder y P. Boero, (Eds.), T*he Second*

Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp. 315-352). Sense Publisher: Boston. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2006). Making proof central to pre- high school mathematics is an appropriate instructional goal: Provable, refutable, or undecidable proposition? *Proceedings of PME 30, 5*, 209–216.

Stylianides, A. J. y Stylianides, G. (2018). Addressing Key and persistent Problems of Students' learning: The case of Proof. En A. J. Stylianides y G. Harel, (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving.* (p. 99-113). Springer: London.

Stylianides, A.J., Stylianides, G. y Philippou, G.N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 133–162. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017671.47700.0b

Stylianides, G., Stylianides, A. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compediun for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). NCTM: Reston, VA.

Tall, D. (1999). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? En Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (Vol. 4, pp.117-136). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Torregrosa, G. (2015). El desarrollo del sentido geométrico como una relación entre la visualización y el razonamiento configural. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 16-20.

Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 1-17.

Torregrosa G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(2), 275-300.

Torregrosa, G. Quesada, H. y Penalva, C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 327-340.

Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R. y Tabach, M. (2008). Inservice teachers' judgment of proof in ENT. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30, 4*, 345–352.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

de Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*, 703-724.

Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. México DF, México: Siglo XXI.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171–185.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs. The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3), 351–360.

Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(3), 289–314.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. y Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15* (pp. 215–229). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Zazkis, D., Weber, K. y Mejía-Ramos, J. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics, 93*, 155-173.

Zazkis, R. y Zazkis, D. (2013). Exploring mathematics via imagined role-playing. *Proceedings of PME, 37, 4*, 433–440.

Zengin, Y. (2017) The effects of GeoGebra software on pre-service mathematics teachers' attitudes and views toward proof and proving, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(7), 1002-1022.