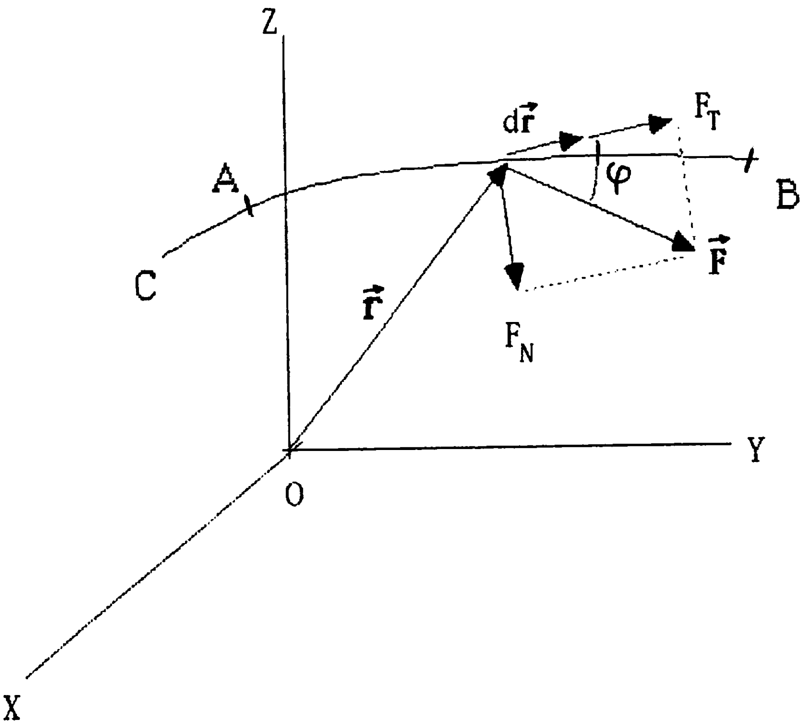
3. TRABAJO Y ENERGIA

3. TRABAJO Y ENERGIA

1. TRABAJO Y POTENCIA

1.1.- TRABAJO

Consideremos una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ siguiendo una determinada trayectoria C, y sea $d\vec{r}$ el desplazamiento elemental experimentado por el punto material en el tiempo dt.



Se define el trabajo elemental realizado por la fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento $d\vec{r}$ como el producto escalar de $\vec{F}$ por $d\vec{r}$:

$$dW = \vec{F}\,d\vec{r}$$

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el desplazamiento AB a lo largo de la curva C, es la suma de los infinitos trabajos elementales correspondientes a los desplazamientos $d\vec{r}$ sobre C, y esto viene expresado por la integral de $\vec{F}$ a lo largo de la curva C, del punto inicial A al final B:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$$

es decir, representa la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva C entre los puntos A y B.

De la figura anterior se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}.d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\varphi = F\,ds\cos\varphi \\ \vec{F}.d\vec{r} = F\,ds\cos\varphi = F_T\,ds \\ dW_{AB} = F_T\,ds \end{array}\right\}$$

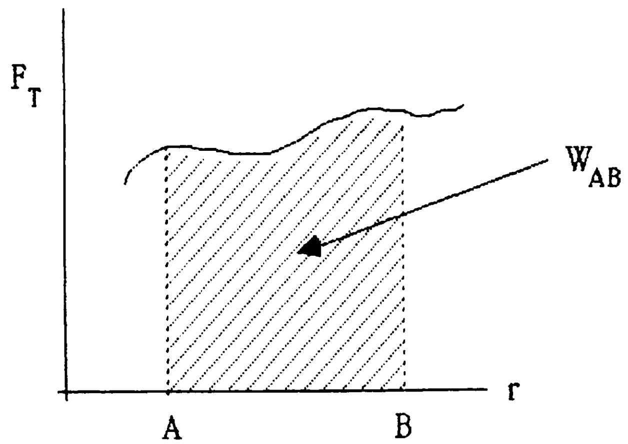
es decir:

$$W_{AB} = \int_A^B F_T\,ds$$

donde $|d\vec{r}| = ds$ y $F_T = F\cos\varphi$ (componente tangencial de la fuerza $\vec{F}$). Luego: "El trabajo es igual al producto del desplazamiento por la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento".

Para que haya trabajo debe ser no nula la componente tangencial de la fuerza (F_T) que es, en realidad, la que realiza el trabajo.

El trabajo efectuado por la fuerza viene representado por el área comprendida debajo de la curva de la figura siguiente:



Consecuencias de la definición de trabajo son las siguientes::

(a) El trabajo realizado por una fuerza normal a la trayectoria es nulo, ya que $\varphi = 90°$ y $dW = 0$.

(b) Si la fuerza $\vec{F}$ es constante se tiene:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

es decir:

$$W_{AB} = \vec{F}\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F}.\Delta\vec{r}$$

que es independiente de la trayectoria y sólo depende de los puntos inicial y final.

La ecuación de dimensiones del trabajo es:

$$[\,W\,] = [\,F\,][\,s\,] = M\,L^2\,T^{-2}$$

En el S.I. la unidad del trabajo es el julio (J), que es el equivalente al trabajo realizado por la fuerza de un newton cuando desplaza su punto de aplicación un metro en su dirección:

$$1\ J = 1\ N.m$$

1.2.- POTENCIA

Es evidente que de dos fuerzas que realizan un mismo trabajo resultará más eficaz aquélla que consiga realizarlo en menos tiempo. Teniendo esto en cuenta se introduce una nueva magnitud física, la potencia, que informa sobre la rapidez con la que se realiza un trabajo, y se define como la variación del trabajo respecto al tiempo, es decir, el trabajo efectuado por una fuerza en la unidad de tiempo. Puede definirse una potencia media, P_m, como:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

y una potencia instantánea mediante la siguiente relación:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

es decir, la potencia es:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Como se cumplen la relaciones:

$$\left.\begin{aligned} dW &= \vec{F}.d\vec{r} \\ v &= \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}\right\}$$

tendremos para la potencia la expresión:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

es decir:

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{v}}$$

La ecuación de dimensiones de la potencia es:

$$[\,P\,] = [\,F\,][\,v\,] = M\,L^2\,T^{-3}$$

La unidad de la potencia en el S.I. es el vatio (W), que es la potencia capaz de producir el trabajo de un julio en el tiempo de un segundo:

$$1\ W = 1\ J/\ 1\ s = 1\ J.s^{-1}$$

Otras unidades de potencia son el caballo de vapor (CV) y el caballo de vapor inglés (HP), relacionados con el vatio mediante:

$$1\ CV = 736\ W$$

$$1\ HP = 746\ W$$

El kilovatio-hora (kWh) es una unidad de trabajo que corresponde a un kilowatio durante una hora:

$$\Delta W = P_m \, \Delta t$$

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \times 1 \text{ hora} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3'6 \times 10^6 \text{ J}$$

Desde el punto de vista de la ingeniería, el concepto de potencia es muy importante, pues cuando un ingeniero diseña una máquina, es la "rapidez" con que puede efectuar el trabajo lo que importa, más bien que la cantidad total de trabajo que la máquina puede realizar.

2. ENERGIA CINETICA. TEOREMA DE LA ENERGIA CINETICA

En los cuerpos existe una cierta "capacidad para poder efectuar trabajo" debido a su constitución, su posición o su movimiento. Esta capacidad recibe el nombre de <u>energía</u>.

La energía cinética, T ó E_C, es una magnitud escalar que para una partícula de masa m que en un instante determinado posee una velocidad $\vec{v}$ toma el valor:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

y como $v^2 = \vec{v}.\vec{v}$, podemos escribir:

$$T = \frac{1}{2} m \, (\vec{v}.\vec{v})$$

Además, $\vec{p} = m\vec{v}$, luego $\vec{p}.\vec{p} = m^2 \, \vec{v}.\vec{v}$, por lo tanto:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

"La energía cinética es la capacidad que poseen los cuerpos para producir un trabajo debido a su movimiento".

La energía cinética tiene las mismas dimensiones del trabajo y se mide, en el S.I., en julios.

Vamos a ver a continuación la relación que existe entre el trabajo realizado sobre un cuerpo y el cambio de energía cinética que en éste tiene lugar.

Teorema de la energía cinética

Mediante una fuerza $\vec{F}$ hacemos pasar a una partícula de masa m de la posición A a la posición B, cambiando su velocidad, por tanto, de $\vec{v}_A$ a $\vec{v}_B$. Podemos calcular el trabajo realizado y éste será:

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r} = \int_A^B m\, d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \int_A^B m\,\vec{v}\, d\vec{v} = \int_A^B m\frac{1}{2}\, d(v^2) = \frac{1}{2} m\, v^2\Big|_B^A =$$

$$= \frac{1}{2} m\, v_B^2 - \frac{1}{2} m\, v_A^2 = T_B - T_A$$

Es decir,

$$\boxed{W_{AB} = T_B - T_A}$$

que en palabras puede traducirse así:

"El trabajo realizado por la fuerza que produce o modifica el movimiento de una particula, es igual a la variación de la energia cinética de ésta" (*Teorema de la energía cinética o de las fuerzas vivas*).

Este teorema es un resultado de validez general, cualquiera que sea la naturaleza de la fuerza.

Podemos poner:

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = m\, d(v^2)/2 = d(mv^2/2) = dT$$

es decir:

$$\boxed{dW = dT}$$

Expresión que es válida para cualquier tipo de fuerzas.

Una consecuencia importante del Teorema de la energía cinética es que las fuerzas normales a la trayectoria de la partícula no modifican su energía cinética. Este es el caso de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento, que como veremos se escribe:

$$\vec{\mathbf{F}} = q\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

o la fuerza centrípeta en un movimiento circular.

Por otra parte, de la definición de potencia $P = dW/dt$, y puesto que $dW = dT$, podemos poner:

$$P = \frac{dT}{dt}$$

es decir, la potencia desarrollada por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada, respecto al tiempo, de su energía cinética.

3. FUERZAS CONSERVATIVAS. ENERGIA POTENCIAL

Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativa si la circulación de $\vec{\mathbf{F}}$ desde al punto A al punto B no depende del camino seguido y es igual a la diferencia de dos escalares, uno relacionado con el punto inicial (U_A) y otro con el final (U_B). Es decir,

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}} = U_A - U_B$$

siendo U una función escalar que depende del punto ($U = U(x, y, z)$) y que recibe el nombre de energía potencial (U ó E_p). Además, si una fuerza es conservativa se cuemple $\oint \vec{\mathbf{F}}.d\vec{\mathbf{r}} = 0$ y, según el Teorema de Stokes, $\nabla x\mathbf{F}=0$.

"La energía potencial es la capacidad o aptitud de los cuerpos para producir un trabajo por su forma, posición, composición química, etc."

Como el trabajo de una fuerza es:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}.\, d\vec{\mathbf{r}}$$

si la fuerza es conservativa podemos poner:

$$\boxed{W_{AB} = U_A - U_B}$$

Es decir, si una fuerza es conservativa, el trabajo de esa fuerza desde un punto inicial A a un punto final B, es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, es decir, es independiente de la trayectoria.

Para fuerzas conservativas podremos escribir además:

$$\vec{\mathbf{F}} = - \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, U$$

luego:

$$\vec{\mathbf{F}}.\, d\vec{\mathbf{r}} = - \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, U.\, d\vec{\mathbf{r}} = - dU$$

Por tanto,

$$\boxed{dW = -\,dU}$$

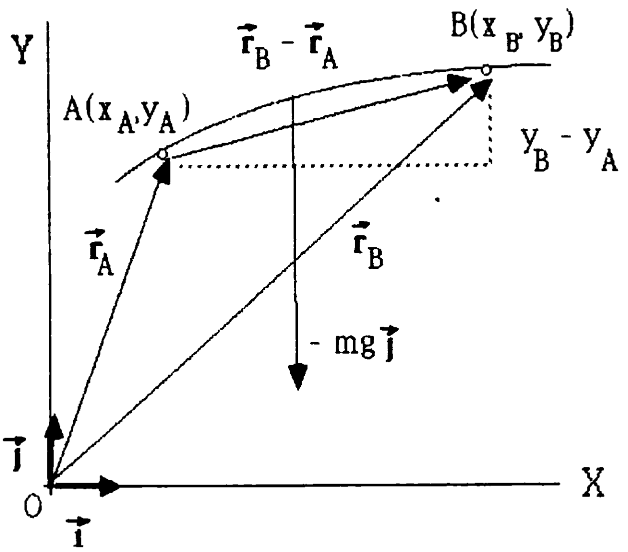
Expresión que es válida sólo para fuerzas conservativas.

4. ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, por tanto tiene sentido hablar de energía potencial gravitatoria.

Teniendo en cuenta el esquema de la figura siguiente, vamos a calcular el trabajo para pasar una partícula de masa m desde el punto A al punto B, teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria que actúa sobre la partícula será:

$$\vec{F} = -\,mg\,\vec{j}$$



Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} W_{AB} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \\ \vec{F} = -\,mg\,\vec{j} \\ \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \end{array}\right\}$$

De donde, el trabajo de las fuerzas gravitatorias para pasar a la partícula del punto A al punto B es:

$$W_{AB} = U_A - U_B = -\,mg(y_B - y_A) = -\,mg\Delta y$$

Es decir, la variación de la energía potencial gravitartoria al pasar del punto A al punto B se escribe:

$$\Delta U = -\,mg\,\Delta y$$

que no depende del camino seguido, sino sólo de la diferencia de alturas entre los puntos A y B, Δy.

La energía potencial debida a la gravedad puede escribirse:

$$U = mgy$$

aunque siempre hay una constante arbitraria, pues, por ejemplo, si escribimos $mgy + C$ en la ecuación de ΔU, el resultado es el mismo $-mg\Delta y$. Gracias a esta arbitrariedad podemos definir el nivel de referencia o cero de energía potencial donde nos convenga mejor.

5. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

5.1.- PARTICULA SOMETIDA A FUERZAS CONSERVATIVAS

Consideremos un cuerpo de masa m sometido a un campo de fuerzas conservativas, $\vec{\mathbf{F}}$, y supongamos que se traslada de un punto A hacia un punto B debido a la acción de este campo. Entonces, el trabajo realizado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ viene dado por la integral:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}.\mathbf{dr}$$

Por otra parte, por el teorema de las fuerzas vivas sabemos que, para cualquier tipo de fuerza, el trabajo es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo, es decir,

$$W_{AB} = T_B - T_A$$

y como el campo de fuerzas es conservativo, existirá una función escalar U, que es la energía potencial, de modo que $\vec{\mathbf{F}} = -\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,U$, con lo que el trabajo también se podrá poner:

$$W_{AB} = U_A - U_B$$

Por tanto, para un campo de fuerzas conservativo se cumplirán las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} W_{AB} = T_B - T_A \\ W_{AB} = U_A - U_B \end{array}\right\} \quad T_B - T_A = U_A - U_B$$

Es decir, podremos escribir:

$$U_A + T_A = U_B + T_B$$

Para el caso de fuerzas conservativas se define la <u>energía mecánica</u> de una partícula, E, como la suma de su energía cinética y su energía potencial:

$$\boxed{E = T + U}$$

Teniendo en cuenta esta definición podremos escribir:

$$\boxed{E_A = E_B = \text{constante}}$$

o bien $\Delta E = 0$.

<u>Teorema de conservación de la energía</u>

"Para un cuerpo sometido únicamente a campos de fuerzas conservativos, la suma de su energía cinética más su energía potencial es constante".

5.2.- PARTICULA SOMETIDA A FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Consideremos una partícula sometida a fuerzas conservativas, $\vec{F}_c$, y fuerzas no conservativas, $\vec{F}_{nc}$. En estas últimas el trabajo realizado por ellas depende de la trayectoria seguida por el cuerpo.

La variación del trabajo total sobre la partícula en un desplazamiento $d\vec{r}$, será la variación de su energía cinética:

$$dW_{neto} = \vec{F}_c . d\vec{r} + \vec{F}_{nc} . d\vec{r} = dT$$

Para las fuerzas conservativas podremos escribir:

$$\vec{F}_c . d\vec{r} = - dU$$

siendo U la energía potencial del campo de fuerzas conservativo. Entonces podremos escribir:

$$dW_{neto} = - dU + \vec{F}_{nc} . d\vec{r} = dT$$

es decir:

$$\vec{F}_{nc} . d\vec{r} = dT + dU = d(T + U)$$

y como T + U es la energía mecánica E, queda:

$$\vec{F}_{nc} . d\vec{r} = dE$$

Integrando esta ecuación entre un punto inicial A y otro final B:

$$\int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dE = E_B - E_A$$

es decir:

$$E_A = E_B - \int_A^B \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r}$$

Y si llamamos W' al trabajo realizado por el cuerpo para vencer las fuerzas no conservativas ($W_{nc} = -W'$ será el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas):

$$W_{nc} = -W' = \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$$

nos queda:

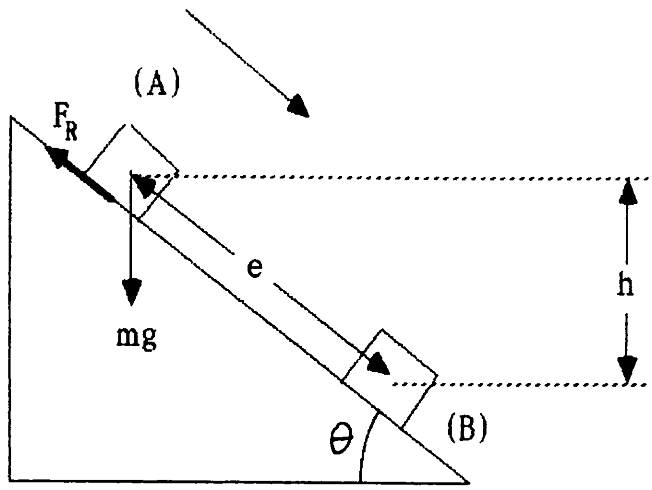
$$\Delta E = E_A - E_B = W_{nc}$$

Con lo que la ley de conservación de la energía puede extenderse a sistemas no conservativos diciendo:

"La variación de la energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas".

Considerando como sistema aislado la partícula y los campos de fuerza conservativo y no conservativo. También podemos decir que en un sistema en el que no actúan fuerzas exteriores la energía permanece constante.

<u>Ejemplo</u>: Estudiemos un cuerpo que cae desde el reposo por un plano inclinado, cuando existe rozamiento entre el cuerpo y el plano.



$e \operatorname{sen} \theta = h$

PUNTO INICIAL: (A) $T_A = 0$, $U_A = mgh$

PUNTO FINAL: (B) $T_B = mv^2/2$, $U_B = 0$

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = - \int_A^B F_R \, dr = - F_R e$$

Se cumplirá:

$$T_A + U_A = T_B + U_B - \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_{nc} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

$$mgh = mv^2/2 + F_R e$$

E.P. inicial = E.C. final + Trabajo utilizado en vencer las fuerzas de rozamiento

Por otra parte:

$$F_R = \mu N = \mu\ mg \cos\theta$$

de donde:

$$mgh = mv^2/2 + \mu\ mg \cos\theta\ e$$

$$ge \operatorname{sen}\theta = v^2/2 + \mu\ g \cos\theta\ e$$

Además, de las relaciones cinemáticas:

$$\left.\begin{array}{l} v = at \\ e = at^2/2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} t = v/a \\ e = v^2/2a \end{array}$$

luego:

$$v^2 = 2ae$$

y nos queda:

$$ge \operatorname{sen}\theta = 2ae/2 + \mu\ g \cos\theta\ e$$

$$g \operatorname{sen}\theta = a + \mu\ g \cos\theta$$

es decir, la aceleración con la que baja el bloque es:

$$a = g(\operatorname{sen}\theta - \mu\ g \cos\theta)$$

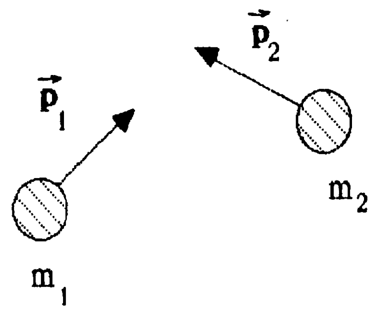
6. CHOQUES

Los choques son procesos de interacción entre partículas. Podemos considerar varios tipos de choques:

6.1.- CHOQUES TOTALMENTE ELASTICOS

Se conservan el momento lineal y la energía cinética.

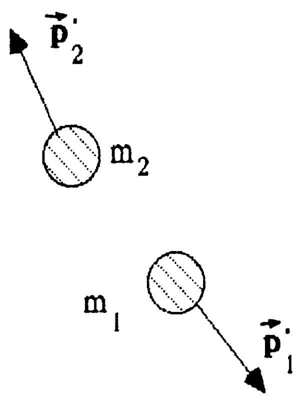
ANTES DEL CHOQUE:



$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 \qquad T_1 = m_1 v_1^2/2$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 \qquad T_2 = m_2 v_2^2/2$$

DESPUES DEL CHOQUE:



$$\vec{p}'_1 = m_1\vec{v}'_1 \qquad T'_1 = m_1 v'^2_1/2$$

$$\vec{p}'_2 = m_2\vec{v}'_2 \qquad T'_2 = m_2 v'^2_2/2$$

Entonces, al ser un choque totalmente elástico:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \\ T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2 \end{array}\right\}$$

es decir:

$$\vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = -(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2)$$

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

De las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \\ m_1\vec{v}_1^{\,2}/2 + m_2\vec{v}_2^{\,2}/2 = m_1\vec{v}'^2_1/2 + m_2\vec{v}'^2_2/2 \end{array}\right\}$$

tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) \\ m_1(\vec{v}_1^{\,2} - \vec{v}'^2_1) = -m_2(\vec{v}_2^{\,2} - \vec{v}'^2_2) \end{array}\right\}$$

Pero, la última ecuación la podemos poner:

$$\underbrace{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)}_{-m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2)}(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2)(\vec{v}_2 + \vec{v}'_2)$$

Por tanto:

$$-m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2)(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2)(\vec{v}_2 + \vec{v}'_2)$$

de donde:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'_2$$

y finalmente:

$$\boxed{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2)}$$

"La velocidad relativa antes del choque es igual a la velocidad relativa después del choque, salvo signo".

Las velocidades relativas, antes y después del choque, son iguales en módulo y dirección, y tienen sentido contrario.

El grado en el cual dos cuerpos que chocan se comportan como si el choque fuera perfectamente elástico se expresa por su "coeficiente de restitución", k, definido mediante:

$$k(\vec{v}_1 - v_2) = -(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2)$$

se verifica que: $0 \leq k \leq 1$

Si $k = 1$: Choque perfectamente elástico

Si $k = 0$: Choque perfectamente inelástico

Si $0 < k < 1$: Choque real (no perfectamente elástico y no perfectamente inelástico).

En algunos textos se define el coeficiente de restitución como:

$$k(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).\vec{n} = -(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2).\vec{n}$$

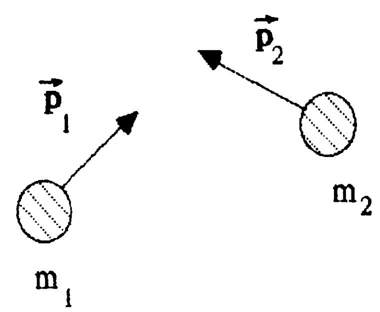
siendo $\vec{n}$ el vector unitario normal al plano de contacto de las partículas durante el choque.

NOTA COMPLEMENTARIA

6.2.- CHOQUES TOTALMENTE INELASTICOS

Se conserva el momento lineal pero no la energía cinética. Los cuerpos que chocan permanecen unidos después del choque.

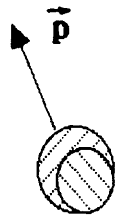
ANTES DEL CHOQUE:



$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$$

DESPUES DEL CHOQUE:



$$M = m_1 + m_2$$

$$\vec{p} = M\,\vec{v}$$

Entonces, al ser un choque totalmente inelástico:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$$

que se escribe:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m\,\vec{v}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}$$

es decir, la velocidad del sistema, $\vec{v}$, después del choque será:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

El coeficiente de restitución es nulo (k = 0).

Además, hay una pérdida de energía cinética, pues la energía cinética antes del choque es mayor que la energía cinética después del choque, transformándose su diferencia en energía de deformación y calor.

La pérdida de energía cinética es:

$$\Delta T = T_{antes} - T_{después} = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2/2$$

donde μ es la masa reducida del sistema de las dos partículas:

$$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$$

6.3.- CHOQUES NO PERFECTAMENTE ELASTICOS

Las ecuaciones que hay que utilizar para resolver un choque no perfectamente elástico son la de la conservación del momento lineal y la del coeficiente de restitución, teniendo en cuenta que $0 < k < 1$:

$$\left.\begin{array}{c} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \\ k(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2) \end{array}\right\}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$. Despejando $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ queda:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \frac{m_1 - k\,m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_1 + \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2}\,\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 &= \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\,\vec{v}_1 + \frac{m_2 - k\,m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v}_2\end{aligned}\right\}$$

Expresiones en las que los choques perfectamente elásticos y perfectamente inelásticos son casos particulares, sin más que hacer $k = 1$ y $k = 0$, respectivamente.

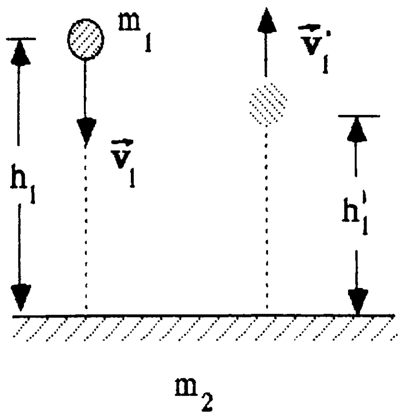
En el caso particular en que uno de los dos cuerpos es mucho más masivo que el otro, por ejemplo $m_2 \gg m_1$, las velocidades después del choque parcialmente elástico son:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}'_1 &\cong -k\vec{v}_1 + (1+k)\,\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 &\cong \vec{v}_2\end{aligned}\right\}$$

y si el cuerpo de gran masa m_2 está quieto:

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}'_1 &\cong -k\vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 &\cong \vec{v}_2 = 0\end{aligned}\right\}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular la nueva altura h'_1 si el coeficiente de restitución entre el suelo y la bola vale k:



El suelo es mucho más masivo que la bola y además el suelo permanece quieto.

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$\vec{v}'_1 = -k\vec{v}_1$$

En módulo: $\quad v'_1 = k\,v_1 = k\sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gh'_1}$

Entonces: $\quad k\sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gh'_1}$

Luego, la altura a la que sube la bola después del choque es:

$$\boxed{h'_1 = k^2\,h_1}$$

BIBLIOGRAFIA

- FISICA, Vol. I: MECANICA, M. Alonso & E. Finn. Fondo Educativo Interamericano. Madrid, 1979.

- CERCA DE LA FISICA, F. M. Alonso. Ed. Alhambra. Madrid, 1977.

- CURSO DE FISICA APLICADA: ELECTROMAGNETISMO Y SEMICONDUCTORES, J. Llinares, A. Page. Servicio de Publicaciones, Universidad Politécnica de Valencia, 1987.

- FISICA GENERAL, S. Burbano. Librería General, Zaragoza, 1978.

- FISICA, J. Catalá. Ed. Saber, Valencia, 1979.

- FISICA: Tomo I, P.A. Tipler. Ed. Reverté, Barcelona, 1986.