1. CINEMATICA DEL PUNTO MATERIAL

1. CINEMATICA DEL PUNTO MATERIAL

1. INTRODUCCION A LA MECANICA CLASICA

Como preámbulo al estudio de la Cinemática, y con el fin de encuadrarla en el contexto general de la Mecánica Clásica, consideraremos a continuación las características fundamentales así como el objeto y división de esta parte de la Física.

El objeto de la Mecánica Clásica es establecer las relaciones entre los movimientos de los sistemas materiales y las causas que los producen o fuerzas. Las posibilidades de abordar este problema son dos:

(a) Conocido el movimiento del sistema material, obtener las fuerzas que lo provocan.
(b) Conocido el sistema de fuerzas obtener las ecuaciones de movimiento.

En resumen, se puede decir que el objetivo de la Mecánica se ha cumplido cuando en un sistema material sobre el que actúan unas ciertas fuerzas dadas, se conoce la ley que permite dar la posición del sistema en función del tiempo.

Como punto de partida para el estudio de la Mecánica, aceptaremos una serie de premisas que consideraremos inatacables, dentro del dominio de la llamada <u>Mecánica Clásica</u>. Estas premisas son:

(1) El espacio en el que nos movemos es euclídeo. Tomamos una métrica euclídea con una base tridimensional ortonormal.

(2) No consideraremos fenómenos del mundo microfísico (lo que corresponde al dominio cuántico).

(3) Las velocidades que manejamos están muy lejos de la velocidad de la luz (lo que corresponde al dominio relativista).

Además de las tres limitaciones anteriores, dentro de la Mecánica Clásica, se encontrará el problema de la <u>búsqueda de un sistema de referencia absoluto</u> y el <u>problema de los sistemas inerciales</u>, sobre los que se hablará, respectivamente, en la Cinemática y la Dinámica.

Tradicionalmente la Mecánica Clásica consta de tres partes:

- <u>CINEMATICA</u>: Estudia los movimientos sin preocuparse de las causas que los han producido.
- <u>DINAMICA</u>: Estudia el movimiento y sus causas, es decir, las fuerzas.
- <u>ESTATICA</u>: Estudia las fuerzas y el equilibrio de los cuerpos.

2. CINEMATICA DEL PUNTO

Cuando hablamos de Cinemática del punto material nos referimos al estudio del movimiento de un ente abstracto llamado punto material, que es un cuerpo de cierta masa pero de volumen nulo, es decir, toda la masa queda concentrada en un punto, es por decirlo de algún modo, un cuerpo con densidad infinita y volumen cero. Los cuerpos materiales pueden acercarse al concepto de punto material según el problema que consideremos. Cualquier cuerpo puede considerarse como punto material si sus dimensiones son lo suficientemente pequeñas, y esto depende de varios factores, uno muy importante es la escala en la que nos movamos, así las estrellas las podemos considerar como puntos materiales si las observamos desde la Tierra.

También se puede estudiar el movimiento de un sistema de puntos materiales así como el movimiento de un sólido rígido, es decir, un cuerpo en el cual las distancias entre las partículas que lo componen permanecen fijas bajo la aplicación de una fuerza o un par de fuerzas, y conserva su forma durante su movimiento.

Podemos distinguir dos tipos de movimiento: Traslación y Rotación. El movimiento es de traslación cuando todas las partículas del sistema (que puede ser un sólido rígido) describen trayectorias paralelas y, por tanto, verifican iguales desplazamientos. El movimiento es de rotación alrededor de un eje cuando todas las partículas del sistema describen trayectorias circulares alrededor de una línea llamada eje de rotación, que puede ser fijo o variable en dirección.

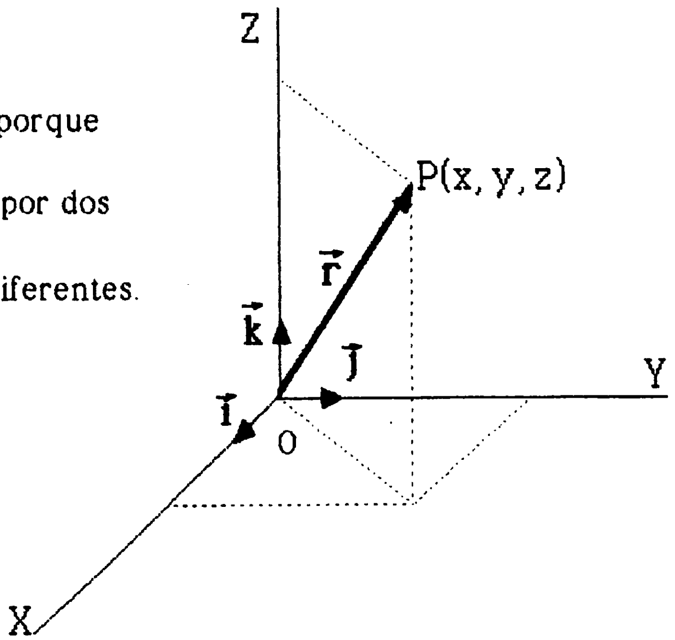
3. MOVIMIENTO Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Como ya se ha indicado la Cinemática estudia el movimiento sin preocuparse de las causas que lo producen.

Decimos que un cuerpo se mueve cuando varía su posición con respecto a otros puntos o sistemas de referencia que se consideran fijos. Normalmente utilizaremos como sistema de referencia un sistema de ejes cartesianos en los que la posición de un punto P, de coordenadas (x, y, z), viene definida por el vector de posición $\vec{r}$ del punto, que es aquél cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y su extremo con el punto:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

El movimiento no tiene porque ser el mismo observado por dos sistemas de referencia diferentes.



Si conocemos el vector $\vec{r}$ en función del tiempo, $\vec{r}(t)$, tendremos la descripción del movimiento. La función vectorial $\vec{r}(t)$ equivale a conocer tres funciones escalares que se conocen como <u>ecuaciones paramétricas del movimiento</u>:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

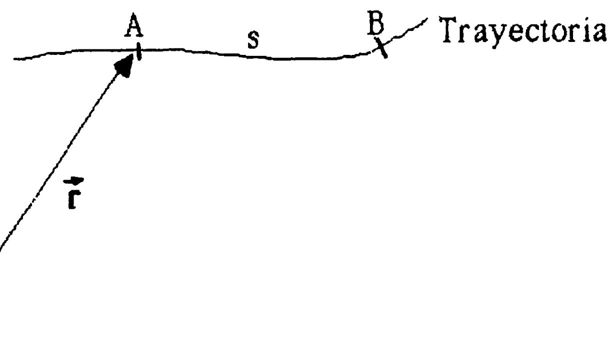
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Cuando el punto P se mueve, el extremo del vector **r** describe una curva que en Cinemática se llama <u>trayectoria</u>.

Si s es el <u>espacio recorrido</u> (longitud de la trayectoria entre dos puntos), es claro que s será función del tiempo y el vector de posición $\vec{r}$ será función de s.

$s = f(t)$

$\vec{r} = g(t)$



La ecuación $s = f(t)$ nos da la <u>ley horaria del movimiento</u> y $\vec{r} = g(t)$ nos da el aspecto geométrico de la trayectoria.

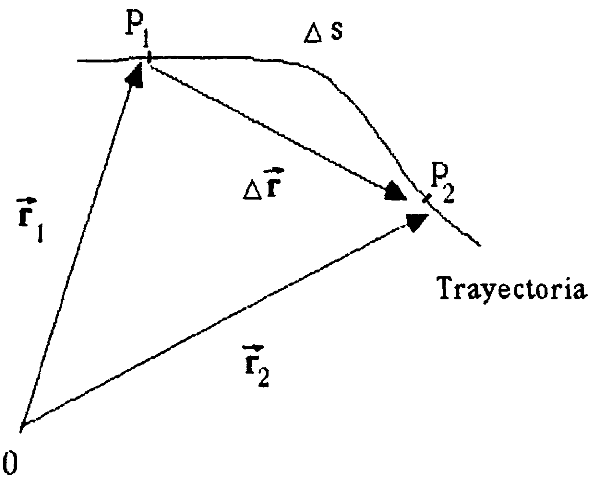
Si el desplazamiento de un móvil se realiza con respecto a un sistema de coordenadas, que a su vez se mueve, su movimiento con respecto a él se llama relativo. Se denomina movimiento absoluto al que dicho móvil tiene respecto del sistema de referencia absoluto (inmóvil). Para obtener un sistema de ejes absolutos, se puede tomar como referencia el sólido estelar. Es decir, para nosotros las estrellas están quietas, aunque sabemos que se mueven, pero este movimiento nos es imperceptible por la pequeña duración de nuestras experiencias. Por tanto, si los ejes elegidos pasan por dichas estrellas, tendremos un sistema que puede considerarse absoluto.

4. VELOCIDAD Y ACELERACION

4.1.- VELOCIDAD MEDIA Y VELOCIDAD INSTANTANEA

Cuando una partícula se desplaza a lo largo de su trayectoria, y en dos puntos, P_1 y P_2, le corresponden dos vectores de posición $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$, respectivamente, en dos instante t_1 y t_2, se llama vector desplazamiento, $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, a la diferencia de los vectores de posición correspondientes a los puntos P_1 y P_2:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



El espacio recorrido, Δs, es la longitud de la trayectoria entre los puntos P_1 y P_2. En general $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$.

Se llama <u>velocidad media</u>, $\vec{v}_m$, de la partícula, al pasar del punto P_1 al P_2, al valor expresado por:

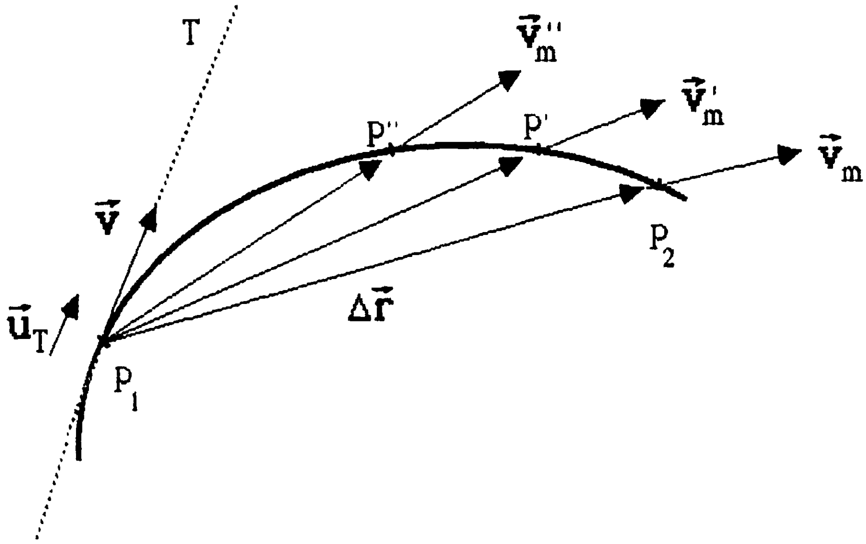
$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La <u>velocidad instantánea</u>, $\vec{v}$, viene dada por:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

La velocidad media $\vec{v}_m$ está representada por un vector paralelo al desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2} = \Delta\vec{r}$. Para calcular la velocidad instantánea debemos hacer Δt muy pequeño, esto es, $\Delta t \to 0$. Ahora bien, cuando Δt

tiende a cero, el punto P_2 se aproxima al P_1, como lo indican los puntos P', P'', . . . , en la siguiente figura:



Durante este proceso el vector $\Delta\vec{r}$ cambia continuamente en módulo y dirección, y de igual modo la velocidad media. En el límite cuando P_2 está muy cerca de P_1, el vector $\overrightarrow{P_1P_2} = \Delta\vec{r}$ coincide con la dirección de la tangente P_1T. Por tanto, la velocidad instantánea es un vector tangente a la trayectoria.

Introduciendo el parámetro s, espacio recorrido, al vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ le corresponderá una variación en el espacio recorrido Δs = arco P_1P_2. Entonces :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

pues cuando $\Delta t \to 0$ se tiene que $\Delta s \to 0$.

Además, $|\Delta\vec{r}|$ es casi igual a Δs, y conforme el punto P_2 se acerca al P_1, más se aproxima el módulo de $\Delta\vec{r}$ al de Δs. Por lo tanto, el límite de $\Delta\vec{r}/\Delta s$, cuando $\Delta s \to 0$, representa un vector unitario y de dirección tangente a la trayectoria. Esto es:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_T$$

Por otra parte:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Con lo cual el <u>vector velocidad</u> se escribe:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_T = v\,\vec{u}_T$$

donde:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

nos da el valor de la velocidad (módulo de $\vec{v}$), y el vector unitario $\vec{u}_T$ la dirección. v es la longitud del arco de curva recorrido en la unidad de tiempo.

> "El vector velocidad $\vec{v}$ es un vector cuyo origen está en el punto del móvil y su dirección es tangente, en dicho punto, a la trayectoria descrita".

Si expresamos el vector de posición $\vec{r}$ mediante sus componentes, en coordenadas cartesianas, tendremos:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

entonces:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

y llamando:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \;;\quad v_y = \frac{dy}{dt} \;;\quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

nos queda:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

El módulo de $\vec{v}$, será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Podemos utilizar un espacio vectorial de velocidades, donde la velocidad del punto estaría representada por un vector $\vec{v}$. Cuando el tiempo transcurre y varía la velocidad del cuerpo, el extremo del vector $\vec{v}$ describirá una línea en el espacio de velocidades que recibe el nombre de hodógrafa del movimiento.

Las dimensiones de la velocidad son: $[\,v\,] = LT^{-1}$ y su unidad, en el S.I., es el metro/segundo, ms^{-1}.

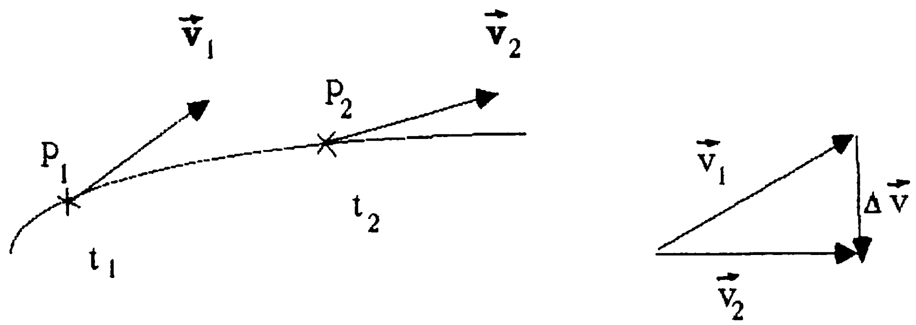
4.2.- ACELERACION MEDIA Y ACELERACION INSTANTANEA

La velocidad de una partícula también puede depender del tiempo.

La magnitud que nos da la variación de la velocidad en el tiempo es la aceleración. La aceleración media viene dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

y es paralela a $\Delta\vec{v}$.



La aceleración instantánea, $\vec{a}$, viene dada por la expresión:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

En coordenadas cartesianas, la velocidad se escribe:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

luego, la aceleración será:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

y llamando a cada componente:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

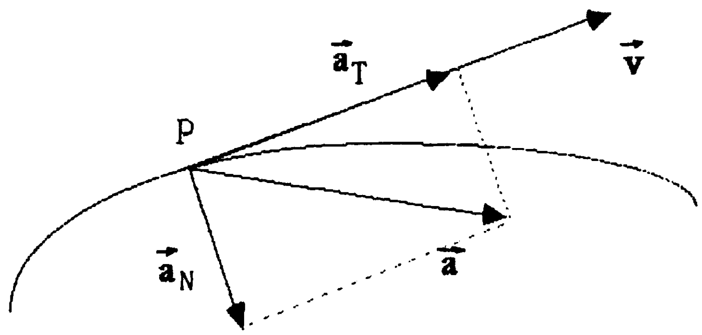
con lo que el <u>módulo de la aceleración</u> lo podemos poner como

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

La aceleración es un vector que tiene la misma dirección que el cambio instantáneo en la velocidad. Como la velocidad cambia en la dirección en la cual la trayectoria se curva, la aceleración está siempre apuntando hacia la concavidad de la curva, y en general no es tangente ni perpendicular a la trayectoria.

5. COMPONENTES INTRINSECAS DE LA ACELERACION

Consideremos una particula que describe una cierta trayectoria curva. En un instante t el punto móvil se encuentra en P con una velocidad $\vec{v}$ y una aceleración $\vec{a}$.



La aceleración $\vec{a}$ puede descomponerse en dos vectores, uno normal, $\vec{a}_N$, denominado aceleración normal o centrípeta, y otro tangencial, $\vec{a}_T$, que recibe el nombre de aceleración tangencial. Estos son responsables de:

Cambio en módulo de la velocidad:	$\vec{a}_T$
Cambio en dirección de la velocidad:	$\vec{a}_N$

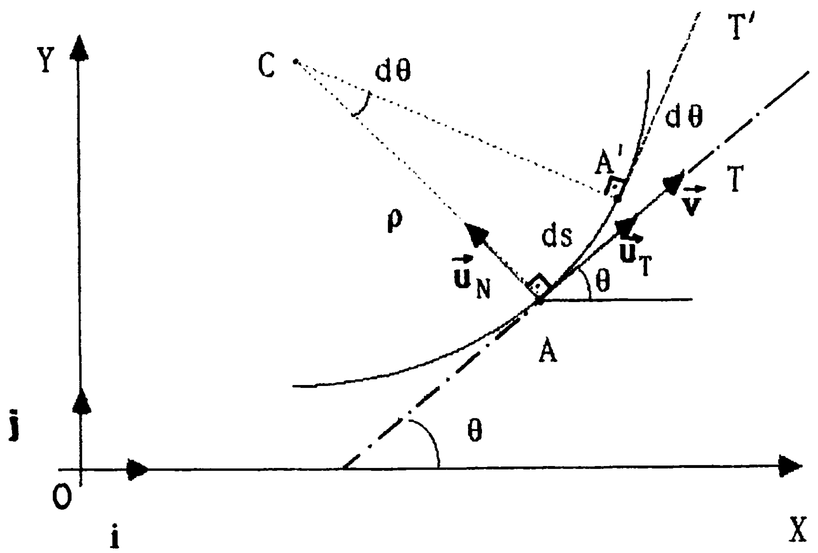
Para obtener las expresiones de $\vec{a}_T$ y $\vec{a}_N$, partimos de la expresión de la velocidad en términos del vector unitario tangente, $\vec{v} = v\,\vec{u}_T$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Si la trayectoria fuera recta sería $d\vec{u}_T/dt = 0$, pero cuando la trayectoria es curva, la dirección de $\vec{u}_T$ varía a lo largo de la curva. Por otra parte, $\vec{u}_T$ es un vector de módulo constante, luego será perpendicular a su vector derivada. Introduciendo un vector unitario $\vec{u}_N$, normal a la curva en cada punto y dirigido hacia el lado cóncavo tendremos que:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = k\vec{u}_N$$

donde k es un escalar que vamos a determinar.



Si θ es el ángulo que forma la tangente a la curva, T, en el punto A, tendremos que:

$$\vec{u}_T = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\vec{u}_N = \vec{i}\cos(\theta + 90°) + \vec{j}\,\text{sen}(\theta + 90°) =$$

$$= -\vec{i}\,\text{sen}\,\theta + \vec{j}\cos\theta$$

Entonces:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = -\vec{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} + \vec{j}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_N\,\frac{d\theta}{dt}$$

que indica que $d\vec{u}_T/dt$ es normal a la curva, y el escalar k vale $d\theta/dt$.

Ahora bien:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\frac{d\theta}{ds}$$

pero $ds = AA'$ es el pequeño arco a lo largo del cual se mueve la partícula en el tiempo dt. Las normales a la curva en A y A' se intersectan en C, llamado <u>centro de curvatura</u>. Llamando $\rho = CA$ al <u>radio de curvatura</u> queda:

$$ds = \rho\,d\theta$$

luego:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Con lo cual:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_N}$$

y llamando:

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

tenemos:

$$\vec{a} = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N$$

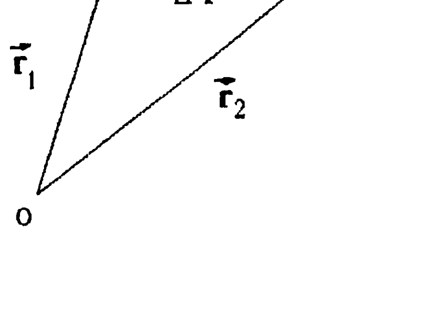
a_T y a_N reciben el nombre de componentes intrínsecas de la aceleración. Se cumple que el módulo de la aceleración vale:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Para un movimiento curvilíneo uniforme (v=cte), se tiene $a_T = 0$, y si el movimiento es rectilíneo, entonces ρ es infinito, con lo que $a_N = 0$. Es importante señalar que los resultados obtenidos son válidos tanto para movimientos en un plano como para movimientos en el espacio.

6. MOVIMIENTOS RECTILINEOS

Los movimientos rectilíneos o unidimensionales se caracterizan porque la trayectoria es una línea recta, con lo cual:



$$|\Delta\vec{r}| = \Delta s$$

Es decir, el espacio recorrido coincide con el módulo del vector desplazamiento.

Lo usual es hacer coincidir la recta en que tiene lugar el movimiento con el eje X, con lo cual:

$$s = x$$

$$v = v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$a = a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

6.1.- MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME

Es el movimiento con velocidad constante v. Por tanto, y dado que:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

la aceleración es nula

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{v} = \text{cte} \\ \mathbf{a} = 0 \end{array}\right\}$$

Así pues:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$dx = v \cdot dt$$

integrando

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = v \int_{t_0}^{t} dt$$

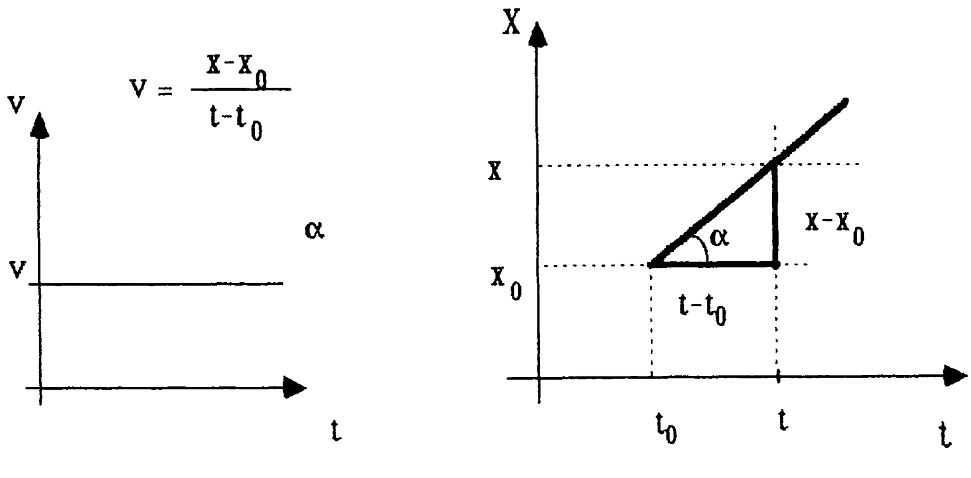
$$x - x_0 = v\,(t - t_0) \qquad (\ s = s_0 + vt\ )$$

que nos da el espacio recorrido en función del tiempo.

En el caso en que t_0 no es 0,

$$x - x_0 = v\,(t - t_0)$$

$$x = x_0 + v\,t - v\,t_0$$



6.2.- MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Es un movimiento cuya trayectoria es recta y su aceleración $\vec{a}$ es constante en módulo, dirección y sentido. Como:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

de donde se obtiene:

$$dv = a \cdot dt \qquad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt = a \int_{t_0}^{t} dt$$

ya que **a** es constante. Entonces:

$$v - v_0 = a\,(t - t_0)$$

y si $t_0 = 0$,

$$v = v_0 + at$$

Para el espacio recorrido

$$v = \frac{dx}{dt}$$

luego:

$$dx = v \cdot dt = (v_0 + at\,)\,dt$$

Integrando:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (v + at)\, dt$$

tomando $t_0 = 0$:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

es decir,

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Despejando t en las ecuaciones:

$$v = v_0 + a t \longrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

y sustituyendo este valor de t en la expresión

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

queda:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2 a}$$

es decir:

$$v^2 - v_0^2 = 2 a(x - x_0)$$

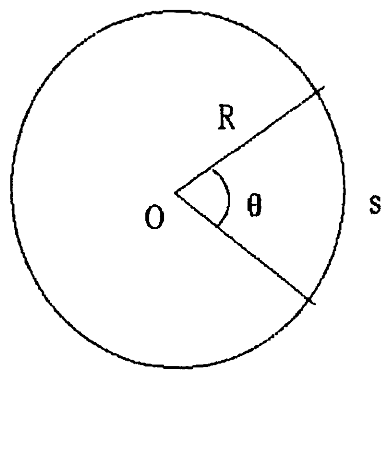
que nos da la velocidad correspondiente a cualquier valor del espacio recorrido.

En el caso particular $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$:

$$v^2 = 2ax \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2ax}$$

7. MOVIMIENTOS CIRCULARES. VELOCIDAD Y ACELERACION ANGULAR

Un movimiento circular es un movimiento plano cuya trayectoria es una circunferencia. El espacio recorrido, s, puede ponerse en función del ángulo θ mediante la relación:



$$\theta = \frac{s}{R}$$

donde R es el radio de la circunferencia que es una constante. Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

$d\theta/dt$ recibe el nombre de velocidad angular, w, por tanto:

$$w = \frac{v}{R}$$

Podemos definir una velocidad angular media, w_m:

$$w_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

y una velocidad angular instantánea:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

La relación que existe entre la velocidad lineal, v, y la velocidad angular, w, es:

$$v = w.R$$

7.1.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Es un movimiento circular caracterizado porque la velocidad angular es constante:

$$w = cte.$$

entonces:

$$w = \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow d\theta = w.dt$$

Integrando:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} w.\,dt$$

$$\theta - \theta_0 = w\,(t - t_0)$$

y si $t_0 = 0$:

$$\theta = \theta_0 + w\,t$$

De la relación entre la velocidad angular, w, y la velocidad lineal,v, v = wR, tendremos que la aceleración tangencial, en un movimiento circular uniforme, es nula, mientras que la aceleración normal o centrípeta es distinta de cero:

$$\left.\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(w\,R) = 0 \\ a_N &= \frac{v^2}{R} = w^2 R \end{aligned}\right\}$$

Por lo que la aceleración se escribe:

$$\vec{\mathbf{a}} = R\,w^2\,\vec{\mathbf{u}}_N$$

7.2.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO

Se llama aceleración angular a la variación de la velocidad angular respecto al tiempo:

$$\alpha = \frac{d\,w}{d\,t}$$

Para un movimiento circular uniformemente acelerado se tiene que la aceleración angular es constante:

$$\alpha = \text{cte.}$$

De la definición de aceleración angular:

$$d\,w = \alpha \cdot d\,t \longrightarrow \int_{w_0}^{w} d\,w = \int_{t_0}^{t} \alpha \cdot d\,t$$

Para $t_0 = 0$:

$$w = w_0 + \alpha\, t$$

Como:

$$w = \frac{d\,\theta}{d\,t}$$

$$d\,\theta = w.\ d\,t = (w_0 + \alpha\, t)\cdot dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\,\theta = \int_{t_0}^{t} (w_0 + \alpha\, t)\cdot d\,t$$

Con lo cual:

$$\boxed{\theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

Además, tanto la aceleración tangencial como la aceleración normal son distintas de cero, ya que, en este caso:

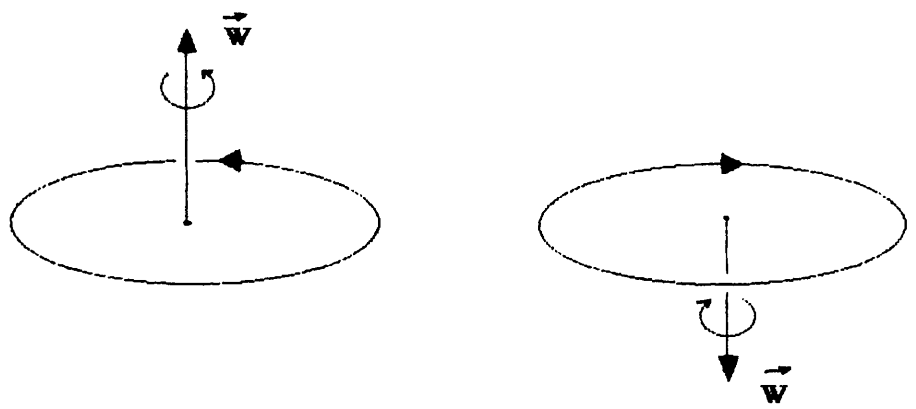
$$a_T = \frac{d v}{d t} = \frac{d}{d t} (w \cdot R) = \frac{d w}{d t} R = \alpha \cdot R$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = w^2 R$$

Entonces: $\vec{a} = R\,(\alpha\, \vec{u}_T + w^2\, \vec{u}_N)$

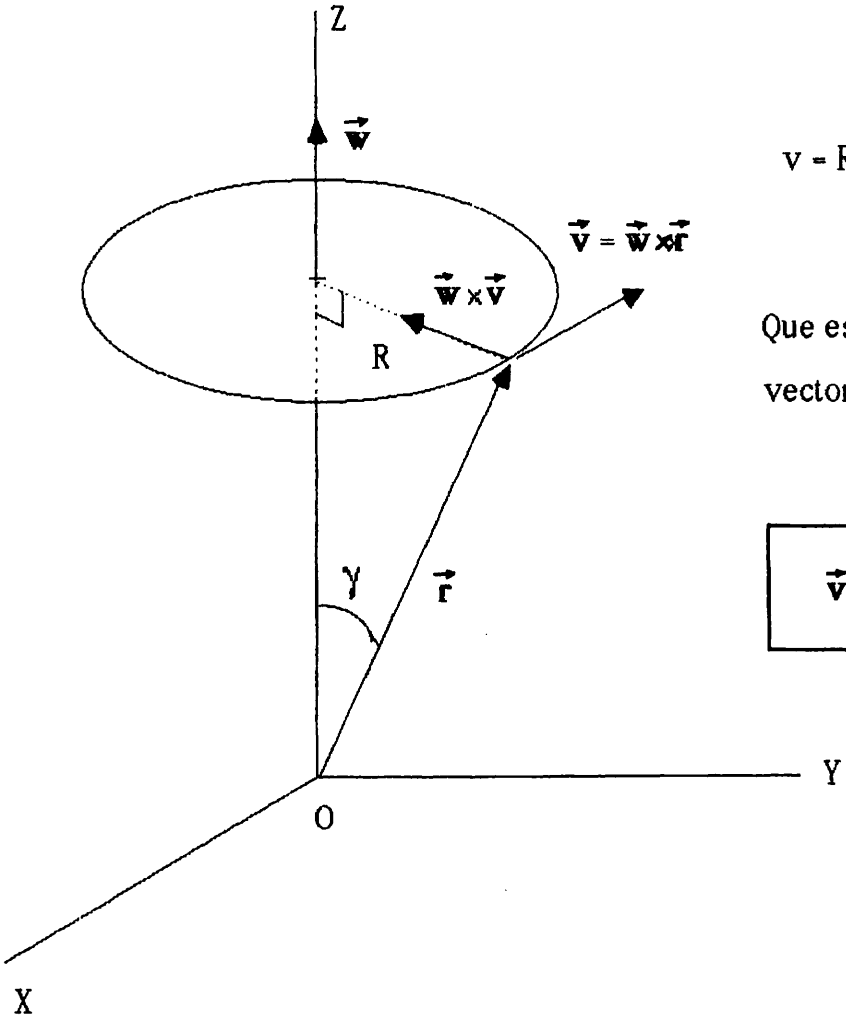
7.3.- CARACTER VECTORIAL DE w Y α

Se puede dar a la velocidad angular un carácter vectorial tal y como se ve en la siguiente figura:



La aceleración angular también tendrá carácter vectorial, con la misma dirección que el vector $\vec{w}$, pero su sentido puede ser el mismo o el contrario.

En un movimiento circular $\vec{w}$ será perpendicular a la trayectoria. De la figura, si el origen de coordenadas no coincide con el centro de la circunferencia:



$$v = R\,w = r\,w\,\text{sen}\,\gamma$$

Que es un producto vectorial:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}}$$

Derivando respecto al tiempo en $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

es decir,

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{w} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \\ \vec{a}_N = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \end{array}\right\}$$

8. COMPOSICION DE MOVIMIENTOS. PRINCIPIO DE GALILEO DE LA INDEPENDENCIA DE MOVIMIENTOS

Cuando un cuerpo se halla sometido a dos movimientos simultáneos e independientes realiza un movimiento, llamado compuesto, que resulta de la combinación de aquéllos. Esta composición se lleva a cabo considerando que en cada instante el vector de posición que determina el movimiento resultante es suma vectorial de los vectores de posición de los dos movimientos componentes.

Esta regla de composición está basada en el Principio de Galileo o de la independencia de los movimientos, que dice así:

"Cuando un punto está dotado, por dos causas distintas, de dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es independiente de que los dos movimientos actúen sucesiva o simultáneamente".

Multitud de hechos, de todos conocidos, confirman la realidad de este principio; así, por ejemplo, un avión en vuelo se mueve respecto al aire, pero su movimiento respecto a la Tierra se obtiene componiendo el movimiento del avión con el del propio aire, que debe tenerse en cuenta al fijar el rumbo.

De lo dicho anteriormente resulta que si $\vec{r}$ es el vector de posición del movimiento resultante y $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, los de cada uno de los movimientos independientes, se tiene:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

y derivando respecto al tiempo, teniendo en cuenta que $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, queda:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

> "La velocidad en un movimiento compuesto es, en cada instante, la suma vectorial de las velocidades de los movimientos componentes".

8.1.- <u>TIRO PARABOLICO</u>

Se trata de un movimiento en el que el vector aceleración es constante en módulo y dirección.

Consideremos el <u>movimiento de un proyectil</u>. En este caso la aceleración es:

$$\vec{a} = -g\,\vec{j}$$

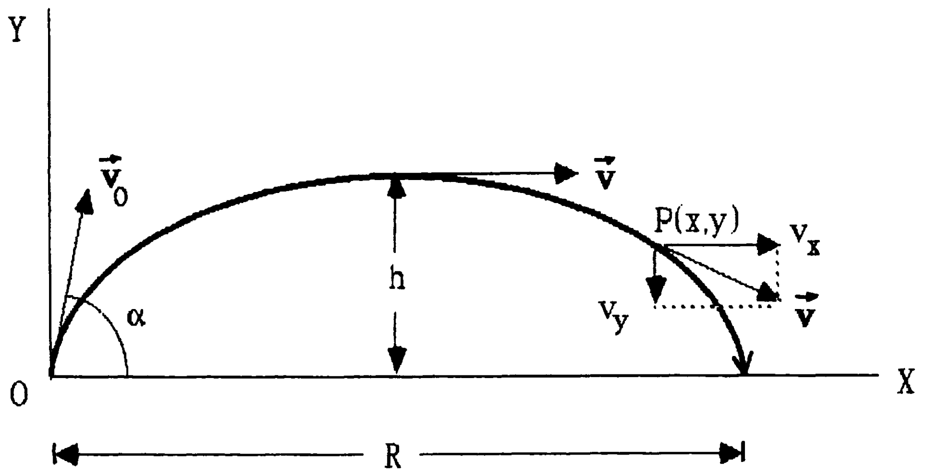
siendo g la aceleración de la gravedad. Escogemos el plano XY coincidente con el plano definido por la velocidad inicial del proyectil, $\vec{v}_0$, y la aceleración $\vec{a} = -g\,\vec{j}$; el eje Y hacia arriba y el origen O coincidente con el punto desde donde se lanza el proyectil. Si el proyectil se dispara con un ángulo de inclinación α, entonces la <u>velocidad inicial</u> se escribirá:

$$\vec{v}_0 = v_{0X}\,\vec{i} + v_{0Y}\,\vec{j}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} v_{0X} &= v_0 \cos\alpha \\ v_{0Y} &= v_0 \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}\right\}$$

Supondremos que no existe oposición del aire al movimiento del proyectil.



En el eje X tenemos un movimiento uniforme y en el eje Y un movimiento uniformemente acelerado, por tanto, de acuerdo con el Principio de Galileo de la independencia de movimientos:

$$\left.\begin{aligned} v_X &= v_{0X} = v_0 \cos\alpha \\ v_Y &= v_{0Y} - g\,t = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt \end{aligned}\right\}$$

Tomando el origen de tiempos en $t_0 = 0$, e integrando respecto al tiempo obtendremos las coordenadas de la partícula en cada instante:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0\, t \cos\alpha \\ y &= v_0\, t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned}\right\}$$

El tiempo necesario para que el proyectil alcance la máxima altura, h, se encuentra haciendo $v_y = 0$, ya que en ese punto la velocidad es horizontal. Luego:

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\,t\,, \qquad t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

La altura máxima h se obtiene sustituyendo este valor de t en la ecuación de y(t), dando como resultado:

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,g}}$$

El tiempo necesario para que el proyectil vuelva a tocar el suelo, denominado tiempo de vuelo, puede obtenerse haciendo y = 0 en la ecuación de y(t):

$$\boxed{t_v = \frac{2\, v_0 \,\text{sen}\,\alpha}{g}}$$

El alcance R es la distancia horizontal cubierta, y se obtiene sustituyendo el valor del tiempo de vuelo en la ecuación de x(t) y poniendo x = R, resultando:

$$R = v_{0x} \frac{2\, v_0 \,\text{sen}\,\alpha}{g} = \frac{2\, v_0^2 \,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha}{g}$$

o bien:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \,\text{sen}\, 2\alpha}{g}}$$

Puede verse que el alcance es máximo para un ángulo de lanzamiento $\alpha = 45°$.

La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando el tiempo t entre las dos ecuaciones x(t) e y(t), obteniéndose:

$$\boxed{y = -\frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + x \cdot \text{tg}\,\alpha}$$

que es la ecuación de una parábola.

Los resultados que hemos obtenido son válidos cuando:

- El alcance es suficientemente pequeño para despreciar la curvatura de la Tierra.

- Cuando la altura es suficientemente pequeña como para despreciar la variación de la gravedad con la altura.

- Cuando la velocidad inicial del proyectil es suficientemente pequeña para despreciar la resistencia del aire.

BIBLIOGRAFIA

- FISICA, Vol. I: MECANICA, M. Alonso & E. Finn. Fondo Educativo Interamericano. Madrid, 1979.

- CERCA DE LA FISICA, F. M. Alonso. Ed. Alhambra. Madrid, 1977.

- CURSO DE FISICA APLICADA: ELECTROMAGNETISMO Y SEMICONDUCTORES, J. Llinares, A. Page. Servicio de Publicaciones, Universidad Politécnica de Valencia, 1987.

- FISICA GENERAL, S. Burbano. Librería General, Zaragoza, 1978.

- FISICA, J. Catalá. Ed. Saber, Valencia, 1979.

- FISICA: Tomo I, P.A. Tipler. Ed. Reverté, Barcelona, 1986.