Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Aprendizaje de los estudiantes para maestro sobre trayectorias de aprendizaje de las fracciones

Pedro José Ivars Santacreu

Tesis Doctorales
UNIVERSIDAD de ALICANTE

Unitat de Digitalització UA
Unidad de Digitalización UA

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO SOBRE TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

TESIS DOCTORAL

PEDRO JOSÉ IVARS SANTACREU

ALICANTE, JULIO 2018

APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO SOBRE TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

PEDRO JOSÉ IVARS SANTACREU

Tesis presentada para aspirar al grado de

DOCTOR POR LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE
MENCIÓN DE DOCTOR INTERNACIONAL

DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Dirigida por:
DRA. CENEIDA FERNÁNDEZ VERDÚ
Y
DR. SALVADOR LLINARES CISCAR

Financiación:
Esta investigación ha sido respaldada por el Programa Estatal de Promoción del Talento y su Empleabilidad. Subprograma de Formación de Profesorado Universitario. Referencia FPU14/07107

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría expresar mi gratitud a los directores de este trabajo, Dr. Salvador Llinares y Dra. Ceneida Fernández, por la confianza depositada en mí y en este proyecto, el tiempo dedicado, la paciencia infinita, y, sobre todo, por la pasión contagiada. Gracias por poner luz donde en muchas ocasiones solo había sombras.

A mi familia profesional, el grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Alicante que con sus aportaciones han enriquecido y facilitado mi labor como investigador y me han permitido crecer como persona. Especialmente la Dra. Julia Valls, a la que tanto tiempo libre he robado, por su colaboración en los detalles para dar formato a este trabajo y a la Dra. Àngela Buforn, mi hermana *mayor*, que ha pasado por todas las etapas antes que yo allanándome el camino en tantas ocasiones.

Al grupo de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva y al Mathematics and Mathematics Education del National Institute of Education de Singapur por acogerme durante mis estancias pre-doctorales e integrarme en su dinámica de trabajo. Especialmente al Dr. José Carrillo por las reuniones y aportaciones realizadas durante este periodo, y por hacerme sentir en Huelva como en casa. También estaré siempre agradecido al Dr. Bang Heng Choy por sus ideas, y por las contribuciones científicas que surgieron de ellas, durante los tres meses que compartimos en el NIE. Además, a los Drs. Boon Liang Chua y Alfredo Bautista por sus aportaciones desinteresadas a este proyecto, por hacer que todo fuera tan fácil en un país tan lejano y por mostrarme Singapur desde diferentes perspectivas. No puedo obviar al Dr. Teodoro Crespo, porque por él empezó todo.

A la familia que he elegido, gracias por configurar mi personalidad durante todo este tiempo aportando detalles tan esenciales, que son invisibles para los ojos. Especialmente a Teresa por nombrarme su amarillo, a Louis Lew por no dejar que me perdiera en Asia, a Félix por alimentar mi cuerpo y mi alma, a Iván, Jorge, Vicent, Álvaro y Juan Andrés por no dejar nunca de creer en mis posibilidades, y a Juan y Núria por su apoyo incondicional y por no pedir explicaciones nunca.

A mi familia Santacreu con la que me he criado y educado, la que nunca ha dejado de creer en mí, independientemente de mis actos y mi posición. Especialmente a mis progenitores Pere *Poller* y Magdalena *la Dolça,* que lo sacrificaron todo para que no me faltara nada, y a mi hermana Mari Francis que sigue dándome lecciones. Gracias por vuestro apoyo, comprensión y paciencia ilimitada. No podría imaginar una familia mejor.

A Joan Bevià, Júlia Pascual, Vicent Cabrera, Ivan Avilés, Julen Cabrera, Pere Martínez, Júlia y Francesca Vila gracias por recordarme siempre que, antes de ser mayor, también fui un niño.

A mon pare
allà on estiga

ÍNDICE

INTRODUCTION

> "*In times of change learners inherit the earth; while the learned find themselves beautifully equipped to deal with a world that no longer exists*"
>
> Eric Hoffer

INTRODUCTION

Over the last decades, the paradigm of how to teach mathematics in schools has been changed (NCTM, 2000; 2014). This perspective considers that effective teaching is needed to engage students in meaningful learning that promote their ability to make sense of mathematical ideas and reason mathematically. Teaching effectively implies that a teacher "elicit evidence of students' current mathematical understanding and us it as the basis for making instructional decisions'' (NCTM, 2014, p. 53). Thus, a change in the way that teachers deal with interactions in the classroom is needed by "finding the mathematics in students' comments and actions, considering what students appear to know in light of intended learning goals and progressions and determining how to give the best response and support to students on the basis of their current understanding" (NCTM, 2014, p.56).

In this context, the competence of professional noticing has been identified as a component of mathematics teachers' professional practice (Mason, 1998, 2002) since it is a way to provide effective responses in the classroom, making instructional decisions and being able to adapt them to a situation that arises in the middle of the instruction and cannot be pre-planned. Since teacher's knowledge and the use of this knowledge are dependent constructs, the meaning of this teaching competence (professional noticing) is linked to how teachers use their knowledge of mathematics when performing different professional tasks such as: (i) selecting and designing tasks, (ii) analysing and interpreting students' mathematical thinking and (iii) initiating and guiding mathematical discourse during class interactions (Llinares, 2013).

Characterising this teaching competence (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Mason, 1998, 2002; van Es & Sherin, 2002) and designing contexts for its development are relevant themes in Mathematics Education over the last decades (Stahnke, Schueler, & Roesken-Winter, 2016). Jacobs et al. (2010) particularise an aspect of this competence, professionally noticing students' mathematical thinking, as three interrelated skills: attending to the mathematical details in children's strategies, interpreting children's mathematical understanding taking into account the details identified and the research on children's mathematical development, and deciding how to respond on the basis of children's understanding**.** This conceptualisation of noticing highlights the relevance of the interpretation as a tool to guide the understanding of how teachers use their knowledge in their professional practices (Llinares, 2013).

A commonly assumption of previous research conducted is that this teacher competence is a component of teacher expertise and that it is been developed over time and within professional development. Nevertheless, research shows that it could be developed in teacher education programs using some specific contexts and tools such as: video-clubs of interactions between teachers and students (Barnhart & van Es, 2015; Coles, 2013; Dunekacke, Jenßen, Eilerts, & Blömeke, 2016; Hoth et al., 2016; Schack et al., 2013; van Es & Sherin, 2002, 2008) analysing teaching-learning situations (Kazemi & Franke, 2004; Steinberg, Empson, & Carpenter, 2004) or analysing students' written answers as artefacts of the practice (Fernández, Llinares, & Valls, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández, & Llinares, 2015).

Previous research has shown that the development of the skill of noticing in teacher education programs is a challenging task without a guide or a framework (Levin, Hammer, & Coffey, 2009) that could support pre-service teachers in their learning. In this context, students' learning trajectories have been identified as a construct which could provide a frame to focus pre-service teachers' attention on students' thinking (Edgington, 2012) and to identify learning goals for their students, to anticipate and interpret students' mathematical reasoning and to respond with appropriate instruction (Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012). Moreover, the use of learning trajectories in teacher education programs may improve their learning outcomes (Clements, Sarama, Wolfe, & Spitlter, 2013), providing a mathematical language to describe students' thinking focusing and reflecting on students' strategies and responses (Wickstrom, Baek, Barrett, Cullen, & Tobias, 2012).

On the other hand, "the most important use of an HLT (Hypothetical Learning Trajectory) would be for teaching concepts whose learning is problematic generally" (Simon, & Tzur, 2004, p.101) since it offers a greater understanding of students' learning of a challenging topic along with insights into how particular activities and instructional moves can support such learning (Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, & Amidon, 2016). One of the concepts on primary school education whose teaching and learning is problematic is the part-whole concept of fractions (Lamon, 2007).

Following these lines of research, our study analyses how pre-service teachers use the theoretical information of a students' hypothetical learning trajectory to notice students' fractional thinking during the participation in a learning environment. In other words, we analyse how pre-service teachers attend to, interpret and decide how to respond using a hypothetical learning trajectory as a guide during the participation on a learning environment designed to support the development of noticing students' fractional thinking.

In the next paragraphs we describe the content of each chapter.

In the first chapter, we present the research problem. Firstly, we review literature on the mathematical knowledge for teaching and how the use of this knowledge in teacher professional practices is the core of the competence of professional noticing. Secondly, we review the different perspectives of the competence of noticing adopted in the literature, and more specifically, the particularisation of noticing students' mathematical thinking. In this section, we identify two lines of research aimed to: i) identify relationships between the skill's components of the competence and ii) characterise the development of the competence. Then, we review the previous research using learning trajectories in teacher education programs as a tool for professional development. Finally, we focus on pre-service teachers' knowledge of fractions. This review of literature brings to light the need for further research on characterising how pre-service teachers notice primary school students' answers using a hypothetical learning trajectory as a framework.

The second chapter presents the theoretical framework of this research, which is related to two main frameworks: noticing students' mathematical thinking and the use of hypothetical learning trajectories. Regarding the first one, in this chapter, we present our conceptualisation of noticing, which integrates both Mason (2011) and Jacobs et al., (2010) perspectives. For the hypothetical learning trajectory, we follow Simon's (1995) perspective as a construct made up of three components: "the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process" (p.136). Then, we present a review of the literature of how students' fractional thinking develops over time (Battista, 2012) which leads the design of a students' hypothetical learning trajectory of the part-whole concept of fraction.

The third chapter describes the design of the study. First, we present the participants and the context within the study was developed. Second, we describe the design of the learning environment and the characteristics of the instrument used to data collection, three professional tasks (Task 1, Task 2 and Task 3) focused on attending to details in written students' answers, interpreting students' understanding using the information of the hypothetical learning trajectory and deciding how to respond on the basis of their interpretations. . Finally, we present the two phases of our analysis: i) related to how pre-service teachers were attending to, interpreting and deciding in each professional task using the learning trajectory and ii) related to the enhancement of pre-service teachers' noticing through the three tasks.

The fourth chapter presents the results obtained organised into four main sections. From section one to three, the results of how pre-service teachers were attending to, interpreting and deciding in each of the professional task (Task 1, Task 2 and Task 3) are presented. These results allow us to identify relationships between the skills of noticing and to identify different ways in which pre-service teachers interpreted students' fractional thinking using a students' hypothetical learning trajectory. In the fourth section, we identify characteristics of pre-service teachers' enhancement of noticing students' fractional thinking, particularly through changes in the discourse.

In the fifth chapter, we discuss our main results. Firstly, we discuss how pre-service teachers used the hypothetical learning trajectory to notice students' fractional thinking. This allows us to characterise relationships among the skills of attending to, interpreting and deciding how to respond and the different ways in which pre-service teachers interpreted students' understandings. Following, we discuss our findings regarding to pre-service teachers' enhancement of noticing through changes in the professional discourse and mathematical knowledge. Finally, we highlight the main contributions of our study to the field of Mathematics Education and conclude providing perspectives for future research.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

"Those who can do,

those who understand, teach"

Lee Shulman

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo mostramos la problemática de investigación en seis secciones. En la primera hacemos una revisión de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor necesario para la enseñanza de las matemáticas. En la segunda mostramos una revisión de las investigaciones centradas en la competencia mirar profesionalmente para presentar, en la tercera parte, una revisión de los estudios con relación a su desarrollo. En la cuarta parte mostramos una revisión de las investigaciones realizadas sobre el uso de las trayectorias de aprendizaje en los programas de formación. En la siguiente sección se presenta una revisión de la literatura del conocimiento de los estudiantes para maestro sobre el esquema fraccionario. La revisión de la literatura pone de manifiesto la necesidad de seguir investigando sobre la manera en la que los estudiantes para maestro utilizan el conocimiento matemático para enseñar cuando interpretan las respuestas de alumnos de primaria a tareas con fracciones. Finalmente, presentaremos nuestra propuesta de investigación.

1.1. CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En el transcurso de las últimas décadas, se han abierto diferentes líneas de investigación sobre el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas dirigidas a analizar el conocimiento vinculado a la enseñanza de las matemáticas que tienen los profesores (Ball, 1990; Borko et al., 1992; Escudero & Sánchez, 2007; Llinares, 1998; Llinares & Krainer, 2006), y a analizar los vínculos entre los distintos tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas (Shulman, 1986; 1987). Para Shulman (1986; 2002) los diferentes dominios de conocimiento que un maestro debe dominar en un área concreta son: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico y conocimiento curricular. El conocimiento de la materia, Shulman lo entiende como la cantidad y organización del conocimiento *per se* en la mente del maestro. El conocimiento pedagógico, lo define como las formas de representar y formular un tema que hace que este sea comprensible para los demás, definición que incluye todos aquellos aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de una materia, como analogías, ilustraciones, ejemplos, ideas o incluso ilustraciones que se utilicen durante el transcurso de la lección (Kind, 2009). Por lo que respecta al conocimiento curricular, Shulman lo define como "la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con los programas diseñados para enseñar un determinado tópico en un nivel dado, y el conjunto de características que sirven tanto como indicaciones como contraindicaciones para el uso de dicho currículum o materiales de programación en circunstancias particulares" (p. 14), es decir, la particular manera en la que se organiza el conocimiento para la enseñanza a través de libros de texto, materiales didácticos, programaciones, etc.

Tras la publicación de los trabajos de Shulman, diversas investigaciones han tratado de identificar el conocimiento de los maestros (Grossman, 1990; Magnusson, Krajcik, & Borko, 1999) o han aportado un refinamiento de los dominios de conocimiento (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Bromme & Brophy, 1986; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013; Hill, Ball, & Schilling, 2008; Rowland, Hutckstep, & Thwaites, 2005).

Uno de los mayores desafíos que deben afrontar los profesores es transformar el conocimiento que han adquirido en conocimiento para su práctica (Calderhead & Miller, 1986; Feiman-Nemser & Buchmann, 1985). De esta manera, el estudiante para profesor debe aprender a usar el conocimiento necesario para enseñar en situaciones prácticas (Llinares, 2009; 2013) como:

- *Analizar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.* Conocer el conocimiento de Didáctica de la Matemática sobre teorías del aprendizaje y construcción del conocimiento matemático […], utilizar los conocimientos de Didáctica de la Matemática sobre el aprendizaje matemático para diagnosticar y dotar de significado a las producciones de los alumnos identificando posibles causas que las justifiquen.
- *Gestionar el contenido matemático en el aula*. Conocer e identificar las características que puede adoptar, el discurso matemático en el aula y su relación con el aprendizaje matemático, […] conocer e identificar características de la gestión de debates como instrumentos de aprendizaje matemático, […] para apoyar el progreso de los alumnos a lo largo de la realización de los problemas matemáticos.
- *Seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas.* La identificación de tareas potencialmente relevantes para el aprendizaje.

El uso del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas en tareas profesionales es lo que configura la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas De este modo, esta competencia es vista como una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas (Ivars, Buforn, & Llinares, 2017; Llinares, 2013).

Por otra parte, las nuevas perspectivas educativas en cuanto a la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 2000, 2014; NRC, 2001), han propuesto un cambio en la manera de afrontar las relaciones y las interacciones en las aulas mediante la creación de entornos de aprendizaje en los que los maestros/profesores tomen decisiones de acción en función de las ideas que emergen de los estudiantes durante las interacciones de aula. Desde esta perspectiva, una enseñanza efectiva implica interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para identificar su comprensión matemática y ajustar la instrucción de forma que ayude al estudiante a seguir progresando en su aprendizaje (NCTM, 2014). De este modo, estas reformas abogan por una mayor flexibilidad de los docentes para atender a las necesidades cognitivas del alumnado mientras se está enseñando (van Es & Sherin, 2002). Esta flexibilidad sugiere la necesidad de desarrollo en los docentes de la capacidad de ser conscientes de lo que pasa en sus clases y de cómo dirigir las mismas. Más allá de ser un experto en la materia que se imparte, un buen docente necesita ser consciente de lo que ocurre a su alrededor para conducir la clase de manera efectiva (Mason, 1998). De esta manera se pone de manifiesto la necesidad de desarrollar en los docentes, la capacidad para identificar los elementos relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en las situaciones de aula importantes (competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas).

Este contexto justifica el surgimiento de una línea de investigación nacional e internacional que trata de caracterizar esta competencia y su desarrollo.

1.2. LA COMPETENCIA DOCENTE MIRAR PROFESIONALMENTE

Una mirada profesional distingue a un profesional o experto en una determinada área de alguien que no lo es por su capacidad de *ver* ciertos fenómenos de una manera particular (Goodwin, 1994). Desde esta perspectiva, una mirada profesional implicaría la puesta en funcionamiento de distintas maneras de utilizar el conocimiento específico de un área concreta. En el caso particular de los profesores de matemáticas y de los maestros, la mirada profesional les permite identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza-aprendizaje que otras personas, no profesionales, serían incapaces de identificar (Roller, 2016).

El análisis de la mirada profesional originalmente comenzó como una investigación sobre lo que los profesores eran capaces o no de identificar en un aula (Erickson, 2011; Mason 2011), y se ha extendido a entender cómo se puede desarrollar esta competencia en los programas de formación inicial y continua de maestros y profesores (Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011; van Es & Sherin, 2002). Con relación al desarrollo de esta competencia han surgido tres enfoques. Un enfoque está centrado en la identificación de momentos importantes en la enseñanza (Star, Lynch, & Perova, 2011). Un segundo enfoque investiga la manera en la que los estudiantes para maestro/profesor identifican e interpretan situaciones de enseñanza-aprendizaje (destrezas de identificar e interpretar; van Es & Sherin, 2002, 2008). El tercer enfoque se centra en identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (aspecto específico de las situaciones de enseñanza- aprendizaje) añadiendo una destreza más, la de decidir (Jacobs et al., 2010). Nuestro estudio se sitúa en este tercer enfoque (competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes), por lo que se hará una revisión más amplia de estas investigaciones en el siguiente apartado.

Centrándonos en los dos primeros enfoques, en las últimas décadas, diversas investigaciones han analizado la manera y los contextos que favorecen el desarrollo de esta competencia Así, videos de la propia práctica o de la práctica de otros docentes, y el análisis de video-clips pueden favorecer el desarrollo tanto de estudiantes para maestros/profesores como de profesores en ejercicio de la habilidad de identificar detalles o momentos importantes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Oppewal, 1993; Star & Strickland, 2008) y de interpretarlos (Coles, 2013; Rosaen, Lundeberg, Cooper, Fritzen, & Terpstra, 2008; Scherer & Steinbring, 2006; Stockero, 2018; van Es, Cashen, Barnhart, & Auge, 2017; van Es & Sherin, 2002).

En relación a los estudios centrados en la habilidad de identificar momentos importantes de la enseñanza, Oppewal (1993) en un estudio con 36 estudiantes para maestro que se encontraban realizando un programa de formación de cinco años que incluía análisis de videos con interacciones de aula entre maestros de ciencias y sus alumnos, mostró que los estudiantes próximos a la finalización de su programa de instrucción eran capaces de ver los eventos de aula de manera más sofisticada que los que acababan de empezar su programa. Star y Strickland (2008) en su estudio, analizaron la cantidad y los momentos de aula que los estudiantes para profesor de Educación Secundaria eran capaces de identificar antes y después de participar en un curso centrado en desarrollar la habilidad de identificar momentos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Para ello administraron un pre- y post- test a los participantes en los que se les pedía analizar dos videoclips sobre lecciones de matemáticas (una sobre exponentes y otra sobre ángulos, longitudes, secantes y tangentes). Los resultados mostraron que el hecho de participar en el curso les permitió mejorar sus habilidades para mirar características del entorno de la clase, del contenido matemático de la lección y de la comunicación entre los docentes y los estudiantes.

En relación a los estudios centrados en identificar momentos específicos de la enseñanza de las matemáticas e interpretarlos, trabajando con estudiantes para maestro

(Sherin & van Es, 2005), con maestros en activo (van Es & Sherin, 2002, 2008) o estudiantes para profesor de Educación Secundaria (van Es et al., 2017), los estudios realizados por van Es, Sherin y su grupo de investigación, han mostrado, que analizar videoclips sobre interacciones de aula permite el desarrollo de la competencia *mirar profesionalmente* y permite a los profesores analizar sus clases e identificar interacciones significativas. Los resultados de estas investigaciones muestran que los participantes desarrollaron nuevas formas de identificar e interpretar interacciones de aula. Los docentes que participaron en estas investigaciones mostraron evidencias de un cambio en la manera de interpretar las situaciones que ocurrían en las aulas ayudados por el contexto del video y las discusiones con compañeros y compañeras. En este sentido, los docentes no solo empezaron a identificar más situaciones significativas, si no que empezaron a hablar sobre ellas de manera interpretativa y a realizar comentarios basados en evidencias que les ayudaban a caracterizar con mayor precisión lo que observaban (Sherin & van Es, 2005; van Es et al., 2017; van Es & Sherin, 2002, 2008).

En este mismo contexto, Rosaen et al. (2008) señalaron que la reflexión fundamentada en vídeos ayudó a tres maestros en activo a realizar comentarios más específicos sobre la enseñanza y a centrarse más en los estudiantes, en lugar de en ellos mismos. También Coles (2013) mostró que el uso de videoclips permitía a los maestros reconstruir las interacciones del aula de manera cronológica para realizar posteriores interpretaciones, aportando evidencias sin basar sus comentarios en juicios o meras descripciones. Por su parte, Scherer & Steinbring (2006) realizaron un estudio con tres maestros de educación primaria con los que se reunía un investigador periódicamente para analizar videos de la propia práctica. Los resultados mostraron que, aunque los cambios en la manera de interactuar se producen a largo plazo, el hecho de reunirse para discutir y reflexionar sobre las interacciones en el aula permitió a los maestros ampliar su enfoque y empezar a mostrar cambios en su manera de interactuar con los estudiantes. Estos maestros, en sus interacciones de aula, empezaron a trasladar el foco de atención desde las acciones del maestro hasta el aprendizaje de los estudiantes. Stockero (2008) analizó las diferencias en cuanto al discurso utilizado en las discusiones por un grupo de estudiantes para profesor de Educación Secundaria que recibieron instrucción sobre las funciones lineales a través del análisis de videos sobre la práctica. Para establecer las diferencias se compararon los resultados con un grupo de control que recibió instrucción, pero con ejemplos mayoritariamente escritos. Los resultados mostraron que aquellos estudiantes para maestro instruidos utilizando videos sobre la práctica utilizaron más evidencias y focalizaron su discurso sobre el pensamiento matemático de los estudiantes en comparación con el grupo de control que tendió a usar generalizaciones sobre el pensamiento de los estudiantes. El uso del video permitió a los estudiantes para maestro trasladarse desde utilizar generalizaciones sobre como los estudiantes piensan hasta proporcionar comentarios más específicos. Así, los estudiantes para maestro utilizaron evidencias para apoyar sus conjeturas sobre el pensamiento matemático individual de los estudiantes. Para Stockero, estas evidencias individuales, podrían ser utilizadas posteriormente para apoyar conjeturas sobre la trayectoria de aprendizaje del grupo.

Aunque el uso de videoclips ha sido un contexto recurrente en las investigaciones sobre el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, entendida como identificar e interpretar situaciones de enseñanza y aprendizaje, otras investigaciones han señalado diversos contextos que han favorecido el desarrollo de esta competencia. Como, por ejemplo, el intercambio de cartas entre estudiantes para maestro con estudiantes de primaria (Crespo, 2000), conversaciones con los propios estudiantes (Steinberg et al., 2004), reuniones presenciales de maestros (Chamberlin, 2005), el análisis de tareas matemáticas (Biza, Nardi, & Zachariades, 2007), y la participación en programas de desarrollo (Goldsmith & Seago, 2011; Philipp et al., 2007).

En este sentido, Crespo (2000) realizó una experiencia con 16 estudiantes para maestro que realizaban intercambio de cartas con estudiantes de primaria en las que se les planteaba un problema y se compartían preguntas, opiniones e ideas sobre sus experiencias. En esta investigación se documentó cómo los futuros maestros modificaron la manera de focalizar sus interpretaciones desde la corrección, a la interpretación del significado de las respuestas de los estudiantes. Del mismo modo, Steinberg et al. (2004), en un estudio de caso con una maestra en activo, mostraron que las conversaciones de esta maestra con sus estudiantes sobre su pensamiento durante la instrucción, le sirvió como andamiaje para investigar sobre el pensamiento de su alumnado y para percibir aspectos de este que anteriormente no había sido capaz de percibir propiciando un cambio en su manera de afrontar las prácticas de enseñanza en el aula.

Chamberlin (2005) realizó una investigación con siete maestros en activo donde debían analizar el pensamiento matemático de sus estudiantes en relación a tareas para posteriormente compartir y discutir sus interpretaciones con el resto de maestros. Los resultados de esta experiencia muestran que estas reuniones permitieron a los maestros adquirir una mejor percepción del pensamiento de los estudiantes; aunque su pensamiento pareciera ilógico, intentaban inferir su razonamiento consiguiendo encontrar sentido a su manera de pensar. Además, frecuentemente aprendieron a interpretar el pensamiento de sus estudiantes de manera más refinada.

Biza et al. (2007) realizaron una investigación en la que presentaron una tarea matemática a 53 profesores de matemáticas en activo que debían explicar los objetivos matemáticos, examinar e identificar una respuesta errónea proporcionada por los estudiantes y describir en un texto escrito una respuesta (retroalimentación) a esta tarea. Los resultados mostraron la necesidad de presentar a las docentes tareas más diversas y que este tipo de tareas puede ser una buena herramienta para poner a los futuros maestros en situación y proporcionales oportunidades de practicar en entornos *seguros* antes de enfrentarse a una práctica real.

En su investigación con profesores de matemáticas en activo, Goldsmith y Seago (2011) analizaron dos programas de desarrollo profesional focalizados en extender la comprensión de los profesores sobre el pensamiento algebraico, aumentar su sensibilidad con relación a las ideas matemáticas de los estudiantes a través de la comprensión profunda del álgebra que enseñan y desarrollar sus habilidades para usar registros y artefactos del aula para investigar sus prácticas. Uno de los programas centrado en fomentar el pensamiento algebraico, estaba organizado alrededor de seminarios en los que se discutían videoclips sobre interacciones de aula y el otro programa, focalizado en las funciones lineales, se organizaba alrededor de seminarios en los que se analizaban diferentes artefactos de la práctica como producciones escritas de estudiantes, transcripciones de discusiones en pequeño grupo de los estudiantes o grabaciones de las preguntas que los maestros hacían a los estudiantes durante el transcurso de las clases. Durante el transcurso de los programas, los investigadores observaron cambios en la manera de atender y trabajar con artefactos de la práctica. Estos cambios se reflejaron en el aumento de discusiones basadas en evidencias desde los artefactos y en la forma de estructurar su mirada sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, focalizando su atención en los detalles matemáticos de sus respuestas.

Un beneficio quizás inesperado de atender al pensamiento matemático de los estudiantes se vincula al surgimiento de oportunidades para que los maestros mejoren sus propios conocimientos matemáticos (Philipp et al., 2007). Por ejemplo, Philipp y sus colegas dividieron en tres grupos a los estudiantes para maestro que participaban en un curso de matemáticas; a un grupo se le instruyó sobre el pensamiento matemático de los estudiantes mediante la visualización de videos y el trabajo directo con estudiantes, a un segundo grupo se le permitió visitar escuelas y estar en contacto con docentes seleccionados por los investigadores y un tercer grupo se estableció como grupo de control. Los resultados mostraron que el conocimiento de los estudiantes para maestro sobre el valor de posición y el número racional aumentó más en aquellos a los que se les facilitaron oportunidades de aprender sobre el pensamiento matemático de los estudiantes en comparación con los otros grupos.

Los resultados obtenidos por estas investigaciones previas muestran que mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas implica trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a las conceptualizaciones de los estudiantes y desde comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias (Bartell, Webel, Bowen, & Dyson, 2013; van Es, 2011), aportando también información sobre diferentes contextos (videos, intercambio de cartas, reuniones entre maestros o programas de desarrollo profesional) que pueden ayudar a su desarrollo.

1.3. LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

La competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es una manera de entender cómo los maestros dotan de sentido a las complejidades de la clase, considerando dónde focalizan su atención y cómo interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb, Philipp, & Schappelle, 2011; Weiland, Hudson, & Amador, 2014). Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia mediante tres destrezas interrelacionadas: (i) describir las estrategias usadas por los estudiantes identificando los elementos matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes en función de los elementos matemáticos usados y, (iii) decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. El desarrollo de esta competencia se ha abordado desde perspectivas socioculturales que inciden en la manera en la que los estudiantes para maestro dotan de sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje estableciendo relaciones entre el conocimiento vinculado a sus experiencias previas, la información teórica proporcionada por los cursos de formación y la manera en la que se relacionan e integran estos conocimientos al generar procesos de atención consciente (identificar lo que se considera relevante), y dotarlos de sentido (interpretarlo) (Goos, 2008; Llinares, 2009; Wells, 2002) como paso previo a la toma de decisiones de cómo continuar con la instrucción en el aula (decidir cómo responder) (Herbst, Chazan, Kosko, Dimmel, & Erickson, 2016; Lande & Mesa, 2016).

Desde esta perspectiva, la identificación e interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes se entiende como un proceso de reconstrucción e inferencia centrado en la interpretación del discurso, oral o escrito de los estudiantes. Esto implica adquirir la capacidad de usar el conocimiento de Didáctica de la Matemática para evitar la dicotomía "correcto-incorrecto" y dotar de sentido las respuestas de los estudiantes para ayudarles a progresar en su comprensión de los conceptos matemáticos.

En las últimas décadas se ha desarrollado una extensa agenda de investigación nacional e internacional con dos objetivos:

- Identificar relaciones entre las destrezas que configuran la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (es decir, caracterizar la manera en la que los estudiantes para maestro identifican, interpretan y deciden).
- Caracterizar el desarrollo de esta competencia, identificando descriptores del desarrollo e identificando contextos favorables para su desarrollo.

1.3.1. Relaciones entre las destrezas que configuran la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

En el estudio realizado por Jacobs et al. (2010) se analizaron las diferencias entre maestros en activo, con diferente experiencia enseñando, y estudiantes para maestro que se encontraban empezando sus estudios para ser maestros de primaria. Los participantes respondieron a dos tareas, una consistía en analizar un video sobre la resolución de estudiantes de primaria a un problema de estructura aditiva en clase y la otra en analizar las respuestas escritas de estudiantes a otro problema de estructura multiplicativa. Los resultados obtenidos por Jacobs y colegas señalaron las diferencias entre los maestros expertos y los que no lo son, mostrando que la diferencia en experiencia influía a la hora de obtener mejores porcentajes en cada una de las destrezas. En su estudio, los porcentajes obtenidos de media por los estudiantes para maestro (36) indican que solo el 14% fueron capaces de proponer una decisión de acción coherente con el pensamiento matemático de los estudiantes en las que se incluyeran evidencias, aunque estas fueron limitadas, mientras que el 46% atendieron a las estrategias del alumnado y el 47% interpretaron su pensamiento matemático, aunque mostrando limitadas evidencias de ello. Estos resultados muestran por una parte que mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes resulta complicado y no es una práctica *natural* para un adulto. Sin embargo, también proporcionaron evidencias de que esta competencia puede mejorar a través del desarrollo profesional. Para Jacobs y colegas los tres procesos están vinculados conceptualmente ya que se entrelazan y se usan cuando los maestros interactúan con los estudiantes.

A partir de los resultados de Jacobs et al. (2010), surgen diferentes estudios que se han centrado en mostrar características de la manera en la que los estudiantes para maestro miran profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Es decir, estudios centrados en características de cómo los estudiantes para profesor y maestro identifican (describen), interpretan y toman decisiones en diferentes niveles educativos usando diferentes tópicos matemáticos y contextos (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, & Callejo, 2018). Por ejemplo, con estudiantes para maestro de Educación Primaria sobre la generalización de patrones (Callejo & Zapatera, 2017), problemas con números racionales (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014), problemas de estructura multiplicativa (Gupta, Soto, Dick, Broderick, & Appelgate, 2018) y la proporcionalidad (Buforn, Fernández, Llinares, & Badillo, 2017; Buforn, Llinares, & Fernández, 2018; Fernández, Llinares, & Valls, 2013; Son, 2013). En cuanto a los estudiantes para profesor de Educación Secundaria se han dirigido estudios centrados en el límite de una función en un punto (Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno, & Callejo, 2018), clasificación de cuadriláteros (Fernández, Sánchez-Matamoros, & Llinares, 2015), operaciones con potencias de diez (Jakobsen, Mellone, Ribeiro, & Tortora, 2016), el signo igual y la igualdad (van den Kieboom, Magiera y Moyer, 2017) y derivada (Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García, & Llinares, 2012). Estas investigaciones han aportado información sobre las relaciones entre las destrezas que configuran la competencia.

Callejo y Zapatera (2017) identificaron en estudiantes para maestro de primaria cinco perfiles con relación a cómo describían e interpretaban las respuestas de estudiantes a problemas de generalización lineal. Los resultados obtenidos sugirieron que estos niveles se hallaban ligados a la identificación de los elementos matemáticos relevantes y su posterior uso para interpretar las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, los resultados no fueron concluyentes en cuanto a la relación entre las destrezas de identificar e interpretar con la toma de decisiones. En el dominio del razonamiento proporcional Fernández et al. (2013) caracterizaron cuatro niveles en función de la manera en que los estudiantes para maestro identificaban e interpretaban el pensamiento matemático de los estudiantes. La caracterización de estos niveles quedaba definida por las relaciones que los estudiantes para maestro fueron capaces de establecer entre los elementos matemáticos identificados en los problemas y las características de la comprensión de los estudiantes. Los resultados de esta investigación mostraron que la correcta interpretación del pensamiento proporcional de los estudiantes por parte de los estudiantes para maestro estaba vinculada a la previa identificación de las situaciones proporcionales y no proporcionales. En este mismo dominio, Son (2013) analizó cómo los estudiantes para maestro utilizaban el conocimiento de matemáticas cuando debían interpretar respuestas incorrectas de estudiantes a un problema de razón. Si bien las dificultades de la estudiante parecían originarse por una comprensión insuficiente del concepto de similitud, la mayoría de los estudiantes para maestro identificaron sus errores como derivados de malentendidos de procedimientos.

Los resultados obtenidos señalaron que, aunque los estudiantes para maestro disponían de un conocimiento matemático sobre razón y proporción con el que identificar la corrección de las respuestas de los estudiantes, al interpretar las dificultades de los estudiantes, originadas por una comprensión conceptual insuficiente, la mayoría basó su interpretación en aspectos procedimentales. Es decir, conocer el contenido matemático no necesariamente se vincula con la capacidad de los estudiantes para maestro para describir las respuestas de los estudiantes y reconocer las características de su comprensión conceptual. Este mismo resultado fue ampliado y corroborado por Buforn et al. (2017) considerando doce diferentes sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. Sus resultados indican que identificar los elementos matemáticos implicados en las actividades relacionadas con los sub-constructos considerados del razonamiento proporcional es una condición necesaria para reconocer características de la comprensión de los estudiantes de primaria. También Jakobsen et al. (2014) en el dominio de los números racionales, concluyeron que, al interpretar las respuestas de estudiantes de educación primaria a un problema de fracciones, los estudiantes para maestro lo hicieron desde una perspectiva descriptiva y evaluativa, centrada en la corrección o no de las respuestas. Los estudiantes para maestro solo consideraban como válidas sus propias estrategias impidiéndoles apreciar y comprender las estrategias utilizadas por los estudiantes.

En su estudio, van den Kieboom et al. (2017) analizaron cómo los estudiantes para profesor de secundaria, al realizar dos entrevistas clínicas a sus estudiantes de grado medio, atendían a las estrategias e interpretaban su pensamiento matemático sobre el signo igual. Sus resultados mostraron que, en ambas entrevistas, la mayoría de los estudiantes para profesor fueron capaces de atender a algunas de las estrategias de sus estudiantes, pero no lograron focalizar su atención para interpretar su pensamiento sobre el signo igual, aunque los investigadores les conminaron a ello. Estos resultados muestran las dificultades de los estudiantes para profesor para centrar su atención en los elementos matemáticos relevantes y establecer las relaciones necesarias para interpretar el pensamiento de los estudiantes sobre el signo igual y la igualdad.

Fernández et al. (2015**)** presentaron distintos problemas de clasificación de cuadriláteros a estudiantes para profesor de Educación Secundaria. Sus resultados indican que la identificación de elementos matemáticos, como las relaciones de inclusión, era una condición necesaria y previa a la interpretación de las características mostradas por las distintas respuestas de los estudiantes a diferentes problemas de clasificación de cuadriláteros.

En la misma línea de resultados, en el dominio de la derivada y trabajando con estudiantes para profesor de Educación Secundaria, Sánchez-Matamoros et al. (2012) caracterizaron la relación entre la identificación de los elementos matemáticos en las producciones de los estudiantes (diferenciada en tres niveles) y la forma de dotar de sentido dichas producciones para interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes. En este estudio las evidencias mostraron diferentes maneras de interpretar de los estudiantes para profesor, considerando los detalles proporcionados en sus respuestas. Así, algunos estudiantes para profesor solo fueron capaces de aportar comentarios generales centrados en evaluar la corrección de las respuestas de los estudiantes mientas que otros lograron reconocer las diferentes características de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada. En cuanto a las decisiones de acción, este estudio mostró que aquellos estudiantes para profesor que lograron identificar las características de la comprensión de los estudiantes fueron capaces de proponer actividades conceptuales centradas en la comprensión del concepto. Estos resultados muestran una relación entre las destrezas de identificar, interpretar y proponer decisiones de acción de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Jakobsen et al. (2016) dirigieron un estudio con estudiantes para profesor de secundaria en el que debían interpretar la comprensión de los estudiantes a través de sus respuestas a una actividad de operaciones con potencias de diez. Las evidencias mostradas por Jakobsen y sus colegas señalan que algunos estudiantes para profesor solo fueron capaces de aportar comentarios descriptivos para evaluar la corrección de las respuestas de los estudiantes y, aunque una parte de ellos lograron interpretar la comprensión de los estudiantes, ninguno de los participantes fue capaz de proponer actividades que ayudaran a los estudiantes a progresar en su conocimiento matemático. Estos resultados indican las dificultades de los estudiantes para profesor con relación a esta destreza.

Más recientemente Gupta et al. (2018) en una investigación centrada en el tipo de decisiones de acción que los estudiantes para maestro proponían, tras haber identificado e interpretado el pensamiento matemático de diferentes respuestas de estudiantes a un problema de estructura multiplicativa, identificaron cuatro categorías diferentes en las que se basaban: i) tendencia a utilizar ideas de enseñanza tradicionales, ii) sugerencias vagas sobre los próximos pasos en la instrucción iii) deseo de que se utilicen expresiones numéricas escritas y iv) centrarse en la progresión de las estrategias. Sin embargo, Gupta y sus colegas mostraron que los estudiantes para maestro tuvieron dificultades para tomar decisiones de acción centradas en la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes para progresar en su comprensión. Los estudiantes para maestro centraron sus decisiones de acción en ideas tradicionales de enseñanza (como mayor velocidad de cálculo mental, uso de algoritmos, o simplemente "mostrar" a los estudiantes como resolver el problema) o bien se centraron en el uso de estrategias progresivamente más eficientes presentadas durante la lección, aunque sin considerar las estrategias que los estudiantes habían utilizado.

Globalmente, las investigaciones referenciadas en esta sección sugieren que los maestros o los estudiantes para maestro pueden aprender a identificar detalles sobre el pensamiento de los estudiantes. Sin embargo, las dificultades que presentan en la comprensión de estos detalles, es decir, de los elementos matemáticos, les generan dificultades para usar estos detalles cuando tienen que interpretar su pensamiento o proponer actividades que apoyen su progreso. Además, aunque estas investigaciones han mostrado relaciones entre las destrezas identificar e interpretar, también indican que no existe una relación directa con la destreza decidir siendo esta la más difícil para los estudiantes para maestro y profesor. De hecho, Schoenfeld (2011) consideró que las decisiones de acción que un maestro toma están vinculadas a los recursos, orientaciones y objetivos que tiene a su disposición y sugirió que las dificultades que los maestros afrontan a la hora de tomar decisiones de acción pueden estar provocadas porque estos objetivos, recursos y orientaciones sean contradictorios o por la falta de estos.

1.3.2. Desarrollo de las destrezas identificar, interpretar y tomar decisiones de acción

Diversas investigaciones han tratado de caracterizar el desarrollo de los estudiantes para maestro de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en los programas de formación inicial de maestros y profesores y formación continua usando diferentes contextos (Stahnke et al., 2016): el uso de registros de la práctica, como visionado de vídeos y análisis de respuestas escritas de estudiantes (Didis, Erbas, Cetinkaya, Cakiroglu, & Alacaci, 2016; Krupa, Huey, Lesseig, Casey, & Monson, 2017; Llinares, Fernández, & Sánchez-Matamoros, 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2015, Schack et al., 2013; Tyminski, Land, Drake, Zambak, & Simpson, 2014; Walkoe, 2015; Wilson, Mojica, & Confrey, 2013), la escritura de narrativas (Ivars, Fernández, & Llinares, 2016), *Lesson Study* (Amador & Weiland, 2015; Choy, 2014; Lee & Choy, 2017; Weiland & Amador, 2015; Wessels, 2018) y contextos de negociación de significados como reuniones presenciales entre maestros en activo (Coles, Fernández, & Brown, 2013; Kazemi & Franke, 2004), debates online (Fernández et al., 2012; Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009) o la retroalimentación por parte de un tutor (Ivars & Fernández, 2018; Seto & Loh, 2015).

1.3.2.1. Uso de registros de la práctica: análisis de vídeos y producciones escritas de los estudiantes

Schack et al. (2013) destacaron que la participación de 94 estudiantes para maestro en un módulo de enseñanza sobre la numeración temprana, diseñado para desarrollar progresivamente las tres destrezas de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, permitió a los estudiantes para maestro mejorar en dichas destrezas. En este módulo se incluían videos de representaciones de la práctica (entrevistas diagnósticas a estudiantes mientras resolvían tareas matemáticas). Al final del módulo los estudiantes para maestro debían realizar una aproximación a la práctica (una entrevista diagnóstica a estudiantes como medio para progresar en las tres destrezas de la competencia). Los estudiantes para maestro respondieron a un cuestionario previo y a otro posterior a la participación en dicho módulo, cuyos resultados mostraron un progreso significativo en cada una de las tres destrezas de la competencia. Los resultados obtenidos para cada una de las destrezas, en cuanto a porcentajes se refiere, muestran que en todas ellas hubo un progreso. Para la destreza atender, los estudiantes para maestro se trasladaron desde atender a los detalles basándose en conjeturas en el cuestionario inicial a focalizar su atención en evidencias en el cuestionario final. Para la destreza interpretar pasaron de interpretaciones descriptivas, a centrarse de manera precisa en las acciones del estudiante y en la importancia de estas acciones en el contexto de las matemáticas. En cuanto a la destreza decidir, los estudiantes progresaron desde proponer actividades que no estaban relacionadas con el objetivo de aprendizaje a proponer actividades basadas en las respuestas de los estudiantes y con un objetivo de aprendizaje relacionado con el aprendizaje de la numeración temprana.

De manera similar, Wager (2014) analizó cómo 30 maestros de primaria, que participaron en un programa de desarrollo profesional, atendieron, interpretaron y propusieron decisiones de acción sobre la participación de los estudiantes es sus aulas. En este programa, de 15 semanas de duración, se tomaban como evidencias las reflexiones de los maestros sobre tres actividades de visionado de videos sobre su propia práctica en las aulas, cinco lecturas propuestas y una reflexión final sobre el curso. Los resultados mostraron que los maestros interpretaron la participación de los estudiantes en 57 ocasiones y de dos maneras: i) centrándose en cómo había estructurado la actividad para fomentar la participación (56% de las ocasiones) e ii) interpretando cómo los estudiantes se habían involucrado en las actividades (44%). En cuanto a la manera en la que los maestros tomaron decisiones de acción, Wager identificó un total de 23 ejemplos de propuestas sobre cómo modificarían la situación para promover la participación de los niños, sin embargo, "la mayoría de los comentarios sobre los cambios planificados no eran específicos para lecciones particulares o para los niños" (p. 331) ya que 16 de estas propuestas estaban centradas en comentarios generales y solo 7 se centraban en comentarios específicos para trabajar con algunos estudiantes.

Más recientemente Krupa et al. (2017) implementaron un módulo de enseñanza diseñado para desarrollar las tres destrezas de la competencia en estudiantes para profesor de Educación Secundaria. Este módulo de tres semanas de duración incluía un cuestionario pre y post de evaluación en el que se solicitaba a los estudiantes para profesor que, tras visualizar un video de un estudiante de secundaria en el que se le realizaba una "*task based interview*" (entrevista sobre una tarea que estaba resolviendo), identificaran, interpretaran y decidieran cómo responder en función de la comprensión matemática del estudiante. Tras la participación en el módulo los estudiantes para profesor mostraron mejoras en su capacidad para *atender* e *interpretar*, pero no fueron capaces de mejorar en cuanto a la habilidad para responder (decidir). Estos resultados sugieren que la destreza decidir es, de entre las tres destrezas, la que genera una mayor demanda cognitiva en los estudiantes para maestro.

Didis et al. (2016) dirigieron un estudio con 25 estudiantes para profesor de matemáticas que participaban en un curso donde se trabajaba con tareas de modelación y se analizaba el pensamiento de los estudiantes. Sus resultados ponen de manifiesto que los estudiantes para profesor interpretaron el pensamiento de los estudiantes de cuatro maneras diferentes: describiendo la manera de pensar de los estudiantes, cuestionando la manera de pensar de los estudiantes, explicando detalles matemáticos de la manera de pensar de los estudiantes y comparando la manera de pensar de los estudiantes con la suya propia. Los resultados mostraron que la participación en el curso permitió a algunos estudiantes para profesor incrementar su atención sobre el pensamiento de los estudiantes dotando de sentido a sus respuestas. Sin embargo, algunos de ellos continuaron centrando su atención sobre la corrección o no de las respuestas de los estudiantes.

De manera similar, Wilson, Lee y Hollebrands (2011) analizaron los procesos que los estudiantes para profesor de secundaria utilizaban, cuando analizaban respuestas de los estudiantes con la tecnología, para construir modelos con los que dotar de sentido el pensamiento de los estudiantes. Los estudiantes para profesor completaron las mismas tareas sobre problemas estadísticos y respondieron las preguntas utilizadas con los estudiantes, reflexionaron sobre sus propios pensamientos, hicieron predicciones sobre los posibles enfoques utilizador por los estudiantes en las tareas y luego vieron videos de estudiantes trabajando en pareja la tarea. Wilson y sus colegas mostraron que los futuros profesores usaron cuatro procesos para construir un modelo de pensamiento del estudiante: describir, comparar, inferir y reestructurar. Al describir, atendieron explícitamente a las acciones de los estudiantes; sin embargo, no asociaron estas acciones con la manera de pensar de los estudiantes (es decir, no establecieron relaciones). Al comparar, los futuros profesores compararon, explícita o implícitamente, las similitudes y diferencias de las acciones de los estudiantes con sus propias acciones. Al inferir, utilizaron sus conocimientos tecnológicos, pedagógicos y matemáticos para interpretar el trabajo de los estudiantes e hicieron inferencias sobre el pensamiento que los estudiantes podrían haber mostrado. En la reestructuración, el modelo de los estudiantes para profesor sobre el pensamiento de los estudiantes surge de la integración de la forma de pensar de estos sobre las matemáticas, la tecnología y la pedagogía y las relaciones entre estos tres componentes.

En este sentido, en el estudio de Tyminski et al. (2014) participaron 72 estudiantes para maestro de primaria, a los que se instruyó sobre los aspectos de la competencia mirar profesionalmente y se les presentó una secuencia de actividades diseñada como andamiaje para el desarrollo de las tres destrezas de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. La secuencia está construida a partir de tres tareas en las que los estudiantes para maestro analizaban videos sobre interacciones de aula de una maestra en dos de ellas y en la tercera analizaban las respuestas escritas de los estudiantes a un problema de estructura multiplicativa. Los porcentajes obtenidos de media en las dos últimas tareas mostraron que, aunque los estudiantes para maestro fueron capaces de atender a las estrategias de los alumnos (73%) e interpretar su pensamiento matemático (63%), únicamente el 20% de ellos fue capaz de proponer una nueva decisión de acción. Sin embargo, los participantes mostraron una mejora entre la segunda y la tercera tarea en su capacidad para atender (71-75%), interpretar (51-75%) y tomar decisiones de acción (18-23%) mostrando que los estudiantes para maestro mejoraron su habilidad para dotar de sentido al pensamiento de los estudiantes en diferentes contextos matemáticos como los presentados en las tres tareas.

1.3.2.2.Escritura de narrativas

Las narrativas son historias en las que el autor relata, de manera secuencial, acontecimientos que cobran sentido para él, a través de una lógica interna (Chapman, 2008; Ponte, Segurado, & Oliveira, 2003). Desde esta perspectiva, estudios como el de Ivars et al. (2016) consideran a los estudiantes para maestro como narradores de sus historias en los programas de formación, como contexto para estructurar su mirada sobre las situaciones de enseñanza aprendizaje, dando sentido a su experiencia durante su período de prácticas.

En su estudio, Ivars et al. (2016) solicitaron a 39 estudiantes para maestro, que se encontraban realizando sus prácticas en los centros de Educación Primaria, que escribieran una narrativa en la que describieran interacciones de aula que consideraban potencialmente relevantes para explicar el aprendizaje matemático que estaban observando. Para articular la redacción de la narrativa, se les proporcionó unas preguntas guía basadas en las tres destrezas de la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje: describir, interpretar y decidir. Veintiuno de los 39 estudiantes para maestro, en sus narrativas, identificaron los elementos matemáticos relevantes de la situación de enseñanza-aprendizaje, proporcionando interpretaciones de la comprensión de los estudiantes y aportando evidencias. Sin embargo, solo 11 estudiantes para maestro de los que habían interpretado la comprensión de los estudiantes, propusieron decisiones de acción específicas centradas en promover la progresión de la comprensión de los elementos matemáticos relevantes de la situación. Estos resultados muestran el potencial de las narrativas como recurso para ayudar a estructurar la mirada sobre las situaciones de enseñanza aprendizaje ya que más de la mitad de los participantes identificaron e interpretaron evidencias de la comprensión matemática. En cuanto a la integración de las tres competencias, esta investigación mostró que de entre las tres destrezas vinculadas a la competencia, la destreza de proponer decisiones de acción resulta de mayor dificultad para los estudiantes para maestro.

1.3.2.3.Lesson Study

Las Lesson Study son un modelo japonés de desarrollo profesional diseñado para mejorar la instrucción. Este modelo implica la reunión de un grupo de maestros que establecen un objetivo de aprendizaje y, posteriormente, planifican una lección para este objetivo, la implementan y se reflexiona sobre esta implementación (Fernandez, 2002). En primer lugar, se estudian los materiales y las guías del plan de estudios para determinar el método de enseñanza con el que instruir la lección. Posteriormente, uno de los integrantes del equipo implementa la lección, mientras que el resto de los participantes observa, centrándose en las evidencias del pensamiento de los estudiantes. Tras la implementación, el equipo se reúne para reflexionar sobre la lección con respecto al aprendizaje del alumnado y los métodos de enseñanza, y luego se analizan posibles modificaciones para que otro miembro del equipo vuelva a implementar la lección con su alumnado. Este proceso se repite hasta que el equipo considera que tiene una lección bien desarrollada que satisfaga las necesidades del alumnado (Weiland & Amador, 2015).

Lee y Choy (2017) condujeron un estudio transnacional con un grupo de seis estudiantes para maestro de Estados Unidos y otro grupo de seis maestros en activo de Singapur que participaban en dos ciclos de Lesson Study de seis sesiones cada uno. Los estudiantes para maestreo diseñaron una lección para el aprendizaje del sentido numérico (conteo, adición y sustracción) y los maestros una para el aprendizaje de las fracciones. El objetivo de este estudio era identificar semejanzas en la manera de mirar profesionalmente de ambos grupos y analizar si la participación en la Lesson Study, centrada en estructurar la mirada de los participantes en las tres destrezas de la competencia, ayudaba a su desarrollo. Para ambos grupos, se grabaron la primera sesión de planificación de la lección y la última de las sesiones (de revisión de la lección planificada). Estas sesiones fueron analizadas para identificar cómo y qué miraban profesionalmente los participantes. Los resultados obtenidos señalan que ambos grupos de participantes tuvieron dificultades para focalizar su atención en los aspectos matemáticamente relevantes en la sesión inicial, sin embargo, cuando los participantes lograron centrar su atención en las tres destrezas de la competencia, lograron una mejora de esta, sugiriendo que el contexto de la Lesson Study puede utilizarse para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En cuanto a la relación entre las tres destrezas, los resultados mostraron que alcanzar mayores niveles de desarrollo de la competencia se vincula a la atención e interpretación de los aspectos matemáticamente significativos de las situaciones de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, ninguno de los dos grupos fue capaz de proponer decisiones de acción apropiadas para mejorar la comprensión matemática de los estudiantes subrayando la dificultad de esta destreza. Para Lee y Choy existe una relación sinérgica entre el desarrollo de la competencia y la habilidad de los estudiantes para maestro de focalizar su atención en los detalles matemáticamente importantes durante la Lesson Study, cuando los estudiantes son capaces de centrarse en los detalles es más probable que tomen decisiones de acción enfocadas a promover la comprensión de los estudiantes.

Por su parte Wessels (2018) mostró cómo tres estudiantes para maestro de educación primaria, que participaban en dos ciclos de Lesson Study durante sus prácticas en los centros, uno en su tercer año de formación y otro en su cuarto año de formación, miraban profesionalmente el pensamiento de los estudiantes. Los resultados muestran cambios en dos de los estudiantes para maestro entre el tercer y cuarto año del programa. Estos estudiantes se trasladaron desde la descripción de la situación aportando comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias, sin embargo, ninguno de los estudiantes para maestro fue capaz de establecer conexiones entre lo observado y principios generales de la enseñanza para proponer decisiones de acción que mejoraran la lección planificada a fin de que fuera más eficiente y ayudara a la comprensión de los estudiantes. Estos resultados subrayan, en primer lugar, que la Lesson Study parece ser un contexto adecuado para el desarrollo de la competencia y, en segundo lugar, el tipo de dificultades que los estudiantes para maestro afrontan cuando tienen que tomar decisiones de acción.

En el mismo contexto de las Lesson Study, Weiland y Amador (2015) analizaron cómo los intercambios verbales y no verbales entre tres grupos de estudiantes para maestro (N=7) y un facilitador (investigador doctoral experto en el campo) influenciaron su mirada profesional sobre el pensamiento de los estudiantes. Para ello analizaron seis sesiones en las que los estudiantes para maestro analizaron las lecciones implementadas previamente y en las que se discutía sobre el pensamiento de los estudiantes. Los resultados obtenidos muestran la importancia del facilitador para apoyar la manera en que los estudiantes para maestro atendían y aportaban evidencias sobre el pensamiento de los estudiantes a través de la discusión, haciendo preguntas directas, facilitando la discusión libre o modelando las interpretaciones o comentarios de los estudiantes para maestro para conectarlas con el pensamiento de los estudiantes. En cuanto al desarrollo de la competencia, los resultados aportados en el estudio permiten identificar cambios en la manera de mirar profesionalmente de algunos estudiantes para maestro. Estos cambios permitieron a la mayoría de estudiantes para maestro aportar, en la última sesión, comentarios interpretativos respaldados por referencias a momentos específicos, e interacciones como evidencias de sus interpretaciones señalando que los intercambios verbales y no verbales, introducidos durante el análisis de las lecciones implementadas, permitieron a los estudiantes para maestro atender al pensamiento matemático de los estudiantes, interpretar su pensamiento y empezar a establecer conexiones con principios generales de la enseñanza aprendizaje para decidir cómo responder. Sin embargo, los resultados aportados en cuanto a la destreza de proponer decisiones pedagógicas alternativas, en las que se consideraban las interpretaciones previas, señalan unos porcentajes muy bajos (0.52% de media en las seis sesiones).

1.3.2.4.Contextos de negociación de significados

En las perspectivas sociales sobre el aprendizaje (Wenger, 1998), la argumentación como negociación de significados (Andriessen, Erkens, van de Laak, Peters, & Coirier, 2003) es en un elemento clave. La construcción de conocimiento sobre una situación puede ocurrir a través de un proceso de argumentación dialógica (proceso de razonamiento) que ocurre cuando se examinan diferentes perspectivas con el propósito de llegar a un consenso. Por ejemplo, las interacciones producidas entre estudiantes para maestro en debates en línea, las interacciones en contexto presencial entre maestros en ejercicio y formadores o la retroalimentación escrita entre el tutor y el estudiante para maestro (Shute, 2008) pueden ser entendidos como manifestaciones de un proceso colaborativo en el que los significados pueden ser negociados.

De esta manera investigaciones como las de Coles et al. (2013) y Kazemi y Franke (2004), mostraron cómo las reuniones presenciales entre maestros en activo en las que se discutían las producciones del alumnado, bien escritas u orales, y las interacciones producidas en el seno de la clase son un buen contexto para el desarrollo de la competencia ya que ayudaron a los docentes a identificar e interpretar el pensamiento matemático de su alumnado y además a decidir los recursos a utilizar para ayudar a su alumnado a seguir progresando en el aprendizaje.

Por ejemplo, Coles et al. (2013) dirigieron un estudio con el objetivo de ayudar a los maestros en activo a abordar el bajo rendimiento de su alumnado y desarrollar su creatividad. Coles y sus colegas mostraron cómo las reuniones presenciales en las que maestros en activo compartían experiencias con otros maestros y discutían sobre las producciones, orales o escritas de su alumnado, y de las interacciones que sucedían en sus aulas, ayudaron a desarrollar la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Los resultados obtenidos mostraron que las discusiones que los maestros abordaron durante las reuniones presenciales facilitaron la interpretación de las ideas matemáticas de su alumnado y les ayudaron a utilizar diferentes recursos para tomar decisiones de acción sobre cómo continuar con la instrucción. Del mismo modo, Kazemi y Franke (2004) mostraron que las reuniones entre 10 maestros en las que se discutía sobre los trabajos escritos u orales de su alumnado y las interacciones que se producían en el aula ayudó a los docentes en activo a descubrir nuevas maneras de trabajar juntos, alrededor de un objetivo particular, y además les permitió descubrir nuevas maneras de escuchar las ideas matemáticas de los estudiantes, interpretarlas y usar recursos para decidir hacia dónde dirigir el siguiente paso para que estas siguieran desarrollándose.

Por otra parte, Fernández et al. (2012) mostraron que la participación en debates on-line de los estudiantes para maestro apoyó el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico del razonamiento proporcional. Los resultados de este estudio revelaron evidencias sobre la manera en la que los estudiantes para maestro se trasladaron desde descripciones generales de las estrategias utilizadas por los estudiantes (antes de la participación en el debate *online*) a descripciones en las que se incluían los detalles matemáticamente importantes (después de la participación en el debate). En el estudio de Koc et al. (2009) se utilizó un video sobre la práctica de una maestra de Educación Primaria que fue discutido en un debate online por 26 participantes (19 estudiantes para maestro de primaria y siete docentes en activo de secundaria) y por la propia maestra durante tres semanas. Esta investigación tenía como objetivo analizar cómo los docentes establecían conexiones entre la teoría y la práctica, así como el contenido que emergían a través de la discusión y desde el discurso de los participantes. Los resultados mostraron que los docentes fueron capaces de articular un discurso en el que se establecían conexiones entre la teoría y la práctica a través del debate online. De los cinco temas identificados sobre los que los participantes discutieron, la comprensión de los estudiantes era uno de los temas más discutidos.

Estudios como los de Ivars y Fernández (2018) y Seto y Loh (2015) han proporcionado información sobre la negociación de significados en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes considerando la influencia del tutor. Desde esta perspectiva, se considera que lo que los maestros son capaces de mirar profesionalmente emerge desde la estructura de la lección y de las estructuras del aula y por tanto, consideran la relevancia del tutor, en la misma dirección que los aportes de Weiland y Amador (2015), como un elemento clave para indicar el camino a seguir, apoyando a los maestros y proporcionándoles soporte y retroalimentación.

Por ejemplo, Ivars y Fernández (2018) en su estudio con estudiantes para maestro que se encontraban en su periodo de prácticas, les solicitaron escribir dos narrativas sobre situaciones de aula en las que ocurriera una interacción de aula durante las clases de matemáticas que consideraran relevante. Para escribir las narrativas los estudiantes para maestro disponían de unas preguntas guía que les ayudaron a estructura su mirada. Tras la escritura de la primera narrativa los estudiantes para maestro debían compartirla con sus tutores de prácticas en la Universidad los cuales, tras su lectura y análisis, respondieron con una retroalimentación (una serie de comentarios sobre aspectos que podían mejorar en la misma teniendo en cuenta el desarrollo de las destrezas de identificar, interpretar y decidir). Tras esta retroalimentación se solicitó a los estudiantes para maestro que escribieran una segunda narrativa. Los resultados mostraron cómo el hecho de escribir narrativas sobre la propia práctica y recibir retroalimentación por parte del tutor de prácticas ayudó a los estudiantes para maestro a estructurar su mirada y a focalizar su atención sobre los detalles matemáticos importantes en las situaciones de enseñanza identificándolos en las respuestas de los estudiantes, interpretando el pensamiento matemático de los estudiantes en relación a los elementos matemáticos identificados para, finalmente, proponer decisiones de acción basadas en la interpretación previamente realizada. En la misma línea Seto y Loh (2015) en un estudio de caso con un maestro en activo mostraron cómo la participación en un programa de cuatro meses de duración en el que se reunían el maestro y su tutor, semanalmente, para discutir sobre las lecciones en un ciclo completo que incluía discusiones previas a la implementación de la lección, observación de las lecciones y discusiones tras la implementación de las lecciones, así como entrevistas semi-estructuradas, ayudó al maestro a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Es decir, le ayudaron a identificar elementos matemáticos específicos en el razonamiento de los estudiantes que facilitaron la interpretación y comprensión de lo que estaba sucediendo, y a tomar decisiones de acción adecuadas para cada situación.

Estos estudios han mostrado que diferentes contextos pueden favorecer el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, también han mostrado que, de entre las tres destrezas que configuran la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, la destreza decidir cómo responder es “la más exigente de las tres, que no necesariamente aumenta con más experiencia sino que requiere más trabajo focalizado y experiencias de desarrollo profesional" (Krupa et al., 2017, p.64) porque, aunque los maestros puedan aprender a identificar detalles sobre el pensamiento de los estudiantes, en ocasiones, no son capaces de utilizarlos para interpretar su comprensión o tomar decisiones de acción (Barnhart & van Es, 2015; Franke & Kazemi, 2001). Es decir, los maestros o estudiantes para maestro pueden ser muy específicos en cuanto a los detalles de lo que observan sin tener una decisión de acción concreta en mente (Choy, 2013) que esté centrada en la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes. En este sentido, cuando los estudiantes para maestro/profesor o los maestros en activo tienen que tomar decisiones de acción, suelen centrarse en procedimientos de la enseñanza tradicional (Gupta et al., 2018), en redirigir al estudiante hacia una estrategia particular (la del docente, la que él o ella ha explicado) (Chao, Murray, & Star, 2016) o bien en mostrar a los estudiantes *como hacerlo bien* (Stahnke et al., 2016), es decir, por lo general, estas decisiones de acción no se centran en el progreso conceptual de los estudiantes.

Investigaciones realizadas recientemente parecen apuntar a que el uso de referentes teóricos o guías que estructuren sobre qué y cómo mirar, podrían ayudar a los maestros y estudiantes para maestro a desarrollar su mirada profesional. De este modo, Walkoe (2015), en su investigación con estudiantes para maestro que participaban en un curso de ocho semanas de duración, analizó el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente en el dominio del algebra. Walkoe entendió este desarrollo como la manera de enseñar a los estudiantes para maestro a ampliar su visión sobre el álgebra, prestar atención a las diferentes manifestaciones de pensamiento algebraico de los estudiantes y a razonar sobre las ideas de los estudiantes. Para conseguirlo en primer lugar, construyó, tras la revisión de la literatura sobre pensamiento algebraico, un marco de referencia que incluía seis categorías sobre el pensamiento algebraico de los estudiantes. Se proporcionó este marco a los estudiantes para maestro como referente del pensamiento de los estudiantes y para dotarlos de un lenguaje que les permitiera discutir sobre este pensamiento con sus compañeros. En segundo lugar, emplazó a los estudiantes para maestro a discutir fragmentos de videos sobre clases de álgebra, en los que se les pedía que identificaran secuencias que ellos considerasen relevantes en cuanto a la ejemplificación del pensamiento algebraico de los estudiantes, y que describieran lo que observaban. Los resultados obtenidos mostraron que el visionado y análisis de videos ayudó a los estudiantes para maestro a prestar atención al pensamiento algebraico de los estudiantes de manera más consistente y a razonar acerca este pensamiento de manera más profunda. Para Walkoe, la inclusión de referentes teóricos en los módulos de formación inicial facilita el acercamiento de los estudiantes para maestro a un lenguaje matemático sobre el tópico y el aprendizaje de los estudiantes que puede ayudar a los estudiantes para maestro a describir el pensamiento matemático de los estudiantes.

En este sentido, en las últimas décadas, desde la investigación en el área de la educación matemática se ha desarrollado una importante agenda de investigación en cuanto al uso de trayectorias de aprendizaje como un constructo capaz de apoyar el aprendizaje de los estudiantes para maestro y profesor con relación a la elección de objetivos de aprendizaje, anticipar y atender al pensamiento de los estudiantes y decidir cómo responder a los estudiantes con instrucción adecuada para ayudarles a progresar en su comprensión sobre los tópicos matemáticos (Edgington, 2012; Wilson, 2009). En este sentido, consideramos que las trayectorias de aprendizaje podrían actuar como marco de referencia sobre el que estructurar la mirada profesional de los estudiantes para maestro.

1.4. USO DE LAS TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

La expresión de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje fue conceptualizada por primera vez en el trabajo seminal de Simon (1995) como la representación de los caminos por los que el aprendizaje puede discurrir cuando los estudiantes progresan desde una comprensión inicial hacia una meta de aprendizaje prevista. Simon utilizó el término de trayectorias hipotéticas porque están basadas en la predicción del maestro sobre el proceso de aprendizaje y porque el camino de aprendizaje que seguirá cada estudiante no puede conocerse por adelantado. En este sentido, Confrey y Maloney (2010) postularon que las trayectorias de aprendizaje representan una progresión de la cognición que, aunque no es necesariamente lineal ni aleatoria puede ser única para cada estudiante. Desde esta perspectiva, las trayectorias representan una ordenación de las tendencias desarrolladas a través de la investigación empírica sobre cómo progresa el aprendizaje de los estudiantes a medida que transforman sus ideas matemáticas iniciales en conceptos formales (Confrey & Maloney, 2010; Corcoran, Mosher, & Rogat, 2009).

Clements y Sarama (2004) definen las trayectorias de aprendizaje como:

> "descripciones del pensamiento y el aprendizaje de los niños, en un dominio matemático específico, y una ruta de aprendizaje conjeturada que se relaciona a través de un conjunto de tareas de instrucción, diseñadas para generar esos procesos mentales o acciones hipotéticas para trasladar a los niños a través de un desarrollo progresivo de niveles de pensamiento, creado con la intención de apoyar el logro de los objetivos específicos de los niños en ese dominio matemático" (p. 83).

Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica y Myers (2009) especificaron que una trayectoria de aprendizaje es:

> "una conjetura descrita por el investigador, apoyada empíricamente en la red ordenada de constructos con los que se encuentra un estudiante a través de la instrucción (es decir, actividades, tareas, herramientas, formas de interacción y métodos de evaluación), con el fin de trasladarse, con el tiempo y a través de sucesivos refinamientos de la representación, la articulación y la reflexión, desde las ideas informales hacia conceptos cada vez más complejos" (p. 347).

La conceptualización de las trayectorias de aprendizaje implica un cambio de paradigma. En contraposición al aprendizaje por parte del docente de conceptos generales sobre aprendizaje de los estudiantes para construir modelos de sus alumnos, las trayectorias de aprendizaje ofrecen un marco de referencia para que los maestros aprendan sobre niveles de la progresión en el pensamiento de los estudiantes y doten de sentido el aprendizaje de los estudiantes (Sztajn et al., 2012).

En este sentido, en su revisión sobre la investigación en el campo de las trayectorias de aprendizaje, Daro, Mosher y Corcoran (2011) identificaron que, a pesar de existir una gran variedad de definiciones al respecto, en lo que coincidían todos los artículos revisados era en reconocer el papel fundamente de la instrucción para apoyar el progreso de los estudiantes a través de las trayectorias de aprendizaje.

Durante las últimas décadas se han desarrollado múltiples trayectorias de aprendizaje sobre tópicos matemáticos diferentes (Daro et al., 2011), como por ejemplo, la composición de figuras geométricas (Clements, Wilson, & Sarama, 2004), la matemática temprana: conteo y formas geométricas (Clements & Sarama, 2009), el proceso de equipartición (Confrey, 2012; Confrey et al., 2009), medida y su longitud (Barrett et al., 2012; Battista, 2006), razonamiento estadístico (Lehrer, Kim, Ayers, & Wilson, 2014), funciones (Kalchman & Koedinger, 2005), el concepto de derivada (Sánchez-Matamoros, 2004) y el concepto de límite de una función en un punto (Pons, 2014).

Recientemente, ha surgido una creciente agenda de investigación propiciando el uso de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje para el desarrollo de prácticas de evaluación formativa (Furtak, 2012; Heritage, 2008), la evaluación diagnóstica (Confrey, Gianopulos, McGowan, Shah, & Belcher, 2017; Lehrer et al., 2014), el desarrollo curricular (Clements & Sarama, 2007) y el desarrollo profesional del docente (en programas de formación inicial y continua) (Clements & Sarama, 2009; Edgington, 2012; Llinares et al., 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2015; Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo, Pérez-Tyteca, & Valls, 2017; Wilson et al., 2013; Wilson, Sztajn, Edgington, & Myers, 2015). En nuestro estudio, usaremos las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como marco de referencia para ayudar a los estudiantes para maestro a estructurar su mirada profesional durante su programa de formación inicial.

1.4.1. Uso de las trayectorias de aprendizaje en programas de formación inicial y desarrollo profesional

El uso de las trayectorias de aprendizaje, en los programas de formación inicial de maestros/profesores o de desarrollo profesional de maestros en activo, está avalado por investigaciones empíricas que han mostrado que el aprendizaje y el uso de las Trayectorias de Aprendizaje produce resultados positivos en la práctica de los maestros o en la manera de mirar registros de la práctica. Estas investigaciones muestran evidencias de que cuando los maestros conocen una trayectoria de aprendizaje puede ayudarles a proponer tareas a sus estudiantes vinculadas con la manera en que los estudiantes razonan. Por ejemplo, en su trabajo relacionado con la Instrucción Guiada Cognitivamente (Cognitively Guided Instruction, CGI de sus siglas en inglés), que se ha considerado como la forma primigenia de las Trayectorias de Aprendizaje en relación a las matemáticas elementales (Confrey et al., 2009). Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef (1989) mostraron que el aprendizaje de los maestros de un modelo de investigación basado en el pensamiento matemático de los estudiantes, produjo cambios en las actividades propuestas por los maestros. A su vez estas modificaciones de las tareas/actividades tuvieron una correlación con los logros obtenidos por los estudiantes. La idea que subyace a la CGI es que los docentes pueden mejorar sus prácticas profesionales si se les proporciona acceso al conocimiento basado en la investigación sobre el pensamiento de los estudiantes (Jacobs et al., 2010).

Por su parte, Vacc y Bright (1999), en una investigación con 34 estudiantes para maestro matriculados en un curso de matemáticas en el que se les instruía sobre la Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI), mostraron que, tras participar durante 2 años en este curso, la percepción sobre la instrucción de los estudiantes para maestro cambió, y que fueron capaces de reconocer los principios de CGI, sin embargo tuvieron dificultades para usar el pensamiento matemático de los estudiantes durante sus prácticas profesionales (durante la instrucción).

Del mismo modo, Clements y Sarama (2008) y Clements, Sarama, Spliter, Lange y Wolf (2011) mostraron que los maestros que participaron en su investigación y que fueron instruidos utilizando trayectorias de aprendizaje sobre matemáticas temprana, lograron desarrollar mejores entornos matemáticos de aprendizaje y atender de manera más eficiente al pensamiento matemático de sus estudiantes. En este sentido Wilson (2009) destacó que el aprendizaje de los maestros sobre las trayectorias de aprendizaje permitía a los maestros mejorar en sus habilidades para evaluar las tareas, comprender el pensamiento matemático de los estudiantes y planificar el tipo de respuesta que dar a las producciones escritas de los estudiantes.

También Wickstrom et al. (2012) mostraron en un estudio de caso de una maestra en activo (K-4) como, en una Lesson Study sobre medida, el hecho de introducir una trayectoria de aprendizaje permitió a la maestra describir el pensamiento matemático de los estudiantes. Las evidencias mostraron que la maestra fue capaz de utilizar la trayectoria de aprendizaje para "focalizar en las estrategias de los estudiantes, compartir el conocimiento de los estudiantes con otros maestros y reflexionar sobre las estrategias y las respuestas de los estudiantes" (p.493). Además, fue capaz de utilizar un lenguaje matemático apropiado, derivado de la trayectoria, para comunicar su comprensión acerca de los estudiantes y para situarlos en un nivel adecuado de trayectoria vinculado con el tipo de estrategias que usaron. Para Wickstrom y colegas, las evidencias mostradas por su investigación sugieren que existe una conexión entre la identificación/descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes y la interpretación de su pensamiento matemático.

Por su parte, Edgington (2012), en una investigación en la que participaron cinco maestros de segundo grado en activo, mostró como el hecho de utilizar una trayectoria de aprendizaje permitió a estos maestros elegir objetivos de aprendizaje, atender a los niveles de sofisticación reflejados por los trabajos de sus estudiantes y a focalizar en el proceso como medio para facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Los estudios realizados en el dominio del razonamiento sobre números racionales han mostrado cómo los estudiantes para maestro y maestros en activo usaban una trayectoria de aprendizaje sobre la equipartición (Confrey, 2012), proporcionada en el curso, para dotar de sentido al pensamiento de los estudiantes, a través de la creación de modelos de pensamiento durante entrevistas clínicas (Wilson et al., 2013), diseñando lecciones para los estudiantes (Wilson et al., 2015) o durante la instrucción (Wilson, 2009). Los resultados de estos estudios han mostrado que la trayectoria de aprendizaje actuó como marco teórico para diseñar y planificar la instrucción facilitando la definición de los objetivos de aprendizaje y la selección de tareas que hicieran emerger el pensamiento matemático de los estudiantes, interactuar con los estudiantes en los debates de clase y considerar el pensamiento de los estudiantes a la hora de tomar decisiones de acción. Además, les permitió anticipar las respuestas de los estudiantes y al mismo tiempo considerar si las tareas propuestas eran apropiadas para ayudar a los estudiantes a seguir progresando en su aprendizaje. Estos resultados apoyan la idea sobre la adecuación de las trayectorias de aprendizaje como referente para implementar un entorno de aprendizaje sobre un dominio específico del conocimiento matemático por su potencial para contribuir a la conexión entre la teoría y la práctica (Wilson et al., 2015).

En este sentido, Wilson et al. (2013) dirigieron dos estudios en los que se instruía sobre la trayectoria de aprendizaje sobre la equipartición (Confrey, 2012), uno con un grupo de 33 maestros de Educación Infantil y Primaria en activo que participaba en un curso de desarrollo profesional y otro con 56 estudiantes para maestro que participaban en un curso de métodos matemáticos. Los participantes en ambos estudios analizaron respuestas de estudiantes sobre problemas de reparto antes, durante y después de su participación en el curso. Los resultados obtenidos sugieren que la trayectoria de aprendizaje influyó en los procesos con los que los maestros en activo construyeron modelos sobre el pensamiento de los estudiantes ya que, tras las experiencias con la trayectoria de aprendizaje, sus descripciones ganaron claridad y precisión, las comparaciones incorporaron afirmaciones teóricas sobre la cognición y la equipartición de los estudiantes, y las inferencias se trasladaron más allá de la simple evaluación para ver el aprendizaje como el desarrollo de una comprensión progresivamente más adecuada de una idea. En cuanto a los estudiantes para maestro, tras la introducción de la trayectoria de aprendizaje, desarrollaron una mayor sensibilidad a la identificación de los comportamientos y el lenguaje de los estudiantes en relación con la equipartición. En sus análisis establecieron relaciones entre lo observado, en relación con los comportamientos y el lenguaje de los estudiantes, y la trayectoria de aprendizaje, realizando inferencias y usando los criterios de la trayectoria de aprendizaje como marco para construir modelos de pensamiento de los estudiantes. Esto les permitió empezar a dotar de sentido a las respuestas de los estudiantes y comprender que los estudiantes no ven las matemáticas del mismo modo que los docentes son capaces de verlas.

Wilson y colegas mostraron que antes de ser instruidos sobre la trayectoria de aprendizaje menos de la mitad de los maestros en activo y solo un tercio de los estudiantes para maestro fueron capaces de hacer inferencias sobre el pensamiento de los estudiantes. En cambio, tras la participación en el programa la mayoría de ellos fueron capaces de establecer dichas inferencias y además se trasladaron desde comentarios evaluativos sobre la dicotomía correcto/incorrecto hasta la utilización de las palabras o actos de los estudiantes como evidencias de los diferentes tipos de pensamiento. Los cambios observados, tanto en los maestros en activo como en los estudiantes para maestro, muestran que los conocimientos basados en la investigación pueden ser utilizados en los programas de formación como el contenido que debe ser aprendido para dotar de sentido al pensamiento matemático de los estudiantes.

1.4.2. Uso de las Trayectorias de Aprendizaje en programas de formación inicial centrados en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

La introducción de la idea de trayectoria hipotética de aprendizaje como un referente para ayudar a los estudiantes para maestro y profesores de matemáticas a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, ha permitido caracterizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes a través del reconocimiento del elemento matemático cuya comprensión determina un avance en el aprendizaje conceptual de los estudiantes *Key Developmental Undersatanding* (KDU; Simon, 2006). Estas investigaciones están empezando a mostrar descriptores que informan sobre el inicio del desarrollo de esta competencia en los programas de formación inicial y sobre diseño instruccional de propuestas formativas (Sánchez-Matamoros et al., 2015; Llinares et al., 2016).

En una investigación con estudiantes para profesor de Educación Secundaria**,** Sánchez-Matamoros et al. (2015) analizaron el desarrollo de las tres destrezas de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes a través de un módulo de enseñanza diseñado *ad hoc* para trabajar en el dominio de la derivada. En este estudio, ocho estudiantes para profesor de Matemáticas de Educación Secundaria participaron en un módulo en el que se les presentó información teórica sobre los elementos matemáticos que conforman el concepto de derivada en los distintos modos de representación, sobre la demanda cognitiva requerida para resolver los distintos tipos de problemas y una trayectoria hipotética de aprendizaje que reflejaba las características de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de Educación Secundaria. Además, los estudiantes para maestro resolvieron dos tareas que tenían como objetivo averiguar cómo estos futuros profesores empezaban a reconocer las evidencias en las respuestas de los estudiantes que mostraban características de la comprensión del concepto de derivada. Los resultados obtenidos mostraron una mejora de las tres destrezas. Esta mejora se hallaba vinculada a la comprensión de la manera en la que los estudiantes de secundaria usaban los elementos matemáticos en sus respuestas a problemas de derivadas y permitió a Sánchez-Matamoros y sus colegas caracterizar tres descriptores de los grados de desarrollo de la competencia (bajo, medio y alto, Figura 1.1) determinados por la manera en la que los estudiantes para profesor de matemáticas consideraban la comprensión de elementos del concepto de derivada como *Key Developmental Understanding* (KDU; Simon, 2006). Además, la información proporcionada a los estudiantes para maestro sobre el concepto de derivada y las características de su desarrollo en Educación Secundaria, les permitió compartir un discurso profesional sobre el contenido matemático y sobre la comprensión de los conceptos matemáticos en el que aportaban descripciones detalladas con las que interpretar la comprensión puesta de manifiesto por las respuestas de los estudiantes.

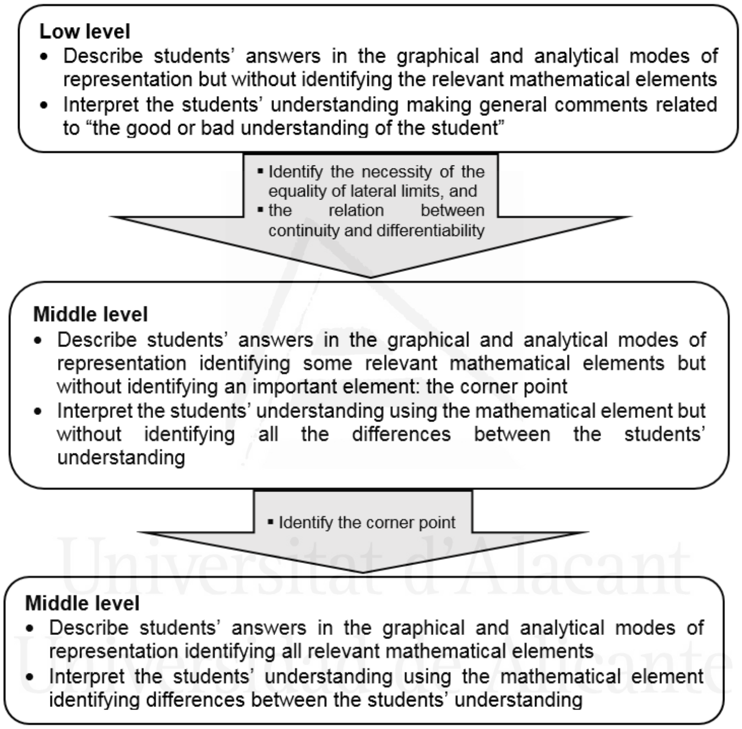


Figura 1.1. Grados de desarrollo de la competencia en el dominio de la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2015, p. 1325)

Del mismo modo y tomando como sujetos a estudiantes para profesor de matemáticas, Llinares et al. (2016), en el dominio de la clasificación de cuadriláteros, consideraron como un KDU la comprensión por parte de los estudiantes de secundaria de las relaciones inclusivas en dicha clasificación. Esta consideración se sustenta bajo la premisa de que la comprensión de las relaciones inclusivas en la clasificación de cuadriláteros es una componente que requiere un cambio en la capacidad del estudiante para pensar y/o percibir relaciones. Llinares y sus colegas mostraron tres cambios en los estudiantes para profesor a lo largo del módulo con relación a si consideraban las relaciones inclusivas un KDU en la compresión por parte de los estudiantes. Los cambios mostraron tres grupos de estudiantes para profesor en relación a lo que estos consideraban comprensión por parte de los estudiantes (Figura 1.2): *a)* Estudiantes para profesor que consideran que los estudiantes de secundaria logran la comprensión cuando representan particiones de conjuntos individuales *b)* Estudiantes para profesor que consideran que los estudiantes de secundaria logran la comprensión cuando representan particiones en conjuntos no individuales y dominan el uso retórico de la teoría relacionada con las clasificaciones inclusivas y *c)* Estudiantes para profesor que consideran que los estudiantes de secundaria logran la comprensión cuando representan clasificaciones inclusivas (reconocen las relaciones inclusivas como KDU) y logran comprender satisfactoriamente la teoría relacionada con las clasificaciones inclusivas.

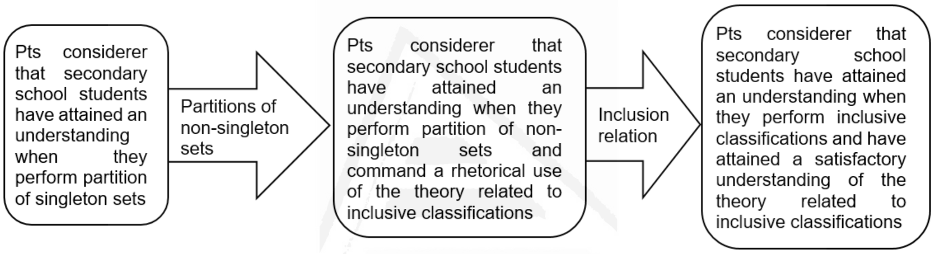


Figura 1.2. Desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de Secundaria sobre el proceso de clasificación de cuadriláteros (Llinares et al., 2016, p. 2168)

En este sentido, Sánchez-Matamoros et al. (2017) analizaron el desarrollo de la competencia en estudiantes para maestro de Educación Infantil que se encontraban participando en un módulo sobre la magnitud longitud y su medida. Sánchez-Matamoros y sus colegas enfocan este desarrollo desde la perspectiva de la instrumentación de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Verillon & Rabardel, 1995) entendida como la construcción o evolución de esquemas de acción instrumental en el estudiante para maestro que le ayudan a entender las potencialidades y restricciones de la trayectoria como referente para razonar sobre la práctica. Los resultados de este estudio muestran que el aprendizaje, por parte de los estudiantes para maestro, de cómo usar una trayectoria hipotética de aprendizaje se produce de manera progresiva. Desde esta perspectiva se considera que para desarrollar los esquemas de acción instrumental se necesita, implícitamente, reconocer las características de la comprensión de los estudiantes identificando los elementos matemáticos involucrados en la situación de enseñanza-aprendizaje e interpretando sus respuestas como paso previo a la propuesta de nuevas tareas que ayuden al estudiante a continuar con su progreso en el aprendizaje. De esta manera, que los estudiantes para maestro instrumentalicen una trayectoria hipotética de aprendizaje se entiende como una evidencia del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1.3).

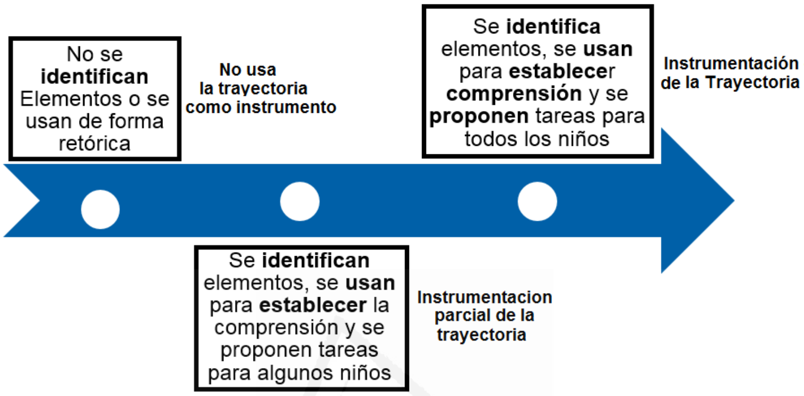


Figura 1.3. Características del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños de infantil sobre la longitud y su medida (traducida de Fernández et al., 2018)

La investigación emergente sobre el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en los programas de desarrollo profesional muestra que a medida que los maestros dan sentido a las trayectorias, estas pueden apoyar la selección de las tareas de instrucción (Wilson et al., 2015), y ayudar a focalizar la atención en el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington, 2012; Llinares et al., 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2015; Wickstrom et al., 2012; Wilson, 2009). Así, las trayectorias de aprendizaje pueden proporcionar una referencia para que los estudiantes para maestro/profesor centren su mirada en la comprensión de los estudiantes, diferenciando grados de comprensión y ayudándolos a proponer las decisiones de enseñanza centradas en la progresión conceptual del estudiante.

Considerando que las trayectorias de aprendizaje se han identificado como un constructo adecuado para maestros y profesores, en nuestro trabajo utilizaremos una trayectoria hipotética de aprendizaje de los estudiantes de Educación Primaria sobre las fracciones como marco de referencia para estructurar la mirada profesional de los estudiantes para maestro del pensamiento fraccionario de los estudiantes y analizar su desarrollo en el contexto de un programa de formación inicial. La elección del concepto de fracción viene determinada por su consideración como uno de los tópicos matemáticos más difíciles de adquirir tanto por los estudiantes de Educación Primaria como para los estudiantes para maestro (Lamon, 1999, 2007).

Puesto que la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes requiere que el estudiante para maestro aprenda a usar su conocimiento para identificar elementos matemáticos importantes en las estrategias de los estudiantes, para interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y para decidir cómo continuar teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes, en el siguiente apartado se ha hecho una revisión sobre el conocimiento que tienen los estudiantes para maestro sobre las fracciones.

1.5. CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO SOBRE LAS FRACCIONES

La comprensión del dominio de las fracciones es considerada como fundamental para el éxito futuro en matemáticas más avanzadas como el álgebra o la probabilidad (Clarke & Roche, 2009; Van Steenbrugge, Lesage, Valcke, & Desoete, 2014). Sin embargo, el National Mathematics Advisory Panel (2008) afirmó que la dificultad en el aprendizaje de fracciones es omnipresente y es un obstáculo para seguir progresando en matemáticas y otros dominios dependientes de matemáticas, como el álgebra. Del mismo modo, para Lamon (2007), los contenidos de las fracciones, junto con los de razón y la proporcionalidad son los que tienen un desarrollo más prolongado, los más difíciles de enseñar, los más complejos matemáticamente, los más desafiantes cognitivamente y los más esenciales para el éxito en matemáticas y ciencias superiores.

Los estudios sobre el conocimiento que tiene los estudiantes para maestro de las fracciones han mostrado que, por lo general, a pesar de disponer de un conocimiento procedimental sobre las fracciones, muestran dificultades para alejarse de los procedimientos y utilizar el *pensamiento fraccionario*, es decir, la capacidad para pensar en las fracciones como números en un sistema. Esto les genera problemas para comprender los significados que hay detrás de los procedimientos y el funcionamiento de estos (Buforn et al., 2018; Olanoff, Lo & Tobias, 2014).

Las investigaciones previas focalizadas en analizar el conocimiento sobre fracciones que poseen los estudiantes para maestro han sido estudios centrados principalmente en los significados de fracción (Buforn & Fernández, 2014; Buforn et al., 2018; Chinnappan, 2000; Domoney, 2002; Lee, Brown, & Orrill, 2011; Llinares & Sánchez, 1997; Lo & Grant, 2012; Utley & Reeder, 2012; Van Steenbrugge et al., 2014; Vula & Kingji-Kastrati, 2018; Xie & Masingila, 2017), en las distintas operaciones con fracciones y en la resolución de problemas (Ball, 1990; Borko et al., 1992; Depaepe et al., 2015; Lee, 2017; Li & Kulm, 2008; Lin, Becker, Byun, Yang, & Huang, 2013; Newton, 2008; Vula & Kingji-Kastrati, 2018; Young & Zientek, 2011), y en las dificultades que afrontan los estudiantes para maestro cuando se les solicita que diseñen enunciados de problemas o diagramas que se adecuen a ciertas expresiones con fracciones dadas (e.g. 3/4 : 1/4) (Ball, 1990; Kılıç, 2013; Lo & Luo, 2012; Simon 1993; Toluk-Uçar, 2009; Xie & Masingila, 2017).

Estas investigaciones han mostrado que los estudiantes para maestro disponen de un conocimiento poco flexible de las fracciones, y por lo tanto, encuentran el tópico difícil de enseñar (Ma, 2010) y se muestran faltos de confianza a la hora de abordar la enseñanza del concepto de fracción (Beswick, Watson, & Brown, 2006).

1.5.1. Investigaciones sobre los significados de fracción

Por lo que respecta a las investigaciones, centradas en el conocimiento sobre el significado de fracción de los estudiantes para maestro, Van Steenbrugge et al. (2014) realizaron un test con 290 estudiantes para maestro de primaria (184 de primer año y 106 de último año), para analizar su conocimiento conceptual y procedimental de estos sobre fracciones. En particular, su objetivo era identificar si las respuestas de los estudiantes para maestro reflejaban las mismas dificultades que las de los estudiantes de primaria, así como la habilidad de los estudiantes para maestro para explicar/justificar la razón subyacente en los procedimientos matemáticos. El test que los estudiantes para maestro respondieron contenía 39 ítems para evaluar el conocimiento conceptual sobre fracciones (testados en estudios empíricos previos), y 13 ítems para evaluar el conocimiento procedimental (extraídos de diferentes libros de texto). El conocimiento sobre fracciones que manifestaron los estudiantes para maestro reflejaba los mismos conocimientos que muestran los estudiantes de primaria. Además, los estudiantes para maestro mostraron poca habilidad para explicar/justificar el significado conceptual subyacente en los procedimientos.

Más recientemente, Buforn et al. (2018) analizaron el conocimiento de los estudiantes para maestro sobre el razonamiento proporcional. En su estudio participaron 91 estudiantes para maestro que resolvieron un cuestionario en el que se les solicitaba resolver 12 problemas, seis de ellos relativos al esquema fraccionario (interpretaciones del concepto de fracción y formas de razonar), dos sobre la distinción de situaciones proporcionales de las no proporcionales y cuatro relativos a la comparación de razones. Los resultados obtenidos por Buforn y sus colegas indican que los futuros maestros, en general, tuvieron éxito en la resolución de aquellos problemas que se podía aplicar un procedimiento previamente aprendido, como la regla de tres o el algoritmo de la división, pero tuvieron dificultades en los que implicaban reconocer la relación entre las cantidades y no se podía aplicar un procedimiento aprendido. Estos resultados se pueden relacionar con los obtenidos por Van Steenbrugge et al. (2014) en el sentido de la desconexión entre el conocimiento procedimental puesto de manifiesto y la justificación conceptual de dicho procedimiento.

En cuanto a la comparación de fracciones, estudios como los de Chinnappan (2000) y Domoney (2002) mostraron resultados similares a los anteriores ya que la mayoría de los participantes en sus estudios eligieron métodos procedimentales para comparar fracciones. Por ejemplo, Chinnappan analizó las respuestas de ocho estudiantes para maestro a la siguiente cuestión "*¿Cuál de estas dos fracciones es mayor, 4/7 o 2/3?*". Aunque la mayoría de ellos usaron el procedimiento de hallar denominador común para transformar las fracciones en fracciones equivalentes, al solicitarles que utilizaran una estrategia diferente, o que escribieran otra fracción equivalente, mostraron que no eran capaces de establecer relaciones entre las diferentes representaciones de fracción, que es un conocimiento clave para ser maestro.

Del mismo modo, Domoney (2002) entrevistó a cuatro estudiantes para maestro para identificar su conocimiento sobre fracciones y las técnicas que usaban para resolver problemas. A los estudiantes para maestro se les solicitó que explicaran cómo habían resuelto cinco tareas de ordenación de fracciones en las que aparecían, en las dos primeras solo fracciones y en las tres siguientes una combinación de fracciones y decimales. Las respuestas de los estudiantes para maestro mostraron que tenían una fuerte tendencia a utilizar el significado parte-todo de fracción (por ejemplo, convirtiendo las expresiones decimales en fracción para después compararlas) o bien dificultades con las equivalencias por no reconocer la posibilidad de conversión en fracciones decimales (por ejemplo, una estudiante para maestro convirtió todas las expresiones en porcentajes). Las dificultades mostradas por estos estudiantes para maestro se vinculan con el establecimiento de relaciones con los diferentes modos de representación de las fracciones.

En cuanto al conocimiento de los diferentes significados de fracción, los resultados obtenidos por estudios como el de Vula y Kingji-Kastrati (2018) mostraron que los 58 estudiantes para maestro que respondieron a un test de conocimiento sobre los distintos significados de fracción presentaban una predominancia en los ítems centrados en el significado parte-todo frente a los de significado de razón, cociente, operador y medida. Sin embargo, los estudiantes para maestro mostraron disponer de conocimiento insuficiente, incluso para la parte-todo, cuando la representación del todo se cambia. En este sentido, solo el 31.4% de los estudiantes para maestro respondió al ítem 3 (Figura 1.4) de manera correcta. En la mayoría de los casos, los estudiantes para maestro consideraron que el todo estaba formado por la superficie circular completa. Este resultado indica la influencia de la representación del todo en la conceptualización de la relación parte-todo, lo que apoya la dificultad que tiene los estudiantes para maestro para identificar la unidad de referencia en ciertas situaciones (Buforn & Fernández, 2014; Lee et al., 2011; Xie & Masingila, 2017).

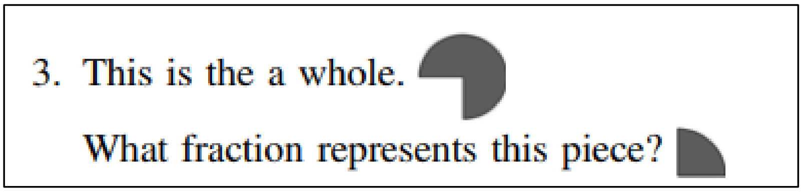


Figura 1.4. Actividad de identificación de fracciones (Vula & Kingji-Kastrati, 2018)

En este sentido, Buforn y Fernández (2014) solicitaron a 56 estudiantes para maestro resolver tareas de reconstrucción de la unidad sobre fracciones (Figura 1.5). Los resultados de su estudio mostraron que, de los 56 estudiantes para maestro, 25 en la tarea 3 y 33 en la tarea 4, no lograron identificar ni la fracción unitaria ni el todo y solo 16 de los 56 EPM lograron identificar la unidad y reconstruir la fracción solicitada en ambas tareas. Estos resultados subrayan las dificultades de los estudiantes para maestro para identificar la unidad de referencia, así como para aceptar que la unidad puede estar representada por más de una pieza. Las dificultades experimentadas por los estudiantes para maestro del estudio de Buforn y Fernández (2014) se han identificado también en maestros en activo.

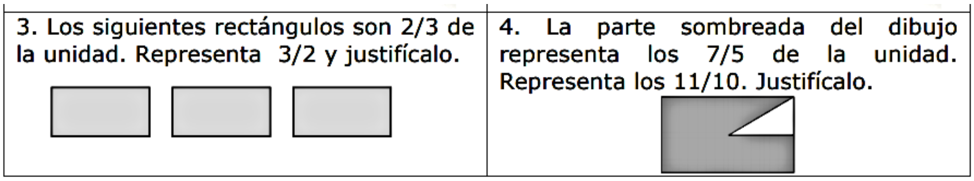


Figura 1.5. Actividades de reconstrucción de la unidad (Buforn & Fernández, 2014)

Lee et al. (2011), en un estudio en el que analizaron el razonamiento sobre representaciones gráficas de fracciones y decimales, entrevistaron a 12 maestros de grado medio tras la realización de una prueba escrita en la que respondieron a ítems que evaluaban la manera de dotar de sentido a las representaciones gráficas sobre varias operaciones con fracciones y decimales. Los maestros que fueron capaces de identificar correctamente o usar flexiblemente la unidad de referencia adaptaron mejor su conocimiento matemático sobre fracciones para seleccionar la opción adecuada, mientras que los maestros que no identificaron la unidad de referencia usaron diferentes estrategias que, por su limitada capacidad de generalización, llevaron a los maestros a hacer suposiciones incorrectas sobre las tareas y las opciones que se tomaron. Así, un tercio de los maestros mostraron dificultades para reconocer que la Figura 1.6 podía representar 2/3 sombreados de un todo, 1/2 no sombreado de 2/3 o bien 3/2. Para ellos la única representación válida era la de 2/3 del todo. Estos maestros mostraban dificultades en la identificación de la unidad de referencia como un valor fijo e inflexible en la tarea siendo incapaces de cambiar su comprensión sobre cuál era el todo en las diferentes situaciones. Estudios como los de Buforn y Fernández (2014) y Lee et al. (2011) muestran que las dificultades de los maestros y estudiantes para maestro con las unidades de referencia desempeña un papel significativo en la comprensión de las representaciones gráficas de fracciones.

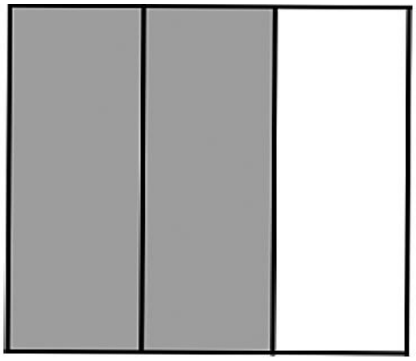


FIGURE 3 Area model that can be interpreted as showing 2/3 shaded; 1/2 of 2/3 unshaded; or 3/2 in all.

Figura 1.6. Representación gráfica con múltiples interpretaciones en función de la unidad de referencia tomada (Lee et al., 2011, p. 210)

Estas investigaciones indican diferentes aspectos del conocimiento sobre las fracciones que generan dificultades en los estudiantes para maestro. En este sentido, las investigaciones sugieren que los estudiantes para maestro disponen de un cierto conocimiento procedimental sobre el concepto de fracción como parte-todo, aunque presentan dificultades con los conocimientos conceptuales (Buforn et al., 2018), las equivalencias (Van Steenbrugge et al., 2014), ordenación de fracciones (Domoney, 2002) y reconstrucción del todo, es decir con la identificación de la unidad de referencia (Buforn & Fernández, 2014; Lee et al., 2011; Vula & Kingji-Kastrati, 2018). Además, se muestra la influencia de los modos de representación para dotar de sentido a la relación parte-todo.

1.5.2. Operaciones con fracciones y resolución de problemas

En el mismo sentido apuntan los resultado obtenidos por los estudios realizados a principios del s. XXI, como los de Young y Zientek (2001) y Newton (2008), centrados en el conocimiento de los estudiantes para maestro para resolver operaciones con fracciones que mostraron que aunque estos conocen los procedimientos en la adición y sustracción de fracciones, dichos procedimientos están basados en reglas por lo que tienen dificultades para explicar conceptualmente lo que apoya a los procedimientos. Del mismo modo, estos estudios mostraron que un elevado porcentaje de estudiantes para maestro mostraban dificultades generales en cuanto a los procedimientos en las multiplicaciones y divisiones con fracciones.

En este sentido Depaepe et al. (2015) pusieron en duda que los estudiantes para maestro dispusieran de conocimiento suficiente para afrontar la enseñanza de los números racionales tras analizar los resultados obtenidos en un estudio en el que solicitaron a 192 estudiantes para maestro (158 de primaria y 34 de secundaria) responder a un cuestionario de 48 ítems sobre fracciones y números decimales, en el que se incluían ítems de las cuatro operaciones básicas adición, sustracción, multiplicación y división. Sus resultados mostraron que, después de haber recibido un curso sobre dicho contenido, los estudiantes para maestro solo fueron capaces de responder correctamente a tres cuartos de los ítems. Por ejemplo, ante los problemas considerados de mayor dificultad por los investigadores de este estudio: "*La abuela hizo mazapanes con harina de almendra y un huevo blanco. Le dio 2/5 de los mazapanes a Clara. Después, usó 2/3 de lo que le quedaba para decorar un pastel. ¿Qué parte de mazapán quedó?*" y *"¿Cuántos números hay entre 7.2 y 7.4?"* solo un 34% de respuestas correctas fueron aportadas por los estudiantes para maestro para el primero y un 55% para el segundo.

Del mismo modo, basándose en los datos del cuestionario y entrevistas adicionales realizadas a estudiantes para maestro de primaria y secundaria sobre la división de fracciones, Ball (1990) concluyó que el conocimiento del contenido sobre la división de fracciones de los estudiantes para maestro que participaron en su estudio era limitado ya que, aunque la mayoría de las veces fueron capaces de resolver correctamente una tarea de división de fracciones utilizando el procedimiento de multiplicar por la inversa, muy pocos fueron capaces de proporcionar una representación gráfica del procedimiento seguido. Estos resultados denotan dificultades conceptuales para comprender el significado del algoritmo para la división de fracciones. En la misma línea, estudios como el de Tirosh y Graeber (1989) sugieren que las dificultades que afrontan los estudiantes para maestro cuando deben resolver este tipo de problemas están vinculadas a la identificación de la división con el modelo primitivo de reparto identificado por Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985).

Más recientemente, Lee (2017) en su estudio centrado en analizar el conocimiento de los estudiantes para maestro para resolver problemas de división-medida de fracciones y para utilizar unidades de referencia, presentó a 111 estudiantes para maestro el siguiente problema: "*La figura mostrada son 3/5 del todo. ¿Cuántos 1/20 del todo puedes formar con los 3/5? Soluciona el problema y proporciona una representación gráfica usando el* *modelo de medidas dado para mostrar tu razonamiento hasta llegar a la solución*.” (Figura 1.7). De los 111 estudiantes para maestro que participaron en el estudio, 52 (47%) respondieron correctamente, 42 (38%) respondieron de manera incorrecta y 17 (15%) no dieron ninguna solución. De los 52 estudiantes para maestro que resolvieron el problema correctamente, 13 lo hicieron razonando con cantidades a través de una representación gráfica y 8 razonando por medio de cálculos que no estuvieron vinculados explícitamente con las cantidades. El resto de ellos (31 estudiantes para maestros) realizaron un cálculo algorítmico, la gran mayoría utilizó el procedimiento de multiplicar por la inversa. Estos resultados muestran las dificultades que tienen los estudiantes para maestro para resolver este tipo de problemas, y para proponer representaciones adecuadas con diferentes unidades y para utilizar diferentes estrategias de resolución.

The stick shown below is $\frac{3}{5}$ of a whole stick. How many $\frac{1}{20}$ sticks can you make from the $\frac{3}{5}$ stick? Solve the problem and provide a pictorial representation by using the given length model to show your reasoning to reach your solution.

Figura 1.7. Problema de división medida utilizado por Lee (2017).

Del mismo modo, Li y Kulm (2008), en un estudio con 46 estudiantes para maestro sobre el conocimiento sobre la división de fracciones y el significado de su algoritmo, mostraron que el 93% de los estudiantes para maestro contestaron correctamente a la pregunta “*Encuentra el valor de 7/9:2/3*”. Sin embargo solo dos de los 46 estudiantes para maestro identificaron que el siguiente cálculo era correcto*: a/b: c/d = (a:c) / (b:d)*. La mayoría de los que indicaron que no era correcto afirmaron que se debía resolver la división de fracciones mediante el procedimiento de *multiplicar por la inversa.* Además, cuando se les preguntó que justificaran cómo explicarían a sus alumnos que (2/3):2= 1/3 y 2/3:1/6= 4, la mayoría de los estudiantes para maestro dieron una explicación errónea y ninguno de ellos intentó justificar el motivo por el cual el procedimiento de “*multiplicar por la inversa*” funciona.

En el mismo sentido, Vula y Kingji-Kastrati (2018) en su estudio solicitó a 58 estudiantes para maestro que respondieran a un test de conocimiento sobre fracciones de 20 ítems sobre los distintos significados de fracción y sobre adición y sustracción de fracciones (incluyendo ítems procedimentales, e.g. *Resuelve el problema 1/3+1/2 =* , y conceptuales, e.g. *Explica cómo has determinado tu respuesta utilizando una* *representación de 1/4+2/3=*). Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes para maestro tuvieron dificultades para resolver problemas en los que se requería un conocimiento conceptual en comparación con aquellos que requerían el uso de simples procedimientos (11.6% vs 79.3% de media de acierto).

Los resultados de estos estudios muestran que, aunque los estudiantes para maestro disponen de cierto conocimiento procedimental para la resolución de problemas con fracciones (Depaepe et al., 2015) y para calcular operaciones con fracciones, muestran carencias a la hora de justificar el significado conceptual de dichos procedimientos (Ball, 1990; Li & Kulm, 2008; Vula & Kingji-Kastrati, 2018).

1.5.3. Enunciados de problemas

Por lo que respecta al conocimiento de los estudiantes para maestro para enunciar problemas, Simon (1993) solicitó a 33 estudiantes para maestro que respondieron a cinco problemas de respuesta abierta, para evaluar dos aspectos del conocimiento de estos sobre la división, la conexión entre el conocimiento procedimental y el conceptual y el conocimiento de las unidades. Dos de estos problemas, se referían directamente a la división con fracciones: ítem 2 "*Escribe un problema que se resuelva con la siguiente operación 3/4 dividido entre 1/4*" e ítem 4: "*Sergio tiene 35 tazas de harina. Para cocinar una galleta Sergio necesita 3/8 de taza. Si cocina tantas galletas como pueda con la harina que tiene, ¿cuánta harina le sobrará*?". El análisis de los resultados mostró que el 70% de los participantes no fueron capaces de crear un problema adecuado para el ítem 2 mientras que para el problema de las galletas el 84% de los estudiantes para maestro dieron alguna respuesta errónea o no respondieron, mostrando que el contenido matemático en cuanto a la división de fracciones de los estudiantes para maestro es débil, procedimental y escasamente conectado.

En este sentido, Xie y Masingila (2017) condujeron un estudio con 10 estudiantes para maestro a los que se les solicitó que inicialmente resolvieran problemas de fracciones para, posteriormente, pedirles que los enunciaran y, finalmente, resolvieran los problemas enunciados. Los resultados obtenidos les permitieron identificar algunas dificultades que los estudiantes para maestro afrontaron durante el proceso:

- Dificultades para enunciar una situación con fracciones. Por ejemplo, al pedirles que enunciaran un problema adecuado a 2/3 : 1/2, una pareja de estudiantes para maestro propuso una situación para 1/3 x 2 y otra propuso un problema que con números naturales.
- Falta de sentido en la justificación de operaciones. Por ejemplo, cuando debían enunciar un problema que diera como resultado 3/5, enunciaron: “Si en una ciudad 12/19 de las personas están casadas y 2/3 de los hombres están casados, ¿cuántas mujeres están casadas?” y lo resolvieron: 12/19 - 6/9 = 6/10 = 3/5. Al obtener el resultado esperado no justificaron las operaciones mostrando errores de comprensión en la resta de fracciones, confusión operacional y conceptos erróneos. Otra pareja de estudiantes propuso el siguiente problema cuando tenía que proponer una situación para 2/3 : 1/2: “Tengo 2/3 de 3 manzanas y las quiero cortar en 1/2 ¿Cuántas partes de manzana tengo?” mostrando que no distinguían la diferencia entre la situación representa (2/3 x 3): 1/2 y la solicitada (2/3 : 1/2).
- Errores conceptuales sobre el significado de multiplicación. Por ejemplo, una pareja de estudiantes que debían enunciar un problema para representar ¼ x 3 no sabían si eso implicaba 1/4 de tres o tres de 1/4.
- Dificultades con el concepto de unidad. Por ejemplo, una pareja de estudiantes para maestro enunció el siguiente problema: “Si hay 1/2 de un pastel y Adam se come 1/4. ¿Cuánto se ha comido Adam?” Para resolverlo respondieron: 1/2 – 1/4 = 1/4, mostrando que ignoraban que la unidad de 1/4 era la mitad del pastel y no el pastel entero).
- Falta de comprensión conceptual de problemas matemáticos. El 10% de los problemas propuestos no eran problemas, sino sentencias o preguntas que pueden responderse de memoria. Por ejemplo “Si las fracciones son 2/3 y 3/5, ¿cómo conseguimos un denominador común?”.

Los resultados obtenidos por Xie y Mansiglia (2017) muestran las dificultades de los estudiantes para maestro para enunciar y resolver problemas con fracciones a causa de su falta de comprensión conceptual y operacional de las fracciones y las dificultades para identificar la importancia de la unidad de una fracción, especialmente a la unidad del resultado de una operación con fracciones.

Los resultados de estas investigaciones han mostrado las dificultades de los estudiantes para maestro para enunciar y resolver problemas con fracciones. Disponen de un conocimiento matemático procedimental débilmente conectado con el conceptual (Simon, 1993; Xie & Mansiglia, 2017).

En resumen, las investigaciones previas han mostrado que la comprensión de las fracciones presenta una problemática especial para los estudiantes para maestro (Olanoff et al., 2014). Estos problemas se derivan de la limitada comprensión del significado de fracción y de un conocimiento procedimental en relación con los procedimientos de cálculo de fracciones que se halla escasamente conectado con el significado subyacente a dichos procedimientos. Estas dificultades subrayan la necesidad de ajustar los programas de formación de los estudiantes para maestro para mejorar estos aspectos, así como para empezar a establecer relaciones entre los procedimientos y los conceptos vinculados a los mismos (Vula & Kingji-Kastrati, 2018) ya que su futuro trabajo como maestros tendrá un impacto directo en el conocimiento y comprensión que adquirirán sus estudiantes (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Por otra parte, para afrontar su práctica profesional de manera efectiva, los estudiantes para maestro necesitan la vinculación de estos conocimientos teóricos con la práctica. En este contexto, diversas investigaciones se han encargado de establecer relaciones entre la comprensión que los estudiantes para maestro disponen de un tópico matemático y su conocimiento para enseñar dicho tópico (Chick, 2010) sugiriendo la dificultad de esta transferencia para afrontar su práctica profesional (Depaepe et al., 2015). Como formadores de profesores surge la necesidad de vincular en los programas de formación docente el binomio teoría-practica, ayudando a los estudiantes para maestro a adquirir las competencias necesarias para desarrollar su función. De esta manera, se identifica como necesario el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las fracciones en los programas de formación de maestros.

1.6. NUESTRO ESTUDIO

La revisión de la literatura nos ha permitido identificar que la competencia mirar profesionalmente es un elemento crítico que todo maestro debe adquirir. Numerosas investigaciones han tratado de identificar contextos para el desarrollo de esta competencia mostrando, por una parte, que la competencia se puede empezar a desarrollar en los programas de formación inicial y, por otra, que sin la ayuda de un marco de referencia sobre el que mirar puede resultar una tarea complicada (Levin et al., 2009; Mitchell & Marin, 2015; Nickerson, Lamb, & LaRochelle, 2017; Santagata & Angelici, 2010; van Es, Tunney, Goldsmith, & Seago, 2014).

Aunque estas investigaciones se han desarrollado en diferentes contextos y con diferentes sujetos, una de las suposiciones comunes que subyace a todas ellas es que el desarrollo en la habilidad de los maestros y estudiantes para maestro para mirar profesionalmente puede inferirse de su discurso profesional. Más específicamente, estos estudios miran el desarrollo de la competencia con los cambios en el discurso desde descripciones generales de estrategias a descripciones que incluyen detalles matemáticamente relevantes sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Desde esta perspectiva, parece que el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente está asociado con la mejora de la calidad del discurso profesional producido por los maestros y estudiantes para maestro. En este sentido, Mason (2016) defiende que existe una necesidad urgente de conducir estudios en los que se permita a los maestros y estudiantes para maestro enriquecer tanto su repertorio de acciones pedagógicas como el discurso que usan para justificar el uso de dichas acciones.

El discurso profesional adquiere diferentes significados para diferentes investigadores. En este trabajo, definimos el discurso profesional como la comunicación (verbal o escrita) que los estudiantes para maestro utilizan cuando debaten o articulan su pensamiento sobre la materia, los estudiantes y su aprendizaje y los maestros y su enseñanza (Wilson & Berne, 1999). En nuestro caso específico, examinamos el discurso profesional escrito de los estudiantes para maestro mientras intentan dar sentido al pensamiento matemático de los estudiantes.

Investigaciones previas están comenzando a dar cuenta del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente en los estudiantes para maestro utilizando trayectorias hipotéticas de aprendizajes como guía, bien a través de los elementos matemáticos inherentes a las transiciones entre los diferentes niveles de comprensión (Llinares et al., 2016) o a través de su instrumentalización (Sánchez-Matamoros et al., 2017). Sin embargo, las trayectorias de aprendizaje han sido identificadas como un constructo válido para actuar como marco de referencia en la enseñanza centrada en el pensamiento de los estudiantes que proporciona a los estudiantes para maestro un lenguaje matemático específico con el que interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington, Wilson, Sztajn, & Webb, 2016).

Este lenguaje puede permitir a los estudiantes para maestro crear un sistema para seleccionar, clasificar y nombrar elementos del pensamiento de los estudiantes (Wells, 1999) que pueden ayudarlos a identificar, interpretar y tomar decisiones de acción. En este sentido, el discurso escrito por los estudiantes para maestro usando este lenguaje específico puede informarnos sobre la forma en la que miran profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Por lo tanto, podemos entender el aprendizaje de los estudiantes para maestro "como un cambio en el discurso a lo largo del tiempo" (Wilson, Sztajn, Edgington, Webb, & Myers, 2017, p. 570). Desde esta perspectiva, los cambios en el discurso de los estudiantes para maestro sobre el pensamiento matemático de los estudiantes se pueden interpretar como un indicador del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. En este contexto, una hipótesis plausible es que proporcionar a los estudiantes para maestro una trayectoria hipotética de aprendizaje les ayudará a mejorar su discurso profesional y, por lo tanto, a mejorar su habilidad para mirar profesionalmente.

En nuestro estudio, centrado en un contexto de formación de maestros de educación primaria y considerando los resultados de investigaciones previas, diseñaremos un entorno de aprendizaje construido alrededor de una trayectoria hipotética sobre el aprendizaje de los estudiantes de primaria del concepto de fracción como parte todo. En este entorno de aprendizaje los estudiantes para maestro responderán a tres tareas profesionales en las que, utilizando como marco de referencia la información teórica de la trayectoria hipotética de aprendizaje, deberán identificar e interpretar el pensamiento de los estudiantes y proponer actividades para ayudarles a progresar en su comprensión de las fracciones.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

"So, on the one hand we notice all the time, make choices, and get through the day. On the other hand, there is so much more that we could notice, so many more options we could choose between"

John Mason

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

Considerando que nuestro objetivo es caracterizar cómo los estudiantes para maestro utilizan una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el significado de fracción parte-todo para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y proponer decisiones de acción para ayudarles progresar en su comprensión sobre las fracciones, nuestro estudio usa dos marcos teóricos: el marco referente a la competencia una mirada profesional y el marco referente a las trayectorias de aprendizaje.

Este capítulo está organizado en tres apartados. En el primero de ellos presentamos la conceptualización de la competencia mirar profesionalmente que se ha adoptado a partir de la confluencia de los postulados de Mason (2011) y Jacobs et al. (2010). En el segundo apartado, describimos la conceptualización de trayectoria de aprendizaje utilizada concretándola en el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el significado de fracción como parte todo y sus diferentes representaciones utilizada. Finalmente presentamos los objetivos de la investigación.

2.1. CONCEPTUALIZACIÓN DE LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

Las investigaciones centradas en el desarrollo profesional del maestro (Levin et al., 2009; Mason, 2002; van Es & Sherin, 2002) han identificado la necesidad de que estos adquieran la competencia mirar profesionalmente (Professional Noticing) (Mason, 2002; van Es, 2011; vas Es & Sherin, 2002) como parte de su formación y a través de la experiencia. Desde esta perspectiva cada acto de enseñanza depende de la mirada profesional: mirar profesionalmente lo que hacen los niños, cómo responden, evaluar lo que se dice o se hace y considerar qué se puede decir o hacer después (Mason, 2002).

La competencia mirar profesionalmente se ha abordado desde diferentes perspectivas (Goodwin, 1994; Blömeke et al., 2015; Jacobs et al., 2010; Mason, 2002; van Es & Sherin, 2002) desde las que se subraya la necesidad de propiciar el desarrollo de los procesos de atención en los docentes. En este sentido, Mason (2002) introdujo el concepto de *awareness* (tomar consciencia) para caracterizar la capacidad de mirar como una consecuencia de la estructuración de los procesos de atención de los maestros sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Esta estructuración en la manera de atender las situaciones relevantes de enseñanza es necesaria porque las personas no son capaces de considerar lo que ocurre en una situación, prestando atención a aquellos detalles que en principio se espera que capten su atención (Simons & Chabris, 1999). Desde esta perspectiva mirar profesionalmente implica un movimiento o cambio en la atención. Mason (2011) estableció la distinción entre cinco estructuras de atención:

- *Holding holes*: atender a algo, pero sin discernir detalles,
- *Discernir detalles* (*discerning details*): atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones,
- *Reconocer relaciones (recognizing relationships*): establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente,
- *Percibir propiedades (perceiving properties*): ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades que pueden aparecen en otras situaciones y

- *Razonar en base a las propiedades acordadas (reasoning in the basis of agreed properties*): utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás a partir de razonamientos basados en definiciones y axiomas (p. 47).

Esta toma de consciencia resulta primordial para que los maestros sean capaces de identificar las ideas matemáticas que los estudiantes utilizan y puedan decidir sus próximos pasos de instrucción. En este sentido, Jacobs et al. (2010) particularizaron la perspectiva propuesta por Mason y conceptualizaron la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, a través de la interrelación de tres destrezas: "*atender* a las estrategias utilizadas por los niños, *interpretar* la comprensión de los niños y *decidir cómo responder* en función de la comprensión de los niños" (p.172).

La destreza *atender* implica identificar los detalles matemáticos relevantes en las estrategias utilizadas por los estudiantes. La identificación y descripción de estos detalles es importante porque proporcionan a los maestros información para poder reconocer la comprensión de los estudiantes.

La segunda destreza, *interpretar* el pensamiento matemático de los estudiantes en función de los elementos matemáticos identificados en sus estrategias. Al interpretar, los maestros deben ser consistentes tanto con los detalles específicos identificados en las estrategias de los estudiantes como con la información procedente de las investigaciones en didáctica de la matemática con relación a cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos.

La tercera destreza, *decidir cómo responder* implica proponer actividades para ayudar a los estudiantes a continuar progresando conceptualmente. Para Jacobs y sus colegas la manifestación de esta destreza no implica la existencia de una única respuesta mejor que las demás, sino cómo los maestros usan lo que han aprendido sobre la comprensión de los estudiantes a partir de la situación específica, y si su razonamiento es consistente con los resultados de las investigaciones sobre cómo comprenden los estudiantes los conceptos matemáticos.

La conceptualización de estas tres destrezas, más allá de identificar las respuestas de los estudiantes como correctas o incorrectas, exige que los maestros examinen la manera en la que estas respuestas son o no significativas para el aprendizaje de las matemáticas (Hines & McMahon, 2005; Wilson et al., 2013).

En nuestro estudio consideraremos la conexión de las conceptualizaciones aportadas por Mason (2011) y Jacobs et al. (2010). De esta manera entenderemos que la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes implica:

- *Atender* a las estrategias de los estudiantes *identificando y describiendo los detalles en las respuestas de los estudiantes*. Para ello, es necesario discernir los detalles, es decir, descomponer las respuestas de los estudiantes y distinguir los elementos matemáticos relevantes que intervienen en ellas de los que no lo son.
- *Interpretar* la comprensión de los estudiantes. Estableciendo relaciones entre los detalles previamente identificados en la situación y las investigaciones sobre cómo se desarrolla la comprensión de un tópico matemático.
- *Decidir cómo responder* percibiendo propiedades entendidas como el uso, para una nueva situación, de una inferencia o interpretación realizada desde la comprensión. En este caso para proponer nuevas actividades que ayuden al progreso conceptual del estudiante. Es decir, percibir propiedades en el sentido de usar la información inferida sobre la comprensión de los estudiantes para decidir cómo continuar con la instrucción.

Esta forma de entender la competencia docente mirar profesionalmente subraya el papel que desempeña el conocimiento específico para enseñar matemáticas (conocimiento sobre la manera en la que los estudiantes aprenden matemáticas y conocimiento sobre la enseñanza), ya que ayuda a reconocer lo que puede ser relevante en una situación de enseñanza, a dotarlo de sentido desde el conocimiento generado por las investigaciones en didáctica de las matemáticas y a proponer decisiones centradas en el progreso conceptual del estudiante (Wilson, Sztajn, Edgington, & Confrey, 2014).

En este ámbito de la formación docente, se plantea la cuestión de si es posible diseñar entornos de aprendizaje que favorezcan su desarrollo en contextos de formación inicial y de desarrollo profesional (Llinares, 2013b). Esta cuestión genera desafíos en cuanto al diseño de entornos de aprendizaje en los programas de formación y en la manera en la que se considera el papel desempeñado por el conocimiento para enseñar matemáticas (Dreher & Kuntze, 2015). En particular, de qué manera deben articularse los entornos de aprendizaje y qué tipo de tareas deben plantearse en los programas de formación inicial para apoyar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

En las últimas décadas se ha desarrollado una extensa agenda de investigación, tal y como se ha mostrado en el primer capítulo de esta tesis, con el objetivo de identificar diferentes contextos favorables para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en los programas de formación inicial (Stahnke et al., 2016).

Para apoyar el desarrollo de la mirada de los estudiantes para maestro sobre las estrategias y procedimientos usados por los estudiantes, en las investigaciones realizadas por el grupo de investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante, se usan tareas profesionales en las que se presentan varias respuestas escritas de estudiantes de primaria que muestran diferentes grados de comprensión en relación a un concepto matemático (Fernández et al., 2012; Llinares et al., 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2015). De esta manera, los estudiantes para maestro tienen que analizar respuestas de varios estudiantes a uno o varios problemas que muestran distintas características de la comprensión del concepto. La selección de las respuestas de los estudiantes para diseñar las tareas está basada en investigaciones previas de Didáctica de la Matemática sobre la comprensión de los conceptos matemáticos. Además, como guía, se les proporciona un documento teórico con información sobre los elementos matemáticos del concepto y sobre las características de la comprensión de los estudiantes (progresión en el aprendizaje) en forma de trayectoria hipotética de aprendizaje. Esta es una característica de la aproximación metodológica de nuestras investigaciones que la diferencia de otros trabajos realizados sobre la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández et al., 2018).

2.2. CONCEPTUALIZACIÓN DE TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE

Aunque las trayectorias de aprendizaje se han conceptualizado desde diferentes aproximaciones (Lobato & Walters, 2017) una de las características comunes es que proporciona un modelo de la progresión en el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares (niveles de progresión cada vez más sofisticados en el pensamiento matemático) vinculados a un objetivo de aprendizaje generado desde los resultados de investigaciones previas y un conjunto de posibles actividades que pueden apoyar dicha progresión del aprendizaje. La descripción de los posibles caminos que el aprendizaje de un concepto puede seguir tiene un carácter hipotético con relación a un grupo específico de niños. Sin embargo, la información sobre una trayectoria de aprendizaje proporciona referencias que pueden ayudar a los estudiantes para profesor a mirar de una manera estructurada el pensamiento matemático de los estudiantes.

La idea de trayectoria de aprendizaje ha generado diversas interpretaciones (Battista, 2011; Empson, 2011; Lobato & Walters, 2017). Estas diferencias radican en la distinción entre una *posible progresión conjeturada por un maestro* y una *progresión documentada por la investigación con estudiantes reales* (Empson, 2011). Otra de los temas que han generado alguna controversia es la utilización del término *trayectorias* o *progresiones* de aprendizaje. En este sentido, para Battista (2011) la distinción en el uso de ambos términos se vincula a la inclusión o no de una descripción del proceso de instrucción, las trayectorias de aprendizaje lo incluyen y las progresiones no. Más recientemente Lobato y Walters (2017), en un estudio sobre las diferentes aproximaciones a las trayectorias y progresiones de aprendizajes, consideran que la diferencia más notable estriba en la disciplina que lo use. Así, en el campo de la Educación Matemática se utiliza el término trayectoria de aprendizaje y en el campo de la educación científica se utiliza el término progresión.

En nuestra investigación (desde el campo de la Educación Matemática) tomamos la conceptualización de Trayectoria de Aprendizaje aportada por Simon (1995) quien las conceptualizó para referirse a las predicciones de los maestros como el camino por el que es posible que discurra el aprendizaje. Para Simon, las trayectorias de aprendizaje son hipotéticas por definición, la trayectoria que seguirá el aprendizaje no puede conocerse por adelantado, una trayectoria hipotética de aprendizaje caracteriza solo una tendencia esperada. Desde esta perspectiva se considera que el aprendizaje individual de cada estudiante puede producirse de manera idiosincrásica, aunque a menudo discurre por caminos similares. Una trayectoria hipotética de aprendizaje proporciona al maestro razones para elegir un diseño particular sobre cómo articular la instrucción.

Simon (1995) considera que una trayectoria hipotética de aprendizaje está formada por tres componentes: *el objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje*: una predicción de cómo evolucionarán el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje. Al tratarse de una hipótesis del maestro, la modificación continua de la trayectoria de aprendizaje hipotética es la pieza central del constructo. Desde esta conceptualización de trayectoria hipotética de aprendizaje se subraya la importancia de tener un objetivo sobre el que fundamentar las decisiones de enseñanza y la naturaleza hipotética de dicho pensamiento.

En su revisión del constructo de trayectoria hipotética de aprendizaje, Simon y Tzur (2004) postularon que mientras que el objetivo de aprendizaje proporciona una dirección para las otras componentes, la elección de las actividades de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes son interdependientes. El proceso de selección de tareas se realiza en base a la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje están basadas en las tareas propuestas.

Para Simon y Tzur (2004) las siguientes conjeturas fundamentan el constructo de trayectoria hipotética de aprendizaje:

- La generación de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento de los estudiantes implicados.
- Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos.
- Las actividades matemáticas proporcionan herramientas para propiciar el aprendizaje de conceptos matemáticos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.

- Por la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el maestro se verá envuelto regularmente en la modificación de cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

En este sentido, una trayectoria hipotética de aprendizaje de un concepto matemático puede referirse al intervalo temporal dado por una lección o sucesión de lecciones en un determinado nivel o un periodo más amplio de tiempo. En el caso que nos ocupa, la formación de maestros, la cuestión que se genera es cómo convertir las trayectorias de aprendizaje en “herramientas utilizables” por los futuros maestros (Daro et al., 2011; Edgington et al., 2016). Es decir, cómo los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos deben ser transformados, dentro de la referencia de una trayectoria de aprendizaje, en contenido del programa de formación de maestros para que tengan sentido y sean útiles para los estudiantes para maestro. En este proceso de transformación, los formadores deben decidir el nivel de concreción y la manera en la que son presentados a los estudiantes para maestro los resultados de la investigación para que sean útiles en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

En nuestro estudio hemos adoptado los postulados de Simon (1995) para construir una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el significado de fracción como parte todo y sus distintas representaciones como herramienta usable por los estudiantes para maestro para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. En el siguiente apartado mostraremos esta trayectoria hipotética de aprendizaje.

2.2.1. Una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de fracción

La trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de fracción ha sido construida a partir de los trabajos previos en Didáctica de la Matemática, por lo que en primer lugar, presentamos una revisión de los estudios realizados sobre la comprensión de estudiantes de primaria sobre el concepto de fracción.

2.2.1.1. Estudios sobre la comprensión de los Estudiantes de Primaria sobre las fracciones

El concepto de fracción es uno de los contenidos del currículum de matemáticas que más dificultades presenta para muchos estudiantes (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Cramer, Post, & delMas, 2002; Lamon, 2007; Wilson et al., 2013). Estas investigaciones han caracterizado diferentes significados de fracción: *razón*, *operador*, *cociente*, *medida y parte-todo* (Kieren, 1976; Lamon, 2007). El significado de razón se utiliza cuando las fracciones son usadas como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud. La interpretación de fracción como función aplicada a un número, objeto o conjunto (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993) describe el significado de operador. La interpretación de fracción indicando una división entre dos números naturales se asocia al significado de cociente. En cuanto al significado de medida, implica asociar la fracción (*a/b*) con un punto situado sobre la recta numérica que se divide en *b* partes congruentes de las que se toman *a* partes. Esta última interpretación puede considerarse un caso particular del significado parte-todo. La relación parte-todo se establece entre el número de partes congruentes en las que se divide una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos y el todo. Es decir, es la operación mental de dividir una cantidad en partes iguales, ya sea dividiendo una región en partes iguales o separando un conjunto discreto de objetos en subconjuntos equivalentes (Behr et al., 1992).

Para Battista (2012) el desarrollo de la comprensión de la fracción como parte-todo por parte de los estudiantes se produce a través diferentes niveles de sofisticación. Estos niveles de sofisticación, construidos a partir de la investigación empírica sobre cómo se desarrolla la conceptualización de fracción por los estudiantes, incluyen descripciones de múltiples subniveles que generaran los caminos por los que puede discurrir el aprendizaje. En nuestro caso nos centraremos en el desarrollo de la comprensión de las fracciones como parte-todo (Figura 2.1).

Nivel	Descripción
0	Los estudiantes no entienden el significado de fracción, pero pueden entender la operación de dividir un todo en partes congruentes
1	Los estudiantes reconocen solo representaciones familiares de fracciones
2	Los estudiantes comprenden las fracciones como contar todas las partes y las partes sombreadas
3	Los estudiantes entienden las fracciones como dividir una figura de un todo en partes iguales y seleccionar partes (parte-todo en modo de representación continuo)
4	Entienden las fracciones como dividir una cantidad en partes iguales y seleccionar algunas partes (parte-todo en modo de representación discreto)

Figura 2.1. Niveles de sofisticación del desarrollo de la comprensión parte-todo (Battista, 2012)

Las principales características de cada uno de los niveles considerados por Battista (2012) y sus distintos subniveles son las siguientes:

- En el nivel 0 los estudiantes no entienden el significado de fracción, pero pueden entender la operación de dividir un todo en partes congruentes. Encontraríamos dos subniveles: nivel 0.1 estudiantes que no pueden dividir en partes congruentes y nivel 0.2 Estudiantes que pueden dividir objetos en partes congruentes, pero no entienden estas partes como fracciones,
- En el nivel 1 los estudiantes muestran una conceptualización de las fracciones restringida a imágenes específicas.
    - Reconocen representaciones familiares de algunas fracciones asociadas a un nombre (1/2; 1/4, …) pero no entienden que todas las subdivisiones del todo deben ser congruentes de manera general.
- En el nivel 2, entienden las fracciones como “contar todas las partes y las partes sombreadas” sin centrarse en el todo ni en sus características.
    - Al no considerar el todo, tienen problemas para reconocer fracciones en modos de representación discretos (contextos discretos) y para reconocer fracciones impropias.

  - Comparan fracciones (menor, igual o mayor que) dibujando e inspeccionando representaciones gráficas pero generalmente, no tienen en cuenta que deben mantener los todos iguales. Esta dificultad se extiende a la recta numérica (cuentan las partes sin tener en cuenta que deben ser iguales).

- En el nivel 3, entienden las fracciones como dividir una forma entera en partes iguales y seleccionar algunas de esas partes.
  - En modos de representación continuos (contextos continuos) dividen el todo equitativamente, pero tienen problemas para encontrar fracciones en representación discreta (contexto discreto) y fracciones impropias (el todo es más difícil de mantener). Los estudiantes muestran un razonamiento restringido a operaciones con figuras, no razonan sobre cantidades como números o medidas de áreas.
  - Son capaces de dividir un todo en partes iguales e iterar una de esas partes. Primero aprenden a dividir el todo equitativamente para crear fracciones unitarias (1/4) y después fracciones no unitarias (3/4).
  - Entienden que las partes de una fracción no tienen que ser idénticas si pueden ser reorganizadas para parecer lo mismo (congruentes).
  - Comparan fracciones pictóricamente, manteniendo los todos y las partes iguales.
  - Pueden reconocer fracciones equivalentes visualmente a partir de sus representaciones gráficas.

- En el nivel 4 entienden las fracciones como dividir una cantidad en partes iguales y seleccionar algunas de esas partes. Encontramos dos subniveles: nivel 4.1, estudiantes que usan materiales físicos o pictóricos para comprender las fracciones como cantidades. Para construir el todo a partir de una fracción (parte) deben tener esta secuencia abstraída y ser capaces de revertirla: i) Representar el todo, ii) Dividir el todo en el número de partes iguales que el denominador marca iii) Seleccionar el número de partes iguales que el numerador y nivel 4.2, estudiantes que utilizan modelos mentales, sin necesidad de representaciones gráficas ni físicas, para comprender y entender las fracciones como cantidades. Es el resultado de haber abstraído el nivel previo a este en el que se manipulan objetos físicos o pictóricos. Esto les permite comparar fracciones como 8/9 y 6/7 a partir del razonamiento de que la parte que le falta a 8/9 es menor que la que le falta a 6/7 por lo tanto 8/9 es mayor.

- Los estudiantes desarrollan la comprensión de las fracciones como cantidades. Al iterar o partir objetos lo hacen para razonar sobre las cantidades numéricas que los objetos representan o bien se manipulan los números para determinar cómo dividir objetos.
- La comprensión de la relación entre las cantidades y formas les permite ir hacia adelante y hacia atrás en las acciones sobre los objetos y las cantidades y generalizar su comprensión de las fracciones a múltiples contextos.
- Comprensión explícita del todo, las partes y del proceso de creación de fracciones que les permite mantener el todo. Esto les permite:
    - Hallar fracciones en contextos discretos.
    - Usar representaciones visuales para crear fracciones impropias y para comprender las relaciones entre estas y los números mixtos
    - Usar una representación gráfica (figura/imagen) dada para establecer que dos fracciones son equivalentes.
    - Alterar la secuencia de acciones. Pueden invertir el proceso para reconstruir el todo desde una parte.
    - Comparar fracciones a través de las medidas de las áreas de sus representaciones gráficas.

Para Battista los componentes necesarios para la comprensión de las fracciones son los procesos de dividir un todo en partes congruentes, iterar una parte, la comprensión de fracciones unitarias y no unitarias, la comprensión de fracción impropia y número mixto, la comprensión de fracción equivalente, comparación de fracciones y las operaciones con fracciones.

Parece existir un cierto consenso en aceptar que la operación de dividir un todo en partes congruentes, equipartición, es el principio de razonamiento sobre el que se construye la comprensión de las fracciones (Battista, 2012; Confrey, 2008; Steffe & Olive, 2010). Confrey (2008) define la equipartición como un conjunto de conductas cognitivas con el objetivo de producir grupos o partes de igual tamaño como "partes justas" para cada grupo de individuos en una situación de reparto equitativo.

En el siguiente apartado mostramos la trayectoria hipotética de aprendizaje construida que se fundamenta en los estudios revisados.

2.2.1.2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de fracción

En nuestro estudio la trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de fracción se ha diseñado considerando los estudios empíricos sobre cómo el razonamiento de los estudiantes de Educación Primaria sobre las fracciones se desarrolla en el tiempo (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe & Olive, 2010). Así, se ha tenido en cuenta en la construcción de la trayectoria hipotética de aprendizaje el desarrollo del razonamiento de los estudiantes sobre fracción a través de los niveles de sofisticación propuestos por Battista (2012). Estas perspectivas y la conceptualización de trayectoria hipotética de aprendizaje aportada por Simon (1995) dirigieron el diseño de nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el significado de fracción como parte-todo y sus distintas representaciones en los estudiantes de Educación Primaria.

Nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de fracción integra un objetivo de aprendizaje, un proceso hipotético de aprendizaje de los estudiantes (diferentes niveles de comprensión) en función del uso de los elementos matemáticos relevantes, el reconocimiento y la comprensión de propiedades, así como aquellos errores comunes de los estudiantes y actividades de aprendizaje con el objetivo de progresar en la comprensión.

En este sentido, el objetivo de aprendizaje de esta trayectoria hipotética de aprendizaje es: *construir el significado de la idea de fracción como parte-todo*. Este objetivo de aprendizaje pone de manifiesto la necesidad de progresar desde el significado intuitivo de dividir en partes congruentes hasta la idea de fracción como parte-todo.

El proceso hipotético de aprendizaje consta de tres niveles de comprensión de los estudiantes de educación primaria (Battista, 2012) en base a los elementos matemáticos considerados en el desarrollo de la comprensión de las fracciones:

- Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes.
- Una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte.
- Uso de una parte como una unidad iterativa, para construir otras fracciones.
- La igualdad de los todos en la comparación de fracciones.
- Relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual).

La Figura 2.2 muestra a modo de resumen las principales características y los elementos matemáticos involucrados en cada uno de los niveles del proceso hipotético de aprendizaje en nuestra trayectoria.

Finalmente, por lo que respecta a las actividades de aprendizaje, nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje incluye un conjunto de actividades diseñadas para permitir apoyar la transición de los estudiantes de primaria desde los niveles inferiores hasta los niveles superiores de comprensión del concepto de fracción. De este modo, se incluyen actividades de:

- Reparto equitativos
- Representación e identificación de una parte a partir de un todo dado, considerando:
  - Fracciones propias e impropias
  - Contextos continuos y discretos
- Reconstrucción del todo dada una parte
- Comparación de fracciones

La interdependencia del proceso hipotético de aprendizaje y las actividades de aprendizaje se muestran en la concreción de cada uno de estos niveles en la siguiente sección.

Nivel	Características de la comprensión de los estudiantes de los elementos matemáticos
1	***Los estudiantes no pueden identificar ni representar fracciones*** • No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes. • No mantienen el mismo todo cuando comparan fracciones.
2	***Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias*** • Reconocen que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero congruentes en relación al todo. • Usan una parte (fracción unitaria 1/n) como una unidad iterativa, para construir otras fracciones (propias) en modos de representación (*contextos*) continuos. • Mantienen el mismo todo al comparar fracciones. • No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes o un grupo de partes como una parte.
3	***Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias e impropias*** • Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte. • Usan fracciones como unidad iterativa para construir fracciones (propias e impropias) en modos de representación (*contextos*) continuos y discretos. • Reconocen que el tamaño de una parte decrece cuando el número de partes aumenta (relación inversa).

Figura 2.2. Niveles de comprensión de los elementos matemáticos en el proceso hipotético de aprendizaje

A continuación, se describen de manera pormenorizada los Niveles de desarrollo del proceso hipotético de aprendizaje de las fracciones:

- **Nivel 1. Los estudiantes no pueden identificar ni representar fracciones**

  La característica que define este nivel es la incapacidad de los estudiantes para identificar y representar fracciones**.** Aunque pueden tener una cierta idea intuitiva de dividir en partes iguales como idea de reparto justo:

  - Presentan dificultades para reconocer que las partes deben ser congruentes.

- No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
- Tienen dificultades para considerar una parte como una unidad iterativa (una unidad para contar), por lo que tiene dificultades con la representación de fracciones.
- En tareas de comparar fracciones (al realizar y/u observar las representaciones), no tienen en cuenta que deben mantener los todos iguales.
- Por ejemplo, ante la tarea de identificar 1/2 entre varias representaciones (Figura 2.3) la comprensión que tienen de las fracciones implica que un todo se divide en tantas partes como indica el denominador de las cuales tomamos las que indica el numerador. Por tanto, en la actividad 1se fijan en que hay dos partes, de las cuales una está sombreada y la otra no, por eso marcan la respuesta F como correcta. Para los estudiantes de este nivel, las respuestas D y E no representan 1/2 al no reconocer que una parte puede estar formada por varias partes o que un grupo de partes pueda ser una parte.

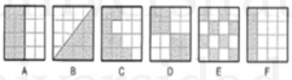
Tipo de actividad	Actividad	Respuesta	Característica
Identificar fracciones	1. Señala la figura que representa un medio 	La figura A, B, C y F son un medio, el resto no lo son	Presentan dificultades para reconocer que las partes deben ser congruentes No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes.

Figura 2.3.Actividad de identificación de fracciones y respuestas de nivel 1

Estas mismas dificultades se observan en tareas de representar fracciones. En contexto continuo (actividades 3 y 4, Figura 2.4), no representan partes congruentes en el todo (actividad 3) y no reconocen que en el rectángulo dividido en 15 partes congruentes 1/5 son tres partes (por tanto, no identifican que una parte pueda estar dividida en otras partes). En contexto discreto (actividad 5) donde el todo está formado por 12 fichas no reconocen que un cuarto está formado por 3 fichas (no identifican un grupo de partes como una parte).

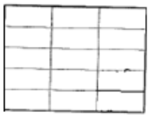
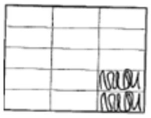
Tipo de actividad	Actividad	Respuesta	Característica
Representar fracciones	**3.** Representa 1/3 de la siguiente figura 	Divido la pizza en tres partes y cojo una 	No reconocen que las partes deben ser congruentes
	4. Sombrea 2/5 del rectángulo 		No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes.
	5. Sombrea 3/4 de los círculos 		No reconocen un grupo de partes como una parte

Figura 2.4. Actividades de representación de fracciones, respuestas y características de nivel 1

En este nivel 1, los estudiantes tienen dificultades, en las tareas de representar fracciones impropias (f>1) ya que tienen dificultades en considerar 5/4 como cinco veces 1/4, y considerar una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa (Figura 2.5).

Tipo de actividad	Actividad	Respuesta	Característica
Representa frac. impropias	**3.** Señala los 5/4 de la siguiente figura 		Dificultades para representar fracciones impropias al no considerar la fracción unitaria como una unidad iterativa

Figura 2.5. Actividad de representar fracciones impropias, respuesta y respuestas y características de nivel 1

En cuanto a las actividades de comparación de fracciones, los estudiantes en este nivel de comprensión del concepto de fracción no consideran que deben mantener los todos iguales para comparar (Figura 2.6).

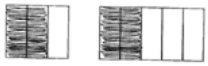
Tipo de tarea		Actividad	Respuesta	Característica
Comparar fracciones	3.	¿Qué fracción es mayor 2/3 o 2/5?	El estudiante después de realizar los dibujos que se muestran indica: Son iguales 	No tienen en cuenta que deben mantener los todos iguales.

Figura 2.6. Actividad de comparación de fracciones respuestas y características de nivel 1

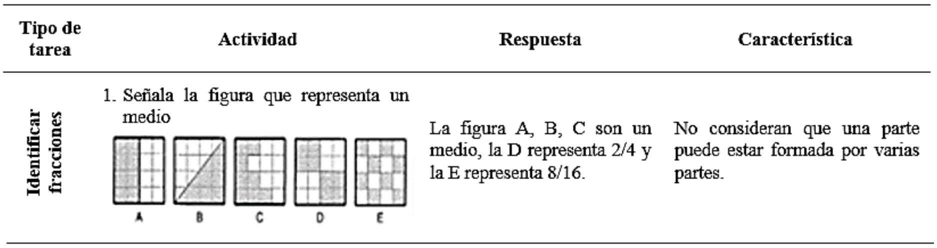
La transición entre el nivel 1 y el nivel 2 está determinada por la comprensión de los estudiantes, en contextos continuos, de los elementos matemáticos: las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser congruentes y el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa para construir fracciones propias.

- **Nivel 2. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias**

La característica que define este nivel es que los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias. De esta manera en este nivel son capaces de:

- Reconocer que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser congruentes con relación al todo.
- Usar la fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa para representar fracciones propias (pueden tener dificultades en representar fracciones impropias) en contextos continuos.
- Comparar fracciones reconociendo que los "todos" usados deben ser iguales, pero sin hacer uso de la relación inversa entre el número de partes en las que se divide el todo y tamaño de cada parte.
- Siguen sin reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.

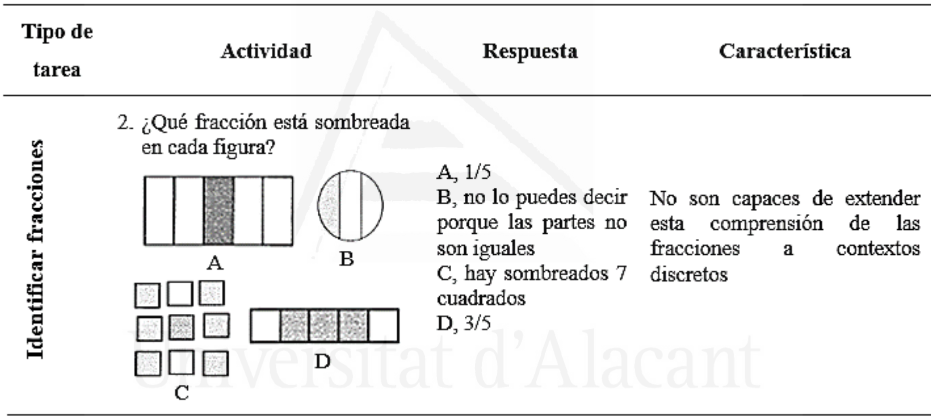
Por ejemplo, en las actividades de identificación de fracciones (Figura 2.7), los estudiantes son capaces de identificar como 1/2 las representaciones A, B y C. Sin embargo, no son capaces de considerar la respuesta D y E como 1/2, para ellos representan 2/4 y 8/16, hecho que evidencia que no consideran que una parte puede estar formada por varias partes.



Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Identificar fracciones	1. Señala la figura que representa un medio	La figura A, B, C son un medio, la D representa 2/4 y la E representa 8/16.	No consideran que una parte puede estar formada por varias partes.

Figura 2.7. Actividad de identificación de fracciones, respuesta de nivel 2

En el nivel 2 los estudiantes tienen dificultades para identificar y representar fracciones en contextos discretos (Figura 2.8). Aunque los estudiantes son capaces de identificar fracciones en contextos continuos reconociendo que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes (Figuras A, B y D) no son capaces de extender esta comprensión de las fracciones a contextos discretos (Figura C).



Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Identificar fracciones	2. ¿Qué fracción está sombreada en cada figura?	A, 1/5 B, no lo puedes decir porque las partes no son iguales C, hay sombreados 7 cuadrados D, 3/5	No son capaces de extender esta comprensión de las fracciones a contextos discretos

Figura 2.8. Actividad de identificación de fracciones respuesta de nivel 2

Esta comprensión de las fracciones permite a los estudiantes identificar y representar fracciones en contextos continuos, reconociendo que las partes deben ser congruentes y usar una parte como unidad iterativa para construir fracciones propias (en contextos continuos). En la actividad 3 (Figura 2.9) el estudiante, en primer lugar, reconoce que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes por lo que divide la recta numérica en seis partes congruentes. Posteriormente itera una de estas partes (1/6) dos veces para identificar que la X representa 2/6.

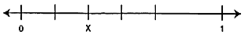
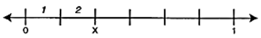
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Identificar fracciones	3. Indica que fracción representa la x 	Tienes que marcar todos los espacios del mismo tamaño (marca una señal en el último segmento de la derecha para tener todas las divisiones del mismo tamaño). Como hay 6 trozos, y hay dos hasta la X, entonces la X es 2/6 	Reconocen que las partes deben ser congruentes y usan una parte como unidad iterativa para construir fracciones propias (en contextos continuos)

Figura 2.9.Actividad de identificación de fracciones, respuesta de nivel 2

En cuanto a las actividades de representación de fracciones, la comprensión del elemento matemático las partes, en que se divide un todo, pueden ser diferentes en forma, pero congruentes con relación al todo les permite resolver actividades como la mostrada en la Figura 2.10.

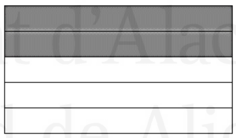
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Representar fracciones	A. Sombrea 2/5 del rectángulo 		Comprenden que las partes, en que se divide un todo, pueden ser diferentes en forma, pero congruentes con relación al todo
	B. Sombrea de otra forma diferente 2/5 del rectángulo 		

Figura 2.10. Actividad de representación de fracciones, respuestas de nivel 2

El uso de una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa permite a los estudiantes en este nivel 2 reconstruir fracciones propias. En la Figura 2.11 el estudiante en primer lugar divide el todo dado en cuatro partes congruentes e itera una de estas partes (1/4) tres veces para representar 3/4.

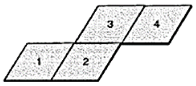
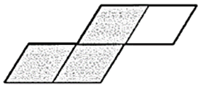
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Representar fracciones propias	Representa 3/4 de la figura: 	Primero divide la figura en 4 partes congruentes y considera un rombo como 1/4  Después cuenta 3 veces 1/4 para representar 3/4 	Usan una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa para reconstruir fracciones propias.

Figura 2.11. Actividad de representación f<1, respuesta de nivel 2

En el nivel 2, para resolver actividades de comparación de fracciones (Figura 2.12), aunque reconocen que los todos usados deben mantenerse iguales se apoyan en representaciones gráficas para establecer una comparación visual (sin hacer uso de la relación inversa).

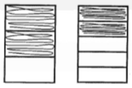
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Comparación de fracciones	4. ¿Qué fracción es mayor, 2/3 o 2/5? Justifica con palabras o dibujos	(Tras hacer los dibujos) 2/3 es mayor 	Se apoyan en representaciones gráficas para establecer una comparación visual (sin hacer uso de la relación inversa).

Figura 2.12. Actividad de comparación de fracciones, respuesta de nivel 2

Para progresar desde el nivel 2 al nivel 3 los estudiantes necesitan:

- Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
- Usar una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como una unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias en contextos continuos y discretos.
- Reconocer la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual).

- **Nivel 3. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias e impropias**

Los estudiantes en el nivel 3:

- Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte. Esto les permite identificar y representar fracciones en contextos discretos.
- Usan una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como una unidad iterativa para representar fracciones propias (f<1) e impropias (f>1). Esto les permite reconstruir la unidad usando fracciones unitarias o no unitarias como unidades iterativas (en contextos continuos y discretos).
- Al comparar fracciones:
  - reconocen que los "todos" usados debe ser iguales y
  - establecen la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña. Esto lo realizan ahora mentalmente y lo pueden justificar usando dibujos.

En el nivel 3 los estudiantes son capaces de resolver actividades de identificación de fracciones reconociendo que una parte puede estar dividida en otras partes. Por ejemplo, en la siguiente actividad los estudiantes de nivel 3 reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte ya que consideran la respuesta D y E como 1/2 (es decir, 2/4 y 8/16 son vistos como 1/2, Figura 2.13).

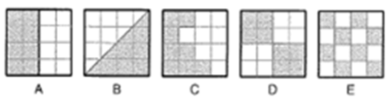
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Identificar fracciones	1. Señala la figura que representa un medio 	La figura A, B, C, D y E son un medio	Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes

Figura 2.13. Actividad de identificación de fracciones, respuesta de nivel 3

En este nivel, los estudiantes identifican y representan fracciones en contextos discretos reconociendo que los grupos han de ser iguales. La respuesta de un estudiante de nivel 3 a una actividad de este tipo (Figura 2.14) muestra cómo, en primer lugar, divide el todo en tres grupos iguales (consideran que una de estas partes es 1/3). Posteriormente itera 1/3 dos veces para hallar 2/3.

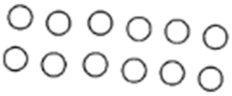
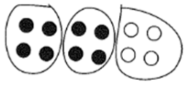
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Representar fracciones en contexto discreto	Pinta 2/3 de la figura 		Representan fracciones en contextos discretos reconociendo que los grupos han de ser iguales.

Figura 2.14. Actividad de representación de fracciones en contexto discreto, respuesta de nivel 3

En este nivel 3, los estudiantes son capaces de usar una parte como una unidad iterativa para representar fracciones impropias (f>1) utilizando tanto fracciones unitarias (1/n) como fracciones no unitarias como una unidad iterativa. Por ejemplo, en la actividad 1 (Figura 2.15), el estudiante divide el todo en tres partes congruentes (3/3) e itera una de estas partes (1/3) cuatro veces para obtener 4/3. Se apoya en la representación gráfica para explicar que 4/3 = 1 + 1/3. En la actividad 2 (Figura 2.15) se muestra cómo un estudiante usa una parte (2/3) como unidad iterativa para representar la fracción impropia 8/3.

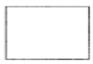
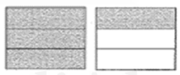
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Representar fracciones impropias	1. Representa 4/3 del rectángulo 		Usan una parte como una unidad iterativa para representar fracciones impropias (f>1) utilizando tanto fracciones unitarias (1/n) como no unitarias.
	2. Representa 8/3 en la recta numérica 		

Figura 2.15. Actividad de representación de fracciones impropias respuesta de nivel 3

El uso de una fracción como unidad iterativa permite a los estudiantes en este nivel 3 resolver actividades de reconstruir la unidad en contextos continuos y discretos. La actividad de la Figura 2.16 muestra cómo el estudiante reconstruye la unidad a partir de la representación en contexto discreto de una parte dada (fracción no unitaria). Para ello en primer lugar divide la parte dada (3/4) en tres partes congruentes considerando que cada parte representa (1/3) del todo. Esta parte, formada por 2 galletas, es iterada posteriormente 4 veces para hallar el total de galletas de la caja (8).

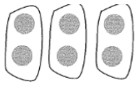
Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Reconstruir la unidad en contexto discreto	Las 6 galletas son ¾ de una caja de galletas. ¿Cuántas galletas contiene toda la caja? 	Si tengo 3/4, hago 3 grupos. Cada grupo está formado por 2 galletas. Si las 6 galletas son ¾ entonces divido 6 entre 3 grupos para tener cuartos (es decir, 2 galletas son ¼) y ver que la caja entera son 8 galletas	Usan una fracción como unidad iterativa para reconstruir la unidad en contextos continuos y discretos.

Figura 2.16. Actividad de reconstrucción de la unidad en contexto discreto, respuesta de nivel 3

Finalmente, en este nivel 3, la comprensión de los estudiantes de la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña, les permite comparar fracciones mentalmente. Además, son capaces de justificar su razonamiento usando representaciones gráficas (Figura 2.17).

Tipo de tarea	Actividad	Respuesta	Característica
Comparar fracciones	¿Qué fracción es mayor, 7/8 o 6/5?	1. Dibuja el todo y las partes y compara. Justifica su respuesta con la representación advirtiendo que la parte que falta a 7/8 para ser la unidad es más pequeña que la que le falta a 6/5. 2. Sin necesidad de dibujo dice que la parte que falta en 7/8 es menor que la que falta en 6/5.	Comprenden la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte

Figura 2.17. Actividad de comparación de fracciones, respuestas de nivel 3

2.3. OBJETIVOS

Diseñamos esta trayectoria hipotética como guía para apoyar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las fracciones en los estudiantes para maestro. Utilizamos esta trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de fracción como referencia teórica para estructurar sus procesos de atención /su mirada. Nuestro propósito es diseñar un entorno de aprendizaje alrededor de la trayectoria hipotética de aprendizaje en el que proporcionar a los estudiantes para maestro diferentes tareas profesionales en las que tendrán que analizar respuestas de diferentes estudiantes. Nuestra conjetura es que este tipo de conocimiento permitirá a los estudiantes para maestro trasladarse desde comentarios evaluativos, basados en la corrección o incorrección de la respuesta de los estudiantes, a comentarios interpretativos basados en evidencias, considerando las características de los elementos matemáticos identificados en las respuestas de los estudiantes. Además, conjeturamos que la trayectoria hipotética de aprendizaje puede apoyar las decisiones de acción de los estudiantes para maestro permitiéndoles proporcionar actividades de instrucción coherentes con la forma en que los estudiantes piensan.

Nuestro objetivo es identificar cómo los estudiantes para maestro miran profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, en el contexto de un entorno de aprendizaje diseñado alrededor de una trayectoria de aprendizaje como guía para mirar y caracterizar su desarrollo a lo largo del entorno de aprendizaje. Nuestras preguntas de investigación son:

- ¿Cómo usan los estudiantes para maestro la información teórica proporcionada en forma de trayectoria hipotética de aprendizaje cuando miran profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes?
    - ¿Cómo atienden a los elementos matemáticos e interpretan la comprensión de los estudiantes?
    - ¿Qué tipo de decisiones toman?
- ¿En qué medida la participación en el entorno de aprendizaje propició el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes en los estudiantes para maestro?

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

"To ask the right question id harder than to answer it"

Georg Cantor

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen los participantes de la investigación, el diseño del entorno de aprendizaje, los instrumentos de recogida de datos, su aplicación y el proceso de análisis seguido.

3.1. PARTICIPANTES Y CONTEXTO

Los participantes de este estudio fueron 85 estudiantes para maestro (EPM) que se encontraban cursando el tercer curso de los cuatro que forman parte del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Alicante (España). Este grado tiene una duración de 8 semestres (4 años) y ofrece formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las ciencias experimentales y sociales y la lengua (español, inglés y la lengua vernácula), formación básica en pedagogía y psicología y la realización de prácticas de enseñanza en los centros de Educación Primaria. Entre estos estudiantes había 67 chicas y 18 chicos. Los datos se recogieron en el segundo cuatrimestre del curso académico 2015/2016.

Esta experiencia se desarrolló como parte del contenido del programa de la asignatura obligatoria del grado *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria*, con una carga específica de seis créditos ECTS. Antes de participar en esta experiencia los estudiantes para maestro habían cursado dos asignaturas de Didáctica de la Matemática, una en primer curso: *Didáctica de las Matemáticas: Sentido Numérico*, y la otra en segundo curso: *Didáctica de las Matemáticas: Sentido Geométrico*, ambas con una carga específica de seis créditos ECTS.

Los contenidos de las asignaturas cursadas en los dos cursos anteriores proporcionan a estos estudiantes para maestro conocimientos de matemáticas mientras que la asignatura del tercer curso se centra en la enseñanza y aprendizaje en educación primaria de contenidos matemáticos. En particular, esta asignatura integra nueve módulos (entornos de aprendizaje) centrados en las características del contenido matemático en el currículum y libros de texto, del aprendizaje del contenido matemático en los estudiantes de Educación Primaria (niveles de desarrollo, dificultades, trayectorias de aprendizaje…) y de la enseñanza de las matemáticas (tareas, actividades y recursos, comunicación en el aula…) en diferentes dominios matemáticos (Tabla 3.1)

Tabla 3.1. Entornos de aprendizaje de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria (curso 2015/2016)

Temas		**Total sesiones**
1.	Construcción del número natural y representación. Sentido numérico	4
2.	Algoritmos	2
3.	Problemas	4
4.	Fracciones y decimales	5
5.	Razonamiento proporcional	4
6.	Desarrollo del pensamiento relacional	3
7.	Magnitudes y medida	2
8.	Geometría: figuras planas y 3D	2
	Geometría: transformaciones	2
9.	Tratamiento de la información	2

El objetivo general de la asignatura es que los EPM desarrollen las competencias necesarias para desempeñar su labor como futuros maestros. Una de estas competencias es mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes, a través de los procesos de identificar elementos matemáticos importantes de las estrategias usadas por los estudiantes, interpretar el pensamiento matemático de estos y decidir cómo continuar proponiendo actividades que los ayuden a progresar en su comprensión.

Esta investigación, desarrollada en el contexto de este programa de formación inicial de maestros, se centra en la participación de los EPM en el entorno de aprendizaje de las fracciones construido alrededor de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) descrita en el capítulo anterior. En la siguiente sección mostramos la organización de este entorno de aprendizaje.

3.2. DISEÑO DEL ENTORNO DE APRENDIZAJE

El entorno de aprendizaje se articuló a partir de cinco sesiones de dos horas cada una de ellas y una sesión final de evaluación (Figura 3.1).

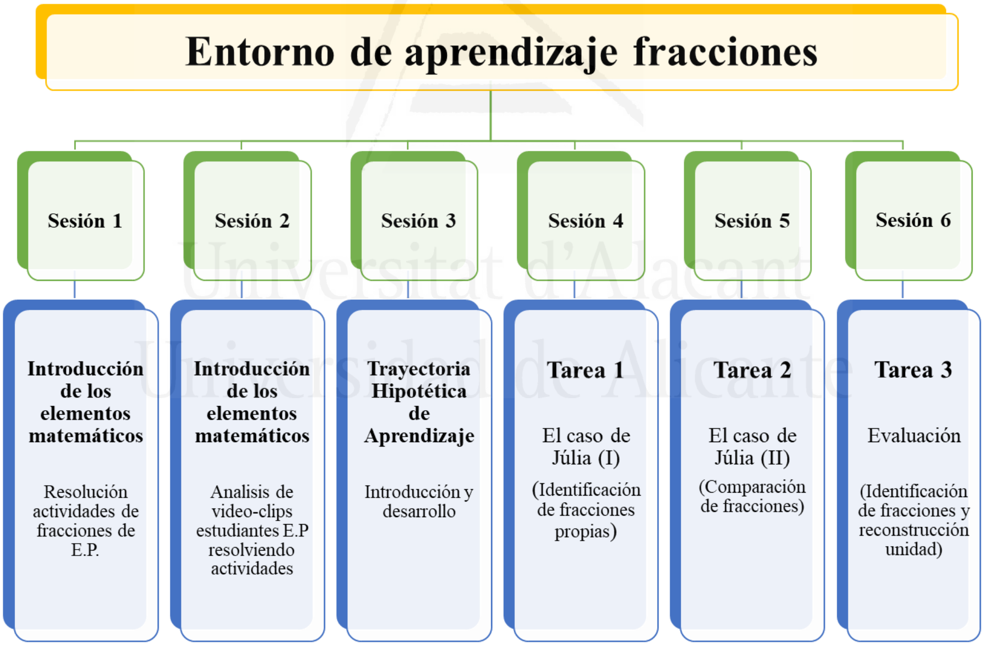


Figura 3.1. Estructura entorno de aprendizaje

Las tres primeras sesiones se dedicaron a la presentación de los elementos matemáticos involucrados en la trayectoria hipotética de aprendizaje y la presentación del documento teórico en el que se presentaban las características de la THA de los estudiantes de Educación Primaria. En las siguientes tres sesiones se resolvieron dos tareas profesionales que, junto con la tercera tarea profesional de evaluación que se realizó con posterioridad, conforman el cuerpo de los datos de esta investigación. Detallamos a continuación la estructura de cada una de las sesiones, así como la elaboración y características de cada una de las tareas profesionales y cómo se llevó a cabo la implementación de cada una de ellas.

3.2.1. Sesión 1. Introducción de los elementos matemáticos (I)

Para introducir los elementos matemáticos, que se encuentran involucrados en la THA sobre fracciones (presentada en el capítulo del marco teórico), los EPM resolvieron y analizaron diversas actividades de Educación Primaria sobre fracciones. Por ejemplo, actividades de representación y de identificación de fracciones propias e impropias en modos de representación continuo o discreto (contextos continuo y discreto) y actividades de reconstrucción de la unidad (Figura 3.2).

Encontrar una parte de un todo

- ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?

Encontrar un todo desde una parte

- El conjunto de puntos es 3/8 del total. ¿Cuántos puntos son el total?

Figura 3.2. Ejemplos de actividades sobre fracciones que resolvieron y analizaron los estudiantes para maestro

La resolución de estas actividades permite analizar cómo intervienen los elementos matemáticos siguientes:

- Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes.
- La consideración de que una parte puede estar dividida en otras partes / un grupo de partes como una parte.
- Uso de una parte como una unidad iterativa, para construir otras fracciones.
- Para comparar fracciones los todos deben ser iguales.

- Relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual).

3.2.2. Sesión 2. Introducción de los elementos matemáticos (II)

En esta sesión los elementos matemáticos involucrados en la THA se identifican mediante el visionado de videoclips en los que estudiantes de Educación Primaria resuelven actividades como las que los EPM habían resuelto y analizado en la primera sesión. El objetivo es identificar cómo los estudiantes de primaria utilizaban los elementos matemáticos involucrados y las dificultades que tenían. La Figura 3.3 muestra algunas de las actividades mostradas en los videoclips.

Figura 3.3. Capturas de videoclips con las actividades resueltas por los estudiantes de Educación Primaria (Llinares & Sánchez, 2005)

3.2.3. Sesión 3. Introducción de la trayectoria hipotética de aprendizaje

En esta sesión se presenta a los estudiantes para maestro la trayectoria hipotética de aprendizaje de los estudiantes de primaria sobre fracciones que hemos descrito en el capítulo 2. Los EPM tenían a su disposición un documento teórico con toda la información sobre la THA: elementos matemáticos, objetivo, proceso hipotético de aprendizaje (niveles de desarrollo) y ejemplos de actividades que los estudiantes son capaces de resolver en cada uno de los niveles. Por ejemplo, la Figura 3.4 muestra un extracto de este documento para el nivel 2 de la THA donde se presentan las características del nivel 2 y, seguidamente, se muestra cómo los estudiantes de este nivel resuelven diferentes tipos de actividades (la figura muestra solo un par de actividades a modo de ejemplo).

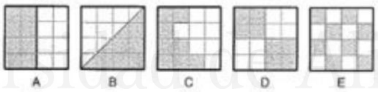
Nivel 2. Los estudiantes pueden identificar y representar fracciones propias

- Reconocen que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero deben ser congruentes. Identifican y representan fracciones en contextos continuos reconociendo que las partes deben ser congruentes, pero tienen dificultades para identificar o representar fracciones en contextos discretos.
- Siguen sin reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
- Al comparar fracciones reconocen que los "todos" usados deben ser iguales.
- Empiezan a usar la fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa para
  - representar fracciones propias (pueden tener dificultades en representar fracciones impropias)

Por ejemplo, en la tarea de identificar ½, los estudiantes son capaces de identificar como un medio las representaciones A, B y C. Sin embargo no son capaces de considerar la respuesta D y E como un medio, viéndolo como 2/4 y 8/16, pero no viendo su equivalencia al no reconocer que una parte puede estar formada por varias partes.

Tipo tarea. Identificar fracciones

Tarea. *Señala la figura que representa un medio*



Respuesta. *La figura A, B, C son un medio, la D representa 2/4 y la E representa 8/16.*

Características.

- Identifican y representan fracciones en contextos continuos reconociendo que las partes deben ser congruentes
- Reconocen que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero congruentes en relación al todo (reconocen que A, B y C son ½).
- No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte

Tarea. *¿Qué fracción esta sombreada?*

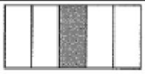
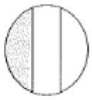
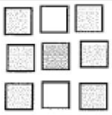
				
Respuesta	1/5	*No lo puedes decir porque las partes no son iguales*	*Hay sombreados 7 cuadrados*	3/5

Figura 3.4. Extracto del documento teórico sobre la THA

3.2.4. Sesión 4. Tarea profesional 1- Identificar y reconocer características de la comprensión sobre las fracciones en tareas de identificación de fracciones

Con el objetivo de que los EPM empezaran a usar la información teórica sobre la THA, en diversas situaciones de enseñanza, se diseñaron tres tareas profesionales. Todas las tareas siguen la misma estructura. Al inicio de la tarea se presentaba una situación de aula en el que se estaba desarrollando una actividad relacionada con fracciones. A continuación, se mostraban respuestas de tres parejas de estudiantes o de tres estudiantes que mostraban características de los diferentes niveles de la THA. Finalmente, los estudiantes para maestro debían responder las siguientes tres cuestiones relacionadas con la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes:

- *Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea, identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.*
- *¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja/estudiante? Justifica tu respuesta.*
- *Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja/estudiante, define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los estudiantes a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje prevista.*

Los estudiantes para maestro respondieron estas cuestiones individualmente usando el documento teórico relativo a la THA. Tras la resolución de la tarea se discutía en gran grupo, incidiendo en el uso de los elementos matemáticos para la identificación de los diferentes niveles de comprensión de los estudiantes en la THA.

En la siguiente subsección presentamos la Tarea profesional 1, vinculada a la identificación de fracciones (adaptada de Battista, 2012), mostramos sus características y las respuestas esperadas de los EPM.

3.2.4.1.Tarea profesional 1. El Caso de Júlia. Identificación de fracciones

❋ ❋ ❋

Júlia es la tutora de una clase de 3º curso de Educación Primaria.

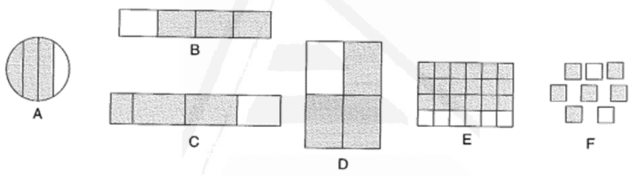
Este año tiene un grupo de 26 estudiantes y durante las próximas semanas Júlia quiere centrarse en las fracciones.

Su objetivo es que sus alumnos identifiquen diferentes representaciones de partes de un todo considerando:

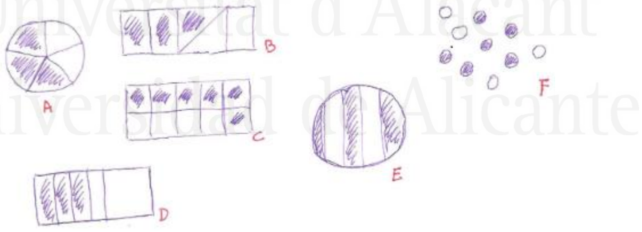
- que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, y
- la posibilidad de agrupar varias partes para identificar una fracción.

Para ello ha preparado una secuencia de lecciones en las que hay diferentes tipos de *actividades* para ser resueltas por parejas. Las actividades de la primera lección consisten en *identificar una fracción* de entre varias posibles representaciones.

Actividad 1. ¿Qué figura representa ¾?



Actividad 2. ¿Qué figura representa 3/5?



Júlia sigue una organización en sus lecciones que todos sus alumnos ya reconocen. Ella plantea una actividad que debe ser resuelta en grupos (en este caso por parejas). Luego, sus alumnos saben que hay un tiempo en que se presentan, discuten y se comparan las diferentes estrategias empleadas por cada grupo. Los alumnos en la clase de Júlia saben que ella les va a pedir que digan el porqué de su elección. Los estudiantes están acostumbrados a esta manera de proceder, saben que cuando Júlia les presenta estas actividades siempre les solicita que justifiquen sus respuestas de manera que sean convincentes para sus compañeros. En este caso, para compartir las diferentes respuestas, Júlia deja proyectada en la pizarra digital las figuras y lee el enunciado de la actividad.

Mientras que los estudiantes realizan las actividades Júlia va pasando por las mesas observándoles. Al observar cómo los diferentes grupos están resolviendo la actividad Júlia se da cuenta que usan los elementos matemáticos del concepto de fracción de manera sistemática lo que le permite identificar aquellos que les crean dificultades, y con esa información decide discutir en primer lugar la actividad 1 y decide qué grupo debería exponer su solución en primer lugar y también cómo continuar. Júlia sabe que, si pide voluntarios para responder, todos los grupos levantan la mano. Pero ella ha decidido pedir a Víctor y Xavi que sean los primeros en hablar de debido a la estrategia que han usado y considerando las resoluciones que Júlia ha visto en los demás grupos:

La respuesta de Víctor y Xavi

Júlia: ¿Cuál es vuestra respuesta?

Víctor: Mmmm, bueno nosotros creemos que la figura A, B C y D representan tres cuartos.

Júlia: Xavi, ¿tú estás de acuerdo con Víctor?

Xavi: Sí, creo que sí porque A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir tres cuartos

Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo?

[respuesta de Joan y Tere]

Joan: Nosotros no, seño (Joan forma equipo con Tere)

Júlia: ¿Qué pensáis vosotros?

Tere: Nosotros creemos que las figuras B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…

Júlia: ¿Y la figura E? ¿Qué pensáis de la figura E?

Joan: La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.

Tere: Eso es, no son tres cuartos.

Júlia: Entonces la F…

Joan y Tere: …. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados

En ese momento Júlia reconoce que en los dos grupos existen diferentes elementos matemáticos del concepto de fracción que no son considerados en la manera en la que se está identificando la fracción ¾. Júlia sabe que hay parejas de alumnos en su clase que sí han usado adecuadamente los diferentes elementos matemáticos de la idea de fracción en esta actividad (por ejemplo, Félix y Álvaro). En estos momentos considera que si da la palabra a algunas de esas parejas podrá crear un contexto de aprendizaje para que Víctor, Xavi, Joan y Tere puedan considerar los elementos matemáticos que no son tenidos en cuenta en sus respuestas. Por ello Júlia, pregunta si hay algún grupo que no esté de acuerdo con sus compañeros:

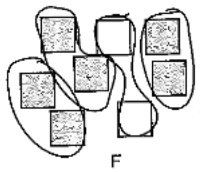
Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo con la respuesta de Joan y Tere? ¿Hay alguien que lo haya pensado de manera diferente? ¿Félix y Álvaro qué han hecho?

Félix: Bueno… sí. La A, B C y D son como dicen ellos (Joan y Tere), lo que pasa es que la E lo hemos hecho de otra manera…

Júlia: ¿Cómo? Explícanoslo

Álvaro: Bueno… mmmm pues así, mira. Si te fijas cada línea tiene 6 cuadritos, es decir son todas iguales, y como hay 3 líneas sombreadas de las 4 pues entonces son tres cuartos.

Además… para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los cuadros de 2 en 2), obtienes 4 grupos de 2 cuadros, y de esos 4 grupos, 1,2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo sombreado) están sombreados, que son tres grupos sombreados de los cuatro que tenemos.



Júlia se dio cuenta de que sus alumnos sólo estaban usando algunos elementos matemáticos del concepto de fracción, pero no otros en las dos actividades. Las situaciones en las que sus alumnos compartían diferentes resoluciones de las actividades permitían a Júlia saber qué elementos matemáticos del concepto de fracción les estaba siendo difícil a sus alumnos lo que le ayudaba para decidir las nuevas tareas que debía proponer. Además, Júlia sabía que las evidencias de la comprensión del concepto de fracción en las tareas de identificar/reconocer fracciones implicaba que sus alumnos tenían que considerar los diferentes elementos matemáticos de manera integrada. Responde a las siguientes cuestiones:

- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la actividad 1 identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja, define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje prevista.

❋ ❋ ❋

A continuación, describimos las características de esta tarea y las respuestas esperadas de los EPM a la misma. La actividad propuesta por la maestra Júlia en la Tarea 1 es de reconocimiento/identificación de fracciones propias (f<1). Se presenta una fracción propia y se solicita la identificación de esta entre varias representaciones dadas de la unidad (un círculo, rectángulos, y fichas). Las figuras A y C muestran dos representaciones en las que las partes no son congruentes, y en las figuras B y D sí lo son. La inclusión de estas representaciones en la actividad tiene como objetivo determinar la comprensión de los estudiantes del elemento matemático las partes del todo deben ser congruentes. En cuanto a las figuras E y F tienen como objetivo determinar la comprensión de los estudiantes del elemento matemático una parte puede estar dividida en otras partes (E) o un grupo de partes como una parte (F).

Las respuestas de cada pareja de estudiantes muestran características de los distintos niveles de comprensión de la THA.

- La *pareja 1* (formada por Xavi y Víctor) identifica como 3/4 las representaciones A, B, C, y D. Al considerar que A y C representan 3/4 parece que no han tenido en cuenta que las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes. De hecho, la respuesta dada parece indicar que su comprensión de las fracciones es contar las partes en las que está dividido el todo y luego las sombreadas. El hecho de no considerar las representaciones E y F, parece indicar que esta pareja no considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes o considerar un grupo de partes como una parte.
- La *pareja 2* (formada por Joan y Tere) usa adecuadamente la idea de que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes (por lo que consideran que las representaciones A y C no representan 3/4, pero B y D sí los representan). Su respuesta en relación a la representación E: "La figura E no son tres cuartos porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18" y de la representación F indica que no consideran el elemento matemático del concepto de fracción una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
- La *pareja 3* (formada por Félix y Álvaro) usa la idea de que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, por eso no consideran como representación de 3/4 la A y la C y sí a B y D. Además, su respuesta con relación a la representación E y F, indica que consideran que una parte puede estar dividida en otras partes / y un grupo de partes como una parte.

La Tabla 3.2 muestra un resumen de la relación entre los elementos matemáticos y las respuestas de los estudiantes de primaria a la Tarea 1.

Tabla 3.2. Relación entre las respuestas de cada pareja de estudiantes de primaria y la comprensión de los elementos matemáticos

	Víctor y Xavi	Joan y Tere	Félix y Álvaro
Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes.	NO	SÍ	SÍ
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.	NO	NO	SÍ

La identificación de los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes debe relacionarse con los niveles de comprensión de la THA. Es decir:

- Xavi y Víctor (pareja 1) muestran características propias del nivel 1 ya que las respuestas de esta pareja nos muestran que:
  - consideran la fracción 3/4 como contar las partes en las que está dividido el todo y después contar las partes sombreadas, sin tener en cuenta que las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes, y
  - no comprenden que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
- Joan y Tere (pareja 2), en sus respuestas muestran que:
  - reconocen que las partes en las que está dividido el todo deben ser congruentes,
  - pero siguen sin reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.

  Por lo que podemos asumir que están en el nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje
- Álvaro y Félix (pareja 3). Las respuestas a las actividades de esta pareja muestran que son capaces no solo de reconocer que el todo debe estar dividido en partes congruentes, sino que también reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes y un grupo de partes como una parte. Esta última característica les permite reconocer fracciones equivalentes tanto en modo de representación continuo como discreto.

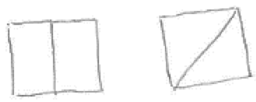
Considerando las respuestas a las tareas de identificar fracciones, situaríamos a estos estudiantes en el nivel 3 de la trayectoria de aprendizaje.

La tercera pregunta de la tarea solicita definir un objetivo de aprendizaje y proponer una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en la comprensión de las fracciones. En este sentido, para ayudar a progresar a *la pareja 1* (Xavi y Víctor), que se encontraba en el nivel 1 de la trayectoria de aprendizaje, debemos tener en cuenta los elementos matemáticos que deben ser adquiridos para progresar desde el nivel 1 al nivel 2 de la THA:

- Transición Nivel 1→ Nivel 2: Los estudiantes deben reconocer:
    - que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero congruentes en relación al todo.
    - La fracción unitaria como unidad iterativa que les permita construir otras fracciones.

A esta pareja de estudiantes se les podrían proponer tareas de identificar fracciones con el objetivo de conseguir que comprendan que el todo está formado por partes congruentes y el reconocimiento de que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser congruentes con relación al todo.

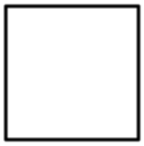
- **Actividad 1**
    - **Material**: Hojas de periódico
    - **Consigna**: Realizar mitades doblando de diferentes maneras el folio
    - **Fase de exploración:** por parejas, los estudiantes intentan realizar dobleces de la hoja diferentes y deben justificar porque lo obtenido es igual, aunque tiene diferentes formas. En esta fase se anima a los estudiantes a resolver el problema de cualquier modo que tenga sentido para ellos y a explicar su aproximación a los compañeros. Se les pide dibujar las formas que obtienen.



    - **Foco de la discusión en gran grupo**: sobre cómo justificar que las diferentes formas de las mitades son congruentes.

- **Actividad 2**: Repetir lo mismo con diferentes fracciones. Primero fracciones unitarias, (1/3, 1/4) y luego con otras fracciones (2/3, 3/4, 2/5, 3/5).

- **Actividad 3**
    - **Material**: Folios en blanco.
    - **Consigna**: Dibujar la mayor cantidad posible de fracciones 1/5 del cuadrado con formas distintas.



    - **Fase de exploración**: Por parejas los estudiantes deben realizar la representación de la mayor cantidad posibles de 1/5 diferentes.

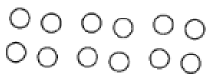
Por lo que respecta a *la pareja 2* (Joan y Tere) que, en relación con las actividades de identificar fracciones se sitúan en el nivel 2 de la THA, los EPM, para ayudarles progresar hasta el nivel 3, deberían considerar los elementos matemáticos que los estudiantes deben adquirir:

- Transición Nivel 2→ Nivel 3: Los estudiantes deben:
    - Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
    - Considerar una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como una unidad iterativa.

Considerando que en el nivel siguiente (nivel 3) los estudiantes deben llegar a reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes /considerar un grupo de partes como una parte, con el objetivo de representar fracciones en modo de representación discreto. Para ello deben de considerar un grupo de partes como una parte. En este caso deben de reconocer 3 grupos de fichas (partes) iguales para representar 2 partes de 3. Posteriormente deben considerar una de estas partes (1/3) como unidad iterativa para construir 2/3.

Actividad

Pinta 2/3 del grupo de fichas



Finalmente, *la pareja 3* (Álvaro y Félix) se hallan en el nivel 3 de la THA, por lo que asumimos que los estudiantes han construido la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones y no se solicita a los EPM que indiquen actividades de consolidación.

3.2.5. Sesión 5. Tarea profesional 2- Identificar y reconocer características de la comprensión sobre las fracciones en tareas de comparación de fracciones

La tarea profesional 2 estaba vinculada a una situación de aula en la que se estaba resolviendo una actividad de comparación de fracciones. Los estudiantes para maestro debían responder individualmente esta tarea usando el documento teórico relativo a la THA. Tras la resolución de la tarea 2 de manera individual, se discutió en gran grupo incidiendo en el uso de los elementos matemáticos para la identificación de los diferentes niveles de comprensión de los estudiantes en la THA.

En el siguiente apartado mostramos la tarea profesional, sus características y presentamos las respuestas esperadas de los EPM.

3.2.5.1. Tarea profesional 2. El Caso de Júlia (II). Comparación de fracciones

❋ ❋ ❋

Las actividades de la segunda lección de Júlia se centran en comparar fracciones.

¿Qué es más grande 4/5 o 3/4? Explícalo con un dibujo o palabras

Para compartir las diferentes respuestas, Júlia deja proyectada en la pizarra digital el enunciado de la actividad anterior e insiste a sus alumnos en que pueden usar dibujos y que deben explicar el porqué de su elección.

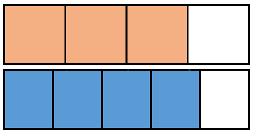
Mientras que los estudiantes realizan la actividad Júlia va pasando por las mesas observándoles. Al observar cómo los diferentes grupos están resolviendo la actividad identifica los aspectos que crean dificultades y con esa información decide que grupo debería exponer su solución en primer lugar y también cómo continuar. Júlia sabe que si pide voluntarios para responder, todos los grupos levantan la mano. Pero ella ha decidido solicitar a Joan y Tere que sean los primeros en hablar:

Júlia solicitó a **Joan y Tere** que explicaran su razonamiento en la pizarra digital

Joan: Bueno nosotros creemos que 4/5 es mayor que 3/4

Júlia: ¿Y cómo lo sabéis?

Tere: Porque nosotros hemos dibujado cuatro quintos, que es así y tres cuartos que es así (mientras que dibuja sobre la pizarra las siguientes imágenes:



Júlia: ¿Y?

Joan: Pues ***que se ve*** *que 4/5 es mayor que ¾*

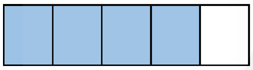
Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo?... ¿Víctor? ¿Vosotros qué pensáis?

(Víctor y Xavi)

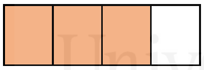
Víctor: Pues nosotros también pensamos lo mismo, pero lo hemos hecho de otra manera.

Júlia: ¿Podéis enseñarnos cómo?

Xavi: Sí mira, así porque tenemos 4/5 que son cuatro de cinco (mientras que dibuja la siguiente figura):



Además, luego tenemos ¾ que también son 3 de cuatro, es decir (dibuja la siguiente figura):



Júlia se da cuenta que Xavi y Víctor no basan su decisión en el uso de los elementos matemáticos del concepto de fracción en las tareas de comparar fracciones que son el objetivo de esta actividad. Por ello intenta que aparezca en clase alguna explicación que utilice estos elementos matemáticos que son el objetivo de aprendizaje de esta lección:

Júlia: ¿Qué pensáis? ¿Alguien lo ha hecho de otra manera? ¿Nadie? ¿Alguien puede explicar de otra manera que 4/5 es mayor que ¾?

(Álvaro y Félix)

Álvaro: Sí, claro… lo que pasa es que nosotros no lo hemos pintado

Júlia: ¿Qué habéis hecho?

Félix: Pues hemos pensado que a 4/5 le falta 1/5 para estar completo y a ¾ le falta ¼. Entonces… como 1/5 es más pequeño que ¼, entonces 4/5 es mayor porque le falta menos para estar completo que a ¾.

Álvaro: ¡Eso es!

Responde a las siguientes cuestiones:

- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la actividad identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja, define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje prevista.

❋ ❋ ❋

A continuación, describimos las características y las respuestas esperadas de los EPM a la tarea profesional 2. Esta tarea involucra una actividad de comparar fracciones propias ($f<1$) con distinto denominador en la que se solicita a los estudiantes que justifiquen sus respuestas gráficamente o bien oralmente con el objetivo de comprender su razonamiento. En este tipo de tareas los EPM deberían considerar los siguientes elementos matemáticos del concepto de fracción:

- *El todo para representar las fracciones debe ser igual.*
- *Relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña.*

La consideración de estos elementos matemáticos debería permitir a los EPM identificar las características de las respuestas de cada una de las parejas de estudiantes:

La pareja 1 (Joan y Tere), para resolver la actividad se apoyan en la representación gráfica de ambas fracciones. En primer lugar, representan tres cuartos de manera gráfica, dibujando un todo y dividiéndolo en 4 partes congruentes. Después sombrean 3 de esas 4 partes congruentes (3/4). A continuación, representan 4/5 utilizando el mismo todo anterior, pero dividiéndolo esta vez en 5 partes congruentes de las que sombrean 4. Finalmente comparan el área sombreada en ambas figuras para concluir que 4/5 es mayor que 3/4 (comparando visualmente ambas representaciones). Es decir, estos estudiantes realizan una comparación visual de las fracciones tras reconocer que al comparar fracciones los “todos” usados deben ser iguales, pero no pueden generar una explicación más allá de “se ve que 4/5 es mayor que 3/4”.

La pareja 2 (Xavi y Víctor), aunque muestra que basa su decisión en la percepción visual, al representar gráficamente ambas fracciones, no mantienen los "todos iguales" ya que, aunque las partes que dibujan se mantienen iguales, los todos no son congruentes.

Por último, *la pareja 3* (Álvaro y Félix) no se apoya en la representación gráfica para resolver la actividad. Su manera de razonar muestra que comparan las dos fracciones mentalmente sin necesidad de apoyarse en el dibujo. Su argumento evidencia el uso del elemento matemático: *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte.* De esta manera razonan que el todo estaría dividido en 4 partes (para 3/4) y le faltaría 1/4 para estar completo mientras que en el caso de 4/5, el todo estaría dividido en 5 partes y, por tanto, le faltaría 1/5 para estar completo. A partir de este razonamiento lo que hacen es comparar las partes que faltan para que la unidad esté completa. Como 1/4 es mayor que 1/5 deducen que la parte sombreada en 4/5 ha de ser mayor que la sombreada en 3/4. La Tabla 3.3 muestra un resumen de las características de las respuestas de cada pareja.

Tabla 3.3. Relación entre las respuestas de cada pareja de estudiantes de primaria y la comprensión de los elementos matemáticos

Actividad: Comparar fracciones	Víctor y Xavi	Joan y Tere	Félix y Álvaro
Manteniendo el todo igual	NO	SI	SI
Relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña	NO	NO	SI

La identificación de los elementos matemáticos y su papel en la comprensión de los estudiantes sobre las fracciones permite la interpretación del pensamiento matemático de cada una de las parejas. De esta manera, *la pareja 1* (Joan y Tere), al comparar fracciones realizando dibujos tienen en cuenta que las figuras que usan como el todo deben ser iguales, sin embargo, no muestran evidencias de que establezcan la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña. La consideración de estas características de las respuestas de estos estudiantes los situaría en el nivel 2 de la THA.

La *pareja 2* (Xavi y Víctor) han mostrado que cuando comparan fracciones no tienen en cuenta que deben mantener los todos congruentes. Esta característica situaría en el nivel 1 de la THA a esta pareja en las tareas de comparar fracciones.

La *pareja 3* (Álvaro y Félix) pone de manifiesto con su respuesta que al comparar fracciones reconocen que los "todos" usados debe ser iguales y establecen la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. Esto lo realizan ahora mentalmente y lo pueden justificar usando dibujos. Estas características inferidas de su respuesta sitúan a estos estudiantes en el nivel 3 de la trayectoria de aprendizaje.

La tercera cuestión de la tarea solicita a los EPM proponer una actividad para ayudar a estos estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones. Para ello se deben considerar los elementos matemáticos que apoyan la progresión entre los distintos niveles con relación a las tareas de comparar fracciones. La *pareja 1* (Joan y Tere) se encontraba en el nivel 2, para progresar al nivel 3 estos estudiantes deben empezar a establecer la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. Con el objetivo de que esta pareja 1 adquiera este elemento matemático se pueden trabajar actividades de comparación de fracciones como las siguientes:

- **Objetivo**: Establecer la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte
- **Actividad 1**: Comparar dos fracciones con igual numerador, pero distinto denominador (usando para apoyar los argumentos representaciones gráficas de modo de representación continuo).
    - Comparar 3/5 y 3/4 Comparar 5/6 y 5/7
- **Actividad 2:** Comparar una fracción propia con una impropia (usar como punto de referencia la idea de ser mayor o menor que la unidad)

La *pareja 2* (Xavi y Víctor) se sitúa en el nivel 1 de comprensión en la trayectoria hipotética de aprendizaje, para progresar hasta el siguiente nivel deben empezar a reconocer que en la comparación de fracciones deben mantener los "todos" iguales para poder comparar. Para ello se le podrían proponer actividades como las siguientes:

- **Objetivo**: Reconocer que se deben usar "todos" iguales en tareas de comparar
- **Actividad**: Usar material concreto, hojas de periódico o las regletas Cuisenaire (números en color) para representar siempre una unidad a partir de la cual representar diferentes fracciones y comparar. Luego se les pide representar lo realizado con énfasis sobre la idea de que el todo debe ser igual para poder comparar las fracciones.

En cuanto a *la pareja 3* (Álvaro y Félix) se encuentra en el nivel 3 y habrían conseguido el objetivo de aprendizaje pretendido.

3.2.6. Sesión 6 (Evaluación). Tarea profesional 3- Identificar y reconocer características de la comprensión sobre las fracciones en tareas de Identificación y reconstrucción de la unidad

Transcurridas 3 semanas desde la participación de los EPM en el entorno de aprendizaje se realizó una sesión de evaluación. En esta sesión se solicitó a los EPM que resolvieran una última tarea profesional, pero esta vez sin utilizar el documento teórico referido a la trayectoria hipotética de aprendizaje. El objetivo es determinar características del nivel de uso del conocimiento teórico en la resolución de la tarea profesional. La tarea se resolvió de manera individual durante aproximadamente 60 minutos.

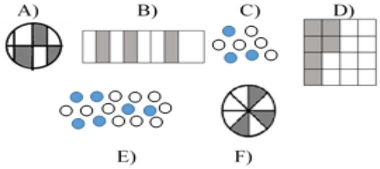
En la tarea profesional 3 se mostraban las respuestas de tres estudiantes a dos actividades con fracciones, una relacionada con la identificación de fracciones propias (f<1) y otra actividad de reconstruir la unidad a partir de una fracción impropia dada (f>1). En la siguiente subsección mostramos la tarea profesional, las características de esta y las respuestas esperadas de los EPM.

3.2.6.1. Tarea profesional 3. Tarea de evaluación: Identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad

❋ ❋ ❋

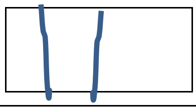
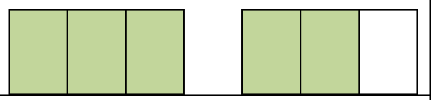
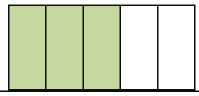
Júlia es una maestra de Educación Primaria que ha puesto como evaluación del tema de fracciones las siguientes dos actividades:

1. ¿Qué figuras representan 3/8?



2. Esta figura representa 5/3 de la unidad. Representa la unidad

Algunas respuestas de su alumnado fueron:

	Actividad 1	**Actividad 2**
Estudiante 1	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas.*	*Esto son 3 partes.* 
Estudiante 2	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16.*	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 
Estudiante 3	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*	*Si la figura que nos muestra son 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

- Describe **cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la actividad** identificando
    - Cómo han utilizado los *elementos matemáticos* implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué **nivel de la Trayectoria de Aprendizaje** situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.
- Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja,
    - Define **un objetivo de aprendizaje y propón una actividad** (o modifica la propuesta inicialmente por Júlia) para ayudar a sus alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje prevista.

* * *

A continuación, describimos las características de la tarea profesional 3 y las respuestas esperadas de los estudiantes. La actividad 1 es una actividad de identificación de fracciones propias (f<1). Se presentan una fracción propia y se solicita la identificación de la fracción entre varias representaciones dadas de la unidad en distintos modos de representación: continuos (círculo, rectángulo y cuadrado) y discreto (fichas sueltas). Los elementos matemáticos que deben ser usados para resolver la actividad son:

- *Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes.*
- *Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.*

En cuanto a la actividad 2 se trata de una actividad de reconstruir la unidad a partir de una parte, en este caso una fracción impropia (f>1). Para resolver esta actividad deben considerarse los elementos matemáticos:

- *Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes para dividir la representación dada en partes congruentes (5/3 como 5 veces 1/3).*
- *Considerar una de estas partes como una unidad iterativa, de manera que permita construir la unidad.*

Las respuestas del *Estudiante 1* a la actividad 1 muestra que identifica como representaciones de 3/8 las figuras A, B y F. Esta respuesta sugiere que este estudiante cuenta las partes en que está dividida la unidad y luego cuenta las partes sombreadas. El hecho de identificar A y B como 3/8 muestra que no considera que las partes en que se divide el todo han de ser congruentes. Como el estudiante no considera la figura C como 3/8, muestra que no identifica la fracción como parte-todo en modo de representación discreto. Además, el hecho de no considerar las figuras D y E como 3/8 señala que no considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte.

Las respuestas del *Estudiante 2* indican que el estudiante usa adecuadamente la idea de que las partes deben ser congruentes (por lo que considera que las representaciones A y B no son 3/8 y la F sí lo es). Sin embargo, no considera la figura C como 3/8, mostrando que no identifica la fracción como parte-todo en modo de representación discreto. Tampoco considera las figuras D y E como 3/8 mostrando que no considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.

Las respuestas del *Estudiante 3* muestran que utiliza la idea de que las partes deben ser congruentes, por eso no considera como representación de 3/8 las figuras A y B y sí la figura F. Al considerar la figura C como 3/8, identifica la fracción como parte-todo en modo de representación discreto. Como considera las representaciones D, y E, como 3/8 indica que considera que una parte puede estar dividida en otras partes (Figura D) y que un grupo de partes pueden formar una parte (Figura E).

En cuanto a la actividad 2, el *Estudiante 1* divide la representación dada en 3 partes no congruentes por lo que muestra que no tiene en cuenta que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes. Su respuesta muestra que no entiende el ejercicio, pero se observa que presenta dificultades para representar fracciones impropias al no identificar ni usar la fracción unitaria como una unidad iterativa

El *Estudiante 2* en la actividad 2 tiene en cuenta que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, pero no identifica la fracción unitaria que le permita representar 5/3 en el todo dado, iterando la fracción unitaria (es decir iterar 5 veces 1/3) por lo que no es capaz de reconstruir la unidad.

El *Estudiante 3* en primer lugar divide la figura en 5 partes congruentes (identifica que tiene 5 veces 1/3) utilizando la idea de que las partes deben ser congruentes para encontrar la fracción unitaria (1/3). Posteriormente utiliza la fracción unitaria como unidad iterativa para reconstruir la unidad que son 3/3 (iterando 3 veces 1/3).

La Tabla 3.4 muestra la relación entre los elementos matemáticos y las respuestas de los estudiantes de primaria a la tarea profesional 3.

Tabla 3.4. Relación entre las respuestas de cada estudiante de primaria y la comprensión de los elementos matemáticos

Estudiantes	**E1**		**E2**		**E3**	
Elementos matemáticos / Actividades	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes.	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.	NO		NO		SÍ	
Identifica la fracción como parte-todo en modo de representación discreto	NO		NO		SÍ	
Identifican y usan una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa, de manera que permita reconstruir la unidad		NO		NO		SÍ

La identificación de estos elementos matemáticos en cada una de las actividades permite interpretar la comprensión de cada uno de los estudiantes.

El *Estudiante 1* muestra en la actividad 1 que:

- Presenta dificultades en reconocer que las partes deben ser congruentes.
- No reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.
- No identifica las fracciones en modos de representación discretos.

En la actividad 2 el *Estudiante 1*:

- Presenta dificultades en reconocer que las partes deben ser congruentes.
- Tiene dificultades en identificar y usar la fracción unitaria como fracción iterativa.

Teniendo en cuenta estas características podríamos decir que este estudiante estaría en el nivel 1 de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

El *Estudiante 2* muestra en la actividad 1 que:

- Identifica fracciones en modos de representación continuo, reconociendo que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, pero tienen dificultades para identificar fracciones en modos de representación discreto.
- No reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.

En la actividad 2 el *Estudiante 2*:

- No identifica la fracción unitaria (1/3) correctamente (es decir, no identifica que la figura proporcionada es 5 veces 1/3) lo que no le permite reconstruir la unidad (aunque parece que el estudiante sí sabe iterar fracciones unitarias) y que las partes en que se divide el todo debe ser congruentes.

Considerando las características de las respuestas en la resolución de ambas actividades este estudiante se encuentra en el nivel 2 de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

El *Estudiante 3* muestra que en la actividad 1 que:

- Identifica fracciones en modo de representación continuo, reconociendo que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes y en modo de representación discreto reconociendo que los grupos han de ser congruentes.
- Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.

  En la actividad 2 el Estudiante 3 muestra que:

- Reconoce que las partes en que se divide un todo deben ser congruentes

- Identifica que la figura proporcionada es 5 veces 1/3 y utiliza la fracción unitaria (1/3) como una unidad iterativa para reconstruir la unidad (3 veces 1/3).

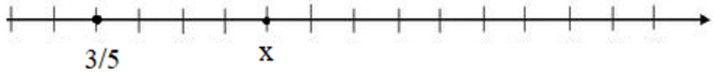
Estas características en las respuestas del *Estudiante 3* muestran que se halla en el nivel 3 de desarrollo de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

La interpretación del pensamiento matemático permite proponer actividades adecuadas a su nivel de comprensión. Para ello los EPM deben considerar los elementos matemáticos de transición entre cada nivel. Para que el Estudiante 1, que se encuentra en el nivel 1 de desarrollo, progrese hasta el siguiente nivel debe reconocer, en modo de representación continuo, que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser congruentes y la fracción unitaria como unidad iterativa. Una actividad para ayudar a progresar a ese estudiante podría ser la siguiente:

- **Objetivo**: Reconocer que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser congruentes.
- **Actividad**: Se les proporciona un todo en modo de representación continuo y se les solicita que dibujen la mayor cantidad posible de fracciones de 1/4 con distintas formas.

El *Estudiante 2* se encuentra en el nivel 2 de desarrollo de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Para que este alumno progrese hasta el siguiente nivel debe: Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte (modo de representación discreto) y considerar una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como una unidad iterativa, se pueden proponer las siguientes:

- **Objetivo**: considerar un grupo de partes como una parte
- **Actividad 1:** se les proporcionan materiales manipulativos (e.g. garbanzos) y se les solicita que tomen como todo 8 garbanzos. Una vez que tienen el todo se les pide que representen 1/4, 2/4 y así sucesivamente con diferentes todos.
- **Objetivo**: considerar una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como una unidad iterativa.
- **Actividad 2**: indica el valor de X en la línea numérica.



3.3. ANÁLISIS DE DATOS

Los datos que conforman nuestra investigación son las respuestas de los 85 EPM a las tres tareas profesionales que los EPM resolvieron durante las sesiones cuatro, cinco y seis del módulo de enseñanza. Antes de proceder con el análisis, se asignó un código a cada uno de los participantes desde el E01 hasta el E85. A continuación, codificamos las respuestas de cada uno de los participantes a las diferentes tareas profesionales, estableciéndose los códigos T1, T2 y T3 para las tareas primera, segunda y tercera (evaluación), respectivamente. De esta manera el código E01_T1 indicaba que se trataba de las respuestas del estudiante E01 a la tarea profesional 1 y así sucesivamente.

Nuestro objetivo es analizar cómo los EPM a lo largo del módulo de enseñanza:

- *atendían* a las estrategias de los estudiantes *identificando los detalles en las respuestas de los estudiantes y usándolos para describir las estrategias*. Es decir, si discernían detalles distinguiendo los elementos matemáticos relevantes de las respuestas de los estudiantes,
- *interpretaban* la comprensión de los estudiantes, reconociendo/estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos previamente identificados y los distintos niveles de comprensión de la THA,
- *decidían cómo responder* proponiendo actividades para ayudar a progresar conceptualmente al estudiante, usando la información inferida sobre su comprensión.

El análisis de los datos se realizó en dos fases. En la primera de ellas se analizaron las respuestas de los estudiantes para maestro a cada una de las tareas profesionales y en la segunda fase se analizó la evolución de cada participante a través de las tres tareas.

En la primera fase, se realizó un análisis inductivo de las respuestas de un grupo de estudiantes, elegidos al azar, a las tres tareas. El análisis inductivo consistió en identificar en las respuestas de los estudiantes para maestro unidades de análisis, es decir, frases o conjunto de frases que reflejaran un significado como, por ejemplo:

- La mención del elemento matemático reconocido en la respuesta del estudiante.

- El establecimiento de inferencias sobre el nivel de comprensión del estudiante mediante el uso del elemento matemático y la caracterización de la comprensión reflejada en la THA.
- La relación entre el objetivo de aprendizaje pretendido y las características de la actividad propuesta.

A estas unidades de significado se les asignaron códigos específicos que hizo emerger un primer borrador de códigos que indicaba características de la manera en la que las destrezas de atender, interpretar y decidir se reflejaban en las respuestas de los EPM. Estos códigos se fueron refinando y consensuando, en repetidas reuniones con los investigadores que dirigían este proyecto, a medida que se iban incorporando más respuestas de los EPM.

Este proceso general se particularizó para cada una de las tareas profesionales atendiendo a las características determinadas por cómo los elementos matemáticos involucrados en su resolución eran reconocidos por los EPM, cómo eran usados al inferir los niveles de comprensión de los estudiantes (la relación de estos elementos matemáticos con la trayectoria hipotética de aprendizaje) y las posibles propuestas de actividades propuestas para ayudar a los estudiantes de primaria a progresar entre niveles. Mostraremos, en las siguientes secciones el proceso de análisis seguido en las tres tareas profesionales.

3.3.1. Proceso de análisis en la Tarea 1

A continuación, se particulariza el proceso de análisis para las destrezas de atender, interpretar y decidir.

3.3.1.1. Proceso de análisis con relación a cómo atendían (Discernir detalles)

Atender a las estrategias de los estudiantes (discernir detalles), en la tarea 1, implica la identificación de los elementos matemáticos: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* (E1) *y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como otra parte* (E2), en las respuestas de los estudiantes y su uso para describir las estrategias de los estudiantes.

Para identificar las características con relación a la destreza atender usamos los siguientes códigos:

- EPM que no mostraron evidencias de discernir detalles (NO_DR, Figura 3.5).
- EPM que mostraron únicamente evidencias de discernir detalles para el elemento matemático (E1): las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes (DR_E1, Figura 3.6).
- EPM que discernieron detalles relativos a los dos elementos matemáticos (E1 y E2) (DR_E1y2; Figura 3.7).

NO_DR	
Descripció	No identifica los elementos matemáticos *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes (E1) y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como otra parte (E2)* en las respuestas de los estudiantes. Ofrece respuestas vacías de contenido o sin sentido.
Evidencia	Respuesta de la pareja formada por Victor y Xavi Ambos responden como opciones correctas al ejercicio 1 (3/4) las letras A, B, C, D. En esta ocasión se puede comprobar como no han asimilado correctamente que el tipo de contexto (área y continuo) que se les muestra es congruente y que dicha fracción/representación es incorrecta. Respuesta de Joan y Tere Ambos, a través de sus respuestas, descartan la figura A y C por no existir congruencia, sin embargo, siguen sin comprender la idea de denominador puesto que no asimilan que la figura D y E sí son congruentes aunque el denominador sea distinto (lo mismo ha ocurrido con la pareja anterior).

Figura 3.5. Ejemplo código NO_DR. Descripción y evidencia (E84_T1)

DR_E1	
Descrip.	Solo identifica, en las respuestas de los estudiantes, el elemento matemático *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes (E1).*
Evidencia	C2. * Victor y Xavi han contestado "A B C D" porque no toman en cuenta la congruencia entre las partes. Ellos solo ven que hay 3 partes negras sobre 4 y hasta, no toman en cuenta el tamaño de cada parte que normalmente deberían ser iguales. * Tere y Joan han contestado "B D". La diferencia es que ellos tienen consciencia de la congruencia de las partes porque ~~del~~ ^(ya es caso) A ni del C. Pero no saben considerar una parte como una unidad iterativa para construir otras fracciones porque en la E y F, son también 3/4" pero repetida 2 veces en la F y 6 veces en la E. * Felix y Alvaro tienen los dos elementos matematicos.

Figura 3.6. Ejemplo DR_E1. Descripción y evidencia (E34_T1)

DR_E1y2	
Descripc	Identifica en las respuestas de los estudiantes ambos elementos matemáticos *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes y una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte*
Evidencia	2ª pareja → Joan y tere. - Reconocen que las partes han de ser congruentes. y por ese motivo afirman que las figuras A y C no representan 3/4 - No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. No se dan cuenta que 18/24 es equivalente a 3/4

Figura 3.7. Ejemplo DR_E1y2. Descripción y evidencia (E38_T1)

3.3.1.2.Proceso de análisis con relación a cómo interpretan (establecer relaciones)

Al interpretar la comprensión, los EPM debían relacionar los elementos matemáticos identificados previamente en las respuestas de cada pareja de estudiantes: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes (E1)* y/o *una parte puede* *estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como otra parte (E2*), con las características de los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Para el análisis de esta destreza nos centramos en si los EPM establecían relaciones o no (es decir, si eran capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes). Para identificar las características de la destreza interpretar usamos los siguientes códigos:

- EPM que no establecen relaciones entre ninguno de los elementos matemáticos y los distintos niveles de comprensión de la THA. Es decir, estos EPM no lograron interpretar la comprensión de los estudiantes (ER_NO).
- EPM que interpretan la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre el elemento matemático E1 y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E1).
- EPM que interpretan la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre los dos elementos matemáticos (E1 y E2), y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E1y2).

Según el discurso generado por los EPM, que habían interpretado la comprensión de los estudiantes, se usaron los siguientes subcódigos considerando los detalles proporcionados en sus interpretaciones:

- EPM que no aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (SINEV).
- EPM que aportan detalles de las respuestas de los estudiantes, pero además añadían información que no podía ser inferida a partir de las respuestas de los estudiantes y que no era coherente con el tipo de actividad que se estaba resolviendo (AÑADE).
- EPM que aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias para apoyar su interpretación (CONEV).

Mostramos a continuación ejemplos de los diferentes códigos usados para caracterizar la destreza interpretar con relación a los elementos matemáticos y el discurso usado por los EPM. Con relación al uso de elemento matemático: *las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes (E1):*

- EPM que establecen relaciones entre el E1 y los niveles de la THA, pero no aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación: ER_E1_SINEV (Figura 3.8).
- EPM que establecen relaciones entre el E1 y los niveles de la THA y además, aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación: ER_E1_CONEV (Figura 3.9).

ER_ E1_SINEV	
Descripc	Se establecen relaciones entre el E1 *las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes* y los niveles de la THA. Sin embargo, no se no aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación.
Ejemplo	2) Joan y Tere → Se han dado cuenta de que las partes tienen que ser congruentes, pero no reconocen el resto de elementos matemáticos. 2) Nivel 2, ya que en contexto continuo reconocen la necesidad de congruencia de las partes.
Evidenci	El E10 interpreta la comprensión de la pareja de Joan y Tere relacionando el E1 "congruencia de las partes" con el nivel 2 de la THA, aunque no aporta detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación.

Figura 3.8. Ejemplo ER_E1_SINEV. Descripción y evidencia (E10_T1)

Con relación al uso de los dos elementos matemáticos: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes (E1)* y *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte (*E2) y las características de la comprensión de la THA (ER_E1y2):

- EPM que establecen relaciones entre los elementos matemáticos E1 y E2 y los niveles de la THA sin aportar detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación (ER_E1y2_SINEV; Figura 3.10).
- EPM que establecen relaciones entre los elementos matemáticos E1 y E2 y los niveles de la THA, pero añaden información que no puede inferirse de las respuestas de los estudiantes ni con el tipo de actividad que se está resolviendo (ER_E1y2_AÑADE; Figura 3.11).

- EPM que establecen relaciones entre los elementos matemáticos E1 y E2 y los niveles de la THA y aportar detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias para apoyar su interpretación (ER_E1y2_CONEV; Figura 3.12).

ER_E1_CONEV	
Descripc	Se establecen relaciones entre el E1 *las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes* y los niveles de la THA y además, aportan detalles de las respuestas de los estudiantes de primaria como evidencias de su interpretación.
Ejemplo	* Tere y Joan han contestado "B D": la diferencia es que ellos tienen consciencia de la congruencia de las partes porque ~~el~~ ni es caso A ni del C pero no saben considerar una parte como una unidad iterativa para construir otras fracciones porque en la E y F, está también "3/4" pero repetida 2 veces en la F y 6 veces en la E * Felix y Alvaro tienen los dos elementos Tere y Joan: Nivel 2 porque reconocen en contexto continuo que las partes deben ser congruentes y consideran Felix y Alvaro: Nivel 3: porque en contexto discreto tienen justo
Evidencia	El E80 interpretó la comprensión de la pareja de Tere y Joan estableciendo relaciones entre el E1 y el nivel 2 de la THA "nivel 2 porque reconocen en modo de representación (contexto) continuo que las partes deben ser congruentes". Además, aportó detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación cuando dice que "han contestado B y D" e interpreta esto como evidencia de que "ellos tienen consciencia de la congruencia" (énfasis añadido).

Figura 3.9. Ejemplo ER_E1_CONEV. Descripción y evidencia (E80_T1)

ER_E1y2_SINEV	
Descripción	Se interpreta la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos E1 (*las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes)* y E2 (*una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte)* y los niveles de comprensión de la THA. Sin embargo, no se aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación.
Ejemplo	• Joan y Tere → esta pareja reconoce en un contexto continuo que las partes deben ser congruentes en cuanto a su área. Además, no conocen que una parte puede estar dividida en otras partes, es decir, no saben identificar cuando dos fracciones son equivalentes (ni en un contexto continuo ni en uno discreto). Por todo lo mencionado anteriormente, esta pareja se encuentra en el nivel 2 de la trayectoria de Aprendizaje.
Evidencia	El E45 interpreta la comprensión de la pareja de Joan y Tere estableciendo relaciones entre los elementos E1 "reconoce en un contexto continuo que las partes deben ser congruenes" y el E2 "no conocen que una parte puede estar dividida en otras partes" y el nivel 2 de la THA "Por todo lo mencionado anteriomente esta pareja se encuentra en el nivel 2…"

Figura 3.10. Ejemplo ER_ E1y2_SINEV. Descripción y evidencia (E45_T1)

ER_E1y2_AÑAD	
Descripción	Se interpreta la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos E1 (*las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes)* y E2 (*una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte)* y los niveles de comprensión de la THA, sin embargo, se añade información que no puede inferirse de las respuestas de los estudiantes ni con el tipo de actividad que se está resolviendo.
Ejemplo	* Pareja 2: nivel 2 Esta pareja tiene dificultades en reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes, pero al comparar fracciones reconocen que los "todos" usados deben ser iguales, ya que tienen asimilado que las partes deben ser congruentes. Este hecho sólo lo comprenden en contextos continuos.
Evidencia	El E52 interpreta la comprensión de la pareja 2 (Joan y Tere) estableciendo relaciones entre el E2 "tienen dificultades en reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes" y el E1 "tienen asimilado que las partes deber ser congruentes". Sin embargo, añade información relativa a la comparación de fracciones que no puede inferirse de la tarea ni de las respuestas de los estudiantes (énfasis añadido).

Figura 3.11. Ejemplo ER_E1y2_AÑADE. Descripción y evidencia (E52_T1)

ER_E1y2_CONEV	
Descripción	Se interpreta la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos E1 (*las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes)* y E2 (*una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte)* y los niveles de comprensión de la THA y se aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación.
Ejemplo	1ª pareja → Joan y tere. - Reconocen que las partes han de ser congruentes y por ese motivo afirman que las figuras A y C no representan 3/4 - No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. No se dan cuenta que 18/24 es equivalente a 3/4 2ª pareja → Nivel 2, porque reconocen que las partes han de ser congruentes, → en contexto continuo y ~~además~~, pero encuentra dificultades a la hora de reconocer que una parte puede ser dividida en partes
Evidencia	El E38 interpreta la comprensión de la pareja 2 con relación a su comprensión de los elementos matemáticos E1 y E2. Además, aporta detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias cuando escribe "por ese motivo afirman que las figuras A y C no representan ¾" o bien que "no se dan cuenta que 18/24 [figura E] es equivalente a ¾" (énfasis añadido).

Figura 3.12. Ejemplo ER_E1y2_CONEV (E38_T1)

3.3.1.3. Proceso de análisis con relación a cómo deciden (proponer un objetivo y una actividad)

Para analizar cómo los EPM decidían cómo responder para ayudar a progresar conceptualmente al estudiante en su comprensión, consideramos si los EPM:

- enunciaban un objetivo de aprendizaje adecuado para ayudar a los estudiantes a progresar desde el nivel 1 al nivel 2 de la THA. (OB_N1→N2; Figura 3.13), y si
- enunciaban un objetivo de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a progresar desde el nivel 2 hasta el nivel 3 (OB_N2→N3; Figura 3.14).

Ejemplos de las respuestas asignadas con estos códigos son:

OB_N1→N2	
Descripc	Enuncia el objetivo de aprendizaje que permite a los estudiantes progresar desde el nivel 1 de la THA hasta el nivel 2: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes.*
Evidencia	Pareja 1 → Objetivo: Deben conseguir reconocer en contexto continuo que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero deben ser congruentes

Figura 3.13. Ejemplo OB_N1→N2 (E02_T1)

Categoría OB_N2→N3	
Descripc	Enuncia el objetivo de aprendizaje que permite a los estudiantes progresar desde el nivel 2 de la THA hasta el nivel 3: *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes/ considerar un grupo de partes como una parte.*
Evidencia	Juan y Tere: reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar que un grupo de partes como una parte.

Figura 3.14. Ejemplo OB_N2→N3 (E28_T1)

En cuanto a las actividades propuestas (actividades que eran coherentes con el objetivo propuesto) para progresar desde el nivel 1 al nivel 2 (OB_N1→N2) en relación con el elemento matemático: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes,* usamos los siguientes códigos:

- Actividades centradas en que las partes en las que se divide el todo deben ser "iguales" (IGUAL; Figura 3.15).
- Actividades centradas en que las partes en las que se divide el todo deben ser "congruentes" (CONG; Figura 3.16).

IGUAL	
Descripc	Propuesta de actividad para el objetivo de aprendizaje *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* para progresar desde el N1→N2 centrada en la igualdad de las partes en las que se divide el todo.
Evidencia	Victor y xavi (N.1) → que reconozcan que las partes de una fracción deben ser congruentes. ACTIVIDAD: Llevar a clase un bizcocho para repartir en trozos iguales y, de esta forma, el niño podrá darse cuenta de que si un trozo es, por ejemplo, 1/6, otro trozo que sea más grande o más pequeño no puede ser también 1/6.

Figura 3.15. Ejemplo IGUAL (E08_T1)

CONG	
Descripc	Propuesta de actividad para el objetivo de aprendizaje *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* para progresar desde el N1→N2 centrada en la comprensión de la congruencia de las partes en las que se divide el todo.
Evidencia	• Representa $\frac{2}{4}$ sobre esta figura de 3 maneras diferentes: 

Figura 3.16. Ejemplo CONG (E63_T1)

Para el análisis de las actividades propuestas (actividades que eran coherentes con el objetivo establecido) para progresar del nivel 2 al nivel 3 (OB_N2→N3) en relación con el elemento matemático: *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte*, usamos los siguientes códigos que reflejaban los distintos modos de representación utilizados por los EPM:

- Actividades centradas en la comprensión del elemento matemático en modo de representación continuo (CONT; Figura 3.17).
- Actividades centradas en la comprensión del elemento matemático en modo de representación discreto (DISC; Figura 3.18).
- Actividades centradas en la comprensión del elemento matemático en ambos modos de representación (DOS; Figura 3.19).

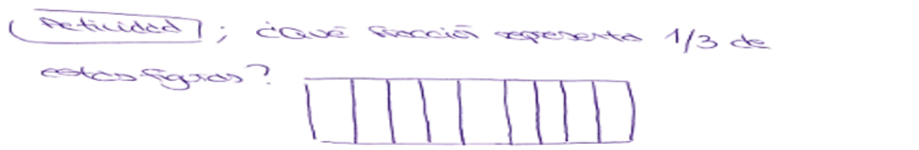
CONT	
Descripc	Propuesta de actividad centrada en el modo de representación continuo, para el objetivo de aprendizaje *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes/ considerar un grupo de partes como una parte.*
Evidencia	

Figura 3.17. Ejemplo CONT (E21_T1)

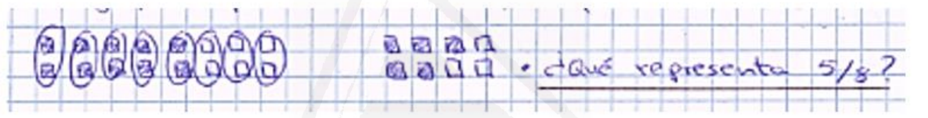
DISC	
Descripc	Propuesta de actividad, centrada en el modo de representación discreto, para el objetivo de aprendizaje *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes/ considerar un grupo de partes como una parte.*
Evidenci	

Figura 3.18. Ejemplo DISC (E37_T1)

DOS	
Descripc	Propuesta de actividad, centrada en ambos modos de representación, para el objetivo de aprendizaje *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes/ considerar un grupo de partes como una parte*
Evidencia	

Figura 3.19. Ejemplo DOS (E28_T1)

Este proceso de análisis se siguió de manera sistemática en la Tarea 2 y Tarea 3.

3.3.2. Proceso de análisis en la Tarea 2. Comparación de fracciones

En las siguientes subsecciones mostramos los códigos específicos relativos a la Tarea 2.

3.3.2.1.Proceso de análisis con relación a cómo atendían (Discernir detalles)

Atender a las estrategias de los estudiantes (discernir detalles), en la Tarea 2, implica la identificación de los elementos matemáticos: *para comparar fracciones los todos deben ser iguales* (E4) y *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña* (E5) y su uso para describir las estrategias de los estudiantes.

Para identificar las características con relación a la destreza atender usamos los siguientes códigos:

- EPM que no discernían detalles (NO_DR).
- EPM que discernían detalles para el elemento matemático (E4): Para comparar fracciones los todos deben ser iguales (DR_E4).
- EPM que discernían detalles para el elemento matemático (E5): Relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte (DR_E5).
- EPM que discernían detalles relativos a los dos elementos matemáticos (E4 y E5) (DR_E4y5).

3.3.2.2.Proceso de análisis con relación a cómo interpretan (establecer relaciones)

Al interpretar la comprensión, los EPM debían relacionar los elementos matemáticos identificados previamente en las respuestas de los estudiantes: *para comparar fracciones los todos deben ser iguales (E4)* y/ *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (E5)*, con las características de los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Para el análisis de esta destreza nos centramos en si los EPM establecían relaciones o no (es decir, si eran capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes). Para identificar las características de la destreza interpretar usamos los siguientes códigos:

- EPM que no consiguieron establecer relaciones entre ninguno de los elementos matemáticos y los distintos niveles de comprensión de la THA. Es decir, estos EPM no lograron interpretar la comprensión de los estudiantes (ER_NO).

- EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre el elemento matemático *para comparar fracciones los todos deben ser iguales* (E4) y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E4).

- EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes estableciendo relaciones entre ambos elementos matemáticos: *Para comparar fracciones los todos deben ser iguales* (E4) y/ *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña* (E5), y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E4y5).

Según el discurso generado por los EPM, que habían interpretado la comprensión de los estudiantes, se usaron los siguientes subcódigos considerando los detalles proporcionados en sus interpretaciones:

- EPM que no aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (SINEV), o bien

- EPM que aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias con las que apoyar su interpretación (CONEV).

3.3.2.3.Proceso de análisis con relación a cómo deciden (proponer un objetivo y una actividad)

Para analizar cómo los EPM decidían cómo responder para ayudar a progresar conceptualmente al estudiante en su comprensión, consideramos si los EPM:

- enunciaban un objetivo de aprendizaje adecuado para ayudar a los estudiantes a progresar desde el nivel 1 al nivel 2 de la THA. (OB_N1→N2), y si

- enunciaban un objetivo de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a progresar desde el nivel 2 hasta el nivel 3 (OB_N2→N3).

Para las actividades propuestas (actividades que eran coherentes con el objetivo propuesto) para progresar desde el nivel 1 al nivel 2 (OB_N1→N2) con relación al elemento matemático: *para comparar fracciones los todos deben ser iguales,* como objetivo de aprendizaje, usamos el siguiente código:

- Actividades centradas en mostrar una representación gráfica congruente del todo a los estudiantes como elemento facilitador de la comprensión de este elemento matemático (FACIL).

Por lo que respecta a las actividades propuestas para progresar del nivel 2 al nivel 3 (OB_N2→N3) para el elemento matemático: *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte,* como objetivo de aprendizaje, usamos los siguientes códigos:

- Actividades centradas en la comparación del tamaño de las fracciones unitarias con relación al todo sin usar material manipulable (NOMANIP).
- Actividades centradas en la comparación del tamaño de las fracciones unitarias con relación al todo usando material manipulable (MANIP).

3.3.3. Proceso de análisis en la Tarea 3. Identificación de fracciones y reconstrucción de la unidad

En las siguientes subsecciones mostramos los códigos específicos relativos a la Tarea 3.

3.3.3.1.Proceso de análisis con relación a cómo atendían (Discernir detalles)

En la Tarea 3 atender a las estrategias de los estudiantes (discernir detalles) implica la identificación de tres elementos matemáticos: *Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* (E1), *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como otra parte* (E2) y *uso de una parte como una unidad iterativa, para construir otras fracciones* (E3).

Para identificar las características con relación a la destreza atender usamos los siguientes códigos:

- EPM que no discernían detalles (NO_DR).

- EPM que únicamente discernían detalles para el elemento matemático (E1): las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes (DR_E1).
- EPM que discernían detalles relativos a los elementos matemáticos (E1 y E2) (DR_E1y2).
- EPM que discernían detalles relativos a los tres elementos matemáticos (E1, E2 y E3) (DR_E1,2y3).

3.3.3.2.Proceso de análisis con relación a cómo interpretan (establecer relaciones)

Para interpretar la comprensión, los EPM debían relacionar los elementos matemáticos identificados en las respuestas de cada pareja de estudiantes con las características de los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Para dar cuenta de cómo los EPM establecían estar relaciones se usaron los siguientes códigos:

- EPM que establecían relaciones entre el elemento matemático E1 y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E1).
- EPM que establecían relaciones entre los elementos matemáticos (E1 y E2), y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E1y2).
- EPM que establecían relaciones entre los elementos matemáticos (E1, E2 y E3), y los niveles de comprensión de la trayectoria hipotética de aprendizaje (ER_E1,2y3).

Según el discurso generado por los EPM, que habían interpretado la comprensión de los estudiantes, se usaron los siguientes subcódigos considerando los detalles proporcionados en sus interpretaciones:

- EPM que no aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias para apoyar sus interpretaciones (SINEV).
- EPM que aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como ejemplos de evidencias para apoyar su interpretación (CONEV).

3.3.3.3. *Proceso de análisis con relación a cómo deciden (proponer un objetivo y una actividad)*

Para el análisis de cómo los EPM *decidían cómo responder* proponiendo un objetivo de aprendizaje y actividades para ayudar a progresar conceptualmente al estudiante en su comprensión, usando la información inferida sobre su pensamiento emergieron distintas categorías consideramos si los EPM:

- enunciaban un objetivo de aprendizaje adecuado para ayudar a los estudiantes a progresar desde el nivel 1 al nivel 2 de la THA. (OB_N1→N2), y si
- enunciaban un objetivo de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a progresar desde el nivel 2 hasta el nivel 3 (OB_N2→N3).

En cuanto a las actividades propuestas, actividades que eran coherentes con el objetivo propuesto, nos centramos en cada uno de los elementos matemáticos. Para progresar desde el nivel 1 al nivel 2 (OB_N1→N2), en relación con el elemento matemático: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes*, usamos los siguientes códigos:

- Actividades centradas en que las partes en las que se divide el todo deben ser "iguales" (IGUAL).
- Actividades centradas en que las partes en las que se divide el todo deben ser "congruentes" (CONG).

Y en cuanto al elemento matemático: *una parte puede estar dividida en otras partes/ considerar un grupo de partes como una parte,* como objetivo de aprendizaje de las actividades propuestas para progresar del nivel 2 al nivel 3 (OB_N2→N3):

- Actividades centradas en la comprensión del elemento matemático en modo de representación continuo (CONT).
- Actividades centradas en la comprensión del elemento matemático en modo de representación discreto (DISC).
- Actividades centradas en la comprensión del elemento matemático en ambos modos de representación (DOS).

3.3.4. Fase II de análisis. Evolución de la competencia a través de las tareas

Los códigos asignados a los EPM, en cada una de las tres tareas profesionales, nos permitieron identificar cinco categorías vinculadas al uso o no de los elementos implicados en las tres tareas profesionales para interpretar la comprensión de los estudiantes:

- EPM que interpretaron usando todos los elementos matemáticos.
- EPM que tuvieron dificultades con un elemento matemático.
- EPM que tuvieron dificultades con dos elementos matemáticos.
- EPM que tuvieron dificultades con tres elementos matemáticos.
- EPM que tuvieron dificultades con cuatro elementos matemáticos.

Estas cinco categorías fueron agrupadas en dos temas:

- EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes en las tres tareas (usando los cinco elementos matemáticos implicados).
- EPM que tuvieron dificultades en al menos una tarea. Aquellos EPM que, en alguna de las tareas, no interpretaron la comprensión de los estudiantes al no atender a alguno de los elementos matemáticos involucrados.

A continuación, para obtener más detalle de la evolución de la destreza interpretar, consideramos la calidad del discurso generado, desde el punto de vista de los detalles aportados para apoyar las interpretaciones. Esto nos permitió identificar las siguientes categorías:

- EPM que aportaron detalles de las respuestas de los estudiantes en las tres tareas.
- EPM que no aportaron detalles en ninguna de las tareas.
- EPM que pasaron de aportar detalles o añadir información innecesaria a no aportar detalles en la tercera tarea.
- EPM que pasaron de no aportar detalles o añadir información innecesaria a aportar detalles en la tercera tarea.

Finalmente, se analizaron las relaciones entre las categorías identificadas en cuanto al discurso generado de la evolución de la destreza interpretar y la destreza decidir cómo responder.

La descripción de las características de estas categorías se realiza en la sección de resultados.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

"The eye sees inly what the mind is prepared to comprehend"

Robertson Davies

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados correspondientes al análisis de las respuestas de los estudiantes para maestro a las tres tareas profesionales. Este capítulo está organizado en cuatro secciones. En las tres primeras mostraremos los resultados de las tareas profesionales en relación con las destrezas identificar, interpretar y decidir para mostrar cómo los estudiantes para maestro miraban profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje. En la última sección mostramos los resultados relativos a la evolución a lo largo del entorno de aprendizaje.

4.1. CÓMO LOS EPM IDENTIFICAN, INTERPRETAN Y DECIDEN EN LA TAREA PROFESIONAL 1

La tarea profesional 1 (Tarea 1) consistía en las respuestas de tres estudiantes de educación primaria a una actividad de identificación de fracciones propias (f<1) en la que intervenían los elementos matemáticos E1, *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* y el E2 *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte*.

4.1.1. Relación entre las destrezas identificar e interpretar

De los 85 estudiantes para maestro que participaron en este estudio, 80 (94%) fueron capaces de atender a las estrategias de los estudiantes identificando detalles en sus respuestas con relación a los elementos matemáticos: *las partes en las que se divide un todo deben ser congruentes* (E1) y *una parte puede estar dividida en más partes* (E2) y usándolos para describir las estrategias. Tres estudiantes para maestro (4%) identificaron únicamente el elemento matemático E1 en las respuestas de los estudiantes de primaria, mientras que dos estudiantes para maestro (2%) no identificaron los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes de primaria.

Nuestros resultados muestran la relación entre la capacidad de identificar los elementos matemáticos, en las respuestas de los estudiantes, y la capacidad de establecer relaciones con los distintos niveles de desarrollo en la THA para interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria (Tabla 4.1). Los 3 EPM que identificaron el E1, en las respuestas de los estudiantes de primaria, establecieron relaciones entre dicho elemento y los niveles de la THA. Por otra parte, 79 de los 80 EPM que lograron identificar los elementos E1 y E2, en las respuestas de los estudiantes, fueron también capaces de establecer relaciones entre ambos elementos matemáticos y los niveles de la THA (niveles 1 a 3). Finalmente, a los 2 EPM que no fueron capaces de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes, se sumó un EPM que, aunque había identificado los dos elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes, no logró establecer relaciones entre ellos y los diferentes niveles de la THA.

Tabla 4.1. Relación entre las destrezas identificar e interpretar en la Tarea 1

		INTERPRETAR (Tarea 1)						
		NO	ER_E1		ER_E1Y2			
			SINEV	CONEV	SINEV	AÑADE	CONEV	TOTAL
IDENTIFICAR (Tarea 1)	NO_DR	2	-	-	-	-	-	2
	DR_E1	-	1	2	-	-	-	3
	DR_E1Y2	1	-	-	21	7	51	80
	TOTAL	3	1	2	21	7	51	85

Estos resultados sugieren que identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes y relacionarlos con los niveles de desarrollo de la THA para interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria ocurrió en esta tarea de manera conjunta. Es decir, identificar los elementos matemáticos: *las partes en las que se divide el todo han de ser congruentes* y *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte*, permitió a los EPM interpretar la comprensión de los estudiantes con relación a estos elementos.

Sin embargo, no todos los EPM ofrecieron el mismo nivel de detalle en sus respuestas a la hora de interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes. Los resultados muestran tres maneras de interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes:

- *Nonevidencers* (SINEV): EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes, pero no aportan detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones.
- *Adders* (AÑADE): EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, añaden información que no puede ser inferida a partir de las respuestas de los estudiantes y que no es coherente con el tipo de actividad que se está resolviendo.
- *Evidencers* (CONEV): EPM que interpretan el pensamiento de los estudiantes aportando detalles desde las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación.

4.1.1.1.Interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes

De los 3 EPM que interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes únicamente estableciendo relaciones entre el E1, *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes,* y los niveles de la THA relacionados con este elemento, uno no mostró detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (E10, Nonevidencer. Figura 4.1) mientras que los otros dos sí proporcionaron evidencias. Por ejemplo, el E80 señala que la pareja formada por Joan y Tere no comprenden el elemento de congruencia de las partes en las que se divide el todo porque “descartan las figuras A y C” (E80, Evidencer. Figura 4.2).

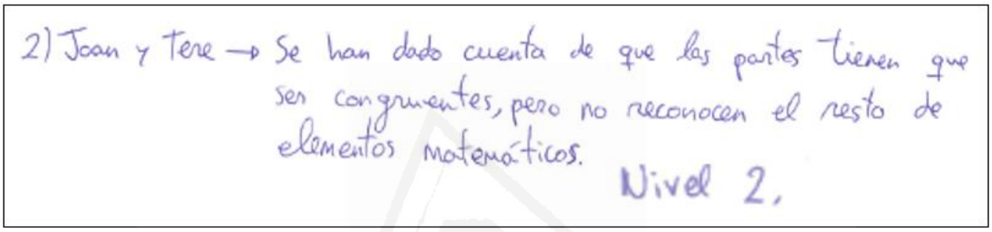

2) Joan y Tere → Se han dado cuenta de que las partes tienen que ser congruentes, pero no reconocen el resto de elementos matemáticos. Nivel 2.

Figura 4.1. Respuesta del E10. Establece relaciones entre el E1 y los niveles de la THA sin aportar evidencias de su inferencia (Nonevidencer)

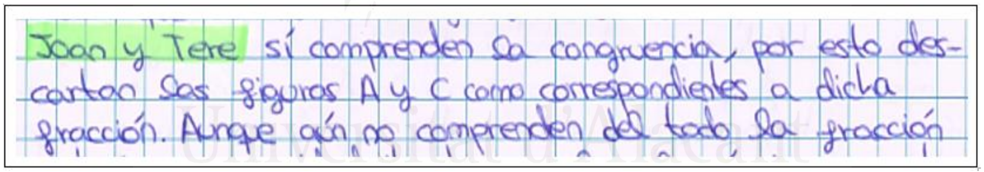

Joan y Tere sí comprenden la congruencia, por esto descartan las figuras A y C como correspondientes a dicha fracción. Aunque aún no comprenden del todo la fracción

Figura 4.2. Respuesta E80. Establece relaciones entre el E1 y los niveles de la THA aportando evidencias de su inferencia (Nonevidencer)

Por otro lado, de los 79 EPM que establecieron relaciones entre los elementos matemáticos E1 y E2 y los niveles de la THA, 21 EPM no aportaron evidencias (E1y2_SINEV; Nonevidencers), siete EPM añadieron información (E1y2_AÑAD; Adders) y 51 aportaron evidencias de las respuestas de los estudiantes (E1y2_CONEV; Evidencers).

Por ejemplo, la Figura 4.3 muestra la respuesta del EPM E03 (Nonevidencer) en la que establece relaciones entre los dos elementos identificados y los niveles de la THA al identificar que la pareja de Víctor y Xavi está en el nivel 1 de comprensión de la THA, sin embargo, no aporta detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones.

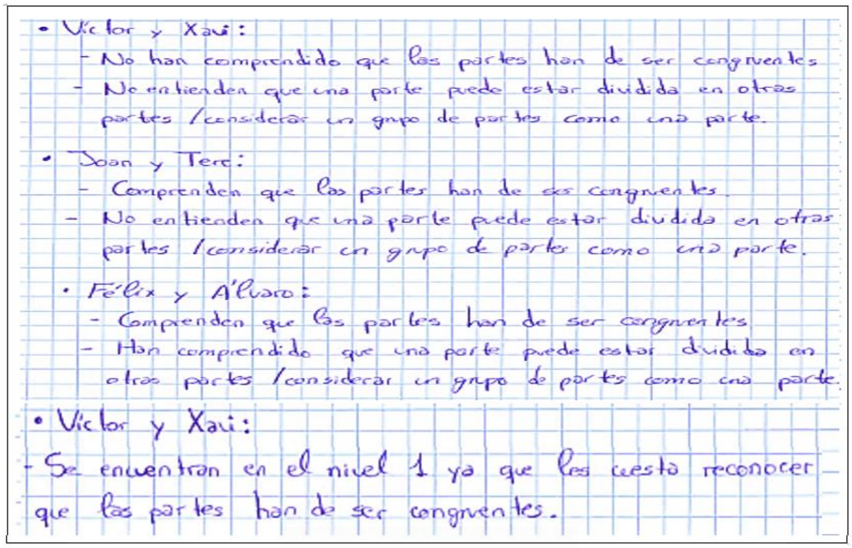

• Víctor y Xavi:
- No han comprendido que las partes han de ser congruentes
- No entienden que una parte puede estar dividida en otras partes /considerar un grupo de partes como una parte.
• Joan y Tere:
- Comprenden que las partes han de ser congruentes.
- No entienden que una parte puede estar dividida en otras partes /considerar un grupo de partes como una parte.
• Félix y Álvaro:
- Comprenden que las partes han de ser congruentes
- Han comprendido que una parte puede estar dividida en otras partes /considerar un grupo de partes como una parte.
• Víctor y Xavi:
- Se encuentran en el nivel 1 ya que les cuesta reconocer que las partes han de ser congruentes.

Figura 4.3. Ejemplo de respuesta de Nonevidencer (EPM E03)

Los siete EPM del grupo de los Adders añadían en sus respuestas información que, a pesar de estar vinculada con el nivel de la trayectoria en el que estaban situando a una determinada pareja de estudiantes de primaria, no guardaba relación con la actividad que los estudiantes de primaria estaban resolviendo. Por ejemplo, el E66, después de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes de primaria y relacionarlos con los niveles de comprensión de la THA, indica que la pareja de estudiantes Álvaro y Félix (pareja 3) tienen adquirido el elemento matemático: *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de las partes* (Figura 4.4, énfasis añadido a los elementos matemáticos no relevantes identificados por el EPM). Esta afirmación no puede inferirse de las respuestas de los estudiantes ni de la actividad que estaban resolviendo.

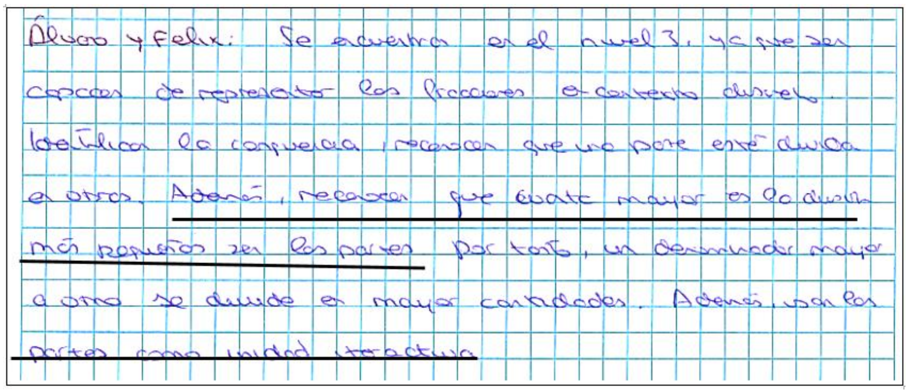
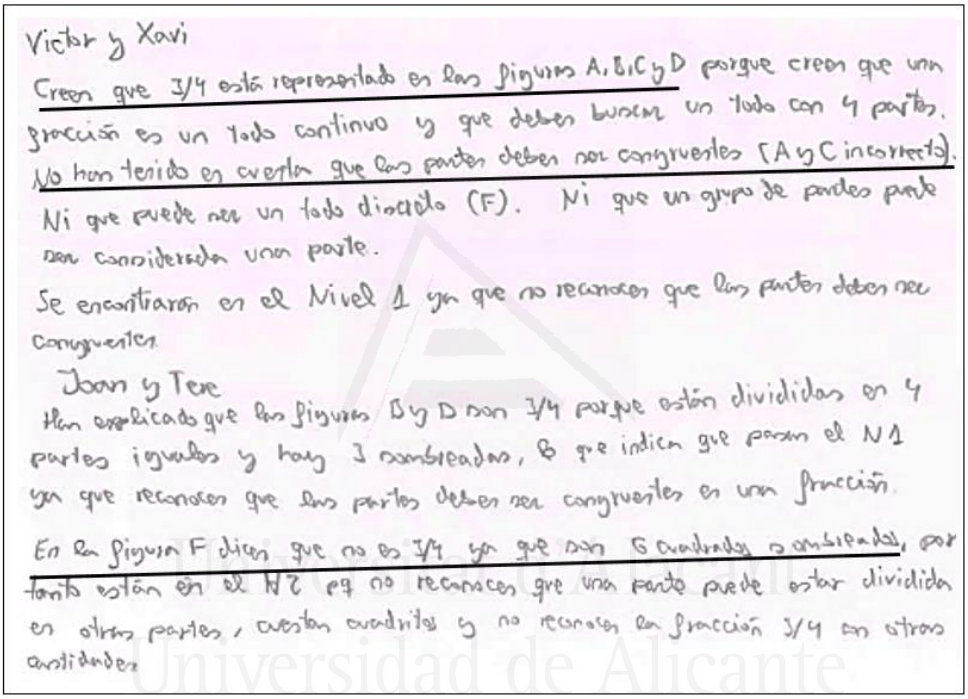

Álvaro y Felix: Se encuentra en el nivel 3, ya que son capaces de representar las fracciones en contexto discreto. Identifican la congruencia, reconocen que una parte esté dividida en otros. Además, reconocen que cuanto mayor es la división más pequeñas son las partes por tanto, un denominador mayor a otro se divide en mayor cantidades. Además, usan las partes como unidad iterativa

Figura 4.4. Ejemplo de respuesta de adder (EPM E66)

Finalmente, 51 EPM mostraron un discurso más elaborado que aportaba evidencias en sus respuestas (Evidencers). Por ejemplo, el EPM E51 (Figura 4.5) interpreta que *la pareja 1* (Víctor y Xavi) se encuentran en el nivel 1 porque "creen que 3/4 está representado por las figuras A, B, C y D […] no han tenido en cuenta que las partes deben ser congruentes (A y C incorrecto)". Del mismo modo, para *la pareja 2* (Joan y Tere) interpreta que no reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes ya que "en la figura F dicen que no es 3/4".



Victor y Xavi
Creen que 3/4 está representado en las figuras A, B, C y D porque creen que una fracción es un todo continuo y que deben buscar un todo con 4 partes.
No han tenido en cuenta que las partes deben ser congruentes (A y C incorrecto).
Ni que puede ser un todo discreto (F). Ni que un grupo de partes puede ser considerada una parte.
Se encontraron en el Nivel 1 ya que no reconocen que las partes deben ser congruentes.

Joan y Tere
Han explicado que las figuras B y D son 3/4 porque están divididas en 4 partes iguales y hay 3 sombreadas, lo que indica que pasan el N1 ya que reconocen que las partes deben ser congruentes en una fracción.
En la figura F dicen que no es 3/4 ya que son 6 cuadrados sombreados, por tanto están en el N2 pq no reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes, cuestan cuadritos y no reconocen la fracción 3/4 en otras cantidades

Figura 4.5. Ejemplo de respuesta de evidencer (EPM E51)

En esta sección hemos mostrado cómo 82 EPM interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes de primaria estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos y los niveles de la THA. Sin embargo, las respuestas de los EPM señalan cómo estos estudiantes utilizaron discursos con diferente nivel de detalle. Los Nonevidencers interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos y los diferentes niveles de comprensión de la THA, pero sin aportar detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias; los Adders, interpretaron el pensamiento de los estudiantes añadiendo detalles innecesarios y los Evidencers interpretaron el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de sus respuestas como evidencias de sus inferencias. En la siguiente sección mostramos los resultados del análisis sobre cómo los EPM proponen actividades con relación a la destreza interpretar.

4.1.2. Relación entre las destrezas de interpretar y decidir

En la última cuestión de la tarea, los EPM tenían que proponer diferentes actividades para cada pareja de estudiantes de primaria para favorecer su progreso conceptual considerando la THA. Los estudiantes para maestro no propusieron actividades para la pareja formada por Félix y Álvaro por considerar que habían alcanzado el objetivo de aprendizaje. Por lo tanto, cada EPM propuso una actividad para *la pareja 1* (Víctor y Xavi) para ayudarles a progresar del nivel 1 al nivel 2 de la THA y otra para *la pareja 2* para ayudarles a progresar del nivel 2 al nivel 3 (Joan y Tere). La tabla 4.2 muestra la relación entre las actividades propuestas por cada grupo de EPM en relación con los elementos matemáticos que fueron capaces de interpretar y el tipo de discurso aportado en sus interpretaciones (Evidencer, Nonevidencer y Adder). Esta tabla señala que los EPM propusieron 29 actividades para progresar desde el nivel 1 al nivel 2 (34%) y 43 actividades para progresar desde el nivel 2 al nivel 3 (51%). Es decir, de las 170 actividades posibles para esta tarea 1 (85 EPM + 2 actividades = 170 actividades), los EPM propusieron 72 actividades (42%).

Tabla 4.2. Relación entre interpretar y proponer actividades en la Tarea 1

Decidir / Interpretar		EPM	Actividad Nivel 1 a Nivel 2 Proponen	Actividad Nivel 2 a Nivel 3 Proponen
NO_ER		3	-	-
ER_E1	*Nonevidencers*	2	-	-
	Evidencers	1	-	-
ER_E1y2	*Nonevidencers*	21	3	8
	Adders	7	3	2
	Evidencers	51	23	33
	TOTAL	85	29	43

En particular, los tres EPM que no interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes (NO_ER), y los tres EPM que sólo lograron establecer relaciones entre el E1 y la THA (ER_EM1), no propusieron ninguna actividad. De los 79 EPM que establecieron relaciones con los dos elementos matemáticos (E1 y E2) en esta tarea, observamos que cuando tenían que tomar una decisión, los Evidencers proponían más actividades (Tabla 4.2).

Así, los 21 EPM que interpretaron el pensamiento fraccionario sin proporcionar evidencias de las respuestas de los estudiantes (Nonevidencers), propusieron actividades en el 26% de las situaciones (11 de las 42 posibles actividades) mientras que aquellos EPM (7) que interpretaron el pensamiento de los estudiantes añadiendo información innecesaria, propusieron una actividad en el 36% de las situaciones (5 de las 14 posibles actividades). En cuanto a los 51 EPM que proporcionaron evidencias de las respuestas de los estudiantes cuando interpretaron su pensamiento (Evidencers), propusieron una actividad en el 55% de los casos. Estos resultados sugieren que los EPM que interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes, aportando un discurso más detallado en el que se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación (Evidencers), fueron capaces de proporcionar actividades en un porcentaje mayor de ocasiones que aquellos que generaron un discurso menos detallado (Adders y Nonevidencers).

Además, los EPM en el grupo de Evidencers y Nonevidencers tuvieron más dificultad para proponer una actividad de transición del nivel 1 al nivel 2 que una para transitar del nivel 2 al nivel 3 (*Nonevidencers* 14% vs 38% y *Evidencers* 45% vs 65%).

Considerando que las transiciones entre los diferentes niveles de las THA están caracterizadas por la comprensión de diferentes elementos matemáticos, estos resultados parecen sugerir que cada elemento matemático demanda un tipo de conocimiento matemático específico para proponer una actividad y que no todos los elementos matemáticos presentan la misma dificultad para los EPM. De hecho, a los EPM les resultó más difícil proponer una actividad para comprender el elemento matemático: *las partes en las que se divide un todo deben ser congruentes* (para progresar entre el nivel 1 y el nivel 2) que proponer una actividad vinculada a la comprensión del elemento matemático: *reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes* (para progresar entre el nivel 2 y el nivel 3*).*

4.1.2.1.Cantidad de actividades propuestas por los EPM en relación con la manera de interpretar

La Tabla 4.3 muestra la frecuencia con la que los EPM eran capaces de proponer una, dos o las dos actividades posibles con relación a la manera en que interpretaron el pensamiento de los estudiantes.

Tabla 4.3. Relación interpretar y número de actividades propuestas Tarea 1

		EPM QUE PROPORCIONAN ACTIVIDADES				
		0 actividades		1 actividad		2 actividades
		Nada	Solo Objetivos	Act. N1-N2	Act. N2-N3	Act. N1-N2 N2-N3
NO_ER		3				
ER_E1	Nonevidencer		1			
	Evidencer	1	1			
ER_E1y2	Nonevidencer		12	1	6	2
	Adder	2	2	1		2
	Evidencer	4	8	6	16	17
	TOTAL	10	24	8	22	21

Los resultados señalan que 51 de los 85 EPM (60%) fueron capaces de proponer al menos una actividad adecuada para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones, de los cuales, 21 EPM (25%) fueron capaces de proponer las dos actividades. El resto de los 34 EPM, o no propusieron ninguna actividad (10 EPM) o bien solo fueron capaces de enunciar algún objetivo de aprendizaje, pero sin proponer una actividad o proponiendo una actividad genérica o no adecuada para el objetivo enunciado (24 EPM). La tabla 4.3 muestra las diferencias entre los Evidencers y Nonevidencers a la hora de proponer las actividades. Así, 39 de los 53 EPM del grupo de Evidencers fueron capaces de proponer al menos una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones (74%). Además, 17 de estos EPM fueron capaces de proponer las dos actividades solicitadas (32%). Sin embargo, del grupo de Nonevidencers, nueve de los 22 propusieron al menos una actividad (41%) y solo dos de ellos lograron proponer las dos actividades solicitadas (9%).

4.1.2.2.Tipos de actividades propuestas con relación a la manera de interpretar.

El análisis de las respuestas de los EPM reveló que los EPM propusieron dos tipologías de actividades para un mismo objetivo de aprendizaje en cada una de las transiciones. La Tabla 4.4 muestra el número de actividades de cada tipo propuestas por los EPM.

Tabla 4.4. Tipo de actividades propuestas para la tarea profesional 1

Decidir / Interpretar			**ACTIVIDAD N1-N2**		**ACTIVIDAD N2-N3**		
		EPM	IGUAL	CONGR.	CONT.	DOS	DISC.
NO_ER		3	-	-	-	-	-
ER_EM1		3	-	-	-	-	-
ER_E1y2	*Nonevidencer*	21	1	2	4	1	3
	Adder	7	2	1	-	-	2
	Evidencer	51	13	10	14	7	12

Para apoyar a los estudiantes en la transición entre los niveles 1 y 2 de la THA los EPM propusieron dos diferentes tipos de actividades centradas en el objetivo de conseguir que los estudiantes adquieran el elemento matemático: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes*. Estas actividades diferían en las características de la congruencia adoptada por los EPM: igualdad (IGUAL) y congruencia (CONGR).

Las actividades propuestas por los EPM para apoyar la transición de los estudiantes entre los niveles 2 y 3 tenían como objetivo la comprensión de los estudiantes del elemento matemático: *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte*. Las propuestas se diferenciaron en el modo de representación (contexto) en el que se desarrollaba la actividad: continuo (CONT), discreto (DISC) o ambos modos de representación (DOS). Observamos que el modo de representación con mayor presencia entre las propuestas de los Evidencers y Nonevidencers fue el continuo, seguido del discreto. Por otro lado, los Evidencers son los que más actividades propusieron usando ambas representaciones.

Los resultados obtenidos tras el análisis de las respuestas de los EPM a la Tarea 1 parecen sugerir dos ideas relevantes. En primer lugar, que la THA ayudó a los EPM a identificar elementos matemáticamente relevantes en las respuestas de los estudiantes (83 de los 85 EPM; 83 identificaron al menos uno y 80 identificaron los dos), a interpretar su pensamiento fraccionario estableciendo relaciones entre los elementos identificados y los distintos niveles de comprensión de la THA (82 EPM establecieron relaciones con al menos un elemento y 79 lo hicieron con ambos) y a decidir cómo responder considerando la comprensión de los estudiantes (51 EPM propusieron al menos una actividad y 21 EPM las dos actividades).

En segundo lugar, nuestros resultados señalan que no todos los EPM interpretaron el pensamiento de los estudiantes de igual manera teniendo en cuenta el nivel de detalles del discurso aportado en sus interpretaciones. Así, los Nonevidencers aportaron un discurso en el que no se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como ejemplos de evidencias de su interpretación, los Adders, aunque aportaron detalles de las respuestas de los estudiantes, añadieron también información innecesaria y finalmente, los Evidencers interpretaron el pensamiento de los estudiantes aportando detalles de las respuestas de los estudiantes como ejemplos de evidencias de su interpretación. Estas distintas maneras de interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes tuvieron incidencia en la capacidad para proponer decisiones de acción de los EPM, aquellos EPM que fueron capaces de aportar detalles de las respuestas de los estudiantes en su discurso, fueron también capaces de proponer actividades en un número mayor de ocasiones de entre las posibles.

Las respuestas de los 85 estudiantes para maestro a la Tarea 1 nos han permitido construir un esquema que proporciona información sobre cómo los estudiantes para maestro identificaban, interpretaban y proponían (y sus relaciones) haciendo uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje (Anexo, p. 215).

4.2. CÓMO LOS EPM IDENTIFICAN, INTERPRETAN Y DECIDEN EN LA TAREA PROFESIONAL 2

La tarea profesional 2 consistía en una actividad de comparación de fracciones. Los elementos matemáticos que intervenían en esta tarea eran el E4, *al comparar dos fracciones los todos deben ser congruentes* y el E5, *la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: A mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual).*

4.2.1. Relación entre las destrezas identificar e interpretar

En esta tarea, 72 EPM identificaron en las respuestas de los estudiantes los dos elementos matemáticos, cuatro identificaron únicamente el E5, tres sólo el E4 y seis EPM no lograron identificar ninguno de estos elementos matemáticos. En cuanto a la destreza interpretar, 62 EPM establecieron relaciones entre los elementos E4 y E5 y los niveles de comprensión de la THA, nueve EPM lograron establecer relaciones con el E4 y el resto de EPM (14) no interpretaron el pensamiento de los estudiantes. La tabla 4.5 muestra la relación entre estas destrezas en la Tarea 2. Aquellos EPM que identificaron un único elemento usaron, exclusivamente, ese elemento para interpretar. Sin embargo, 10 EPM que lograron identificar ambos elementos, posteriormente, solo usaron uno de ellos para interpretar (seis EPM) o no usaron ninguno (cuatro EPM). Estos resultados muestran que es necesaria la previa identificación de los elementos matemáticos para usarlos al interpretar la comprensión de los estudiantes. Sin embargo, la identificación de los elementos matemáticos no implica que se puedan usar para interpretar.

Tabla 4.5. Relación entre las destrezas identificar e interpretar en la Tarea 2

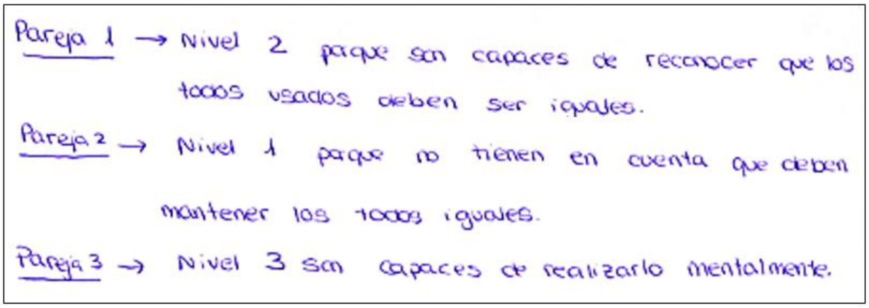
		INTERPRETAR (Tarea 2)					
		NO_ER	ER_E4		ER_E4Y5		
			Nonevidencer	*Evidencer*	*Nonevidencer*	*Evidencer*	TOTAL
IDENTIFICAR (Tarea 2)	NO	6	-	-	-	-	6
	E4	-	-	3	-	-	3
	E5	4	-	-	-	-	4
	E4Y5	4	2	4	15	47	72
	TOTAL	16	2	7	15	47	85

Tal y como sucedió en la Tarea 1, los EPM interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes de dos maneras considerando el nivel de detalles de sus respuestas: Evidencers y Nonevidencers.

4.2.1.1.Interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes

De los 71 EPM que interpretaron el pensamiento de los estudiantes, nueve establecieron relaciones únicamente con el E4. De estos, siete EPM aportaron evidencias (Evidencer) y dos no lo hicieron (Nonevidencer).

Por ejemplo, el E31 (Figura 4.6) no identifica el elemento matemático E5 (relación inversa) en las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, utilizó el E4 (mantener los todos iguales al comparar fracciones) para interpretar el pensamiento de la pareja 1 y 2, pero sin aportar detalles de las respuestas de los estudiantes para apoyar su inferencia (Nonevidencer).

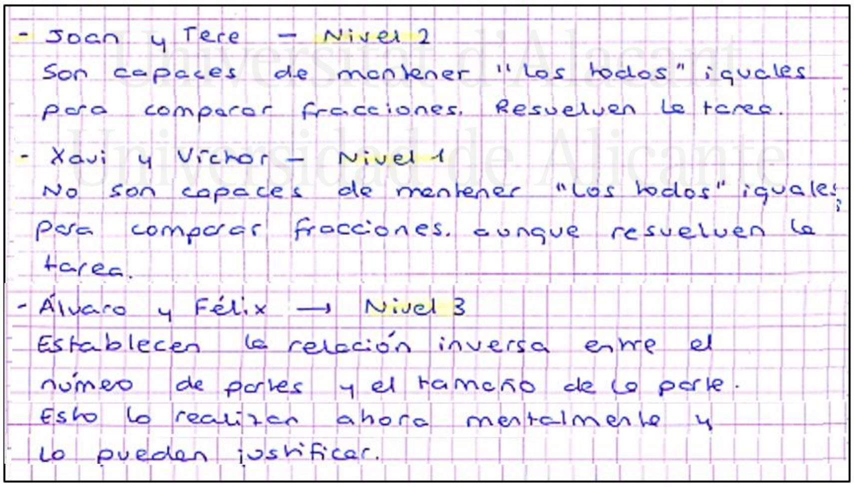


Pareja 1 → Nivel 2 porque son capaces de reconocer que los todos usados deben ser iguales.
Pareja 2 → Nivel 1 porque no tienen en cuenta que deben mantener los todos iguales.
Pareja 3 → Nivel 3 son capaces de realizarlo mentalmente.

Figura 4.6. Respuesta del E31. Establece relaciones entre el E4, pero no con el E5 y los niveles de la THA sin aportar evidencias de su inferencia (Nonevidencer)

Por último, de los 62 EPM que interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes usando los dos elementos matemáticos, 15 de ellos lo hicieron sin aportar evidencias de su interpretación (Nonevidencers) y 47 aportaron evidencias desde las respuestas de los estudiantes (Evidencers).

Por ejemplo, el E55 interpretó el pensamiento matemático de las parejas 1 y 2 usando el elemento matemático: *para comparar fracciones los todos deben mantenerse iguales*, y el pensamiento de la pareja 3 usando el elemento matemático: *relación inversa entre el número de divisiones del todo y el tamaño de cada parte*. Sin embargo, no aportó ninguna evidencia para apoyar su inferencia (Nonevidencer. Figura 4.7).



- Joan y Tere — Nivel 2
Son capaces de mantener "los todos" iguales para comparar fracciones. Resuelven la tarea.
- Xavi y Víctor — Nivel 1
No son capaces de mantener "los todos" iguales para comparar fracciones, aunque resuelven la tarea.
- Álvaro y Félix → Nivel 3
Establecen la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. Esto lo realizan ahora mentalmente y lo pueden justificar.

Figura 4.7. Respuesta del E55. Establece relaciones entre el E4y5 y los niveles de la THA sin aportar evidencias de su inferencia (Nonevidencer, Tarea 2)

Finalmente, en esta segunda tarea profesional, 47 EPM interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos identificados en las respuestas de los estudiantes y los distintos niveles de la

THA, aportando detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias. Por ejemplo, el EPM E73, en primer lugar, identifica y enumera los elementos matemáticos que va a utilizar para que le sea más fácil articular el discurso (Figura 4.8).

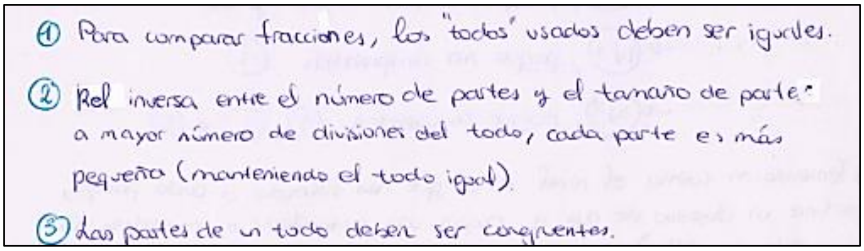

① Para comparar fracciones, los "todos" usados deben ser iguales.
② Rel inversa entre el número de partes y el tamaño de parte: a mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual)
③ Las partes de un todo deben ser congruentes.

Figura 4.8. Respuesta del E73 que enumera los elementos matemáticos que posteriormente utilizará en su interpretación

A continuación, identifica y usa los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes (Figura 4.9) para describirlas aportando evidencias de las respuestas de los estudiantes para apoyar sus inferencias. Así, identifica que la pareja formada por Víctor y Xavi "no mantienen el todo igual" (E4) ya que "al realizar el dibujo ven que 4/5 tiene 4 partes sombreadas, mientras que 3/4 tiene solamente 3 partes sombreadas" y, por lo tanto, "a pesar de dar un resultado correcto, el razonamiento es erróneo". Además, identifica también el E5, cuando afirma que la pareja de Félix y Álvaro lo han utilizado para "justificar su elección", aportando como evidencia que en su respuesta afirman que "4/5 > 3/4 porque a 4/5 le falta menos para estar completo que 3/4 (1/5< 1/4)".

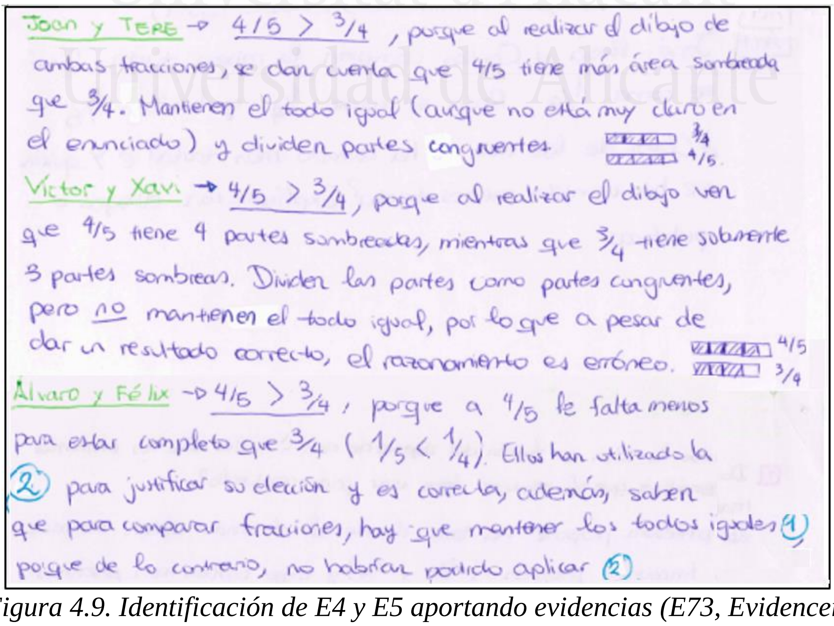

Joan y Tere → 4/5 > 3/4, porque al realizar el dibujo de ambas fracciones, se dan cuenta que 4/5 tiene más área sombreada que 3/4. Mantienen el todo igual (aunque no está muy claro en el enunciado) y dividen partes congruentes. 3/4 4/5.
Víctor y Xavi → 4/5 > 3/4, porque al realizar el dibujo ven que 4/5 tiene 4 partes sombreadas, mientras que 3/4 tiene solamente 3 partes sombreadas. Dividen las partes como partes congruentes, pero no mantienen el todo igual, por lo que a pesar de dar un resultado correcto, el razonamiento es erróneo. 4/5 3/4
Álvaro y Félix → 4/5 > 3/4, porque a 4/5 le falta menos para estar completo que 3/4 (1/5 < 1/4). Ellos han utilizado la ② para justificar su elección y es correcta, además, saben que para comparar fracciones, hay que mantener los todos iguales ① porque de lo contrario, no habrían podido aplicar ②.

Figura 4.9. Identificación de E4 y E5 aportando evidencias (E73, Evidencer)

Posteriormente, este EPM interpreta la comprensión de cada pareja sobre la comparación de fracciones relacionando los elementos matemáticos E4 y E5 identificados en las respuestas de los estudiantes y los distintos niveles de la THA (Figura 4.10)

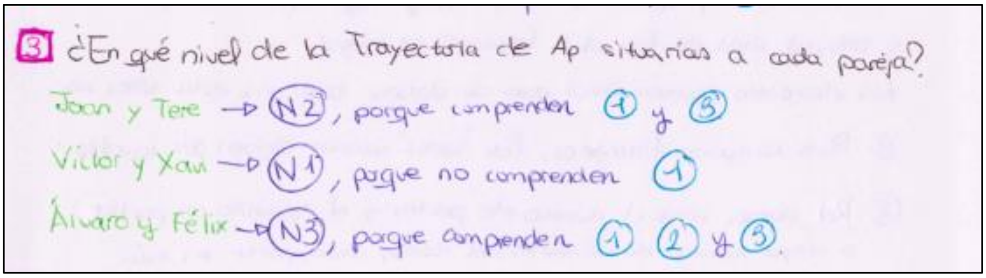


Figura 4.10. Interpretación del pensamiento de los estudiantes establecido relaciones entre E4 y E5 y los distintos niveles de la THA (E73. Tarea 2, Evidencer)

Del mismo modo que ocurrió en la Tarea 1, las respuestas de los EPM mostrados señalan diferentes maneras en las que interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes con relación a los elementos matemáticos y al nivel de detalle aportado por su discurso. En este sentido, los Nonevidencers interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos y los diferentes niveles de comprensión de la THA, pero sin aportar detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias. Mientras que los Evidencers, además de interpretar el pensamiento de los estudiantes aportaron detalles de sus respuestas como evidencias de sus inferencias. En esta tarea observamos que la categoría Adders desapareció, hecho que parece sugerir que los EPM empezaron a ajustar su discurso profesional. En la siguiente sección mostraremos la relación entre la destreza interpretar el pensamiento de los estudiantes y proponer actividades para apoyar la progresión.

4.2.2. Relación entre las destrezas de interpretar y decidir

Los EPM en la Tarea 2 debían proponer diferentes actividades, para cada pareja de estudiantes de primaria, para favorecer su comprensión de la comparación de fracciones. Los estudiantes para maestro no propusieron actividades para la pareja formada por Félix y Álvaro por considerar que habían alcanzado el objetivo de aprendizaje. Por lo tanto, cada EPM debía proponer una actividad para *la pareja 1* (Víctor y Xavi) para ayudarles a progresar del nivel 1 al nivel 2 de la THA y otra para *la pareja*

2 para ayudarles a progresar del nivel 2 al nivel 3 (Joan y Tere). Es decir, en total, los EPM podían proponer 85 actividades para progresar del nivel 1 al nivel 2 y 85 para progresar del nivel 2 al nivel 3. La tabla 4.6 muestra las actividades propuestas por cada grupo de EPM en relación con los elementos matemáticos usados para interpretar la comprensión de los estudiantes y el tipo de discurso generado (Evidencer y Nonevidencer). Los resultados globales en la tabla 4.6 muestran que los 85 EPM propusieron 24 actividades para progresar entre el nivel 1 y el nivel 2 (28%) y 15 actividades para progresar entre el nivel 2 y el nivel 3 (18%). Estos datos muestran las dificultades que los EPM afrontaron para proponer actividades vinculadas a la comprensión de los estudiantes de los elementos matemáticos E4 y E5 y, en particular, las actividades centradas en la comprensión del elemento matemático: *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de cada parte* (E5).

Tabla 4.6. Relación entre las destrezas interpretar y decidir en la tarea 2

Interpretar \ **Decidir**		EPM	Actividad Nivel 1 a Nivel 2 — Proponen	Actividad Nivel 2 a Nivel 3 — Proponen
NO_ER		14	-	-
ER_E4	*Nonevidencers*	2	-	-
	Evidencers	7	3	-
ER_E4y5	*Nonevidencers*	15	4	4
	Evidencers	47	17	11
	TOTAL	85	24	15

Además, la tabla 4.6 muestra que los EPM que no interpretaron el pensamiento de los estudiantes no lograron proponer actividades y aquellos que solo interpretaron el pensamiento de los estudiantes con relación a un elemento matemático, lograron como máximo proponer actividades para progresar entre el nivel de comprensión vinculado a ese elemento. Además, solo los que interpretaron la comprensión de los estudiantes usando los dos elementos matemáticos fueron capaces de proponer actividades para progresar entre los niveles de comprensión vinculados a ambos elementos. En segundo lugar, los 54 Evidencers (ER_E4 y ER_E4y5) propusieron 20 actividades para progresar del nivel 1 al 2 y otras 11 actividades para progresar del nivel 2 al nivel 3, es decir, en total 31 actividades de las 104 posibles (30%). Por lo que respecta a los 17 Nonevidencers

(ER_E4 y ER_E4y5) propusieron 4 actividades para la progresión en cada uno de los niveles. Es decir, ocho actividades de las 34 posibles (24%).

En este sentido, los resultados muestran que, aunque proponer actividades en esta tarea resultó difícil para todos los EPM, el grupo de Evidencer propusieron más actividades, para lograr la comprensión del elemento: *para comparar los todos deben mantenerse iguales* (E4) y *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte* (E5), que los Nonevidencers. Además, todos los EPM tuvieron más dificultad para proporcionar actividades para progresar desde el nivel 2 al nivel 3 (vinculadas a la comprensión del elemento relación inversa) que desde el nivel 1 al nivel 2 (vinculadas a la comprensión del elemento: *para comparar fracciones los todos deben mantenerse iguales*).

4.2.2.1.Cantidad de actividades propuestas en función de la manera de interpretar

La tabla 4.7. muestra la frecuencia con la que los EPM eran capaces de proponer una, dos o las dos actividades posibles con relación a la manera en que interpretaron la comprensión de los elementos matemáticos en la Tarea 2. Los resultados globales de esta tabla indican que 31 de los 85 EPM (36%) propusieron al menos una actividad en alguna de las situaciones posibles y que 8 de ellos (9%) consiguió proponer ambas actividades. El resto de EPM (54%) no propuso ninguna actividad (35 EPM) o bien solo fueron capaces de enunciar algún objetivo de aprendizaje, pero sin proponer una actividad o proponiendo una actividad genérica o no adecuada para el objetivo enunciado (19 EPM).

La Tabla 4.7 señala las diferencias entre los Evidencers y Nonevidencers a la hora de proponer una o dos actividades. Así, 26 de los 54 EPM, que interpretaron el pensamiento de los estudiantes proporcionando detalles (Evidencers). propusieron al menos una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones (48%). Además, cinco de ellos propusieron las dos actividades solicitadas (9%). Por otra parte, de los EPM que no aportaron detalles en sus interpretaciones (Nonevidencers), cinco de los 17 propusieron al menos una actividad (29%) y dos de ellos lograron proponer las dos actividades solicitadas (18%). Los resultados obtenidos en esta tarea, aunque influenciados por los bajos niveles de éxito en la destreza de proponer actividades, siguen la tendencia marcada en la Tarea 1, y señalan que los EPM que aportaron un discurso profesional que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes fueron capaces de proponer actividades en un porcentaje mayor de ocasiones que aquellos que proporcionaron un discurso menos detallado.

Tabla 4.7. Cantidad de actividades propuestas en la Tarea 2 con relación al discurso generado

Decidir / **Interpretar**		**0 actividades**		**1 actividad**		**2 actividades**	
		Nada	Solo objetivos	N1-N2	N2-N3	N1-N2 + N2-N3	**TOTAL**
NO_ER		**14**	**-**	**-**	**-**	**-**	**14**
ER_E4	*Nonevidencer*	**-**	**2**	**-**	**-**	**-**	**2**
	Evidencer	**2**	**2**	**3**	**-**	**-**	**7**
ER_E4y5	*Nonevidencer*	**7**	**3**	**1**	**1**	**3**	**15**
	Evidencer	**12**	**12**	**12**	**6**	**5**	**47**
	TOTAL	**35**	**19**	**16**	**7**	**8**	**85**

4.2.2.2. Tipos de actividades propuestas con relación a la manera de interpretar

Las actividades propuestas por los EPM en esta Tarea 2 se centraron en el objetivo de conseguir la comprensión de los estudiantes del elemento E4: *para comparar los todos deben mantenerse iguales*, para progresar del nivel 1 al nivel 2 y en la comprensión del elemento E5: *relación inversa entre el número de partes en que se divide el todo y el tamaño de cada parte*, para progresar del nivel 2 al nivel 3 (Tabla 4.8).

Tabla 4.8. Tipo de actividades propuestas para la tarea profesional 2

Decidir / **Interpretar**			**ACTIVIDAD N1-N2**	**ACTIVIDAD N2-N3**	
		EPM	FACIL	MANIP	NOMANIP
NO_ER		14	-	-	-
ER_EM4	*Nonevidencer*	2	-	-	-
	Evidencer	7	3	-	-
ER_E4y5	*Nonevidencer*	15	4	1	3
	Evidencer	47	17	5	6
	TOTAL	**85**	**24**	**6**	**9**

Para conseguir el objetivo relacionado con el elemento E4, las actividades propuestas incidían en la necesidad de mostrar una representación gráfica congruente del todo a los estudiantes como elemento facilitador de la comprensión de este elemento (FACIL; Figura 4.11).

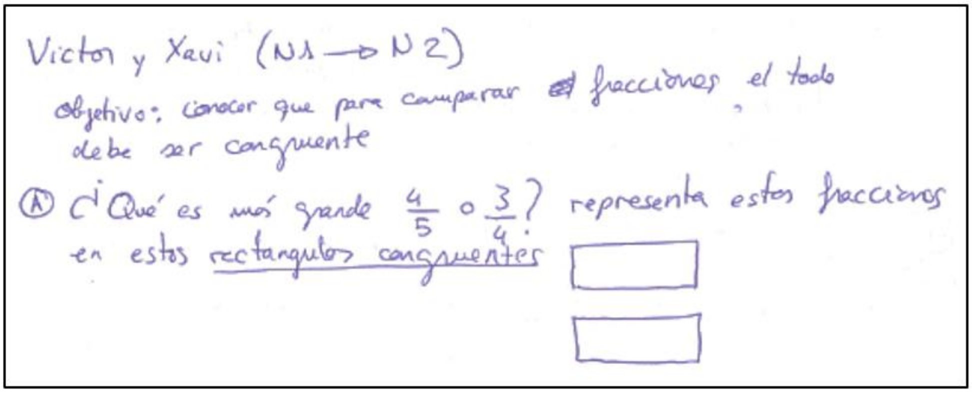

Victor y Xavi (N1 → N2)
objetivo: conocer que para comparar fracciones el todo debe ser congruente
(A) ¿Qué es más grande $\frac{4}{5}$ o $\frac{3}{4}$? representa estas fracciones en estos rectangulos congruentes

Figura 4.11. Actividad propuesta con el objetivo: "para comparar fracciones los todos deben ser congruentes" (EPM E47)

Las actividades propuestas para progresar del nivel 2 al nivel 3 estaban centradas en el objetivo de aprendizaje: *reconocer la relación inversa entre las partes en las que se divide el todo y el tamaño de cada parte*. Los EPM propusieron actividades centradas en focalizar la atención de los estudiantes hacia la comparación del tamaño de las fracciones unitarias con relación al todo sin usar material manipulable (Figura 4.12) o utilizando material manipulable (Figura 4.13).

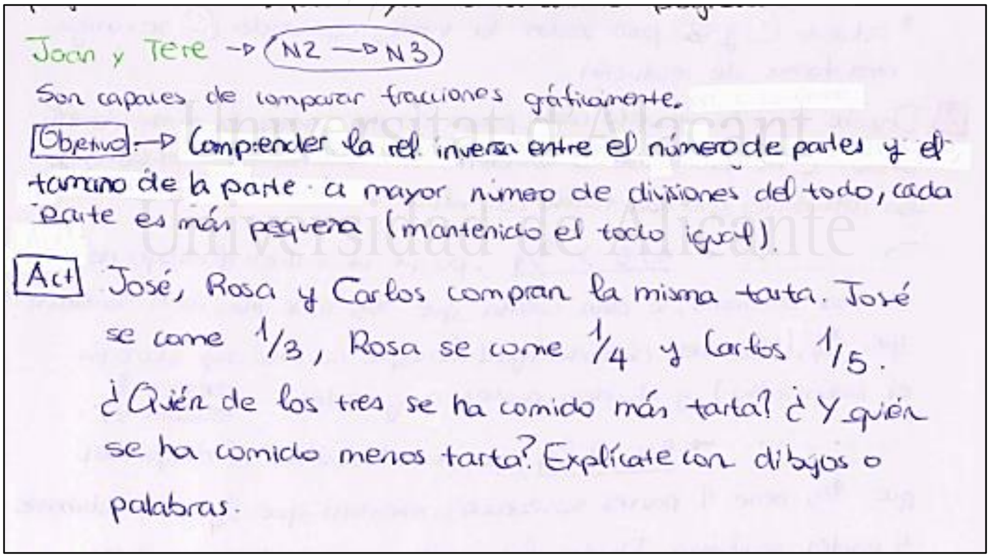
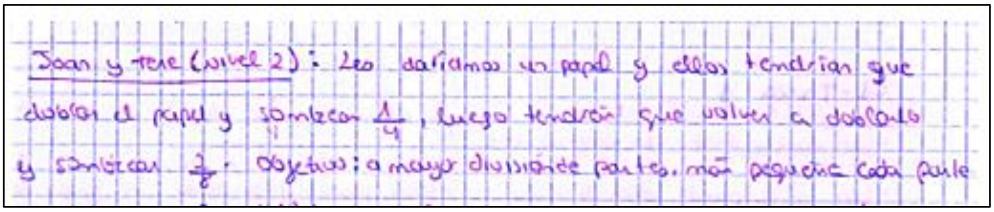

Joan y Tere → (N2 → N3)
Son capaces de comparar fracciones gráficamente.
Objetivo → Comprender la rel. inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. a mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual).
Act José, Rosa y Carlos compran la misma tarta. José se come 1/3, Rosa se come 1/4 y Carlos 1/5. ¿Quién de los tres se ha comido más tarta? ¿Y quién se ha comido menos tarta? Explícate con dibujos o palabras.

Figura 4.12. Actividad propuesta por el E73 para la comprensión del elemento matemático "relación inversa" comparando las fracciones unitarias



Joan y Tere (nivel 2): Les daríamos un papel y ellos tendrían que doblar el papel y sombrear $\frac{1}{4}$, luego tendrían que volver a doblarlo y sombrear $\frac{1}{8}$. Objetivo: a mayor división de partes, más pequeña cada parte

Figura 4.13. Actividad propuesta por el EPM E25 para la comprensión del elemento relación inversa usando manipulativos

Los resultados obtenidos en la tarea 2 subrayan, en primer lugar, cómo la THA ayudó a los EPM a identificar elementos matemáticos relevantes en las respuestas de los estudiantes (79 de los 85 EPM identificaron al menos uno y 72 identificaron ambos), a interpretar su pensamiento fraccionario estableciendo relaciones entre los elementos identificados y los distintos niveles de comprensión de la THA (71 EPM relacionaron al menos un elemento matemático y 62 lo hicieron con los dos elementos matemáticos). Además, con relación a la destreza decidir cómo responder, propusieron actividades para seguir con la instrucción considerando la comprensión de los estudiantes (31 EPM propusieron al menos una actividad y 8 las dos actividades).

En segundo lugar, pone de manifiesto que los EPM interpretaron el pensamiento de los estudiantes proporcionando diferente cantidad de detalles en su discurso. En esta tarea identificamos dos grupos de EPM, los Nonevidencers que generaron un discurso en el que no se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación y los Evidencers que interpretaron el pensamiento de los estudiantes y aportaron detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación. Aunque la manera de interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes no tuvo la misma incidencia en la capacidad para proponer decisiones de acción de los EPM como en la Tarea 1, los resultados parecen sugerir una tendencia en la misma dirección: aquellos EPM que fueron capaces de aportar más detalles de las respuestas de los estudiantes en su discurso, proponían un mayor número de actividades.

Las respuestas de los 85 estudiantes para maestro a la tarea profesional 2 han permitido construir un esquema que proporciona información sobre cómo los estudiantes para maestro estaban identificando, interpretando y proponiendo (y sus relaciones) haciendo uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje (Anexo, p. 217).

4.3. CÓMO LOS EPM IDENTIFICAN, INTERPRETAN Y DECIDEN EN LA TAREA PROFESIONAL 3

La tarea profesional 3 consistía en las respuestas de tres estudiantes de educación primaria a dos actividades. La primera era una actividad de identificación de fracciones propias ($f<1$) en la que intervenían los elementos matemáticos E1, *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* y el E2 *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte*. La segunda actividad implicaba la reconstrucción de la unidad a partir de una parte dada ($f>1$) en la que se hallaban involucrados el E1 y además el E3*, considerar una parte como una unidad iterativa, de manera que permita construir otras fracciones*, en este caso para entender la fracción a/b como a veces 1/b.

4.3.1. Relación entre las destrezas identificar e interpretar

En esta tarea, todos los EPM identificaron alguno de los elementos matemáticos involucrados en las respuestas de los estudiantes. Siete EPM identificaron el elemento E1, y 13 EPM identificaron los elementos E1 y E2, y 65 identificaron los elementos E1, E2 y E3. Sin embargo, estos EPM interpretaron el pensamiento fraccionario de los estudiantes usando estos elementos matemáticos de manera diferente. 11 EPM interpretaron la comprensión de los estudiantes con relación al E1, 32 EPM lo hicieron con relación al E1 y el E2 y los 42 restantes con los tres elementos matemáticos. La tabla 4.9 muestra las relaciones entre ambas destrezas. Estos resultados señalan la necesidad de identificar previamente los elementos matemáticos para interpretar su comprensión. Sin embargo, muestran también que la identificación de los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes no garantiza que el EPM pueda inferir características de su comprensión (a partir de la información de la THA).

Tabla 4.9. Relación entre las destrezas identificar e interpretar en la Tarea 3

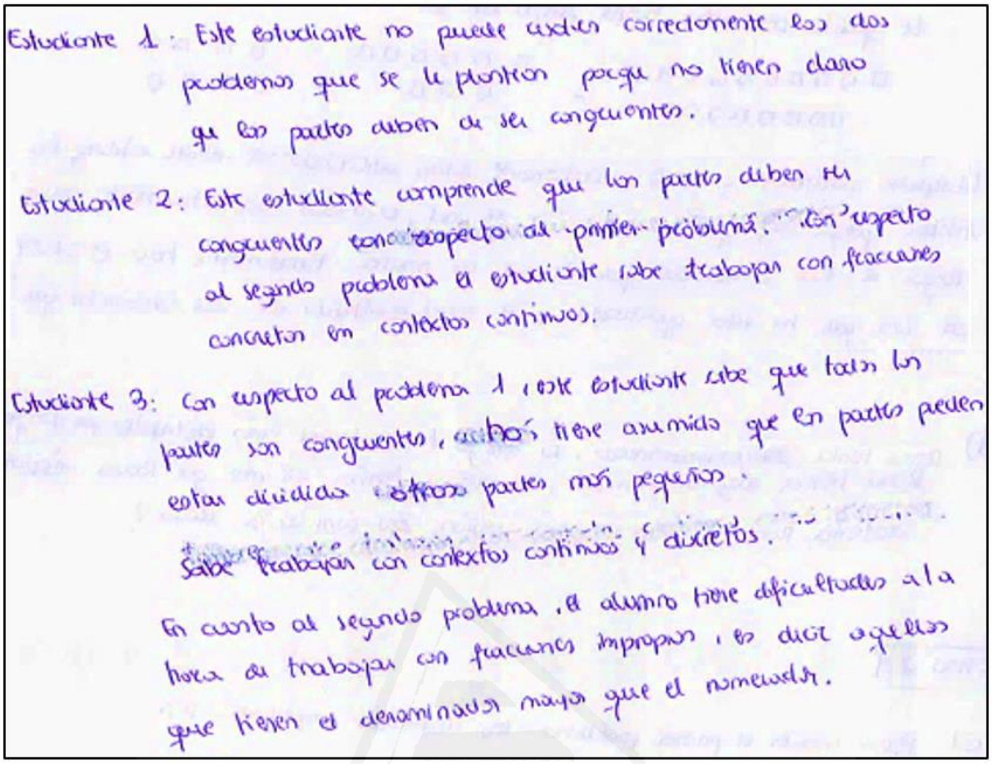
			INTERPRETAR (Tarea 3)					
			ER_E1		ER_E1y2		ER_E1,2y3	
		EPM	*Evidencer*	*Non evidencer*	*Evidencer*	*Non evidencer*	*Evidencer*	*Non evidencer*
IDENTIFICAR (Tarea 3)	**E1**	7	4	3	-	-	-	-
	E1y2	13	2	-	9	2	-	-
	E1,2y3	65	1	1	17	4	37	5
	Total	85	7	4	26	6	37	5

También en esta Tarea 3 los EPM proporcionaron diferente cantidad de detalles en su discurso: Evidencers y Nonevidencers. Mostramos en la siguiente sección la manera en la que interpretaron cada uno de estos grupos considerando los elementos matemáticos con los que habían establecido relaciones.

4.3.1.1.Interpretar el pensamiento fraccionario de los estudiantes

De los 11 EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes del elemento E1, siete lo hicieron aportaron evidencias (Evidencer) y cuatro sin aportar evidencias (Nonevidencer) (Tabla 4.9).

Por otra parte, de los 32 EPM que interpretaron la comprensión de los elementos E1 y E2 usando la THA, seis EPM no proporcionaron evidencias y 26 generaron un discurso en el que se utilizaban detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias. Por ejemplo, el EPM E30, escribió que el *Estudiante 3* “con respecto al problema 1 “sabe que las partes son congruentes” y “tiene asumido que las partes pueden estar divididas en otras partes más pequeñas”, por lo tanto, identifica ambos elementos matemáticos (E1 y E2) aunque no aporta detalles de las respuestas del estudiante. En cuanto al elemento E3, este EPM no muestra evidencias de su identificación ya que indica para el *Estudiante 2* que “sabe trabajar fracciones concretas en contextos continuos” y para el *Estudiante 3*, que había resuelto bien la actividad, indica que “tienen dificultades a la hora de trabajar con fracciones impropias, es decir, aquellas que tienen el denominador mayor que el numerador” (sic) (Figura 4.14). Esto le llevó a interpretar erróneamente la comprensión del E3 (Figura 4.15).


Estudiante 1: Este estudiante no puede acabar correctamente los dos problemas que se le plantean porque no tienen claro que las partes deben de ser congruentes.

Estudiante 2: Este estudiante comprende que las partes deben ser congruentes con respecto al primer problema. Con respecto al segundo problema el estudiante sabe trabajar con fracciones concretas en contextos continuos.

Estudiante 3: Con respecto al problema 1, este estudiante sabe que todas las partes son congruentes, además tiene asumido que las partes pueden estar divididas en otras partes más pequeñas.
Sabe trabajar con contextos continuos y discretos.

En cuanto al segundo problema, el alumno tiene dificultades a la hora de trabajar con fracciones impropias, es decir aquellas que tienen el denominador mayor que el numerador.

Figura 4.14. Identificación de los E1 y E2 (EPM E30. Nonevidencer)

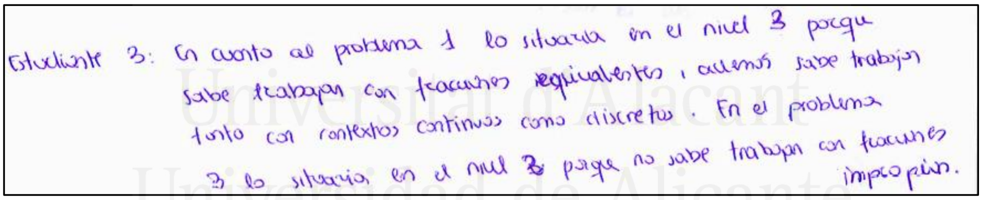
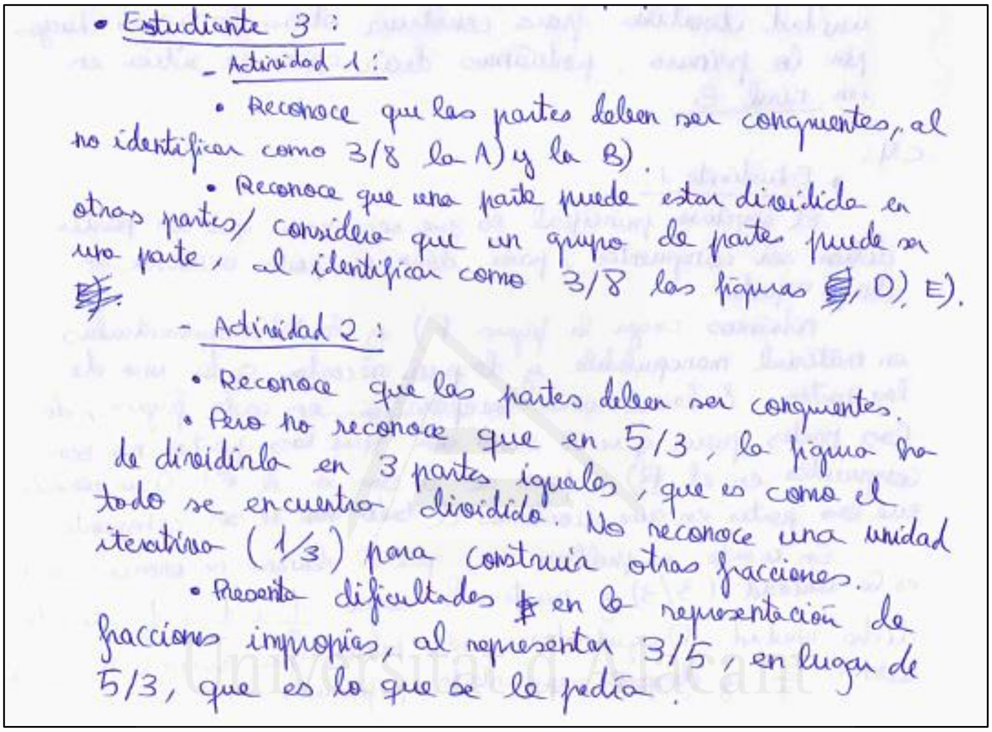

Estudiante 3: En cuanto al problema 1 lo situaría en el nivel 3 porque sabe trabajar con fracciones equivalentes, además sabe trabajar tanto con contextos continuos como discretos. En el problema 3 lo situaría en el nivel 3 porque no sabe trabajar con fracciones impropias.

Figura 4.15. Interpretación del pensamiento del Estudiante 3 con relación al E1 y E2 que muestra dificultades con el E3 (EPM E30. Nonevidencer)

Estas dificultades en la interpretación de la comprensión del elemento E3 por parte de los EPM se vieron reflejadas también en aquellos que interpretaron el pensamiento de los estudiantes aportando un discurso más rico en detalles (26 EPM). Por ejemplo, el E20 identificó los elementos matemáticos E1 y E2 aportando detalles de las respuestas del *Estudiante 3* cuando escribe que en la actividad 1 "reconoce que las partes deben ser congruentes, al no identificar como 3/8 la A) y la B)" o que "reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes […] al identificar como 3/8 las figuras D [y] E"). Sin embargo, este EPM considera que el *Estudiante 3* "presenta dificultades en la representación de fracciones impropias al representar 3/5" y por lo tanto "no reconoce una unidad iterativa (1/3) para construir otras fracciones" (Figura 4.16). La respuesta de este EPM refleja las dificultades que tienen algunos EPM para considerar como unidad de referencia un todo mayor que la unidad, hecho que los lleva a interpretar como errónea una respuesta correcta de los estudiantes, como se evidencia al afirmar que el *Estudiante 3* "no reconoce una unidad iterativa para reconstruir otras fracciones" (Figura 4.17).



• Estudiante 3:

- Actividad 1:

• Reconoce que las partes deben ser congruentes, al no identificar como 3/8 la A) y la B).

• Reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes/ considera que un grupo de parte puede ser una parte, al identificar como 3/8 las figuras ~~E~~, D), E).

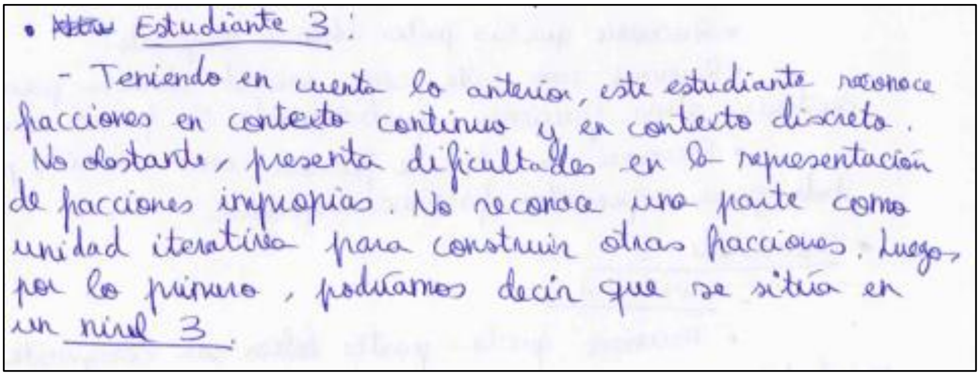
- Actividad 2:

• Reconoce que las partes deben ser congruentes.

• Pero no reconoce que en 5/3, la figura ha de dividirla en 3 partes iguales, que es como el todo se encuentra dividido. No reconoce una unidad iterativa (1/3) para construir otras fracciones.

• Presenta dificultades ~~f~~ en la representación de fracciones impropias, al representar 3/5, en lugar de 5/3, que es lo que se le pedía.

Figura 4.16. Identificación de elementos matemáticos E1, E2 y dificultades con el E3 (EPM E20. Evidencer)

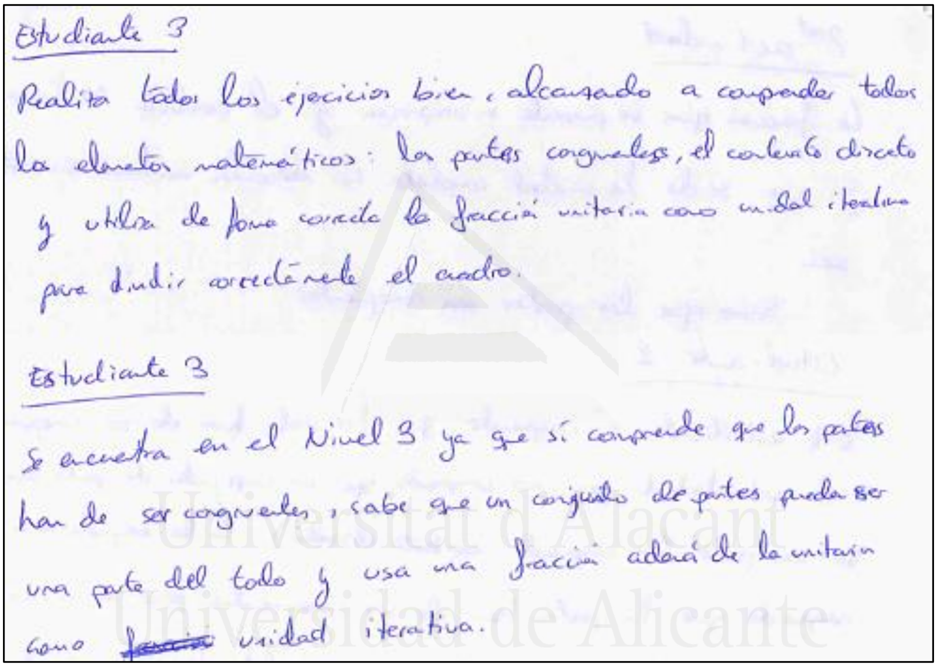


• ~~Acti~~ Estudiante 3:

- Teniendo en cuenta lo anterior, este estudiante reconoce fracciones en contexto continuo y en contexto discreto. No obstante, presenta dificultades en la representación de fracciones impropias. No reconoce una parte como unidad iterativa para construir otras fracciones. Luego, por lo primero, podríamos decir que se sitúa en un nivel 3.

Figura 4.17. Interpretación del pensamiento del estudiante estableciendo relaciones con el E1 y E2 que muestra dificultades con el E3 (EPM E20. Evidencer)

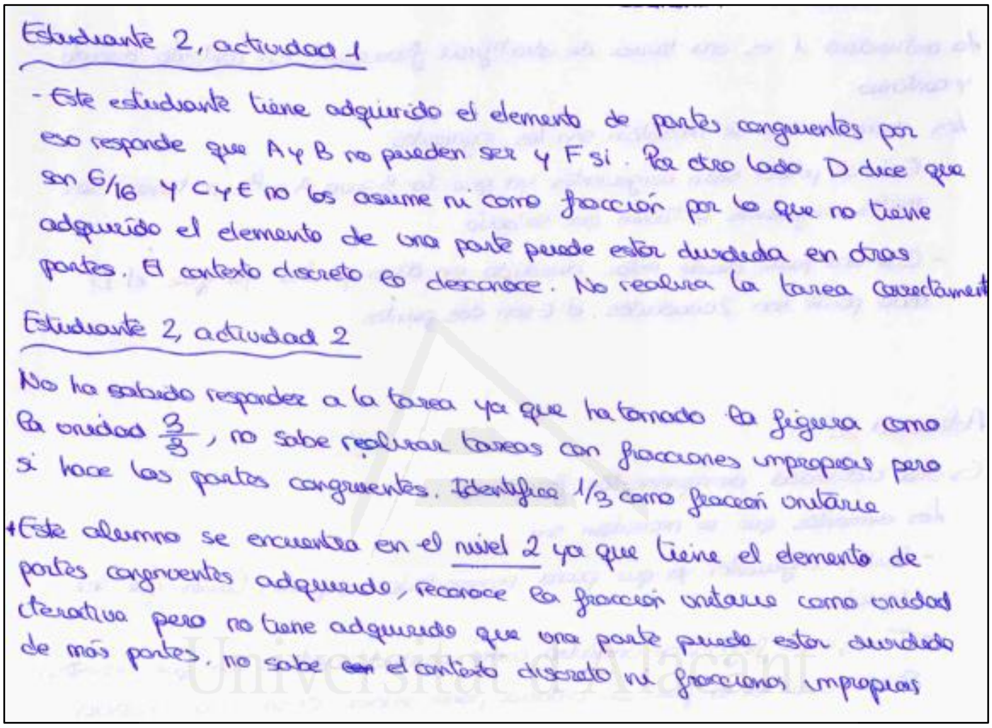
Finalmente, 42 EPM interpretaron la comprensión de los estudiantes de los tres elementos matemáticos (E1, E2 y E3) usando los niveles de comprensión de la THA. Cinco de ellos interpretaron mediante un discurso carente de detalles como ejemplos de evidencias (Nonevidencer) y 37 utilizaron un discurso más detallado (Evidencers). Por ejemplo, el E35 identificó los tres elementos matemáticos para posteriormente interpretar la comprensión del *Estudiante 3*, estableciendo relaciones entre la comprensión de los elementos matemáticos y el nivel 3 de la THA. Sin embargo, el EPM no mostró detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de su interpretación (Figura 4.18).


Estudiante 3
Realiza todos los ejercicios bien, alcanzado a comprender todos los elementos matemáticos: las partes congruentes, el contexto discreto y utiliza de forma correcta la fracción unitaria como unidad iterativa para dividir correctamente el cuadro.

Estudiante 3
Se encuentra en el Nivel 3 ya que sí comprende que las partes han de ser congruentes, sabe que un conjunto de partes puede ser una parte del todo y usa una fracción además de la unitaria como ~~fracción~~ unidad iterativa.

Figura 4.18. Identificación e interpretación de con relación a los tres elementos matemáticos (EPM E35. Nonevidencer)

Por otra parte, un ejemplo de los 37 Evidencers sería el E61. Este EPM identificó los elementos E1 y E2, en las respuestas de los estudiantes aportando detalles, como por ejemplo cuando escribe que el *estudiante 2* "tiene adquirido el elemento de partes congruentes por eso responde que A y B no pueden ser y F sí". Además, identifica que el estudiante no tiene adquirido "el elemento de una parte puede estar divida en otras partes" porque el estudiante dice que "D son 6/16". Además, este EPM identificó que, aunque *el estudiante 2* haya identificado "1/3 como fracción unitaria", no ha sabido realizar la actividad bien porque "ha tomado la figura como la unidad 3/3". La identificación de estos elementos le permitió interpretar la comprensión del estudiante situándolo en el nivel 2 de la THA indicando “tiene el elemento partes congruentes adquirido, reconoce la fracción unitaria como unidad iterativa, pero no tiene adquirido que una parte puede estar dividida en más partes, no sabe el contexto discreto ni fracciones propias” (Figura 4.19).



Estudiante 2, actividad 1

- Este estudiante tiene adquirido el elemento de partes congruentes por eso responde que A y B no pueden ser y F si. Por otro lado, D dice que son 6/16 y C y E no los asume ni como fracción por lo que no tiene adquirido el elemento de una parte puede estar dividida en otras partes. El contexto discreto lo desconoce. No realiza la tarea correctament

Estudiante 2, actividad 2

No ha sabido responder a la tarea ya que ha tomado la figura como la unidad $\frac{3}{3}$, no sabe realizar tareas con fracciones impropias pero si hace las partes congruentes. Identifica 1/3 como fracción unitaria

*Este alumno se encuentra en el nivel 2 ya que tiene el elemento de partes congruentes adquirido, reconoce la fracción unitaria como unidad iterativa pero no tiene adquirido que una parte puede estar dividido de más partes. no sabe ~~en~~ el contexto discreto ni fracciones impropias

Figura 4.19. Identificación e interpretación de con relación a los tres elementos matemáticos (E61. Evidencer)

La respuesta del E69 (Figura 4.20) es otro ejemplo de la utilización de los tres elementos matemáticos, aportando evidencias de la interpretación de la comprensión, en este caso, del *Estudiante 3*. El EPM identificó los elementos matemáticos en las respuestas del estudiante, aportando detalles como evidencias. Por ejemplo, cuando escribe que “reconoce que las figuras A y B no representan 3/8 porque las partes en las que están divididos los todos no son congruentes” o que “es capaz de reconocer en contexto discreto (E) y en continuo (E) representan 3/8” por lo tanto comprende que “una parte puede estar compuesta por otras /considerar un grupo de partes como una parte”. De igual manera, en la actividad 2 el EPM E69 escribe que “el alumno divide el [..] total dado en 5 partes para representar gráficamente 5/3 y después colorea 3/3 para destacar la unidad pedida" hecho que vincula a que el estudiante "reconoce que una unidad se puede emplear como unidad iterativa (reconoce 1/3 e itera para conseguir 3/3)".

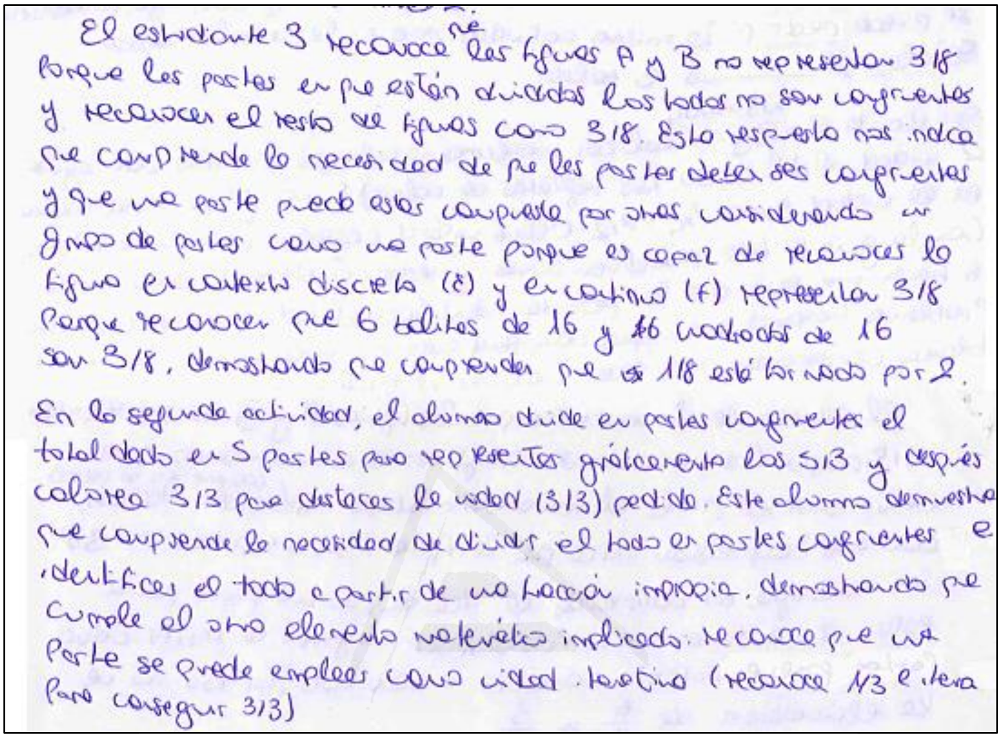

El estudiante 3 reconoce que las figuras A y B no representan 3/8 porque las partes en que están divididas los todos no son congruentes y reconocer el resto de figuras como 3/8. Esta respuesta nos indica que comprende la necesidad de que las partes deben ser congruentes y que una parte puede estar compuesta por otras considerando un grupo de partes como una parte porque es capaz de reconocer la figura en contexto discreto (E) y en continuo (F) representan 3/8 porque reconocen que 6 bolitas de 16 y 6 cuadrados de 16 son 3/8, demostrando que comprenden que el 1/8 está formado por 2.
En la segunda actividad, el alumno divide en partes congruentes el total dado en 5 partes para representar gráficamente los 5/3 y después colorea 3/3 para destacar la unidad (3/3) pedida. Este alumno demuestra que comprende la necesidad de dividir el todo en partes congruentes e identificar el todo a partir de una fracción impropia, demostrando que cumple el otro elemento matemático implicado. Reconoce que una parte se puede emplear como unidad iterativa (reconoce 1/3 e itera para conseguir 3/3)

Figura 4.20. Identificación e interpretación del Estudiante 3 con relación a los tres elementos matemáticos (E69. Tarea 3, Evidencer)

Las respuestas de los EPM señalan las diferentes maneras en las que interpretaron la comprensión de los elementos matemáticos identificados y el nivel de detalle aportado por su discurso. En esta tercera tarea se mantuvo la tendencia identificada en la Tarea 2, emergieron dos grupos con relación a los detalles que los EPM aportaban en su discurso como evidencias de sus interpretaciones: Nonevidencers y los Evidencers.

En esta Tarea 3, tras la participación en el entorno de aprendizaje, 70 de los 85 EPM interpretaron el pensamiento matemático de los estudiantes proporcionando un discurso más elaborado en el que se incluían detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias (Evidencers) y 15 EPM aportaron un discurso menos detallado que no incluía evidencias (Nonevidencers). En la siguiente sección mostraremos la relación entre las distintas maneras de interpretar el pensamiento de los estudiantes cuando estos EPM tuvieron que afrontar la toma de decisiones de acción.

4.3.2. Relación entre las destrezas de interpretar y tomar decisiones de acción

En la Tarea 3 los EPM debían proponer diferentes actividades para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión sobre las fracciones través de la THA. Tal y como sucedió en la Tarea 1 y la Tarea 2, los estudiantes para maestro no propusieron actividades para el *Estudiante 3* por considerar que habían alcanzado el objetivo de aprendizaje. Así, cada EPM podía proponer una actividad que ayudase al *Estudiante 1* a progresar del nivel 1 al nivel 2 de la THA y otra para ayudar a progresar del nivel 2 al nivel 3 el *Estudiante 2*. Es decir, en total, los EPM podían proponer 85 actividades para progresar del nivel 1 al nivel 2 y 85 para progresar del nivel 2 al nivel 3. La Tabla 4.10 muestra las actividades propuestas en la Tarea 3 por los EPM en relación con los elementos matemáticos usados para interpretar la comprensión y el tipo de discurso aportado en sus interpretaciones (Evidencer y Nonevidencer). También se observa en la tabla que los 85 EPM propusieron 55 actividades para progresar entre el nivel 1 y el nivel 2 (65%) y 40 actividades para progresar entre el nivel 2 y el nivel 3 (47%). Es decir, de las 170 actividades posibles que se podían proponer en la Tarea 3 los EPM propusieron 95 actividades, por lo que fueron capaces de proponer actividades centradas en la comprensión de los estudiantes en un 56% de las situaciones posibles.

Tabla 4.10. Actividades propuestas por cada grupo de EPM en la Tarea 3

Interpretar \ Decidir		EPM	Actividad Nivel 1 a Nivel 2 — Proponen	Actividad Nivel 2 a Nivel 3 — Proponen
ER_E1	*Nonevidencers*	4	2	-
	Evidencers	7	4	-
ER_E1y2	*Nonevidencers*	6	2	2
	Evidencers	26	15	12
ER_E1,2y3	*Nonevidencers*	5	3	2
	Evidencers	37	29	24
	TOTAL	85	55	40

En la Tarea 3 todos los EPM lograron interpretar el pensamiento de los estudiantes estableciendo relaciones con alguno de los elementos matemáticos implicados. Además, aquellos que solo interpretaron el pensamiento de los estudiantes con relación al elemento matemático E1, lograron como máximo proponer actividades para progresar entre el nivel de comprensión vinculado a ese elemento (transición del nivel 1 al nivel 2), mientras que los que interpretaron la comprensión de al menos dos elementos lograron proponer actividades para progresar entre ambos niveles. La Tabla 4.10 también muestra la relación entre proponer actividades y los detalles aportados en el discurso (Evidencer y Nonevidencer). De los 85 EPM que participaron en el estudio, 70 aportaron un discurso profesional que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (Evidencers) y los 15 EPM restantes no aportaron detalles en sus interpretaciones (Nonevidencers). Los 70 Evidencers propusieron un total de 48 actividades adecuadas para progresar del nivel 1 al 2 y otras 36 actividades para progresar del nivel 2 al nivel 3, es decir, en total 84 actividades adecuadas de las 140 posibles (60%). Por otra parte, los 15 Nonevidencers propusieron 7 actividades para la progresión del nivel 1 al 2 y otras 4 actividades para progresar del nivel 2 al nivel 3, es decir, en total 11 actividades adecuadas de las 30 posibles (37%). En este punto cabe destacar que ninguna de las actividades propuestas por los EPM en ambos grupos, para progresar del nivel 2 al nivel 3, consideró la posibilidad de proponer actividades con el objetivo de ayudar a los estudiantes a progresar en la comprensión del elemento matemático E3.

Estos resultados subrayan, en primer lugar, que los EPM tuvieron más dificultad para proporcionar actividades para progresar desde el nivel 2 al nivel 3 (vinculadas a la comprensión del elemento matemático E2: *una parte puede estar dividida en otras partes*) que desde el nivel 1 al nivel 2 (vinculadas a la comprensión del elemento matemático E1: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes*). Además, puso de manifiesto las diferencias entre los distintos elementos matemáticos a la hora de proporcionar actividades. Así, proponer actividades para la comprensión del elemento matemático E3 (desde la perspectiva de considerar a/b como a veces 1/b) supuso una mayor dificultad a los EPM. Esto indica la influencia del conocimiento matemático sobre esta destreza de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

En segundo lugar, como sucedió en las tareas anteriores, aquellos EPM que interpretaron la comprensión de los estudiantes utilizando un discurso que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones (Evidencers), fueron capaces de proponer actividades en mayor medida que aquellos que no incluyeron detalles en sus interpretaciones. Dicho de otro modo, la generación de un discurso rico en detalles parece estar vinculado a la capacidad de proponer actividades con el aprendizaje pretendido.

4.3.2.1.Cantidad de actividades propuestas en función de la manera de interpretar

Los resultados de la relación entre proponer actividades e interpretar en la Tarea 3 se muestra en la Tabla 4.11. Los resultados de esta tabla señalan que 62 de los 85 EPM (73%) consiguieron proponer al menos una actividad en alguna de las situaciones posibles y que 33 de ellos (39%) consiguieron proponer dos actividades. El resto de EPM (23) no propusieron ninguna actividad (11 EPM) o bien solo fueron capaces de enunciar algún objetivo de aprendizaje, pero sin proponer una actividad o proponiendo una actividad genérica o no adecuada para el objetivo enunciado (12 EPM).

Tabla 4.11. Cantidad de actividades propuestas en la Tarea 3 con relación al discurso generado

Decidir / Interpretar		**0 actividades**		**1 actividad**		**2 actividades**
		Nada	Solo objetivos	N1-N2	N2-N3	N1-N2 + N2-N3
ER_E1	*Nonevidencers*	1	1	2	-	-
	Evidencers	1	2	4	-	-
ER_E1y2	*Nonevidencers*	2	1	1	1	1
	Evidencers	6	3	5	2	10
ER_E1,2y3	*Nonevidencers*	-	2	1	-	2
	Evidencers	1	3	9	4	20
	TOTAL	**11**	**12**	**22**	**7**	**33**

Por otra parte, la Tabla 4.11 muestra las diferencias entre los Evidencers y Nonevidencers a la hora de proponer una o dos actividades. Así, 54 de los 70 Evidencers fueron capaces de proponer al menos una actividad para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones (77%). Además, 30 de estos EPM fueron capaces de proponer las dos actividades posibles (42%). Sin embargo, de los 15 Nonevidencers, ocho propusieron al menos una actividad (53%) y tres de ellos lograron proponer las dos actividades solicitadas (20%).

De manera similar a lo que sucedió en las Tareas 1 y Tarea 2, los resultados muestran que los EPM que llevaron a cabo un discurso profesional que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes, fueron capaces de proponer actividades en un porcentaje de ocasiones posibles mayor que aquellos que utilizaron un discurso menos detallado.

4.3.2.2.Tipos de actividades propuestas en relación con la manera de interpretar

En esta Tarea 3, los EPM propusieron diferentes tipologías de actividades para un mismo objetivo de aprendizaje. Tal y como sucedió en la Tarea 1, los EPM propusieron dos tipos de actividades para progresar desde el nivel 1 al nivel 2 de la trayectoria hipotética de aprendizaje (IGUAL, CONGR) y tres tipos para progresar desde el nivel 2 al nivel 3 de la trayectoria hipotética de aprendizaje (CONT, DOS y DISC). La Tabla 4.12 muestra la frecuencia con la que los EPM propusieron actividades para cada una de las distintas tipologías.

Los distintos tipos de actividades identificados coinciden con los identificados en la Tarea 1. Para la transición entre los niveles 1 y 2 de la THA los EPM propusieron dos tipos de actividades centradas en el objetivo de conseguir que los estudiantes comprendan el elemento matemático: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes*. Estas actividades diferían en el significado de congruencia adoptado por los EPM: como partes iguales (IGUAL) o como partes congruentes, es decir las partes pueden ser diferentes en forma, pero congruentes con relación al todo (CONGR). Para la transición entre los niveles 2 y 3, los EPM centraron su objetivo en la comprensión de los estudiantes del elemento matemático: *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte* y propusieron actividades considerando el modo de representación: continuo, discreto o ambos.

La tabla 4.12 muestra que de las 55 actividades propuestas por los EPM para la transición del nivel 1 al nivel 2, 21 de ellas estaban centradas en la idea de congruencia y 34 en la de igualdad. En cuanto a las actividades para la transición desde el nivel 2 al nivel 3, se propusieron 19 actividades usando el modo de representación discreto, 14 el continuo y siete ambos modos de representación.

Tabla 4.12. Tipos de actividades propuestas por los EPM para progresar entre los distintos niveles de la THA en la tarea 3

Decidir / Interpretar		EPM	ACTIVIDAD N1-N2		ACTIVIDAD N2-N3		
			IGUAL	CONGR.	CONT.	DOS	DISC.
ER_E1	*Nonevidencer*	**4**	**1**	**1**	-	-	-
	Evidencer	**7**	**1**	**3**	-	-	-
ER_E1y2	*Nonevidencer*	**6**	**2**	-	-	-	**2**
	Evidencer	**26**	**11**	**4**	**2**	**3**	**7**
ER_E1,2 y3	*Nonevidencer*	**5**	**2**	**1**	**2**	-	-
	Evidencer	**37**	**17**	**12**	**10**	**4**	**10**

La tabla 4.12 permite identificar que los dos grupos, Evidencers y Nonevidencers, para la transición entre el nivel 1 y nivel 2, propusieron más actividades centradas en la igualdad que en la congruencia. En cuanto a la transición de nivel 2 a nivel 3, los evidencers propusieron más actividades centradas en el modo de representación discreto, seguidas del continuo y de actividades centradas en ambos modos de representación. Sin embargo, los Nonevidencers no presentaron actividades en las que se consideraban ambos modos de representación.

Las respuestas de los 85 estudiantes para maestro a la tarea profesional 3 ha permitido construir un esquema que proporciona información sobre cómo los estudiantes para maestro estaban identificando, interpretando y proponiendo (y sus relaciones) haciendo uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje (Anexo, p. 219).

4.4. Características de las destrezas identificar, interpretar y decidir

Los resultados obtenidos subrayan cuatro ideas clave:

1) Los EPM utilizaron la THA (en el contexto de las tareas profesionales diseñadas) como marco de referencia para identificar los elementos matemáticamente relevantes en las respuestas de los estudiantes, interpretar la comprensión y tomar decisiones de acción.
2) Los EPM generaron un discurso con diferente cantidad de detalles para interpretar el pensamiento de los estudiantes: Evidencers, Adders y Nonevidencers.
3) Se han identificado relaciones entre las destrezas.
    a. Solo aquellos que eran capaces de identificar los elementos matemáticos en las respuestas, fueron capaces de inferir características de la comprensión usando la información de la THA. Es decir, si los estudiantes para maestro tenían dificultades con algún elemento matemático, no eran capaces de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes ni de proponer actividades que les ayudara a progresar en su comprensión con relación a ese elemento.

   b. El nivel de detalle aportado al interpretar el pensamiento de los estudiantes influyó en la capacidad para proponer actividades. En las tres tareas, aquellos EPM que aportaron evidencias de las respuestas de los estudiantes (Evidencers), lograron proponer actividades en un porcentaje mayor de las situaciones posibles que aquellos que ofrecieron un discurso profesional en el que no se incluían evidencias.

4) No todos los elementos matemáticos implicados en las actividades de fracciones fueron identificados por igual por los EPM. Así, los porcentajes de identificar e interpretar fueron menores en la actividad de comparación (tarea profesional 2) y en la actividad de reconstrucción de la unidad (una de las actividades implicadas en la tarea profesional 3) que implicaba una comprensión conceptual de la fracción *a/b* como *a* veces *1/b*.

Estos resultados parecen sugerir que el entorno de aprendizaje ayudó al desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, y que este desarrollo puede estar vinculado a la capacidad de los EPM para aportar un discurso profesional más detallado. Consecuentemente, los cambios en el discurso de los EPM pueden interpretarse como un indicador del desarrollo de la competencia docente mirar el pensamiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, parece ser que el desarrollo de esta competencia también está vinculado al conocimiento de los estudiantes para maestro de los elementos matemáticos implicados.

En la siguiente sección mostraremos cómo evolucionaron los EPM durante el transcurso del entorno de aprendizaje.

4.5. EVOLUCIÓN DE LOS EPM A LO LARGO DEL ENTORNO DE APRENDIZAJE

El análisis de las respuestas de los 85 EPM a las tres tareas profesionales nos permitió identificar ocho perfiles con relación a las diferentes maneras de interpretar el pensamiento de los estudiantes y el progreso en el discurso generado (Tabla 4.13). Treinta y cuatro EPM interpretaron el pensamiento de los estudiantes estableciendo relaciones con todos los elementos matemáticos en las tres tareas y 51 EPM, en al menos una de las tres tareas, no interpretaron el pensamiento de los estudiantes estableciendo relaciones con todos los elementos matemáticos involucrados, es decir, tuvieron dificultades para interpretar el pensamiento de los estudiantes. De los 34 EPM que interpretaron en todas las tareas, 12 EPM lo hicieron aportando detalles de las respuestas de los estudiantes en las tres tareas (Evidencers), uno no aportó detalles en ninguna de las tareas (Nonevidencer), dos pasaron de Evidencer o Adder a Nonevidencer y 19 EPM mostraron una progresión en el discurso, en el sentido que pasaron de Nonevidencers o Adders a Evidencers.

En cuanto a los 51 EPM que tuvieron dificultades con alguno de los elementos matemáticos, 16 EPM lo hicieron aportando detalles de las respuestas de los estudiantes en las tres tareas (Evidencers), nueve no aportaron detalles en ninguna de las tareas (Nonevidencer), tres pasaron de Evidencer o Adder a Nonevidencer y 23 EPM mostraron una progresión en el discurso, en el sentido que pasaron de Nonevidencers o Adders a Evidencers.

Tabla 4.13. Progresión en el discurso en las tres tareas

Maneras de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes	**Progresión en el discurso**				
	De Nonevidencer o Adder a Evidencer	Siempre Nonevidencer	De Evidencer o Adder a Nonevidencer	Siempre Evidencer	TOTAL
Interpretando en las tres tareas	12	1	2	19	34
Dificultades en al menos una tarea	16	9	3	23	51
TOTAL	28	10	5	42	

La Tabla 4.13 señala dos ideas relevantes en cuanto al desarrollo de la competencia. En primer lugar, se observa un progreso en el discurso (en el sentido de proporcionar más detalles) en 28 EPM, 10 EPM se mantuvieron estáticos y no mostraron evidencias del progreso en el discurso (Siempre Nonevidencer), cinco EPM retrocedieron (De Evidencer/Adder a Nonevidencer), y 42 EPM mantuvieron un discurso rico en detalles en las tres tareas profesionales. En segundo lugar, el desarrollo de la competencia está estrechamente vinculado al conocimiento matemático de los EPM pues 51 EPM tuvo dificultades con alguno de los elementos de las tareas y no fueron capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes.

4.5.1. Progreso en el discurso profesional

La tabla 4.13 muestra que, en la última tarea, 70 de los 85 EPM que participaron en esta investigación lograron interpretar el pensamiento de los estudiantes generando un discurso profesional que aportaba evidencias de sus inferencias. Cuarenta y dos de estos 70 EPM aportaron evidencias consistentemente durante las tres tareas, y 28 EPM mostraron una progresión en su discurso. Centrándonos en los EPM que progresaron, cabe señalar que en las Tareas 1 y 2 proporcionaron un discurso menos detallado o añadían información innecesaria, sin embargo, en la Tarea 3 proporcionaron un discurso que incluía detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus inferencias. A continuación, mostraremos un ejemplo a través del protocolo del estudiante para maestro E55.

El EPM E55, en la Tarea 1, identificó los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes aportando detalles de sus interpretaciones cuando escribe que *la pareja 1* "no son capaces de reconocer que las partes del todo deben ser congruentes" (E1) porque "elijen dos figuras que están mal divididas", es decir, que no tienen las partes congruentes o cuando escribe que *la pareja 2*, "no reconoce que una parte puede estar dividida en otras partes" (E2), porque han descartado como representaciones de 3/4 "las opciones F y E" (Figura 4.21), interpretando el pensamiento matemático de estas parejas (relaciona los elementos previamente identificados con los niveles de la THA).

Sin embargo, cuando interpreta el pensamiento fraccionario de *la pareja 3*, añade información relativa al elemento matemático E5 que debe considerarse en la comparación de fracciones, pero que no puede inferirse ni del tipo de actividad que los estudiantes estaban resolviendo (identificación de fracciones) ni de las respuestas de los estudiantes: "… y además pueden realizar la relación inversa mentalmente y lo justifican con dibujos" (Figura 4.21). Esto se interpretó como evidencia de que estaba agregando información innecesaria en su interpretación (Adder). Por tanto, el EPM E55, en esta tarea, identificó los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes, interpretó el pensamiento matemático de estos, relacionando los elementos matemáticos identificados con los diferentes niveles de competencia de la trayectoria de aprendizaje, pero agregó información innecesaria que no se podía inferir de las respuestas de los estudiantes.

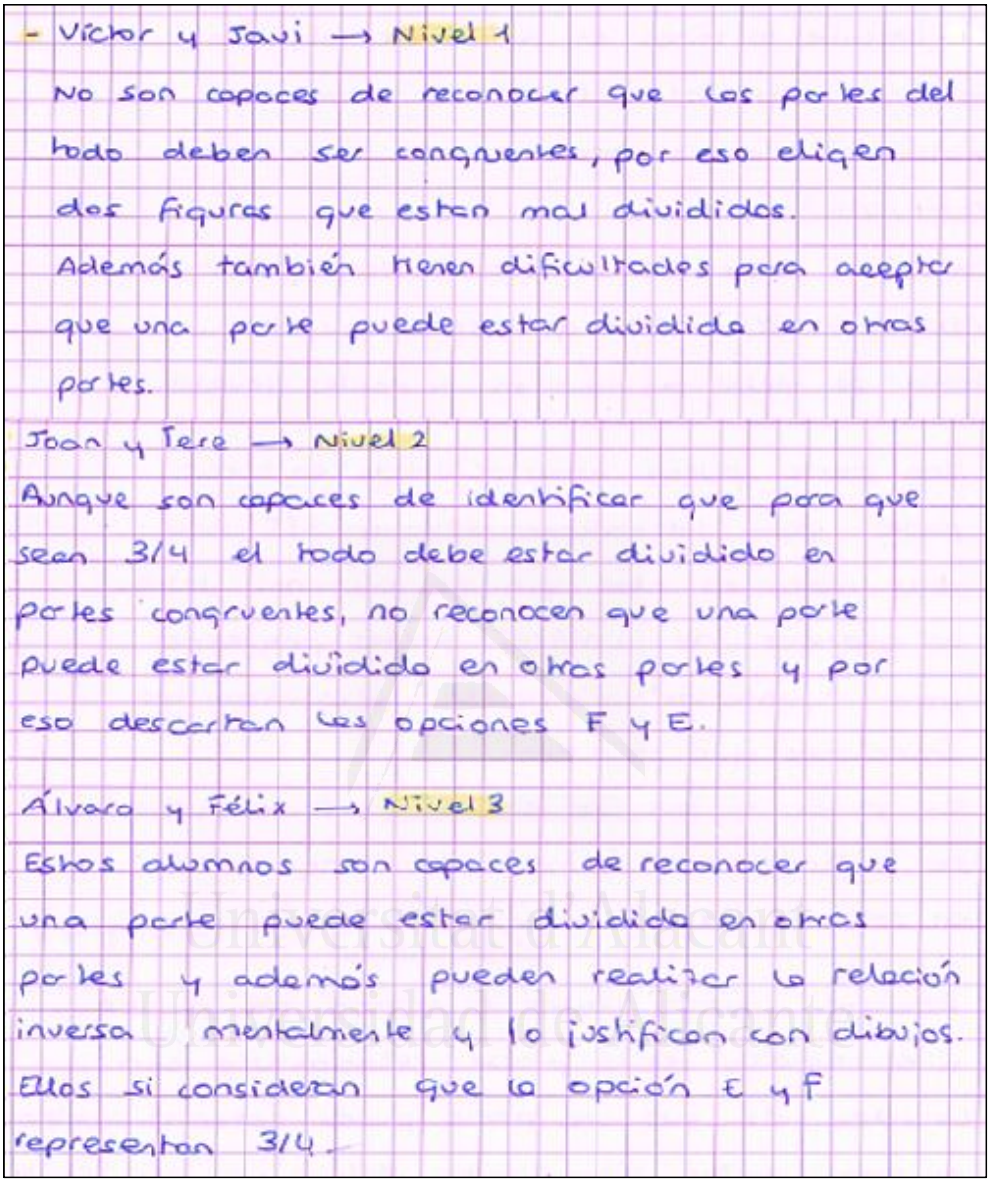

- Víctor y Javi → Nivel 1
No son capaces de reconocer que las partes del todo deben ser congruentes, por eso eligen dos figuras que estan mal divididas.
Además también tienen dificultades para aceptar que una parte puede estar dividida en otras partes.
Joan y Tere → Nivel 2
Aunque son capaces de identificar que para que sean 3/4 el todo debe estar dividido en partes congruentes, no reconocen que una parte puede estar dividido en otras partes y por eso descartan las opciones F y E.
Álvaro y Félix → Nivel 3
Estos alumnos son capaces de reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes y además pueden realizar la relación inversa mentalmente y lo justifican con dibujos.
Ellos si consideran que la opción E y F representan 3/4.

Figura 4.21. Fragmento de respuesta de E55 a la tarea 1(Adder)

En la Tarea 2, de comparación de fracciones, los elementos matemáticos involucrados eran: *al comparar fracciones, el todo para representar las fracciones debe ser igual* (E4) y *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de cada parte* (E5). El EPM E55 identificó los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes e interpretó su comprensión sobre la comparación de fracciones estableciendo relaciones entre estos elementos y la THA, pero no aportó evidencias de sus interpretaciones. Así, escribe que *la pareja 1* (Joan y Tere) están en el nivel 2 porque "son capaces de mantener los todos iguales para comparar fracciones” (E4), que *la pareja 2* (Xavi y Víctor), aunque resuelven la tarea se encuentran en el nivel 1 porque “no son capaces de mantener los todos iguales para comparar fracciones” (E4) y que *la pareja 3* (Álvaro y Félix) “está en el nivel 3 ya que al comparar fracciones reconocen que los todos usados tienen que ser iguales y establecen la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de cada parte” (Figura 4.22).

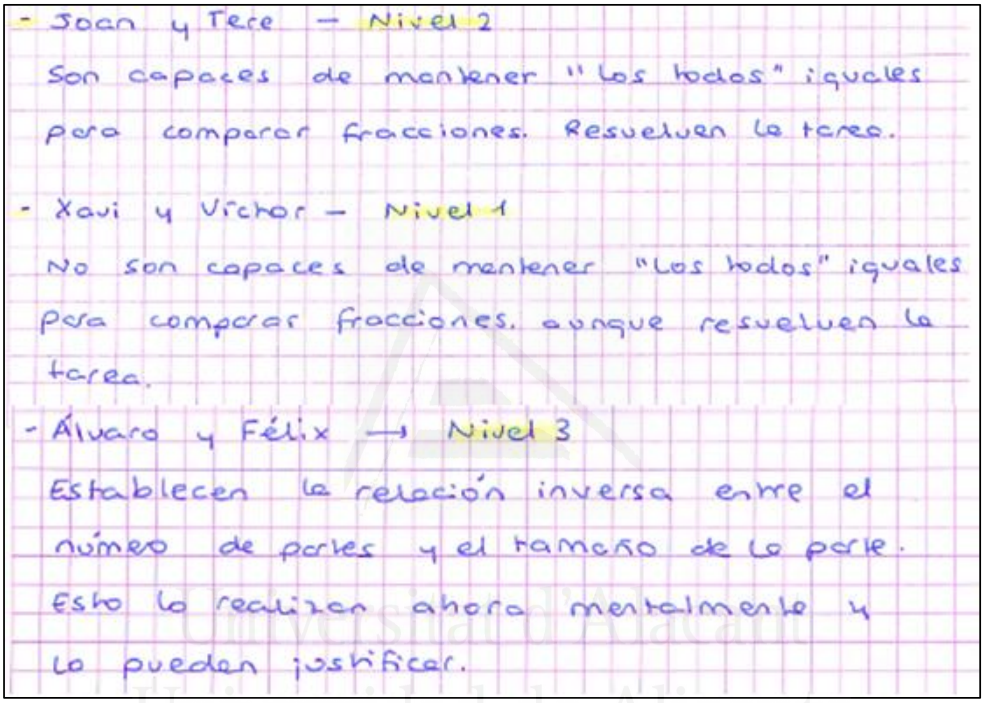
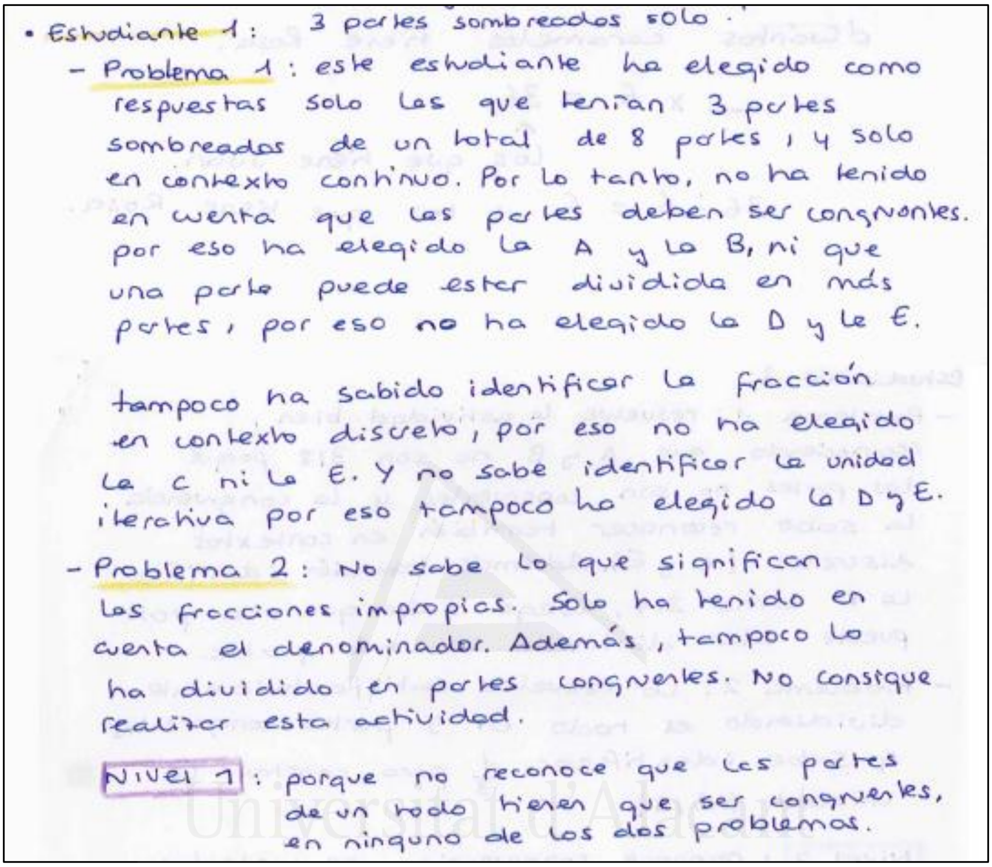

- Joan y Tere → Nivel 2
Son capaces de mantener "los todos" iguales para comparar fracciones. Resuelven la tarea.
- Xavi y Víctor → Nivel 1
No son capaces de mantener "Los todos" iguales para comparar fracciones. aunque resuelven la tarea.
- Álvaro y Félix → Nivel 3
Establecen la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. Esto lo realizan ahora mentalmente y lo pueden justificar.

Figura 4.22. Fragmento de respuesta del E55 a la tarea 2 (Nonevidencer)

Finalmente, en la Tarea 3, que mostraba las respuestas de tres estudiantes a una actividad de identificación de fracciones y a otra actividad de reconstrucción de la unidad, el EPM E55 elaboró un discurso más detallado que en las tareas anteriores. Así identificó los elementos matemáticos en las respuestas del *Estudiante 1*, aportando detalles de sus respuestas para respaldar su inferencia, al indicar que “no ha tenido en cuenta que las partes deben ser congruentes” (E1) ya que “ha elegido la A y B” o que tampoco considera que “una parte puede estar dividida en más partes” (E2) por el hecho de no elegir las figuras “A y la E” como representaciones de 3/4. En cuanto a la segunda actividad identifica la falta de comprensión del estudiante para reconocer fracciones impropias y, por tanto, para comprender la fracción *a/b* como *a* veces *1/b*, y resolver la actividad. Esto le lleva a interpretar que el estudiante 1 se encuentra en el nivel 1 de la THA (Figura 4.23).


• Estudiante 1: 3 partes sombreados solo.

- Problema 1: este estudiante ha elegido como respuestas solo las que tenían 3 partes sombreadas de un total de 8 partes, y solo en contexto continuo. Por lo tanto, no ha tenido en cuenta que las partes deben ser congruentes. por eso ha elegido la A y la B, ni que una parte puede estar dividida en más partes, por eso no ha elegido la D y la E.

tampoco ha sabido identificar la fracción en contexto discreto, por eso no ha elegido la C ni la E. Y no sabe identificar la unidad iterativa por eso tampoco ho elegido la D y E.

- Problema 2: No sabe lo que significan las fracciones impropias. Solo ha tenido en cuenta el denominador. Además, tampoco la ha dividido en partes congruentes. No consigue realizar esta actividad.

Nivel 1: porque no reconoce que las partes de un todo tienen que ser congruentes, en ninguno de los dos problemas.

Figura 4.23. Respuesta del E55 en la Tarea 3– Estudiante 1 (Evidencer)

Del mismo modo, para el *Estudiante 2*, el EPM E55 identificó los elementos matemáticos E1 y E2 en la resolución de la actividad 1 al escribir “sabe que las partes deben ser congruentes, pero solo en contexto continuo” y aportó evidencias de las respuestas del estudiante para respaldar su inferencia sobre la congruencia al escribir que el estudiante dice que: “A y B no puede ser porque sus partes no son congruentes” y sobre las dificultades del estudiante en modo discreto “en la C solo dice que son 3 puntos pintados”. Además, vincula la no elección de la figura D por parte del estudiante a su dificultad para “reconocer que una parte puede estar dividida en más partes”. En la actividad 2 describe la respuesta identificando que el estudiante ha confundido el todo con la unidad (es decir, el EPM ha identificado que el estudiante ha tomado como unidad la figura que se le ha dado, sin identificar que esa figura es una parte del todo). La relación entre la comprensión de estos elementos y los niveles de la THA permiten a este EPM situar al estudiante 2 en el nivel 2 de la THA (Figura 4.24).

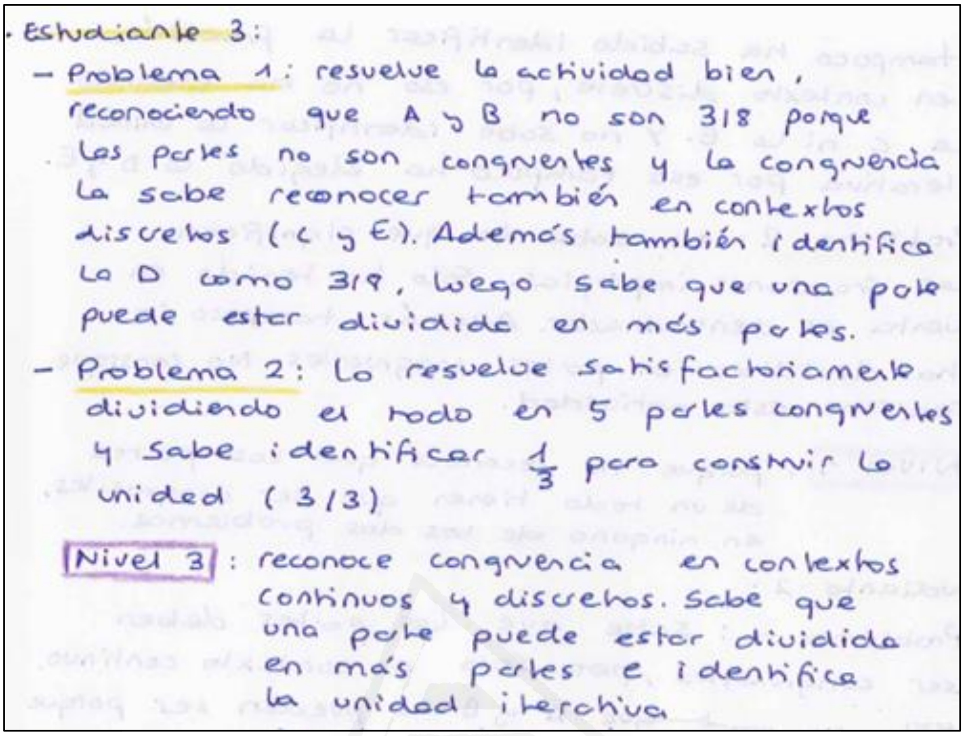
· Estudiante 2 :

- Problema 1 : sabe que las partes deben ser congruentes, pero solo en contexto continuo, por eso dice que A y B no pueden ser porque sus partes no son congruentes. Sin embargo, en la C, solo dice que son 3 puntos pintados, no identifica la congruencia en contexto discreto. Tampoco es capaz de reconocer que una parte puede estar dividida en más partes y por eso no elige D, justificando que son 6/16.
- Problema 2 : confunde el todo con la unidad. Por eso toma el todo con la unidad y añade otra unidad.

Nivel 2 : reconoce la congruencia solo en contexto continuo y sigue sin comprender que una parte puede estar dividido en más partes.

Figura 4.24. Respuesta del E55 a la Tarea 3- Estudiante 2 (Evidencer)

Finalmente el EPM E55, para el *Estudiante 3*, además de identificar los elementos matemáticos E1 y E2, aportando detalles de las respuestas del estudiante, identifica el elemento E3 en la respuesta de este a la actividad 3 cuando escribe que “resuelve la actividad satisfactoriamente dividiendo el todo en 5 partes congruentes y sabe identificar 1/3 para construir la unidad (3/3)” como una manera de mencionar la comprensión de 5/3 como 5 veces 1/3, lo que hace operativa la estrategia usada por el estudiante. Esto lleva al E55 a establecer el nivel 3 de comprensión del estudiante en la THA porque este “reconoce congruencia en contextos continuos y discretos, sabe que una parte puede estar dividida en más partes e identifica la unidad iterativa” (Figura 4.25).



· Estudiante 3:

– Problema 1: resuelve la actividad bien, reconociendo que A y B no son 3/8 porque las partes no son congruentes y la congruencia la sabe reconocer también en contextos discretos (C y E). Además también identifica la D como 3/9, luego sabe que una parte puede estar dividida en más partes.

– Problema 2: Lo resuelve satisfactoriamente dividiendo el todo en 5 partes congruentes y sabe identificar $\frac{1}{3}$ para construir la unidad (3/3)

$\boxed{\text{Nivel 3}}$: reconoce congruencia en contextos continuos y discretos. Sabe que una parte puede estar dividida en más partes e identifica la unidad iterativa

Figura 4.15. Respuesta del E55 en la Tarea 3- Estudiante 3 (Evidencer)

Las respuestas de los estudiantes como las del EPM E55 indican la manera en la que los EPM (28 de los 85) comenzaron a aportar más destalles en su discurso profesional a través de las tres tareas. Estos EPM progresaron desde un discurso profesional menos detallado, en el que añadían información innecesaria o bien no aportaban detalles de las respuestas de los estudiantes como evidencias de sus interpretaciones, a elaborar un discurso profesional más detallado en el que se incluían evidencias de las respuestas de los estudiantes. Este resultado es relevante ya que tal y como han mostrado los resultados obtenidos en las tres tareas, la capacidad para utilizar un discurso más detallado parece estar relacionada con la capacidad de los EPM para proponer actividades.

4.5.1.1.Progreso en el discurso vinculado a la evolución en la destreza decidir

Los resultados con relación a la destreza tomar decisiones de acción, entendida como la capacidad de los EPM para proponer actividades con las que ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión de las fracciones, se muestran en la Tabla 4.14. En general, el elemento matemático: *relación inversa entre el número de partes del todo* *y el tamaño de cada parte*, de comparación de fracciones, fue el que más dificultades presentó a los EPM a la hora de proponer actividades. En la Tarea 3, los EPM propusieron más actividades que en ninguna de las otras tareas centradas en la comprensión de los elementos matemáticos: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* (E1) y *una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte* (E2), aunque no se propusieron actividades para la comprensión del elemento matemático: *uso de una fracción unitaria para construir otras fracciones* (E3), que explicaría la comprensión de la fracción *a/b* como *a* veces 1/*b*.

Tabla 4.14. Total de actividades propuestas en cada Tarea por los 85 EPM

	Actividades N1-N2	**Actividades N2-N3**	**% Total**
Tarea 1	29 (34%)	43 (51%)	42%
Tarea 2	24 (28%)	15 (18%)	23%
Tarea 3	55 (65%)	40 (47%)	56%

La evolución en las tres tareas, en cuanto a las diferencias en el discurso generado para interpretar y la capacidad para proponer actividades, muestra que los EPM que aportaban más detalles en sus interpretaciones evolucionaron a lo largo del entorno de aprendizaje en el sentido de aumentar su capacidad para proponer actividades (Tabla 4.15).

Tabla 4.15. Actividades propuestas en cada Tarea según el discurso de los EPM

	Actividades Tarea 1		**Actividades Tarea 2**		**Actividades Tarea 3**	
	N1-N2	N2-N3	N1-N2	N2-N3	N1-N2	N2-N3
Nonevidencers	3 13% *(n=22)*	8 36% *(n=22)*	4 24% *(n=17)*	4 24% *(n=17)*	7 46% *(n=15)*	4 27% *(n=15)*
Adders	3 42% *(n=7)*	2 29% *(n=7)*	-	-	-	-
Evidencers	23 43% *(n=53)*	33 62% *(n=53)*	20 37% *(n=54)*	11 20% *(n=54)*	48 69% *(n=70)*	36 51% *(n=70)*

La Tabla 4.16 señala cómo la capacidad para progresar en su discurso de 28 EPM (de Nonevidencer o Adder a Evidencer) se vio reflejada en un aumento del número de actividades propuestas en la Tarea 3. Del mismo modo, aquellos EPM que se trasladaron desde un discurso más rico en detalles (Evidencer) a uno en el que no se incluían estos detalles, propusieron menos actividades en la Tarea 3, mostrando una cierta regresión.

Tabla 4.16. Actividades propuestas con relación al progreso en el discurso en las tres Tareas

	EPM	Total actividades Tarea 1	Total actividades Tarea 2	Total actividades Tarea 3
De Nonevidencer o Adder a Evidencer	(28)	19 (34%)	14 (25%)	35 (63%)
Siempre Nonevidencer	(10)	4 (20%)	2 (10%)	9 (45%)
De evidencer o Adder a Nonevidencer	(5)	4 (40%)	2 (20%)	2 (20%)
Siempre Evidencer	(42)	45 (54%)	21 (25%)	49 (58%)
TOTAL	85	72	39	95

4.5.2. Desarrollo de la competencia vinculado al conocimiento matemático de los EPM

Los resultados expuestos en la Tabla 4.13 mostraban que 51 de los 85 EPM en este estudio manifestaron dificultades en la identificación y uso de los elementos matemáticos para describir las respuestas de los estudiantes en al menos una de las tareas. Este resultado revela el papel que desempeña el conocimiento del contenido matemático. En la interpretación del pensamiento de los estudiantes, los elementos matemáticos que más dificultades presentaron a los EPM fueron: *considerar una fracción como unidad iterativa de manera que permita construir otras fracciones* (E3) y el elemento matemático: *relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte* (E5). En la Tarea 2, 24 EPM mostraron dificultades para identificar y usar el elemento matemático E5 en su interpretación del pensamiento de los estudiantes y, en la Tarea 3, 43 EPM tuvieron las mismas dificultades con el elemento matemático E3 (Tabla 4.17).

Tabla 4.17. Porcentaje de EPM que interpretan en las tres tareas.

	EPM que interpretan usando los EM		
Elementos matemáticos (EM)	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes	82 (96%)	-	85 (100%)
Una parte puede estar dividida en otras partes/considerar un grupo de partes como una parte	79 (93%)	-	74 (87%)
Uso de la fracción unitaria para construir otras fracciones	-	-	42 (49%)
Para comparar, los todos deben mantenerse iguales	-	70 (82%)	-
Relación inversa entre el número de partes del todo y el tamaño de cada parte	-	62 (73%)	-

Mostramos a continuación, un ejemplo de un protocolo en el que se muestra las dificultades con el elemento matemático E3. El EPM E60 identificó los elementos matemáticos E1 y E2 en las respuestas del *Estudiante 2* a la actividad de identificación de fracciones (Figura 4.26). Sin embargo, al considerar que el estudiante ha resuelto correctamente la actividad 2 “porque ha sabido que tiene 1 unidad entera y 2/3 de la otra unidad 5/3= 1+2/3, lo ha representado correctamente” (Figura 4.27), no se ha dado cuenta de que el estudiante ha confundido la figura que se le da con el todo (o unidad). Para interpretar el pensamiento del estudiante 2 (Figura 4.27) el EPM E60 relaciona los elementos identificados en las respuestas del estudiante a las dos actividades con los distintos niveles de la THA. Esto le lleva a interpretar que el estudiante se encuentra en el nivel 3 porque “ha sabido representar gráficamente fracciones impropias”. Sin embargo, el EPM advierte que “no ha sabido identificar que una parte puede estar dividida en otras partes”, característica necesaria para estar en el nivel 3, en consecuencia, E60 dice: “estaría en el nivel 2”.

Estudiante 2:

tarea 1- Este estudiante ha sido capaz de reconocer que las figuras A y B no son $\frac{3}{8}$ porque no tienen partes congruentes. Sin embargo, la figura D la reconoce como $\frac{6}{16}$ y no como $\frac{3}{8}$ (no ve la equivalencia). Además, las figuras C y E ni siquiera las ve como fracciones (las ve por separado) y eso nos dice que no sabe trabajar en contextos discretos. no se da cuenta de que podría hacer grupos y luego contar los que le piden.

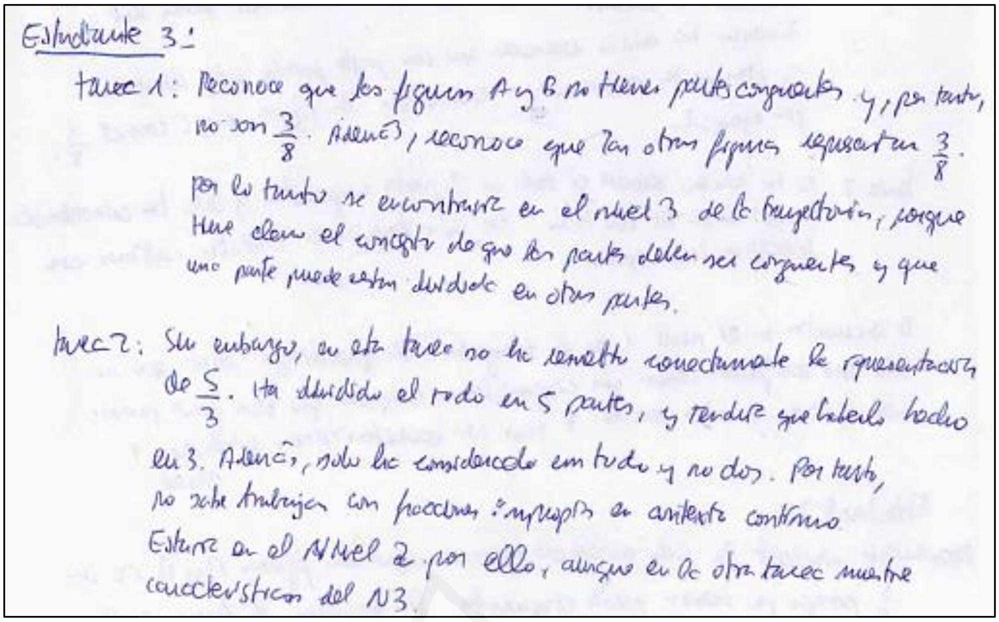
Figura 4.26. Identificación del E1 y E2 en la Tarea 3 (E60)

tarea 2: la ha hecho correctamente porque ha dividido los todos en 3 partes congruentes cada uno. Por tanto, sabe trabajar en contexto continuo con fracciones impropias. ha sabido que tiene 1 unidad entera y $\frac{2}{3}$ de la otra unidad. $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$. lo ha representado correctamente.

Estudiante 2: Por ello, podemos decir que el estudiante presenta alguna característica del nivel 3 (ha sabido representar gráficamente fracciones impropias en un contexto discreto), pero no ha sabido identificar que una parte puede estar dividida en otras partes (es una característica de nivel 3), Estaría en el nivel 2 de la trayectoria.

Figura 4.27. Interpretación del pensamiento estudiante 2 (E60. Tarea 3)

Del mismo modo, al interpretar el pensamiento del *Estudiante 3*, en primer lugar, identifica los elementos E1 y E2 en la actividad 1 y los relaciona con la comprensión del estudiante a esa actividad. A continuación, interpreta que el estudiante, en la actividad 2, "no ha resuelto correctamente la representación de 5/3" porque "ha dividido el todo en 5 partes, y tendría que haberlo hecho en 3. Además, solo ha considerado un todo y no dos". Esto le lleva a interpretar que el estudiante se encuentra en el nivel 2, "aunque en la otra tarea muestre características de N3" (Figura 4.28).


Estudiante 3:

tarea 1: Reconoce que las figuras A y B no tienen partes congruentes y, por tanto, no son $\frac{3}{8}$. Además, reconoce que las otras figuras representan $\frac{3}{8}$.
Por lo tanto se encontraría en el nivel 3 de la trayectoria, porque tiene claro el concepto de que las partes deben ser congruentes y que una parte puede estar dividida en otras partes.

tarea 2: Sin embargo, en esta tarea no ha resuelto correctamente la representación de $\frac{5}{3}$. Ha dividido el todo en 5 partes, y tendría que haberlo hecho en 3. Además, solo ha considerado un todo y no dos. Por tanto, no sabe trabajar con fracciones impropias en contexto continuo.
Estaría en el Nivel 2 por ello, aunque en la otra tarea muestra características del N3.

Figura 4.28. Interpretación del pensamiento estudiante3 (E60. Tarea 3)

Respuestas como las del E60 señalan las dificultades que los EPM presentaron para resolver actividades de reconstrucción de la unidad a partir de una parte mayor que el todo. Concretamente, los EPM no fueron capaces de considerar que la unidad de referencia dada en la actividad era mayor que el todo.

Estos resultados muestran que, cuando los EPM conocían los distintos niveles de la THA y los elementos que los caracterizaban, interpretaban el pensamiento de los estudiantes. Sin embargo, cuando los EPM parecen no comprender los elementos matemáticos, tienen dificultades para resolver la actividad y para mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes. Es decir, el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente parece estrechamente vinculado al conocimiento matemático de los EPM.

CHAPTER 5. CONCLUSION AND DISCUSSION

"We think in generalities, but we live in detail"

Alfred North Whitehead

CHAPTER 5. CONCLUSION AND DISCUSSION

This study focuses on characterising how pre-service teachers attend to students' strategies, interpret students' fractional thinking and decide how to respond on the basis of students' understanding using the information of a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) of fraction in a learning environment.

In the following sections we discuss our findings providing answers to our research questions:

- How do pre-service teachers use the knowledge provided by the hypothetical learning trajectory to notice students' fractional thinking?
    - How do pre-service teachers attend to and interpret students' fractional thinking?
    - What kind of decisions do pre-service teachers made?

- To what extent does the participation in the learning environment help pre-service teachers enhance the skill of noticing students' fractional thinking?

We conclude this chapter by highlighting implications for teacher training and future research.

5.1. HOW PRE-SERVICE TEACHERS' USE A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY TO NOTICE STUDENTS' FRACTIONAL THINKING

Results of our research have shown that participating in a learning environment designed in which pre-service teachers (PTs) had to notice students' fractional thinking using a HLT as a framework, seems to help them to identify the mathematical elements in students answers, to interpret students' fractional reasoning, and to decide how to respond on the basis of students' understanding (Sztajn et al., 2012), since, as results have highlighted, most of the 85 PTs were able to identify and interpret, and almost half of them were able to decide how to respond through the three tasks. These results are relevant since the average of PTs who were able to identify, interpret and decide how to respond in our study was higher than those obtained in previous research. In this sense, less than half of the PTs in Jacobs et al. (2010) research were able to identify and interpret students' mathematical thinking and only 14% of them were able to decide how to respond. In the same way, Tyminski et al. (2014) showed than less than 2/3 of the PTs who participated in their study were able to identify (73%) and interpret (63%) and 20% of them were able to decide how to respond. Therefore, in our study, the learning environment designed and the HLT seem to be suitable contexts that can support PTs in noticing students' mathematical thinking. In fact, the hypothetical learning trajectory seems to provide pre-service teachers with a specific language and acts as a guide to talk about students' mathematical thinking (Edgington et al., 2016).

Although our results are in line with previous research since among the three skills related to noticing, the skill of deciding how to respond is the most difficult one to develop in teacher education programs (Barnhart & van Es, 2015; Choy, 2013; Gupta et al., 2018; Jacobs et al., 2010; Jacobsen et al., 2016; Stahnke et al., 2016; Tyminski et al., 2014; Wager, 2014; Weiland & Amador, 2015), the professional tasks designed in the learning environment and the information provided in the HLT seem play an important role to scaffold, particularly, the skill of deciding. Pre-service teachers were provided with specific information about student's conceptual progression and were encouraged to identify a learning objective and to provide activities for the transition from level 1 to level 2 and from level 2 to level 3 in the three tasks.

In the next subsections, we discuss in a more detail way how PTs identify, interpret and decide in the professional tasks.

5.1.1. Attending to and Interpreting

Results indicate that 83 out of 85 PTs in Task 1 (identifying a fraction) were able to attend to the mathematical elements in students' strategies. Furthermore, 82 out of them interpreted students' fractional thinking. In Task 2, related to comparing fractions, 79 out of the 85 PTs attended to students' strategies identifying at least one of the mathematical elements in students' answers and 71 of those interpreted students' thinking relating to some of the mathematical elements. In Task 3, related to identifying fractions and reconstructing the whole, all the PTs attended at least one of the mathematical elements in students' answers. In this task, the 85 PTs interpreted students' thinking relating to some of the mathematical elements involved in the activity.

These results, in line with previous research (Bartell et al., 2013; Buforn et al., 2017; Callejo & Zapatera, 2017; Fernández et al., 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2015), indicate a relationship between attending to and interpreting. It seems necessary attending to the mathematical elements in students' answers to be able to interpret students' understanding relating to this element. However, results also indicate that the identification of the mathematical elements is not a sufficient condition to interpret students' understanding.

Moreover, results have shown that the PTs interpreted students' fractional thinking using the students' hypothetical learning trajectory in three different ways, differing in the more or less detailed discourse generated: (i) Non-evidencers: pre-service teachers who did not provide details from the students' answers generating a less detailed discourse; (ii) Adders: pre-service teachers who provided details from the students' answers but adding unnecessary information or information not provided in the students' answers and; (iii) Evidencers: pre-service teachers who provided details from students' answers generating a detailed discourse.

The varying discourses generated by pre-service teachers show the difficulties of some of them in providing details from students' answers to support their interpretations. In this sense, previous research has shown that teachers face difficulties to provide details of their interpretations since them "are not used to being asked to provide evidence for their claims or the reasoning that supports them" (Seago, 2003, p. 273). This often leads that their observations become "embedded in a judgmental framework, and often lacked details or evidence to support their observations" (Abell, Bryan, & Anderson, 1998, p. 497).

Our results also confirm the claims given by previous research in which the importance of providing details is being highlighted as a part of the professional practice of teachers (Goodwin, 1994; Le Fevre, 2003) and as a component of the skill of noticing (Jacobs et al., 2010; Mason, 2002, 2011; Seago, 2003; van Es & Sherin 2002) since, in our study, pre-service teachers who generated a more detailed discourse to interpret students' mathematical thinking, were able to propose more suitable activities considering students' thinking (this result is extended in the following subsection).

5.1.2. Interpreting and deciding how to respond

In a broader term, our results have shown that interpreting students' thinking is a necessary but not a sufficient condition to decide how to respond on the basis of students' thinking since the PTs who did not interpret students' mathematical thinking were not able to provide suitable activities to help students progress conceptually. This result is in line with Jacobs et al. (2011) since they claimed that these "component skills are inextricably intertwined" (p. 99).

Furthermore, results have shown how the different ways of interpreting students' fractional thinking, according to the details included in their discourse as evidence of their interpretations, influenced the way that PTs proposed new activities. In this sense, results seem to show that when PTs included more details to support their interpretations, they were able to provide more suitable activities. In fact, in Task 1, Evidencers proposed a suitable activity in the 52% of the situations and the Nonevidencers in the 25% of the situations. In Task 2, Evidencers proposed a suitable activity in the 29% of the situations and the Nonevidencers in the 24%. And, in Task 3, Evidencers proposed a suitable activity in the 60% of the situations and the Nonevidencers in the 37 % of the situations. This result is relevant since some studies have questioned the relationship between the skill of interpreting students' mathematical thinking and deciding how to respond on the basis of students' thinking since it is a difficult skill to develop in teacher education programs (Choy, 2013; Jacobs et al., 2011; Krupa et al., 2017; Lee y Choy, 2017; Stahnke et al., 2016; Wager, 2014). In this context, our results suggest a relationship between the way in which PTs interpreted students' mathematical thinking and the instructional decisions made: Pre-service teachers who generated a more mathematical detailed discourse to interpret students' thinking were able to provide more suitable activities according to students' thinking. In other words, generating a detailed discourse, which is rich in details, seems to have an influence on the capability of PTs to decide how to respond. Therefore, we can see the value of details provided by PTs in their mathematical discourse "as a major learning outcome in its own right" (Clarke, 2013, p. 22) since "the more sensitive you are to noticing details, the more tempted you are likely to be to act responsively" (Mason, 2002, p. 248). Consequently, it seems that one of the elements that could support the enhancement of noticing (particularly, the skill of deciding how to respond) is linked to generating a detailed mathematical discourse.

Nevertheless, results have also revealed some PTs who provided a detailed discourse and did not provide suitable activities focused on students' understanding. These findings can be linked both with the inherently difficult of deciding how to respond and with other factors such as prior experience (Erickson, 2011), or beliefs, which can avoid students' achievements (Schoenfeld, 1992, 2011).

Furthermore, results disclose some PTs who even not providing a detailed discourse, were able to propose activities focused on the students' mathematical understandings. This can be explained from Mason' words, since:

> "…absence of evidence is not evidence of absence: just because there is no evidence that someone is or was attending to something (some detail, say) or in some way (perceiving properties being instantiated, say), it does not mean that the individual was not attending in this way simply that it did not come to expression. Perhaps they did not consider it

relevant, perhaps it was attended to only peripherally or in passing, and perhaps the necessary words to express it were not forth-coming” (Mason, 2017, p. 14)

With regard to the different mathematical elements involved in the professional tasks, results highlight the difficulties that PTs faced to provide suitable activities related to some of them. The most difficult mathematical element for PTs was using *a part as an iterative unit to reconstruct the whole* (E3), since no one of them provided activities related to it, indicating PTs’ lack of understanding of fraction as a/b as a times $1/b$ and how they struggled to consider different representations of the whole (Lee et al., 2011). The mathematical elements related to comparing fractions (Task 2) were also difficult for PTs, particularly recognising *the inverse relationship between the number of the parts and the size of each part* since only 15 PTs provided a suitable activity related to it.

Finally, we would like to underline that we understand that deciding how to respond implies both, providing a learning objective and a suitable activity related to it. Some pre-service teachers, after interpreting students fractional thinking, identified a learning objective to help students progress in their understanding, however they did not propose a suitable activity. In these cases, although they did not reach the main goal, the HLT seems to help them, at least, in identifying students learning objectives (Sztajn et al., 2012) which is germane to noticing, since establishing explicit learning goals sets the stage for making instructional decisions (Hiebert et al., 2007).

5.2. ENHANCING PRE-SERVICER TEACHERS’ NOTICING THROUGH THE PARTICIPATION IN THE LEARNING ENVIRONMENT

From our results we can highlight two relevant findings regarding to enhancing PTs noticing: firstly, that the hypothetical learning trajectory helped pre-service teachers improve their professional discourse and this can be seen as evidence of noticing enhancement. Secondly, the enhancement of noticing is linked to pre-service teachers’ mathematical content knowledge.

5.2.1. Enhancement of noticing through changes in the discourse

Results have shown that the hypothetical learning trajectory used as a guide to interpret students' mathematical thinking helped pre-service teachers improve their discourse about students' mathematical thinking since, after their participation in the learning environment, 70 out of 85 PTs were able to provide a more detailed discourse in the last task, including evidence from students' answers to support their claims. Forty-two of these PTs consistently provided a detailed discourse and 28 out of them improved their discourse through the three tasks. This improvement let them progress from elaborating a less detailed discourse in which they added unnecessary information or did not give evidence from students' answers, to entering a more detailed discourse providing evidence from students' answers. Progress in their discourse was evidenced by the amount of details provided when they interpreted students' mathematical thinking. Therefore, progress in their discourse can be understood as a sign of improving the way they noticed students' mathematical thinking since they were able to focus their attention on the relevant mathematical details of students' thinking (Dick, 2013; Mason, 2011; McDuffie et al., 2014; Stockero, 2014; van Es & Sherin, 2002; van Es, 2011). At the same time, they also provided evidence from students' answers, which could be understood as an increase in sensitivity to the details of the learning situations since "the more specific and detailed the analysis of some event, the more that is revealed about the sensitivities" (Mason, 2017, p. 9) on the observer.

Considering the importance of focusing on the details of students answers to notice effectively (Mason, 2011; van Es, 2011), the fact that 42 PTs were consistently providing a detailed discourse, suggests that the learning environment designed and the HLT helped PTs focus on the mathematically relevant details from the initial stages of the learning process. Previous research on different contexts such as videos, students' answers without the support of any guide has shown that, initially, PTs interpretations are superficial or judgemental (Didis et al., 2016, Kazemi & Franke, 2004; Lee & Choy, 2017; Weiland & Amador, 2015).

Furthermore, our results have shown a relationship between providing a more detailed discourse and deciding how to respond providing suitable activities. In this sense, the 28 PTs who improved their discourse through the three tasks provided more suitable activities in the last task. Contrariwise, there were PTs who started providing a more detailed discourse but in the last task provided a less detailed discourse. This can be explained since when PTs notice and consider specifically, important conceptual details of the mathematical learning goal, they are better able to connect students' conceptions to important mathematical ideas and so, they will be more likely to respond appropriately (Edgington, 2014; Spitzer & Phelps-Gregory, 2017).

Therefore, the hypothetical learning trajectory helps pre-service teachers progress in their discourse, understood as elaborating a more detailed discourse when they are interpreting students' mathematical thinking. And progress in the discourse allows PTs to provide more suitable activities, and then enhances their noticing skill. Enhancing noticing can, therefore, be understood as a virtuous circle, as shown in Figure 5.1.

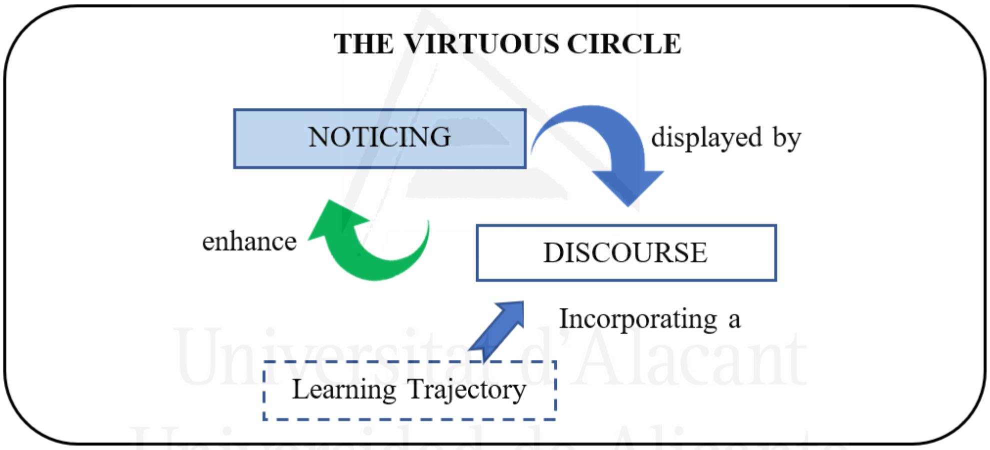


Figure 5.1. The virtuous circle of noticing in teacher education programs

Hypothetical learning trajectories can be regarded as a critical element in the virtuous circle of noticing in teacher education programs. Introducing the hypothetical learning trajectory as a guide could act as a scaffold in the enhancement of pre-service teacher noticing since it helps PTs focus on details which "may assist teachers in leveraging students' existing understandings" (Wilson et al., 2017, p. 571). The hypothetical learning trajectory provides pre-service teachers with a structure that facilitates the generation of a professional discourse, which includes evidence-based inferences, and helps them to make sense of students' thinking and to decide how to respond.

Thus, hypothetical learning trajectories can be considered a tool to help pre-service teacher shift from what was called by Mason (2002, 2017) *accounting-for* a phenomenon to *accounts-of* this phenomenon. An account-of "tries to eliminate judgements and emotional content, valuing brevity and vividness" (Mason, 2017, p.12) describing a phenomenon "as objectively as possible by minimising emotive terms, evaluation, judgements and explanation […]. By contrast, an account for introduces explanation, theorising and perhaps judgement and evaluation" (Mason, 2002, p. 40). The learning trajectory helped pre-service teachers focus their attention, rather than on *accounts-for* the teaching learning situations, on *accounts-of* them focusing "on particulars, on details, and so helps in avoiding generalities and labels, which […] can block access to alternative paths, alternative interpretations, and so ultimately, to alternative acts" (Mason, 2002, p. 51). In this sense, results have shown that the learning environment and the HLT provided PTs with a framework that allowed them to enhance their noticing skill developing a detailed discourse which included inferences based on evidence and helping them to provide suitable activities to help students progress in their conceptual understanding. Nevertheless, our results have shown that the enhancement of the skill of noticing is related with PTs' mathematical content knowledge. This result is extended in the following subsection.

5.2.2. The enhancement of noticing is linked to pre-service teachers' mathematical content knowledge

Results have highlighted that the enhancement of noticing is challenging and remains dependent on pre-service teachers' mathematical content knowledge, since 51 out of the 85 faced difficulties with some of the professional tasks. When pre-service teachers had difficulties in interpreting students' mathematical thinking, these difficulties seem to be related to the mathematical content knowledge. In this sense, it seems that although the three professional tasks designed, and the hypothetical learning trajectory can help pre-service teacher interpret students' mathematical thinking, the enhancement of the skill of noticing is linked to pre-service teachers' mathematical content knowledge (Dunekacke et al., 2015; Kaiser, Blömeke, Busse, Döhrmann, & König, 2014). In other words, it seems that this pre-service teacher "lack of MCK [*Mathematical Content*

Knowledge] narrowed the scope of what was possible" (Kahan, Cooper, & Bethea, 2003, p. 247). Although previous research has shown that knowing the mathematical content knowledge is not a sufficient condition to describe and recognise characteristics of students' understanding (Buforn, 2017; Son, 2013), our results show that its lack hinder the enhancement of noticing. This result suggests that noticing is a complex and specialized process (Mason, 2002; Sherin et al., 2011; Simpson & Haltiwagner, 2017) whose enhancement is influenced by several factors such us, mathematical pedagogical knowledge (Stürmer, Könings, & Seidel, 2013; Stürmer, & Seidel, 2017; Schoenfeld, 2011), prior experience (Erickson, 2011), the context (Coles, 2013; Mitchell & Marin, 2015), or beliefs (Shoenfeld, 2011; Wessels, 2018).

In our study the different mathematical elements linked to each professional task generated different difficulties to PTs when they had to interpret students' mathematical thinking. In fact, they had mostly of the difficulties using the mathematical element *a part as an iterative unit to reconstruct the whole* since they were not able to identify the reference unit showing their inflexibility to recognise different representations of the whole which is consistent with previous research on PTs knowledge of fractions (Buforn & Fernández, 2014; Lee et al., 2011; Vula & Kingji-Kastrati, 2018). Particularly, understanding this mathematical element demands PTs unfolding/de-encapsulating the meaning of iterating a times $1/b$ to obtain a/b. In this case, to understand a/b as a times $1/b$ when an improper fraction is given. Furthermore, PTs struggled with the element *the inverse relationship between the number of the parts and the size of each part*. Since this mathematical element is related to comparing fractions, our results are consistent with previous research which had claimed that PTs have limited knowledge to compare fractions (Chinnappan, 2000; Domoney, 2000). The gaps that pre-service teachers showed in their interpretations with some mathematical elements, make necessary to strengthen, in formative programs, pre-service teachers' conceptual knowledge related to the part-whole meaning of fractions (Depaepe et al., 2015) and how to use this knowledge to make sense of a teaching-learning situation (Llinares, 2013; Seidel & Stürmer, 2014).

Summarising, these results suggest that the participation in the learning environment designed around a HLT provided PTs with a structured frame to focus their attention on students' understanding (Edgington, 2012; Edgington et al., 2016). PTs used the theoretical information of the HLT to identify relevant mathematical details when their mathematical knowledge allowed it, to interpret students' fractional thinking and to decide how to respond providing suitable learning goals and activities (Sztajn et al., 2012). Furthermore, the HLT allowed PTs to improve their discourse elaborating a more detailed discourse and consequently, to develop their noticing skill. Nevertheless, the lack of mathematical knowledge is still being an obstacle for the enhancement of noticing.

5.3. IMPLICATIONS FOR TEACHER EDUCATION

Findings of this study have some implications for teacher education programs that we briefly summarise next. Firstly, the use of a hypothetical learning trajectory as a framework to notice and, secondly, the design of the learning environment that allows the enhancement of noticing.

5.3.1. Use of a hypothetical learning trajectory as a guide to notice

We designed a HLT after a review of the research in how students' fractional understanding of the part-whole meaning of fraction develops over time. In this sense, we have provided PTs with research-based information to be learned. Results have shown how PTs started to use this theoretical knowledge to notice students' fractional thinking. Thus, they were framing their learning on teaching through knowledge-based on empirical research. One of the claims of research in learning trajectories is transforming LTs' in "useable tools for teachers" (Daro et al., 2011). To do so, mathematics teacher educators have to "use their understandings of the goals and context of both the research and teaching communities to represent findings from research in ways that are meaningful and useful for teachers" (Edgington et al., 2016).

This way of working (transforming learning trajectories in usable tools for teachers) has specific implications in our context in which PTs have little opportunity to use their theoretical knowledge in practical teaching situations. Although the program includes a period of practices at schools in which they have to design and teach a lesson, PTs can choose the subject and, a great number of them do not select mathematics. So, courses of mathematics are, generally, their only approach to the practice of teaching mathematics. In this context, the HLT provides them with a structure within which they can start to theorise in practice (Smith, 2003) when attending to, interpreting and deciding how to respond. .

As highlighted by previous research, noticing students' mathematical thinking is developed and sustained over long periods of time, effort and experience (Litle, 1993; van Es & Sherin, 2008), and with classroom teaching experience (Jacobs et al., 2010). Therefore, teacher education programs must be centred on practice. In other words, teacher educators need to create spaces for PTs to develop ways to learn how to frame and describe what they are observing to make conjectures, "how to bring evidence to bear on them, how to weigh the often-conflicting information they get, to make well-supported judgments" (Ball & Cohen, 1999). Nevertheless, centring on practice does not necessarily mean learning in real situations (Ball & Cohen, 1999). This can be achieved by selecting or designing materials using students' written answers or video-clips of students. In our study, we can consider that PTs have learned from practice since they started to use the theoretical information of the HLT (information regarding students' learning) in practical situations designed ad hoc (three professional tasks).

5.3.2. The learning environment designed

Furthermore, the professional tasks and the learning environment designed around the theoretical information of a HLT seem to be an appropriate context for enhancing noticing since PTs increase their competence providing evidence from students' answers to support their inferences. Therefore, our study provides teacher educators with a designed learning environment and with professional tasks that can be used to help pre-service teachers enter in a more detailed professional discourse to attend to the details of students' answers, interpret students' understanding and respond on the basis of students' understanding.

The characteristics of the design of the learning environments are shared by the research group of Mathematics Education of the University of Alicante (Fernández et al., 2018). The learning environment is made up of different sessions in which the theoretical information is provided (reflecting the research on Didactics of Mathematics, in the form of hypothetical learning trajectory) as well as the professional tasks. These professional tasks are designed to support pre-service teachers' recognition of characteristics of students' understanding and consist of teaching-learning situations (records of practice including students' responses to problems illustrating different levels of students' understanding, interactions between students and teacher, etc.) in which pre-service teachers have to attend to students' strategies, interpret students' understanding and decide how to respond. Students' responses in these tasks are selected considering results on research in Mathematics Education about the understanding of mathematical concepts in primary school students.

5.4. THE MOST IMPORTANT CONTRIBUTIONS OF OUR STUDY

In this study, we have characterised how PTs used the theoretical information of a HLT to notice students' fractional thinking and how the use of a HLT in a context of a learning environment could support PTs in their enhancement of noticing.

1. Although the use of learning trajectories in teacher education programs is not new (Carpenter et al., 1989), its use has increased in the last decades as a way to help teachers understand the hypothetical paths of students learning. In our study, we have characterised the way in which pre-service teachers interpret students' understanding through their professional discourse (Evidencer, Nonevidencer, and Adder). This result is relevant from two foci:
    a. These profiles can be used as a means to assess PTs noticing.
    b. These profiles can be used by teacher educators to support pre-service teachers in developing their noticing competence in teacher education programs.
2. The participation in the learning environment designed around the HLT can support PTs in the development of a more detailed professional discourse since it provides them with a professional language to describe students' answers and to interpret their understanding. Results suggest that PTs who are able to provide a more detailed discourse are better prepared to decide how to respond. In other words, improving PTs awareness on the relevant mathematical details of the situation could improve their ability to decide how to respond. Thus, we can see the use of this HLT in the context of the designed

learning environment as a powerful tool in the virtuous circle of noticing which can allow the development of the skill of noticing students' fractional thinking. In other words, the HLT provided pre-service teachers with a structure to focus their attention on the mathematical relevant details of the situations supporting their enhancement of noticing.

5.5. LIMITATIONS AND FUTURE PERSPECTIVES

Finally, some limitations and future questions have emerged.

Firstly, results suggest a relationship between the details in professional discourse and the enhancement of noticing. Although more research is needed to identify ways to improve and to better characterise this relationship, it seems that in our research the lack of mathematical knowledge hinders the development of noticing. A challenge is to find the way to improve PTs content knowledge and then, analyse to what extent this improvement is liked with the enhancement of the competence.

Secondly, the participation in the learning environment seems to help some PTs to improve their professional discourse. Nevertheless, we wonder whether these experiences in teacher education programs have influence in PTs' professional practices. As Wells (2017) pointed out, "noticing what effective discourse sounds like, and how it can be used to enhance desirable outcomes, is more problematic" (p. 185). Therefore, we, as researchers, need to carry out more research to find whether this improvement in the discourse help pre-service teacher in their way to make instructional decisions (or if this improvement makes the difference when they are teaching at the schools in real contexts). Thus, it could be relevant for teacher educators having the opportunity to assess how PTs notice students' mathematical thinking in real contexts as, for example, in their periods of practices at schools. One way to do this is using technology, for instance, developing an online artefact in which PTs could discuss in their period of practices at schools (Ivars, Fernández, & Llinares, 2015), or creating a community where PTs could share their experiences. This will allow us to keep in contact with these future teachers and to assess whether what they have learned in their university courses influenced their professional practice.

Finally, from our results we have characterised three different groups of pre-service teachers through the analysis of their written discourse. Interviewing PTs could provide us with more insights to deeper understand and characterise the three groups (Evidencer, Nonevidencer, Adder). Furthermore, as we have mentioned before, these profiles can be used by teacher educators to support pre-service teachers in developing their noticing competence in teacher education programs. In fact, profiles give information to the design of a HLT related to how pre-service teachers notice students' mathematical thinking. This HLT can be a useful tool for teacher educators to the design of learning environments.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Abell, S. K., Bryan, L. A., & Anderson, M. A. (1998). Investigating preservice elementary science teacher reflective thinking using integrated media case-based instruction in elementary science teacher preparation. *Science Education, 82*(4), 491-509.

Amador, J., & Weiland, I. (2015). What preservice teachers and knowledgeable others professionally notice during lesson study. *The Teacher Educator, 50*(2), 109-126.

Andriessen, J., Erkens, G., Van De Laak, C., Peters, N., & Coirier, P. (2003). Argumentation as negotiation in electronic collaborative writing. En J. Andriessen, M. Baker & D. Suthers (Eds.), *Arguing to learn: Confronting cognition in computers-supporters collaborative learning environment* (pp. 79-115). Dordrecht: Springer.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D. L., & Cohen, D. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barnhart, T., & van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83-93.

Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 28-54.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 57-79.

Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, *13*(3), 140-146.

Battista, M. T. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 507-570.

Battista, M. T. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of fractions: Building on students' reasoning*. Portsmouth: Heinemann.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Nueva York: Macmillan Publishing.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. En T.P. Carpenter, E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*, (pp. 13–47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Beswick, K., Watson, J., & Brown, N. (2006). Teachers' confidence and beliefs and their students' attitudes to mathematics. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces. Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (Vol 1, pp. 68–75). Adelaida: MERGA.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 301-309.

Blömeke, S., Hoth, J., Döhrmann, M., Busse, A., Kaiser, G., & König, J. (2015). Teacher change during induction: Development of beginning primary teachers' knowledge, beliefs and performance. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 287-308.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 194-222.

Bromme R., & Brophy J. (1986). Teachers' Cognitive Activities. En B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education. Mathematics education library* (Vol 2, pp. 99-139). Dordrecht: Reidel Publishing

Buforn, À. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional*. (Tesis doctoral). Recuperada de https://rua.ua.es/dspace/handle/10045/73029

Buforn, À., & Fernández, C. (2014). La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias. En F. España (Ed.), *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 491-500). Baeza: CEAM.

Buforn, À., Fernández, C., Llinares, S., & Badillo, E. (2017). Pre-service primary teachers’ profiles of noticing students’ proportional reasoning. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 193-200). Singapore: PME.

Buforn, À., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 76*, 229-251.

Calderhead, J., & Miller, E. (1986). *The integration of subject matter knowledge in student teachers' classroom practice.* En D. McNamara (Ed.), *Research monograph series (*Paper 1*)*. Lancaster: School of Education, University of Lancaster.

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers’ noticing of students’ understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 309-333.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children’s mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, *26*(4), 499-531.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME8 the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 8, pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University.

Chamberlin, M. T. (2005). Teachers’ discussions of students’ thinking: Meeting the challenge of attending to students’ thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(2), 141-170.

Chao, T., Murray, E., & Star, J. (2016). Helping mathematics teachers develop noticing skills: Utilizing smartphone technology for one-on-one teacher/student interviews. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *16*(1), 22-37.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education. Tools and processes in mathematics teacher education* (Vol. 2, pp. 15-38). Rotterdam: Sense Publishers.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293–316.

Chick, H. (2010). Aspects of teachers' knowledge for helping students learn about ratio. En L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 145–152). Fremantle: MERGA.

Chinnappan, M. (2000). Preservice teachers' understanding and representation of fractions in a JavaBars environment. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(3), 234-253.

Choy, B. H. (2013). Productive mathematical noticing: What it is and why it matters. En V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.*), Mathematics Education: Yesterday, Today and Tomorrow*. *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Melbourne, (pp. 186-193) Melbourne, VIC: MERGA.

Choy, B. H. (2014). Teachers' productive mathematical noticing during lesson preparation. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (Vol. 2, pp. 297-304). Vancouver, Canada: PME.

Clarke, D. J. (2013). Contingent conceptions of accomplished practice: the cultural specificity of discourse in and about the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *45*(1), 21-33.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138.

Clements, D. H., & Sarama J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.

Clements, D. H., & Sarama J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 461-555). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal*, *45*, 443-494.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009*). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(2), 127-166.

Clements, D. H., Sarama, J., Wolfe, C. B., & Spitler, M. E. (2013). Longitudinal evaluation of a scale-up model for teaching mathematics with trajectories and technologies. *American Educational Research Journal, 50*(4), 812-850.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 163-184.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 165-184.

Coles, A., Fernández, C., & Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teachers' development. En A. M. Lindmeier & A. Heinze, (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 209-216). Kiel, Germany: PME.

Confrey, J. (2008). A synthesis of the research on rational number reasoning: A learning progression approach to synthesis. Comunicación presentada en el *11th International Congress of Mathematics Instruction*. Monterrey, Mexico.

Confrey, J. (2012). Better measurement of higher cognitive processes through learning trajectories and diagnostic assessments in mathematics: The challenge in adolescence. En V. Reyna, S. B. Chapman, M. R. Dougherty & J. Confrey (Eds.), *The adolescent brain: Learning, reasoning, and decision making* (pp. 155-182). Washington, DC, US: American Psychological Association.

Confrey, J., Gianopulos, G., McGowan, W., Shah, M., & Belcher, M. (2017). Scaffolding learner-centered curricular coherence using learning maps and diagnostic assessments designed around mathematics learning trajectories. *ZDM Mathematics Education*, *49*(5), 717-734.

Confrey, J., & Maloney, A. (2010). The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory. En K. Gomez, L. Lyons, & J. Radinsky (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences* (Vol. 1, pp. 968-975). Chicago, IL: International Society of the Learning Sciences.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.345-353). Thessaloniki, Greece: PME.

Corcoran, T. B., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). Learning progressions in science: An evidence-based approach to reform. *Consortium for Policy Research in Education (CPRE) Research Report # RR-63.* New York: Teachers College, Columbia University.

Cramer, K. A., Post, T. R., & Delmas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.

Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(2), 155-181.

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. B. (2011). Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction. *Consortium for Policy Research in Education (CPRE) Research Report #RR-68*. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. doi: 10.12698/cpre.2011.rr68

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., ... & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92.

Dick, L. K. (2013). Preservice student teacher professional noticing through analysis of their students' work. (Tesis doctoral) North Carolina State University, Raleigh, NC. Recuperada de: https://search.proquest.com/docview/1513569804?pq-origsite=gscholar

Didis, M. G., Erbas, A. K., Cetinkaya, B., Cakiroglu, E., & Alacaci, C. (2016). Exploring prospective secondary mathematics teachers' interpretation of student thinking through analysing students' work in modelling. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(3), 349-378.

Domoney, B. (2002). Student teachers'understanding of rational number: part-whole and numerical constructs. *Research in Mathematics Education*, *4*(1), 53-67.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 89-114.

Dunekacke, S., Jenßen, L., Eilerts, K., & Blömeke, S. (2016). Epistemological beliefs of prospective preschool teachers and their relation to knowledge, perception, and planning abilities in the field of mathematics: a process model. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 125-137.

Edgington, C. P. (2012). *Teachers' uses of a learning trajectory to support attention to students' mathematical thinking*. (Tesis Doctoral). North Carolina State University, Raleigh, NC Recuperada de: http://search.proquest.com/docview/1346014792?accountid=17192

Edgington, C. (2014). Teachers' uses of a learning trajectory as a tool for mathematics lesson planning. En J. J. Lo, K. R. Leatham & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 261-284). Cham: Springer.

Edgington, C., Wilson, P.H., Sztajn, P., & Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator,* 5(1), 65-80.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151-181.

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-596.

Erickson, F. (2011). On noticing teacher noticing. En M. G. Sherin, V.R. Jacobs & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*, (pp.17-34). New York: Routledge.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 312-327.

Feiman-Nemser, S., & Buchmann, M. (1985). Pitfalls of experience in teacher preparation. *Teachers College Record*, *87*(1), 53-65.

Fernandez, C. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development: The case of lesson study. *Journal of Teacher Education*, *53*(5), 393-405.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44,* 747-759.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2013). Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 441-468.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., & Llinares, S. (2015). Learning about students' mathematical thinking using "KDU". En K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Hobart, Australia: PME.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances en Investigación Matemática AIEM, 13,* 39-61.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Franke, M. L., & Kazemi, E. (2001). Learning to teach mathematics: Focus on student thinking. *Theory into Practice, 40*(2), 102-109.

Furtak, E. M. (2012) Linking a learning progression for natural selection to teachers' enactment of formative assessment. *Journal of Research in Science Teaching 49*(9), 1181-1210.

Goldsmith, L. T., & Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*, (pp. 169-187). New York: Routledge.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist*, *96*(3), 606-633.

Goos, M. (2008). Sociocultural perspectives on learning to teach mathematics. En B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: The Mathematics educator as a developing professional* (Vol. 4, pp. 75-91). Netherlands: Sense Publishers.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Gupta, D., Soto, M., Dick, L., Broderick, S. D., & Appelgate, M. (2018). Noticing and Deciding the Next Steps for Teaching: A Cross-University Study with Elementary Pre-service Teachers. En G. Stylianides & K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers. An international perspective* (pp. 261-275). Cham: Springer.

Herbst, P., Chazan, D., Kosko, K. W., Dimmel, J., & Erickson, A. (2016). Using multimedia questionnaires to study influences on the decisions mathematics teachers make in instructional situations. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 167-183.

Heritage, M. (2008). *Learning progressions: Supporting instruction and formative assessment.* Washington, DC: Chief Council of State School Officers.

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, *58*(1), 47-61.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hines, E., & McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics*, *105*(2), 88-105.

Hoth, J., Döhrmann, M., Kaiser, G., Busse, A., König, J., & Blömeke, S. (2016). Diagnostic competence of primary school mathematics teachers during classroom situations. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 41-53.

Ivars, P., Buforn, À., & Llinares, S. (2017) Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (Comp.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 65-88). Venezuela: Centro de Investigaciones Educativas, Universidad Central de Venezuela.

Ivars, P., & Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service primary teachers noticing. En G. Stylianides & K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers. An international perspective* (pp. 245-260). Cham: Springer.

Ivars, P., Fernández, C. & Llinares, S. (2015). Sharing narratives in online discussions, a context for helping pre-service teachers to develop the noticing skill. *EDULEARN15 Proceedings of the 7th International Conference on Education and New Learning Technologies* (pp. 3041-3049). Barcelona, España: IATED.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2016). Cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La Matemática e la sua Didattica, 24*(1-2), 79-96.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., Philipp, R. A., & Schappelle, B. P. (2011). Deciding how to respond on the basis of children's understandings. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes,* (pp.97-116). New York: Routledge

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Jakobsen, A., Mellone, M., Ribeiro, C. M., & Tortora, R. (2016). Discussing secondary prospective teachers' interpretative knowledge: A case study. En C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 35-42). Szeged, Hungary: PME

Kahan, J. A., Cooper, D. A., & Bethea, K. A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 223-252.

Kaiser, G., Blömeke, S., Busse, A., Döhrmann, M., & König, J. (2014). Professional knowledge of (prospective) mathematics teachers–its structure and development. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (*Vol. 1, pp. 35-50). Vancouver, Canada: PME.

Kalchman, M., & Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. En M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How Students Learn: History, Mathematics and Science in the Classroom* (pp. 351–393). Washington, DC: The National Academies Press.

Kazemi, E., & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(3), 203-235.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101–144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Kılıç, Ç. (2013). Pre-service primary teachers' free problem-posing performances in the context of fractions: An example from Turkey. *The Asia-Pacific Education Researcher*, *22*(4), 677-686.

Kind, V. (2009). Pedagogical content knowledge in science education: perspectives and potential for progress. *Studies in Science Education*, *45*(2), 169-204.

Koc, Y., Peker, D., & Osmanoglu, A. (2009). Supporting teacher professional development through online video case study discussions: An assemblage of preservice and inservice teachers and the case teacher. *Teaching and Teacher Education*, *25*(8), 1158-1168.

Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S., & Monson, D. (2017). Investigating Secondary Preservice Teacher Noticing of Students' Mathematical Thinking. En E. O. Schack, M. H. Fisher & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 49-72). Cham: Springer.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age.

Lande, E., & Mesa, V. (2016). Instructional decision making and agency of community college mathematics faculty. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 199-212.

Le Fevre, D. M. (2003). Designing for teacher learning: Video-based curriculum design. En J. Brophy (Ed.), *Using video in teacher education* (pp. 235-258). Emerald Group Publishing Limited.

Lee, M. Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(3), 327-348.

Lee M. Y., & Choy B.H. (2017) Mathematical Teacher Noticing: The Key to Learning from Lesson Study. En E. Schack, M. Fisher & J. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks. research in mathematics education* (pp. 121-140). Springer International Publishing.

Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(3), 198-220.

Lehrer, R., Kim, M.-J., Ayers, E., & Wilson, M. (2014). Toward establishing a learning progression to support the development of statistical reasoning. En A. P. Maloney, J. Confrey & K. H. Nguyen (Eds.) *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 31-59). Charlotte: Information Age Publishers,

Levin, D. M., Hammer, D., & Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education*, *60*(2), 142-154.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM Mathematics Education, 40*(5), 833-843.

Lin, C. Y., Becker, J., Byun, M. R., Yang, D. C., & Huang, T. W. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *113*(1), 41-51.

Little, J. W. (1993). Teachers' professional development in a climate of educational reform. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *15*(2), 129-151.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, (17*), 51-64.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas 51*, 92-101.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2013b) El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, *50*, 117-133.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasian Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future,* 429-459.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En M. Sierra & L. Rico, (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 13-24). Zamora: Universidad de Granada.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (2005). *Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas (II)* [DVD]. Secretariado de Recursos Audiovisuales y Nuevas Tecnologías: Universidad de Sevilla.

Lo, J. J., & Grant, T. (2010). Prospective elementary teachers' conceptions of fractional unit. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 169–176). Taipei, Taiwan: PME.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 481-500.

Lobato, J., & Walters, C. D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp.74-101). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York: Routledge.

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. En J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95–132). Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243-267.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing: roots and branches. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs, & R.A. Philipp, (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* (pp.35-50). New York: Routledge.

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance—a commentary. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 219-226.

McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Bolson, C., Turner, E. E., Aguirre, J. M., Bartell, T. G., ... & Land, T. (2014). Using video analysis to support prospective K-8 teachers' noticing of students' multiple mathematical knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(3), 245-270.

Mitchell, R. N., & Marin, K. A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(6), 551-575.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. US Department of Education. https://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: NCTM

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.).Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110.

Nickerson, S. D., Lamb, L., & LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking. En E. Schack, M. Fisher, & J. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 381-398). Cham: Springer.

Olanoff, D., Lo, J. J., & Tobias, J. M. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267-310.

Oppewal, T. J. (1993). Preservice teachers' thinking about classroom events. *Teaching and Teacher Education*, *9*(2), 127-136.

Philipp, R. A., Ambrose, R., Lamb, L. L., Sowder, J. T., Schappelle, B. P., Sowder, L., ... , & Chauvot, J. (2007). Effects of early field experiences on the mathematical content knowledge and beliefs of prospective elementary school teachers: An experimental study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 438-476.

Pons, J. B. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. (Tesis doctoral) Recuperada de: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf

Ponte, J. P., Segurado, I., & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work of mathematical investigations? En A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Roller, S. A. (2016). What they notice in video: A study of prospective secondary mathematics teachers learning to teach. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(5), 477-498.

Rosaen, C. L., Lundeberg, M., Cooper, M., Fritzen, A., & Terpstra, M. (2008). Noticing noticing: How does investigation of video records change how teachers reflect on their experiences? *Journal of Teacher Education*, *59*(4), 347-360.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de* *derivada (desarrollo del concepto)* (Tesis doctoral) Recuperada de: https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/73311

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 1305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P., & Valls, J. (2017). Desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente": un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 457-466). Zaragoza: SEIEM.

Santagata, R., & Angelici, G. (2010). Studying the impact of the lesson analysis framework on preservice teachers' abilities on videos of classroom teaching. *Journal of Teacher Education*, *61*(4), 339-349.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J., & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 379-397.

Scherer, P., & Steinbring, H. (2006). Inter-relating theory and practice in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 103-108.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: McMillan.

Schoenfeld, A. H. (2011). Noticing matters. A lot. Now what. En M. G., Sherin, V. R., Jacobs, & R. A. Philipp, (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*, (pp. 223-238). New York: Routledge.

Seago, N. (2003). Using video as an object of inquiry for mathematics teaching and learning. En J. Brophy (Ed.), *Using Video in Teacher Education* (pp. 259 – 286). Emerald Group Publishing Limited.

Seidel, T., & Stürmer, K. (2014). Modeling and measuring the structure of professional vision in preservice teachers. *American Educational Research Journal, 51*, 739–771. doi:10.3102/0002831214531321.

Seto, C., & Loh, M. Y. (2015). Promoting mathematics teacher noticing during mentoring conversations. En K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 39* (Vol. 4, pp. 153–160). Hobart, Australia: PME

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G., Sherin, V. R., Jacobs & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp.3-13). New York: Routledge.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *13*(3), 475-491.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(7), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Shulman, L. S. (2002). A perspective on teacher Knowledge. En A. Pollard (Ed.) *Readings for reflective teaching* (pp. 152-154). Great Britain: CONTINUUM.

Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research*, *78*(1), 153-189.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 233-254.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359-371.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Simons, D. J., & Chabris, C. F. (1999). Gorillas in our midst: Sustained inattentional blindness for dynamic events. *Perception*, *28*(9), 1059-1074.

Simpson, A., & Haltiwanger, L. (2017). “This is the first time I’ve done this”: Exploring secondary prospective mathematics teachers’ noticing of students’ mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(4), 335-355.

Smith, T. (2003). Connecting theory and reflective practice through the use of personal theories. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 215-222). CRDG, College of Education, University of Hawai: PME

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 49-70.

Spitzer, S. M., & Phelps-Gregory, C. M. (2017). Using Mathematical Learning Goals to Analyze Teacher Noticing. En E. O. Schack, M. H. Fisher & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 303-319). Cham: Springer.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers’ perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.

Star, J. R. Lynch, K., & Perova, N. N (2011). Using video to improve preservice mathematics teachers’ abilities to attend to classroom features. En M. G. Sherin,

V. R. Jacobs & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*, (pp.117-133). New York: Routledge

Star, J. R., & Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(2), 107-125.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 129-162.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer Science & Business Media.

Steinberg, R. M., Empson, S. B., & Carpenter, T. P. (2004). Inquiry into children's mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(3), 237-267.

Stockero, S. L. (2008). Using a video-based curriculum to develop a reflective stance in prospective mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 373-394.

Stockero, S. L. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. En J. J. Lo, K. R. Leatham & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 239-259). Cham: Springer.

Stürmer, K., Könings, K. D., & Seidel, T. (2013). Declarative knowledge and professional vision in teacher education: Effect of courses in teaching and learning. *British Journal of Educational Psychology*, *83*(3), 467-483.

Stürmer, K., & Seidel, T. (2017). A Standardized Approach for Measuring Teachers' Professional Vision: The Observer Research Tool. En E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 359-380). Cham: Springer.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 79-96.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*(1), 166-175.

Tyminski, A. M., Land, T. J., Drake, C., Zambak, V. S., & Simpson, A. (2014). Preservice elementary mathematics teachers' emerging ability to write problems to build on children's mathematics. En J. J. Lo, K. R. Leatham & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 193-218). Cham: Springer.

Utley, J., & Reeder, S. (2012). Prospective elementary teachers' development of fraction number sense. *Investigations in Mathematics Learning*, *5*(2), 1-13.

Vacc, N. N., & Bright, G. W. (1999). Elementary preservice teachers' changing beliefs and instructional use of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,30*(1), 89-110.

Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). New York: Routledge

Van Es, E. A., Cashen, M., Barnhart, T., & Auger, A. (2017). Learning to Notice Mathematics Instruction: Using Video to Develop Preservice Teachers' Vision of Ambitious Pedagogy. *Cognition and Instruction*, *35*(3), 165-187.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-595.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), 244-276.

Van Es, E., Tunney, J., Goldsmith, L., & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 340-356.

Van den Kieboom, L. A., Magiera, M. T., & Moyer, J. C. (2017). Learning to notice student thinking about the equal sign: K-8 preservice teachers' experiences in a teacher preparation program. En E. Schack, M. Fisher & J. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 141-159). Cham: Springer.

Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students' knowledge? *Journal of Curriculum Studies*, *46*(1), 138-161.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education, 9(3)*, 77-101.

Vula, E., & Kingji-Kastrati, J. (2018). Pre-service Teacher Procedural and Conceptual Knowledge of Fractions. En G. Stylianides & K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers. An international perspective* (pp. 111-123). Cham: Springer.

Wager, A. A. (2014). Noticing children's participation: Insights into teacher positionality toward equitable mathematics pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(3), 312-350.

Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(6), 523-550.

Weiland, I. S., & Amador, J. M. (2015). Lexical and indexical conversational components that mediate professional noticing during lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1339-1361.

Weiland, I. S., Hudson, R. A., & Amador, J. M. (2014). Preservice formative assessment interviews: The development of competent questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(2), 329-352.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry. Toward a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wells, G. (2002). Learning and teaching for understanding: The key role of collaborative knowledge building. *Advances in Research on Teaching*, *9*, 1–42.

Wells, K. J. (2017). Noticing students' conversations and gestures during group problem-solving in mathematics. En E. O. Schack, M. H. Fisher & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 183-204). Cham: Springer.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

Wessels, H. (2018). Noticing in Pre-service Teacher Education: Research Lessons as a Context for Reflection on Learners' Mathematical Reasoning and Sense-Making. En G. Kaiser, H, Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 731-748). Cham: Springer.

Wickstrom, M., Baek, J., Barrett, J. E., Cullen, C. J., & Tobias, J. M. (2012). Teacher's noticing of children's understanding of linear measurement. En L.R. Van Zoest, J.J. Lo & J.L. Kratky (Eds.) *Thirty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Wilson, P. H. I. (2009). *Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning.* (Tesis doctoral). Recuperada de: https://repository.lib.ncsu.edu/bitstream/handle/1840.16/2994/etd.pdf?sequence=1

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103-121.

Wilson, P. H., Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2011). Understanding prospective mathematics teachers' processes for making sense of students' work with technology. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(1), 39-64.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 149-175.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J., & Myers, M. (2017). Changes in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal*, *54*(3), 568-604.

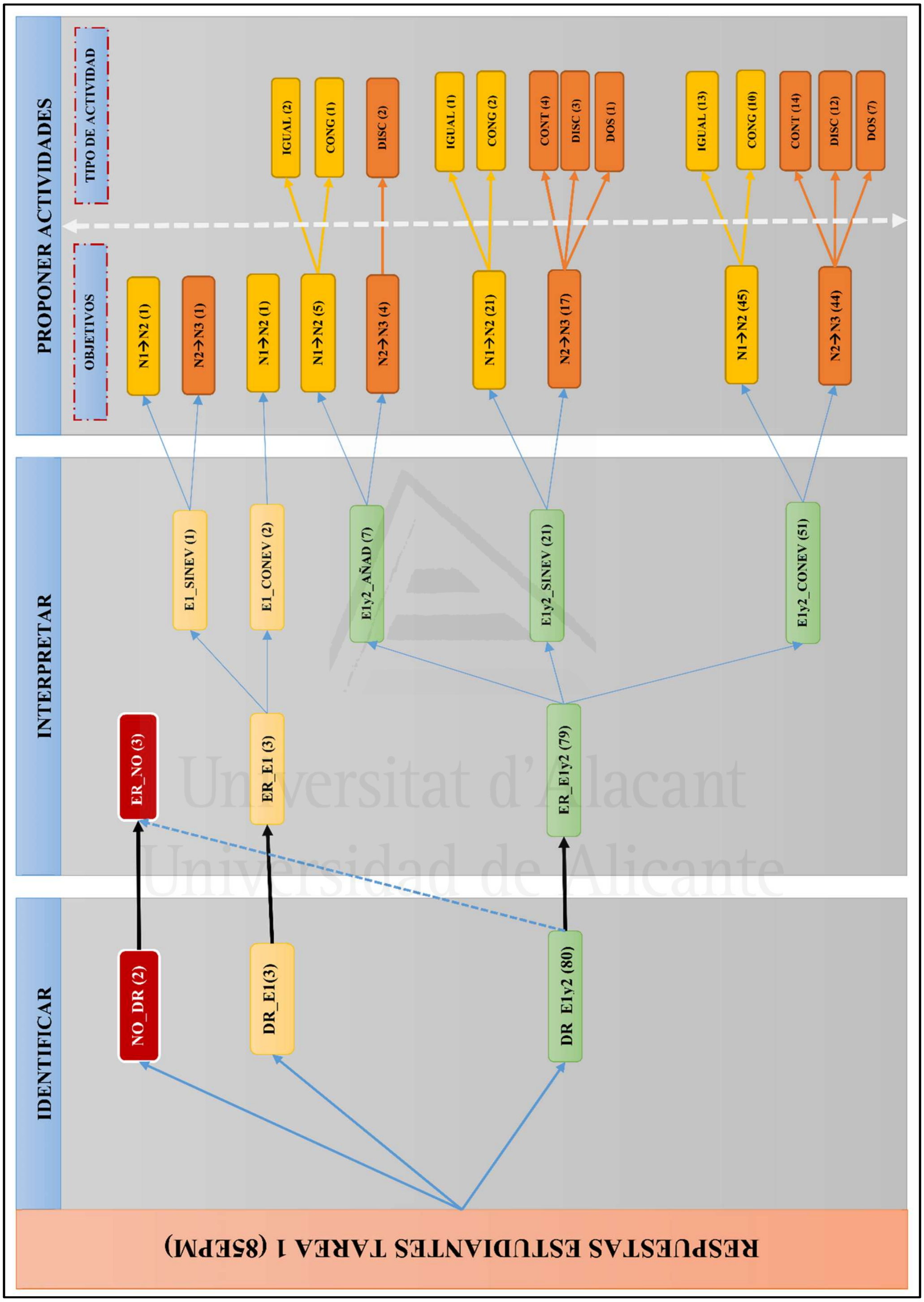
Wilson, S. M., & Berne, J. (1999). Teacher learning and the acquisition of professional knowledge: An examination of research on contemporary professional development. *Review of Research in Education, 24*, 173-209.

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining Interactions between Problem Posing and Problem Solving with Prospective Primary Teachers: A Case of Using Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 101-118.

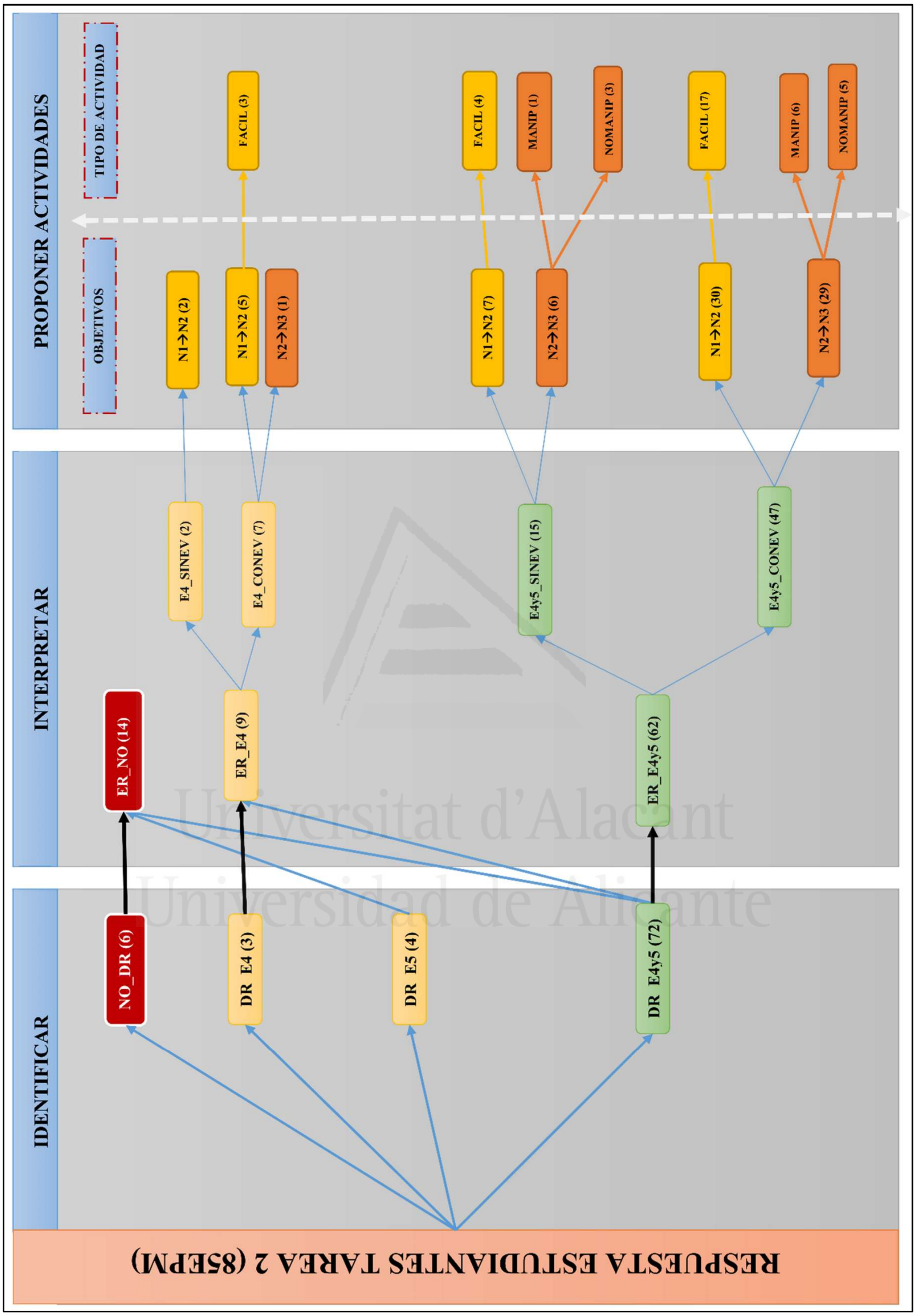
Young, E., & Zientek, L. R. (2011). Fraction operations: An examination of prospective teachers' errors, confidence, and bias. *Investigations in Mathematics Learning*, *4*(1), 1-23.

ANEXO

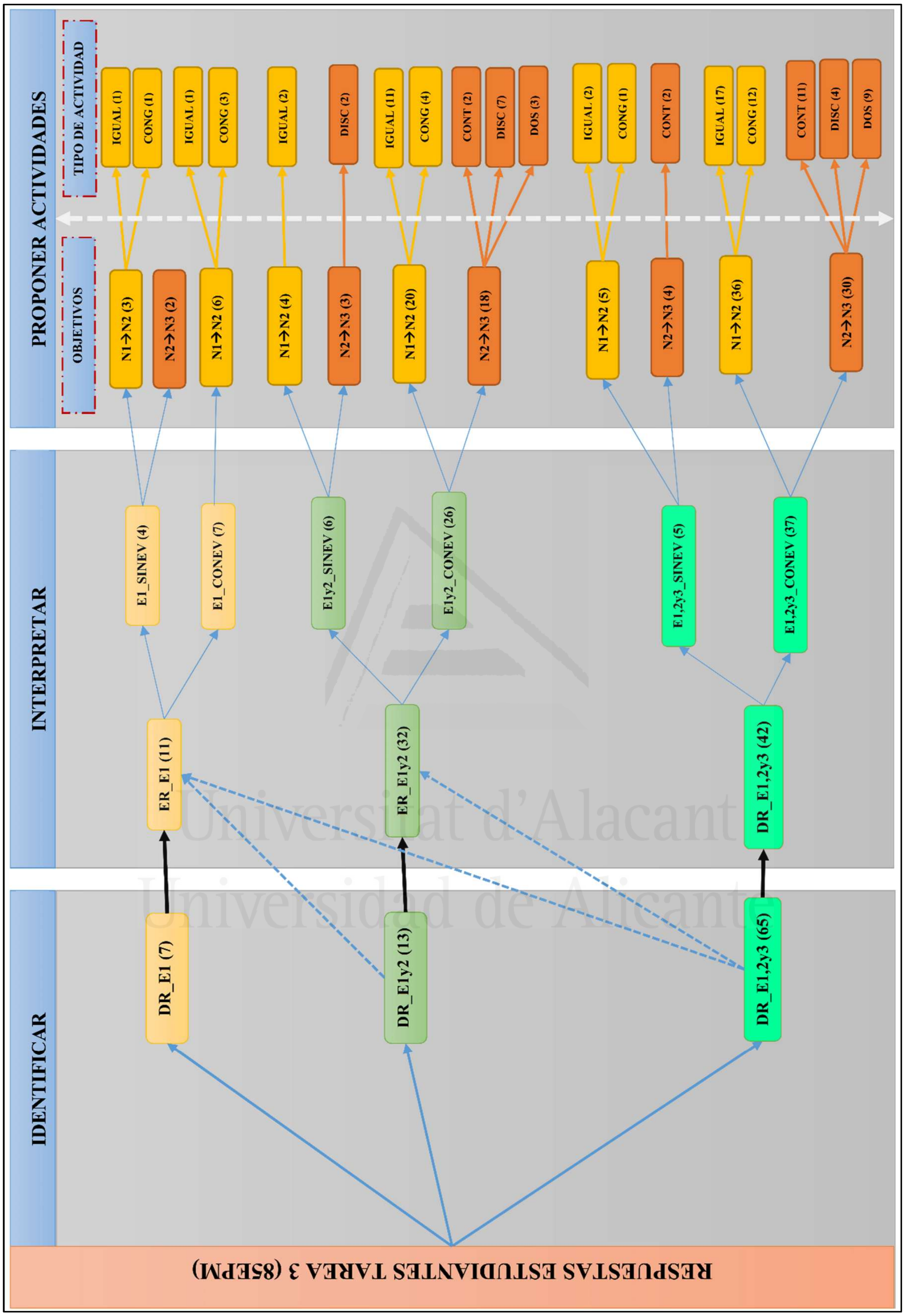
ESQUEMA DE RELACIONES ENTRE LAS DESTREZAS IDENTIFICAR, INTERPRETAR Y DECIDIR EN LA TAREA PROFESIONAL 1


RESPUESTAS ESTUDIANTES TAREA 1 (85EPM)
IDENTIFICAR
INTERPRETAR
PROPONER ACTIVIDADES
OBJETIVOS
TIPO DE ACTIVIDAD
NO_DR (2)
DR_E1(3)
DR_E1y2 (80)
ER_NO (3)
ER_E1 (3)
ER_E1y2 (79)
E1_SINEV (1)
E1_CONEV (2)
E1y2_AÑAD (7)
E1y2_SINEV (21)
E1y2_CONEV (51)
N1→N2 (1)
N2→N3 (1)
N1→N2 (1)
N1→N2 (5)
N2→N3 (4)
N1→N2 (21)
N2→N3 (17)
N1→N2 (45)
N2→N3 (44)
IGUAL (2)
CONG (1)
DISC (2)
IGUAL (1)
CONG (2)
CONT (4)
DISC (3)
DOS (1)
IGUAL (13)
CONG (10)
CONT (14)
DISC (12)
DOS (7)

ESQUEMA DE RELACIONES ENTRE LAS DESTREZAS IDENTIFICAR, INTERPRETAR Y DECIDIR EN LA TAREA PROFESIONAL 2


RESPUESTA ESTUDIANTES TAREA 2 (85EPM)
IDENTIFICAR
INTERPRETAR
PROPONER ACTIVIDADES
OBJETIVOS
TIPO DE ACTIVIDAD
NO_DR (6)
DR_E4 (3)
DR_E5 (4)
DR_E4y5 (72)
ER_NO (14)
ER_E4 (9)
ER_E4y5 (62)
E4_SINEV (2)
E4_CONEV (7)
E4y5_SINEV (15)
E4y5_CONEV (47)
N1→N2 (2)
N1→N2 (5)
N2→N3 (1)
N1→N2 (7)
N2→N3 (6)
N1→N2 (30)
N2→N3 (29)
FACIL (3)
FACIL (4)
MANIP (1)
NOMANIP (3)
FACIL (17)
MANIP (6)
NOMANIP (5)

ESQUEMA DE RELACIONES ENTRE LAS DESTREZAS IDENTIFICAR, INTERPRETAR Y DECIDIR EN LA TAREA PROFESIONAL 3


RESPUESTAS ESTUDIANTES TAREA 3 (85EPM)
IDENTIFICAR
INTERPRETAR
PROPONER ACTIVIDADES
DR_E1 (7)
DR_E1y2 (13)
DR_E1,2y3 (65)
ER_E1 (11)
ER_E1y2 (32)
DR_E1,2y3 (42)
E1_SINEV (4)
E1_CONEV (7)
E1y2_SINEV (6)
E1y2_CONEV (26)
E1,2y3_SINEV (5)
E1,2y3_CONEV (37)
OBJETIVOS
TIPO DE ACTIVIDAD
N1→N2 (3)
N2→N3 (2)
N1→N2 (6)
N1→N2 (4)
N2→N3 (3)
N1→N2 (20)
N2→N3 (18)
N1→N2 (5)
N2→N3 (4)
N1→N2 (36)
N2→N3 (30)
IGUAL (1)
CONG (1)
IGUAL (1)
CONG (3)
IGUAL (2)
DISC (2)
IGUAL (11)
CONG (4)
CONT (2)
DISC (7)
DOS (3)
IGUAL (2)
CONG (1)
CONT (2)
IGUAL (17)
CONG (12)
CONT (11)
DISC (4)
DOS (9)