Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.
Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.

Ir directamente al índice

Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriores

Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols.
Existeixen així mateix botons de retorn a l'index al principi i final de cadascun deis capítols .

Anar directament a l'index

Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' Adobe Acrobat Reader 7.0 o posteriors.

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

LA NOCIÓN DE PRUEBA Y SOFTWARE DINÁMICO: CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES EN UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE

Tesis Doctoral

Mª José Haro Delicado

Alicante, 2007

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

LA NOCIÓN DE PRUEBA Y SOFTWARE DINÁMICO: CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES EN UN ENTORNO VIRTUAL DE APRENDIZAJE

Memoria que presenta Dña. Mª José Haro Delicado para optar al grado de doctora

Fdo. Mª José Haro Delicado

Realizada bajo la dirección del Dr. Don Germán Torregrosa Gironés

Fdo. Dr. Germán Torregrosa Gironés

Alicante, Mayo de 2007

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gran agradecimiento al director de esta Tesis, Dr. Don Germán Torregrosa Gironés, al Director del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante, Dr. Don Salvador Llinares Císcar y a la profesora de la misma Universidad, Dra. Dña. Mª del Carmen Penalva Martínez, por su constante ayuda, por su apoyo, por su rigor y su contribución científica, sin los cuales esta Tesis no se podría haber realizado. Muchas gracias por todo.

Índice

CAPÍTULO I. Problemática de investigación y marco conceptual.

I. Problemática de investigación y marco conceptual.

Esta investigación se centra en el análisis de las concepciones de profesores de matemáticas sobre la prueba (considerándola como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje) y con sus formas de probar cuando resuelven tareas matemáticas. Con el término concepción se hará referencia a los significados o funciones que los profesores asignan a la prueba matemática. El análisis de la influencia del uso de software dinámico sobre ambos aspectos (concepciones y formas de probar) es también objeto de esta investigación. Se presenta una visión del estado de la cuestión y la descripción de los problemas tratados.

El contexto del que proceden los datos está basado en una experiencia virtual, con la inclusión de foros de debate. La información obtenida sobre la forma de participar los profesores en los mismos se ha utilizado con el fin de triangular las inferencias realizadas sobre el significado de la prueba y formas de probar.

I.1. Problemática de la investigación.

En los apartados correspondientes a este subcapítulo se hace una revisión de investigaciones relacionadas con las concepciones de los profesores sobre la prueba tanto en su consideración como proceso matemático como en contextos de enseñanza-aprendizaje. En dichas investigaciones se alude a la relación de las concepciones y conocimiento de los profesores sobre la prueba con el tratamiento que le dan en el aula, y a la influencia que dicho tratamiento ejerce sobre el significado que la prueba tiene para los estudiantes y la dificultad que para ellos representa el trabajo con pruebas. La introducción de herramientas dinámicas en el desarrollo de procesos de prueba es otro de los aspectos recogidos.

I.1.1 Concepciones sobre la prueba en profesores y formas de probar.

Las pruebas matemáticas son algo inherente al desarrollo y a la evolución del conocimiento matemático (Bourbaki, 1976; de Lorenzo, 1977; Kline, 1992; Mankirwicz, 2000; Boyer, 2001). Probar no es sólo una de las actividades características del comportamiento matemático, sino que es la actividad que distingue el comportamiento matemático de otros comportamientos científicos (Dreyfus, 1990). La variedad y riqueza de los procedimientos utilizados para demostrar es tan grande como la imaginación y creatividad del hombre. Según Ibañes y Ortega (2005) no hay modelo de demostración que no tenga que ver con la época y con las personas concretas que lo construyeron. Peressini et al. (2004) consideran válidas diversas concepciones sobre la prueba y diferentes formas de proceder según el contexto en que se desarrolle el trabajo con pruebas.

Cualquier resultado dentro del campo de las matemáticas necesita una demostración (o prueba) para poder ser considerado como válido y así poder ser, posteriormente, aplicado. Pero no es éste el único significado que se le atribuye a la prueba matemática. Diversos autores muestran otras características que la convierten en una herramienta de gran importancia para entender más profundamente lo que subyace en un resultado matemático. Así señalan las funciones de:

- **Explicar** por qué un resultado matemático es cierto (Bell, 1976; Steiner, 1978; Alibert, 1988; de Villiers, 1990; Hersh, 1993; Schoenfeld, 1994; Hanna y Jahnke, 1996; Mariotti, 2006),
- **Comunicar** y transmitir relaciones y propiedades matemáticas (Manin, 1977; Davis, 1986; de Villiers, 1990; Alibert y Thomas, 1991; Balacheff, 1991; Richards, 1991; Hersh, 1993; Schoenfeld, 1994; Thurston,1994; Hanna y Jahnke, 1996),
- **Desarrollar el pensamiento lógico y abstracto** (Bell, 1976; de Villiers, 1990; Hanna y Jahnke, 1996; Hardy, 1999; de Villiers, 1999),
- **Establecer**, a través de sus métodos y formas de proceder, un **vínculo entre matemáticas y realidad** (Hanna y Jahnke, 1996) y,
- Empujar a investigar, a conjeturar (entendido como el hecho de hacer una observación pero dudar de su veracidad), a plantearse nuevos problemas, y, en resumen a **descubrir y construir el propio conocimiento** (Hanna y Jahnke, 1996; Chazan y Yerushalmy, 1998; de Villiers, 1998; de Villiers, 1999).

En este trabajo nos interesaremos por la forma de realizar pruebas de los profesores de matemáticas y por sus concepciones sobre la prueba como proceso matemático, debido a la relevancia que ello tiene en el uso que el profesor hace de ella en el aula y en los contenidos aprendidos por los estudiantes y en cómo los adquieren. En opinión de Hanna y Jahnke (1996), la prueba es una herramienta de primera importancia a la hora de fomentar el razonamiento matemático y la comprensión. Por ello, cuando se demuestra no se debe buscar sólo el convencimiento de uno mismo y la eliminación de las propias dudas, sino que se ha de intentar también persuadir a los demás de la validez de nuestros argumentos (Harel y Sowder, 1998).

Knuth (2002a) estudió las concepciones sobre la prueba de profesores de matemáticas de secundaria y llegó a la conclusión de que los profesores asignan diversos papeles a la prueba matemática. Para todos ellos, su principal función es la de verificar un argumento. Un gran porcentaje de ellos veía también la prueba como un medio de convencer a otros y de comunicar contenido matemático. En menor proporción consideraban la prueba como elemento fundamental en la creación de contenido matemático y en su sistematización, y ninguno de estos profesores la consideró como medio de explicar por qué un teorema determinado era cierto.

Dickerson (2006) analizó las concepciones sobre la prueba y el rigor matemático de profesores de matemáticas en prácticas. Los participantes se implicaron en diversas actividades encaminadas a poner de manifiesto sus percepciones sobre el significado del rigor matemático a la hora de explicar y comunicar de manera convincente los resultados derivados de un proceso de prueba. Posteriormente se les presentó una serie de procesos de prueba de diverso rigor, claridad y poder explicativo para que argumentaran sobre lo convincente de su carácter y validez como justificación matemática. Los resultados de esta investigación llevaron a su autor a la conclusión de que los estudiantes para profesor de matemáticas creían que es necesario tener presentes a los posibles receptores de los procesos de prueba, desarrollando demostraciones más comprensibles y convincentes, teniendo en cuenta la diferente preparación de los mismos. Del mismo modo consideraban que es preferible desarrollar pruebas que expliquen antes que pruebas que sólo verifiquen y aceptaron el desarrollo de pruebas por inducción como forma válida de argumentación, a pesar de que no encontraban este tipo de procesos como realmente convincentes.

En cuanto a la forma de proceder al realizar pruebas, en la investigación de Selden y Selden (2003), estudiantes universitarios de matemáticas y estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria analizaban diversos procesos desarrollados para probar. Los resultados pusieron de manifiesto que, a pesar de que los estudiantes participantes en la investigación consideraban que se debía proceder paso a paso, chequeando cada argumento en busca de su lógica, generando ejemplos y cerciorándose de que las ideas manifestadas tenían sentido, no es esa la forma de proceder que aplicaron, ya que su habilidad para distinguir entre argumentaciones erróneas y válidas fue escasa, sin profundizar en el sentido de los argumentos que admitían como válidos. Aunque parecían conocer la lógica y coherencia matemática que debe subyacer en los argumentos utilizados en un proceso de prueba, no fueron capaces de reconocerlos e identificarlos verdaderamente, lo cual pudo haber limitado notablemente su capacidad para construirlos.

En este mismo sentido se manifiesta Knuth (2002a). En su investigación llevada a cabo con profesores de matemáticas de secundaria que debían examinar diversos argumentos para identificar aquellos que eran pruebas y diferenciarlos de los que no lo eran, llegó a la conclusión de que la mayoría de ellos identificaron correctamente los argumentos que, realmente, constituían pruebas, pero también consideraron como válidos algunos que no lo eran, en un número sorprendentemente alto de casos. Al igual que en el estudio de Selden y Selden (2003), parece ser que los profesores de la investigación se centraron más en lo correcto de las manipulaciones lógicas que en la naturaleza e implicaciones de los argumentos en sí mismos, y se fijaron más en la forma de proceder para probar que en los razonamientos presentes en el proceso. Por otra parte, algunos profesores no parecían tener muy claras las implicaciones de la realización de pruebas, ya que consideraban que el argumento probado podía no ser válido en algunas situaciones, con lo cual no consideraban el carácter general del enunciado, e incluso pensaban que podrían existir contraejemplos.

Enfocando el estudio sobre la forma de realizar pruebas de los profesores de matemáticas desde otro punto de vista, en el que los participantes no analizan posibles procesos de prueba, sino que desarrollan sus propios procesos, Raman (2003) diferencia entre "argumento personal", como aquel que genera comprensión y entendimiento en un sujeto y "argumento público", como aquel que es lo suficientemente riguroso como para ser aceptado por una comunidad matemática concreta. En sus investigaciones con estudiantes universitarios y profesores que imparten sus clases en la universidad, a la hora de referirse a la forma de desarrollar procesos de prueba, establece tres puntos de vista:

- Heurístico: Proceder desde este punto de vista supone apoyarse en la adquisición de una comprensión informal, basada en datos empíricos o representada en un gráfico, que puede sugerir, pero no conducir directamente a la prueba formal. Este punto de vista sugiere que el argumento es cierto y ayuda a comprenderlo, pero no convence.
- Procedimental: El sujeto que demuestra se apoya en manipulaciones lógicas y formales que conducen a pruebas rigurosas sin conexión con razonamientos informales. Este punto de vista convence pero no pretende explicar las conclusiones que se obtienen ni por qué se obtienen.
- De Ideas clave: Esta forma de proceder se basa en el enfoque heurístico, pero con la pretensión de obtener ideas intuitivas de conceptos y propiedades (ideas clave), a partir de las cuales se organice la prueba formal y rigurosa, enlazando de esta forma las argumentaciones públicas y personales. Este tipo de actuación convence y a la vez permite comprender lo que se hace y las conclusiones a las que conduce.

Raman (2003) también obtiene resultados en lo referente a las diferentes formas de probar de profesores y de estudiantes. Los profesores enlazan los aspectos públicos y personales de la prueba a través de la búsqueda de argumentos comprensibles que convenzan de la verdad del argumento pero que puedan ser comunicados de manera rigurosa y formal, empleando el lenguaje matemático adecuado. En el estudio de Raman, los profesores no comienzan con ejemplos concretos, sino que recurren a representaciones mentales de los conceptos y relaciones presentes en los argumentos utilizados para probar, aunque no siempre aparezcan en el desarrollo del proceso. La actuación de dichos profesores, por lo tanto, está completamente relacionada con el desarrollo de ideas clave, desde las que se diseña el proceso de prueba que se representa posteriormente de manera lógico-deductiva. Los estudiantes participantes en el estudio de Raman, sin embargo, además de carecer del conocimiento y de la suficiente habilidad para generar ideas intuitivas y representaciones mentales apropiadas del contenido matemático presente en el proceso de prueba, no supieron posteriormente traducirlas a procesos lógicos válidos. Por otro lado, aunque los profesores utilizaron las ideas clave en su trabajo con pruebas en el aula, no les dieron la suficiente relevancia, con lo cual no ayudaron a los estudiantes a desarrollar la madurez necesaria para trabajar con ellas.

Weber y Alcock (2004) también han investigado sobre la forma de probar de profesores y estudiantes universitarios. Para llevar a cabo su estudio parten de dos nociones, las de pruebas semánticas y pruebas sintácticas. Cuando se prueba de manera **semántica** se utilizan "instantáneas" de los conceptos e ideas matemáticas con el fin de aclararlos y encontrar elementos que conduzcan a la demostración formal del argumento[1]. Al demostrar de manera **sintáctica** se utilizan conceptos matemáticos que se manipulan sólo de manera lógica para justificar las inferencias formales que se llevan a cabo.

Weber y Alcock analizaron la forma de probar de cuatro profesores de matemáticas y de cuatro estudiantes, pertenecientes todos a la misma universidad. Los resultados les llevaron a concluir que los estudiantes universitarios tuvieron dificultades a la hora de construir representaciones concretas de conceptos abstractos, manifestando su incapacidad para emplear la intuición con el fin de ayudarse a llegar al resultado pedido. Los profesores manifestaron haber usado la intuición y haber buscado propiedades y elementos que les permitieran hacerse una idea de cuál era la solución del problema, intentando después formalizar sus percepciones expresándolas con el lenguaje matemático apropiado.

Encontramos que el concepto de prueba semántica está relacionado con el punto de vista basado en ideas clave, y que el concepto de prueba sintáctica lo está con el punto de vista procedimental. En las investigaciones de Raman (2003) y Weber y Alcock (2004) se concluye de manera similar en lo que se refiere a que el conocimiento previo y las habilidades matemáticas desarrolladas por la persona que ha de realizar la prueba se muestran como elementos fundamentales en el desarrollo de su trabajo, lo que puede ser también pieza clave en el trabajo con pruebas en el aula y en la idea de prueba matemática que se transmita a los estudiantes.

[1] Por instantánea se entiende la forma sistemática y repetida que un individuo utiliza para pensar sobre un objeto matemático de modo que se convierte en algo significativo para él.

I.1.2 Las concepciones de los profesores sobre la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje y su relación con las concepciones de prueba en estudiantes.

En el contexto del aula se atribuye también a la demostración una gran importancia. Los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM (2000) recomiendan desarrollar procesos de prueba desde edades tempranas. Ball, Hoyles, Jahnke y Movshovitz-Hadar (2002) consideran que es preciso desarrollar una cultura donde la justificación en las clases de matemáticas sea práctica habitual durante toda la etapa educativa. Concretamente en el campo de la geometría, los profesores afirman que trabajar con pruebas ayuda a pensar de manera lógica y a desarrollar argumentos coherentes que expliquen por qué un resultado es cierto (Soucy y Martín, 2006). Sin embargo, Knuth (2002a y 2002b) indica que, a pesar de que la realización de pruebas es fundamental en la asignatura de matemáticas, el papel de la prueba en las aulas de secundaria de Estados Unidos se considera algo marginal y las demostraciones casi se limitan al dominio de la geometría euclídea.

La tendencia al retraso o al abandono de las demostraciones formales en los programas de matemáticas de los niveles de secundaria no debe implicar, en opinión de Socas (1997), el abandono del pensamiento lógico, es decir, el abandono del desarrollo de la capacidad para seguir un argumento lógico, puesto que la carencia de esta capacidad es una de las causas que genera dificultades para el aprendizaje. Por otro lado, el hecho de dilatar la exposición de demostraciones y esperar que los estudiantes puedan apreciar, en el momento en que se introduzcan, las justificaciones matemáticas llevadas a cabo, por sofisticadas que sean, es una expectativa poco razonable (Harel y Sowder, 1998).

Schoenfeld (1994), indica que las habilidades de los estudiantes para probar son escasas, igual que la importancia que éstos conceden a la prueba. Argumenta que si los estudiantes crecieran en una cultura donde el discurso, el pensar y el convencer fueran elementos importantes de las matemáticas, las pruebas serían consideradas como parte natural de las mismas. Los estudiantes, sin embargo, no ven la prueba como transmisora de verdad, ya que la perciben como algo formal, a menudo sin significado, como un ejercicio que realiza el profesor (Alibert, 1988 y Fischbein, 1982). Las investigaciones también han puesto de manifiesto la incapacidad de los estudiantes para identificar argumentos falsamente deductivos o para distinguir entre evidencia empírica y prueba (Chazan, 1993 y Weber, 2001). En recientes investigaciones con estudiantes de geometría, Soucy y Martin (2006) ponen de manifiesto que existe un conflicto entre las reglas lógicas de la prueba formal y las percepciones de los estudiantes sobre lo que constituye una prueba. Los estudiantes consideran que los argumentos empíricos son formas aceptables de justificar proposiciones geométricas, pero que es preciso desarrollar procesos deductivos porque es lo que han aprendido en clase y creen que es la forma en que se espera que actúen. Para ellos, las pruebas sólo convencen a profesores y a personas que dominan el significado de las reglas lógicas y de la forma de proceder deductiva, que consideran muy artificial, exigiendo unos razonamientos muy alejados de las reglas de la lógica cotidiana.

En España también se replantea el uso de demostraciones formales en las aulas debido a la dificultad que conlleva para los estudiantes. Los resultados obtenidos por Ibañes (2002) en sus investigaciones con estudiantes de secundaria, muestran que: no diferencian con claridad entre procesos con los que se demuestra y procesos con los que se comprueba; el valor explicativo de las pruebas influye en su capacidad de convencimiento y; no tienen claras las implicaciones de demostrar, entre las que se citan: la conveniencia de su aplicación, la no procedencia de realizar comprobaciones posteriores y la imposibilidad de encontrar contraejemplos. Concluye Ibañes indicando la importancia de la comprensión del lenguaje y de su correcta utilización que influye en que los estudiantes interpreten debidamente el significado de los términos que aparecen en los enunciados de teoremas y proposiciones.

Por otra parte, Martínez Recio y Godino (2001) estudiaron los esquemas de prueba matemática de alumnos que iniciaban sus estudios universitarios y relacionaron estos esquemas con el significado que para ellos tenía la prueba en diferentes contextos: la vida diaria, las ciencias experimentales, las matemáticas profesionales y la lógica y fundamentos de las matemáticas. En esta investigación se llegó a la conclusión de que los estudiantes carecen de la habilidad suficiente para desarrollar espontáneamente procesos deductivos de prueba, incluso al trabajar con proposiciones elementales.

Martínez Recio y Godino (2001) creen que es necesario enlazar los diferentes significados de la prueba con los diferentes niveles de enseñanza, de manera que se desarrollen progresivamente el conocimiento, la capacidad para discriminar y la racionalidad necesarias en cada caso. Desde este punto de vista, los esquemas de prueba informales no deberían ser considerados como incorrectos o deficientes, sino como aspectos del razonamiento matemático necesarios para alcanzar dominio en la argumentación matemática.

Intentando también salvar algunas de las dificultades que conlleva el trabajo con pruebas en el aula, algunos investigadores como Senk (1985) y Serra (1989), citados por Marrades y Gutiérrez (2000), consideran que los estudiantes de secundaria no deben empezar a trabajar directamente con demostraciones o pruebas a través de procesos formales, sino que ello debe ser el último paso de un largo camino. Martínez Recio (2002) manifiesta que las dificultades que los estudiantes tienen para entender, desarrollar y encontrar significado a los procedimientos formales se dan también en el ámbito universitario y también considera necesaria la introducción de métodos empírico-inductivos que a través de comprobaciones en casos particulares y de experimentaciones lleven al alumno a descubrir resultados y a formalizar como fase final del proceso. Arsac (1987) fundamenta esta forma de proceder desde la historia al afirmar que hubo comprobaciones antes que demostraciones y que por ello ha de considerarse razonable que el aprendizaje de la demostración esté precedido por la realización en el aula de particularizaciones, de manera que la necesidad de validar un resultado aparezca de manera natural, como una cuestión que surge entre los alumnos y no como una exigencia del profesor. También Tall (2002) hace referencia a la observación y a la experimentación como procedimientos previos a la realización de pruebas formales, lo que permite hablar, en palabras de Rodd (2000) de "garantía" de validez del resultado. Desde este punto de vista, los enfoques empíricos deberían ser utilizados como la base para crear situaciones didácticas en las que se requiera probar, y se recomienda a los profesores que escojan situaciones y construyan actividades que hagan que los estudiantes se sorprendan y sientan que hay algo que explicar o demostrar. Esta sugerencia se fundamenta en las dificultades cognitivas que tienen los estudiantes al no sentir la necesidad de probar y al no reconocer el papel explicativo y de convicción de la prueba (Dreyfus y Hadas, 1996; Hadas y Hershkowitz, 1998).

Las dificultades de los estudiantes para desarrollar procesos deductivos y para entender el sentido de la prueba nos llevan a trasladar la atención hacia el papel que debe desempeñar la actividad de probar en el aula y a la actuación del profesor para que la prueba sea un instrumento eficaz en el aprendizaje de contenido matemático y en la adquisición de habilidades y destrezas matemáticas. Hanna (2000) afirma que una de las principales tareas de los profesores de matemáticas es comprender el papel de la prueba en la enseñanza para obtener de ella el máximo provecho en el aula. En su opinión, el papel fundamental de la prueba es el de promover el razonamiento matemático y el objetivo principal es el de encontrar métodos eficaces de utilizar la prueba para conseguir ese fin. Añade que una prueba es más valiosa cuando lleva a la comprensión de un resultado y cuando ayuda a pensar más clara y eficazmente.

Peressini et al. (2004), se plantean la pregunta de si los profesores de matemáticas de secundaria están realmente preparados para introducir las pruebas en sus prácticas metodológicas y agregan que la prueba matemática es el principal mecanismo para el desarrollo del contenido matemático. Usiskin (1980) fue más rotundo al afirmar que, la mayoría de las veces, los profesores fracasan al trabajar con procesos de prueba en el aula porque ellos mismos desconocen cómo, cuándo y por qué hacer pruebas. Por consiguiente, ya que la demostración es actualmente uno de los objetivos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, los futuros profesores deberían adquirir una firme comprensión de este concepto para poder trabajarlo eficazmente en el aula (Stylianides, A.J., Stylianides, G.J. y Philippou, G, N., 2005).

En este contexto Tall (2002) indica que, generalmente, el colectivo de matemáticos parece tener muy claro qué es probar, pero cuando se les interroga sobre ello surgen matizaciones que pueden ser determinantes. Muchos profesores han interiorizado tanto los métodos que habitualmente son aceptados para demostrar que no se dan cuenta del grado de sofisticación de los mismos y por ello es misión de los matemáticos revisar el significado de la prueba para encontrar vías de animar a los estudiantes a interesarse por su naturaleza y a entender su significado. En este mismo sentido Freudenthal (1983) consideró que cuando se llega a dominar perfectamente una actividad, no se plantea la cuestión de cómo y por qué los estudiantes no entienden el proceso e incluso no se considera como una cuestión relevante y significativa.

A lo anterior hay que agregar la poca claridad con la que algunos profesores hacen referencia a las implicaciones de la prueba. En este sentido, Weber (2001) indica que los estudiantes reciben, algunas veces, mensajes confusos: explicaciones intuitivas, uso de ejemplos para justificar afirmaciones, y pruebas rigurosas desarrolladas en el aula sin explicar las características del proceso. Otras veces, no se establece la diferencia entre procedimiento intuitivo, empírico y riguroso y ello puede generar en los alumnos creencias erróneas sobre la noción de prueba. Así, las acciones llevadas a cabo por el profesor en el aula parece que son determinantes en el desarrollo de las habilidades para probar y razonar de los estudiantes (Martin y cols., 2005). Desde este punto de vista se han identificado algunas actividades en el aula que tienen una gran influencia en la comprensión del contenido y significado de la prueba. Algunas de estas acciones son el planteamiento de actividades abiertas (no limitadas a una solución específica o a un único desarrollo); el implicar a los estudiantes en diálogos que les exijan razonar; el análisis de los argumentos de los estudiantes; y el entrenamiento de los mismos en procesos de razonamiento. De manera similar, Knuth (2002a y 200b), considera que el profesor no se debe limitar a verificar la verdad de una afirmación que se sabe que ya ha sido establecida y que, en ocasiones, es evidente para los estudiantes. Si se procede de esta forma, se limitan las concepciones sobre la prueba de los alumnos y de los propios profesores.

Por todo ello son fundamentales los significados que el profesor atribuye a la prueba. Pero en ello, están implicadas sus creencias y conocimiento que, en muchas ocasiones, determinan la manera de enseñar y el qué y cómo se aprende (Ernest, 1998; Putnam y Borko, 1997). En este sentido, las creencias de los profesores son, a veces tan fuertes que los hacen impermeables a los cambios (Richardson, 1994). Peressini et al. (2004) afirman que las creencias y conocimiento de los profesores interactúan con cualquier tipo de contexto en el que se intenten crear situaciones para aprender a enseñar y determinan su actuación en el aula. Golafshani (2002) analiza la literatura referente a las creencias de los profesores y a su gran influencia sobre lo que acontece en el aula, e indica que tan importante como el conocimiento del profesor sobre la materia son las creencias, que determinan por completo su forma de trabajar. Araujo, Jiménez y Rosich (2006) afirman que las concepciones y actitud del docente también inciden en el metaafecto del estudiante y llegan a influir en sus procesos de demostración.

Estas reflexiones enfatizan el papel que pueden desempeñar las concepciones de los profesores sobre la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. Con relación a ello, los resultados obtenidos por Knuth (2002b) en sus investigaciones, ponen de manifiesto que, si bien los profesores asignan a la prueba diversas funciones, a la hora de trabajar con ella en las aulas de secundaria, creen que es sólo apropiado hacerlo con una minoría de estudiantes (los de más nivel) y la consideran más como un tópico a estudiar que como una herramienta para comunicar y aprender matemáticas. Para los profesores participantes en la investigación de Knuth la prueba es un medio para verificar una afirmación y para desarrollar el pensamiento lógico y las habilidades sobre razonamiento de los estudiantes, pero muy pocos de ellos asignan a la prueba el papel de explicar porqué un argumento es válido o de promover la construcción del propio conocimiento. Por ello, Knuth considera que el desafío educativo más importante es el de cambiar las creencias de los profesores sobre lo apropiado de trabajar la prueba matemática con todo tipo de estudiantes y de desarrollar para ello los métodos apropiados. Considera de especial relevancia la formación que los profesores reciban. Las actividades diseñadas para futuros profesores deberían intentar ayudarles en este sentido (Movshovitz-Hadar, 1993).

I.1.3. Pruebas y software de geometría dinámica.

¿Qué es probar en matemáticas? Desde el punto de vista tradicional, probar es desarrollar una cadena formal y lógica de razonamientos que parte de un conjunto de axiomas y evoluciona hacia la conclusión a través de pasos lógicos (Weber, 2001). En opinión de Balacheff (1988), en el seno de la comunidad matemática sólo pueden aceptarse como pruebas o demostraciones aquellas explicaciones que toman una forma particular como secuencias de enunciados organizados según reglas determinadas, que se deducen a partir de otros que les preceden.

A pesar de todo y tal y como dice Thurston (1994), hoy en día, la cantidad y complejidad de los cálculos que habría que realizar en determinados procesos de prueba hacen imposible desarrollarlos siguiendo procedimientos exclusivamente lógico-deductivos. Por otra parte, la gran dificultad y alta especialización del contenido matemático con el que se trabaja en determinados teoremas hace que no pueda afirmarse la infalibilidad de sus resultados (Martínez Recio y Godino, 2001).

En los últimos años han surgido nuevas formas de establecer la verdad de un hecho que, aunque consideradas como analíticas, no pueden realizarse sin un ordenador, como "the zero-knowledge method" (Hanna, 2000), las pruebas holográficas (Levin, 1999) o el método utilizado para demostrar el teorema de los 4 colores (Mireles, 2004). Se están desarrollando nuevas prácticas que se apoyan en la creación de gráficos por ordenador y en experimentos también realizados por ordenador, que quieren abrirse un sitio entre los métodos válidos de justificación de resultados matemáticos. Todo ello ha llevado a Borwein y Jörgenson (1997) a plantearse si los resultados derivados de una imagen pueden actuar como pruebas visuales y aportar algo al conocimiento matemático. Consideran que para que una representación gráfica o visual pueda ser considerada como prueba debe aparecer como una imagen estática y que aunque pueda contener la misma información que un argumento deductivo, esa información no se deriva de manera explícita de ella y es el sujeto que la observa el que la debe interpretar y considerar lo que es relevante y en qué orden lo ha de tomar. Por esta causa, creen que hay muy pocos procesos que se apoyen en visualizaciones que puedan ser consideradas como verdaderas pruebas al estar limitadas, sobretodo, a la hora de permitir la generalización. Sin embargo, las posibilidades gráficas y dinámicas de algunos paquetes de software permiten crear y manipular con facilidad visualizaciones de diverso contenido matemático, lo que ya no obliga a limitarse a las presentaciones estáticas. El debate y la diversidad de opiniones sobre si se deben admitir como válidas estas nuevas formas de establecer la verdad de un argumento matemático están sobre la mesa. Algunos matemáticos se muestran dispuestos a aceptarlas, otros como Hanna (2000) no ven en ellas mas que herramientas para experimentar antes de introducirse en un auténtico proceso de prueba, pero se pregunta de qué modo la tecnología puede ayudar a convertir la prueba en una parte más eficaz del currículo de matemáticas y agrega que disponer en el aula de software con características gráficas y dinámicas puede facilitar la experimentación y la comprobación de conjeturas. La exploración lleva al descubrimiento y la prueba a la confirmación.

Sin entrar en la polémica en torno a la validez o no como pruebas de los procesos dinámicos y visuales, consideramos que la tecnología puede ayudar a nuestros estudiantes a razonar y también a aprender a justificar, soslayando un poco las dificultades que ya hemos visto que ellos tienen a la hora de entender la importancia que la realización de pruebas tiene en el campo de las matemáticas y en cualquier otro campo. También ayudaría a los estudiantes a comprender el significado de conceptos abstractos y relaciones puramente lógicas y en general de propiedades y procedimientos matemáticos.

Sánchez y Sacristán (2003) han investigado el papel que la tecnología desempeña en la realización de pruebas en el aula a través del desarrollo de actividades de geometría usando el programa Cabri Géomètre. Los resultados obtenidos en su investigación les permiten afirmar que sus estudiantes de 15-16 años, han progresado en lo que se refiere a desarrollo de conocimiento y a encontrar significado al contenido de los teoremas con los que han trabajado. Sin embargo, todavía persisten algunos problemas a la hora de descontextualizar las actividades y en el desarrollo de un lenguaje descriptivo y funcional.

En su investigación, Dreyfus y Hadas (1996) utilizan también un enfoque basado en el uso de programas informáticos de geometría dinámica como medio de crear situaciones en las que los estudiantes han debido realizar pruebas para explicar fenómenos que no pueden ser explicados de otra forma y para convencerse a sí mismos de la certeza de sus propias conjeturas. Han investigado sobre el concepto, significado y funciones que para los estudiantes tiene la prueba matemática y han llegado a la conclusión, de que en buena parte dependen del currículo, de las actividades que se les presentan y del modo de resolverlas. Consideran que los programas de geometría dinámicos son una forma de incrementar la motivación y habilidad de los estudiantes para investigar, generalizar y conjeturar, y, ven conveniente desarrollar en el aula metodologías que se apoyen en la experimentación como forma de crear situaciones didácticas en las que sea preciso probar. Aconsejan implicar a los estudiantes en actividades que les hagan sentir la necesidad de explicar, convencer y probar.

Healy y Vaz (2003-06) realizaron experimentos con estudiantes de 12 a 14 años en los que diseñaron y analizaron situaciones de aprendizaje utilizando el software de geometría dinámica Cabri Géomètre. Con ello pretendieron implicar a los estudiantes en razonamientos inductivos y deductivos a través del análisis de las propiedades internas de figuras y de las relaciones entre ellas, con el fin de que los estudiantes vieran cómo desde una serie de propiedades dadas emergían otras y experimentaran cómo justificando las segundas, el conjunto de propiedades del sistema teórico se ampliaba. A través de las interacciones de los estudiantes con estas situaciones exploraron el papel de estas herramientas en diferentes aspectos del proceso de prueba, desde la apropiación de conceptos geométricos a la construcción de pruebas formales. La conclusión fue que las herramientas dinámicas permitieron a los estudiantes introducirse en los procesos de prueba a través de la experimentación gráfica y dinámica del comportamiento de objetos geométricos y de las relaciones existentes entre ellos.

Marrades y Gutiérrez (2000) investigaron sobre la forma en que puede utilizarse software dinámico para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes de la naturaleza de la prueba matemática, así como para mejorar sus habilidades a la hora de probar. Realizaron su estudio con estudiantes de secundaria pretendiendo analizar la variedad de formas de justificar que aparecen al realizar pruebas ayudándose del software Cabri Géomètre. Los resultados les llevaron a concluir que utilizar software dinámico en geometría proporciona un entorno en el que los estudiantes pueden experimentar libremente, pueden chequear sus intuiciones y conjeturas con facilidad a la hora de buscar propiedades y relaciones generales y pueden aprender y comprender conceptos y procedimientos matemáticos, a la vez que sienten la necesidad de realizar justificaciones abstractas y pruebas formales y comprueban que son capaces de realizarlas de manera más elaborada, siempre que su conocimiento previo sea adecuado. Para Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006) la posibilidad de representar gráficamente y manipular propiedades y objetos geométricos permite establecer un puente entre la experimentación y los conceptos teóricos, es decir, entre el proceso de conjeturar y de formalizar. Chazan y Yerushalmy (1998) también utilizan software dinámico de geometría para trabajar la prueba con alumnos de secundaria y llegan a la conclusión de que mediante la exploración que facilita el software dinámico los estudiantes pueden experimentar, generar conjeturas e intentar verificarlas produciendo pruebas deductivas con las que justificar sus resultados. Las investigaciones de Mariotti (2000, 2001 y 2003) amplían las posibilidades del uso de software dinámico en las aulas de secundaria. Considera que, en lo que se refiere a este tipo de estudiantes, la relación existente entre el conocimiento intuitivo y su sistematización teórica es delicada. Investiga con jóvenes de 15-16 años, sobre el papel de software dinámico de geometría, como Cabri Géomètre II plus y Geometer´s Sketchpad, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración. Los resultados obtenidos le permiten considerar este tipo de herramientas dinámicas como entornos que favorecen el desarrollo del sentido espacial y el razonamiento geométrico a través de la comprobación de propiedades geométricas y de la manipulación y construcción de objetos matemáticos que cumplen determinadas reglas matemáticas. Además, el software dinámico proporciona un contexto en el que los estudiantes desarrollan su habilidad para generalizar conjeturas y se produce una evolución del significado de la demostración, pasándose de la intuición geométrica al proceso deductivo. En la misma línea trabajan Sutherland, Olivero y Weeden (2004) analizando el impacto, de las herramientas dinámicas en la transición de la concepción empírica e intuitiva de lo que constituye prueba a la concepción formal, en estudiantes de 13 y 14 años. En su investigación los estudiantes han podido, con la ayuda de software dinámico, establecer la diferencia entre comprobación y prueba a través de la aplicación de propiedades matemáticas a la construcción de configuraciones geométricas. También otros investigadores como Bruckheimer y Arcavi (2001) estudian el potencial del software dinámico e interactivo como medio de establecer enlaces entre empirismo y razonamiento deductivo. En sus trabajos muestran cómo esta clase de software favorece el desarrollo de pruebas utilizando la evidencia empírica como fuente de conocimiento e inspiración para desarrollar argumentos deductivos. Consideran que es la única forma de introducir a una gran proporción de estudiantes en el desarrollo de procesos de prueba. Todos estos autores enfatizan el hecho de que las herramientas dinámicas favorecen la transición de los estudiantes desde la intuición a la formalización.

Alibert y Thomas (1991) investigan sobre situaciones en las que los estudiantes puedan percibir la importancia y valor de las pruebas. Para ellos, trabajar en entornos en los que se pueda experimentar y ver hace que la prueba adquiera mayor significado para los estudiantes. Palais (1999) considera que la visualización de objetos y situaciones matemáticas unida a la posibilidad de experimentar interactuando con la configuración matemática permite conjeturar y comprobar posibilitando, en ocasiones, el descubrimiento de características de objetos matemáticos imposibles de obtener de otra forma. Del mismo modo, Chazan y Yerushalmy (1998) consideran las pruebas realizadas con la ayuda de software dinámico un medio para que los estudiantes puedan obtener nuevas relaciones y propiedades.

Por otra parte, Arsac (1987) resalta el carácter social de las diferentes formas de desarrollar pruebas. Afirma que estas formas dependen del sujeto que las construye y de la situación particular de la persona o personas a las que van dirigidas. A la vez, asigna un gran papel a la visualización, que en ocasiones, hace evidente un resultado, y considera que la clave de realizar una demostración está en pasar de dicha evidencia a demostraciones donde el objeto en el que se visualiza el resultado es sólo un soporte. Para Figueiras y Deulofeu (2005), las demostraciones que introducen características visuales ofrecen un mayor convencimiento que las demostraciones sólo simbólicas, de manera que este conocimiento generado puede servir de ayuda para obtener una forma de llegar a la solución. Apoyando esta idea, Thurston (1994) afirma que no se puede entender ningún contenido matemático estudiando solamente definiciones y demostraciones rigurosas, se hace necesario construir modelos mentales que aunque no sean formales son útiles para el que aprende. En el mismo sentido, Fischbein (1982) afirmó que no se deben rechazar las representaciones intuitivas del pensamiento matemático formal por ser componentes imprescindibles del pensamiento matemático productivo.

También en la introducción de la tecnología en el desarrollo de procesos de prueba en el aula tienen mucho que ver las concepciones y creencias de los profesores. Laborde (2001) investigó sobre la integración de software dinámico de geometría (DGS) en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y en lo que concierne a su utilización para trabajar con pruebas. Los resultados le llevan a afirmar que los profesores inicialmente consideran que el software sólo es útil para comprobar conjeturas experimentalmente pero no en el proceso de probarlas. Pandiscio (2002) investigó sobre las percepciones de futuros profesores de matemáticas de secundaria con relación a los beneficios que puede proporcionar la realización de pruebas formales en geometría utilizando software dinámico. Los resultados ponen de manifiesto que los futuros profesores llegan a la conclusión de que los estudiantes de secundaria cuando utilizan software dinámico no ven las pruebas formales necesarias. Por otro lado, aunque reconocen que realizar múltiples ejemplos no equivale a la realización de una prueba, cuestionan el valor que las pruebas formales pueden tener para los estudiantes de secundaria. Estos profesores reconocen el gran valor que el software dinámico tiene para trabajar en geometría, puesto que ayuda a los estudiantes a comprender propiedades importantes dentro de un problema o teorema. Cuando ellos realizaron pruebas utilizando software dinámico, profundizaron más en los problemas de lo que lo hacían cuando trabajaban sin él. También Christou et al. (2004) investigaron sobre las consecuencias del uso de este tipo de software dinámico en la enseñanza de la prueba. Consideran que cuando los estudiantes trabajan con software dinámico, comprenden mejor los resultados que obtienen si han procedido verificando previamente sus conjeturas. Este hecho despierta, además su curiosidad para buscar una explicación del resultado obtenido. En su estudio describen el trabajo de profesores en prácticas utilizando software dinámico en la resolución de problemas de probar en geometría y estudian formas de utilizar con eficacia dicho software con el fin de introducir a los estudiantes en procesos de prueba, de manera que ésta tenga sentido para ellos. Los resultados referentes al trabajo de los futuros profesores con herramientas dinámicas ponen de manifiesto que pudieron conjeturar y comprobar sus conjeturas, establecieron la relación existente entre determinadas propiedades y encontraron una forma de pasar de la experimentación a la justificación formal. Posteriormente, intentaron explicar sus conjeturas y comprender por qué de las propiedades analizadas se llegaba a los resultados obtenidos. Para ellos la obtención de argumentos deductivos fue más un procedimiento desarrollado para explicar que para verificar.

A pesar de que los profesores de matemáticas se inician en el trabajo de la prueba con software dinámico y experimentan sus ventajas, parece ser que no tienen clara la conveniencia de unir estos dos elementos en el aula. En esta investigación presentamos a los profesores actividades de prueba en geometría que han de ser realizadas con software dinámico, con el fin de obtener información referente a sus consideraciones sobre los beneficios o desventajas de trabajar la prueba con herramientas gráficas y dinámicas en el aula.

I. 2. La noción de prueba.

En esta sección se describe el marco conceptual que hemos tomado como referencia para desarrollar esta investigación. En él se alude a las funciones que diversos investigadores asignan a la prueba matemática considerada como proceso matemático y como objeto de enseñaza-aprendizaje y a las diversas formas de probar. Usamos estas ideas teóricas porque recogen las posibilidades que ofrece la prueba en diferentes situaciones.

I.2.1. La prueba considerada como proceso matemático.

En contextos institucionales, se reconoce un significado común para la prueba, y es el de validar o justificar una afirmación aportando razones o argumentos (Godino y Martínez Recio, 1997). Selden y Selden (2003) consideran pruebas los textos que establecen la verdad de un teorema y hablan de ellos como elementos que han contribuido al rápido crecimiento de las matemáticas en el siglo XX, al proporcionar al matemático la seguridad y confianza suficientes en los resultados que se derivan de la realización de una prueba como para utilizarlos en trabajos posteriores, sin necesidad de chequear su corrección. El primer significado que la prueba va a tener en esta investigación es, por lo tanto, el de **verificar**, entendiendo con ello el hecho de poner de manifiesto la verdad y validez general de un enunciado desde las suposiciones que se imponen en el mismo.

El siguiente significado que asignamos a la prueba es el de **Explicar.** Se considera que una prueba explica cuando proporciona información sobre por qué el argumento que se intenta demostrar es cierto (Hanna y Jahnke, 1996). Hersh (1993) afirma que las matemáticas están interesadas en algo más que en el hecho de si una conjetura es correcta, las matemáticas quieren saber por qué es correcta. En este sentido Bell (1976) considera que una prueba es de más categoría si explica por qué la proposición considerada es verdadera. También Hanna (1996) afirma que las mejores pruebas son las que ayudan a los matemáticos a comprender el significado de un teorema, a ver no sólo que es verdad, sino por qué es verdad. Mariotti (2006) afirma que aunque es fundamental la dependencia lógica de un argumento con respecto a un conjunto de axiomas y teoremas es también muy importante comprender el significado de las relaciones existentes entre el argumento y las propiedades y conceptos de los que deriva. Realizar pruebas explicativas, implica partir de las hipótesis para llegar a la tesis aclarando su significado e implicaciones y poniendo de manifiesto la necesidad de dichas hipótesis; proceder desde las definiciones de los conceptos que aparecen en el contenido del proceso de prueba, de modo que aparezcan por escrito en el desarrollo del mismo y se explique el uso que se hace de ellas; y poner de manifiesto las relaciones que se dan entre dichos conceptos. Estas dos últimas características se fundamentan en las ideas dadas por Steiner (1978) y por Lamy (citado en Barbin, 1988). Lamy, geómetra del siglo XVII consideraba que las pruebas que explican proceden de las definiciones y a través de deducciones llegan a la conclusión de una forma más clara. Steiner considera que cualquier prueba que explique ha de hacer referencia a una propiedad de una entidad o estructura mencionada en el teorema, de manera que en la prueba se ponga de manifiesto de manera evidente que el resultado depende de la propiedad. El hecho de que sea importante que las definiciones aparezcan por escrito como parte integrante del texto producido en la prueba es que en matemáticas se trabaja con definiciones analíticas con las que se crean los conceptos.

Otra función de la prueba que se va a considerar en este estudio es la de **comunicar** o transmitir relaciones, propiedades y conceptos matemáticos. Thurston (1994) se refiere a la prueba como elemento que permite comunicar ideas y generar comprensión y Alibert y Thomas (1991) hablan de ella como un medio para comunicar conocimiento matemático. Comunicar implica: utilizar un lenguaje claro y sencillo; buscar formas de transmitir con eficacia; exponer las reflexiones que conducen a cada conclusión o resultado; tener en cuenta a los receptores de la prueba a la hora de escoger el tipo de proceso a desarrollar; e intentar presentar aplicaciones prácticas de los contenidos o métodos que aparecen en el proceso de demostración. A esta función se le asigna, además, un papel social al entenderla como forma de contacto entre matemáticos (Balacheff, 1991). Asimismo, Schoenfeld (1994), habla del aspecto social y transmisor de conocimiento matemático de la prueba, cuando la considera como elemento inseparable de las matemáticas y componente esencial del hacer, comunicar y dejar constancia de ellas. En el mismo sentido se manifiestan Hanna (1996) y Manin (1977) cuando hablan del proceso social requerido para la aceptación de una prueba por la comunidad de matemáticos.

Por **sistematizar** entendemos desarrollar un proceso que permita la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas (de Villiers, 1990) y es otro de los significados que en este estudio va a tener la prueba. Según Bell (1976), la sistematización es el papel más matemático de la prueba. También Hardy, en su apología de un matemático, hace referencia a este significado de la prueba al manifestar que "la seriedad de un teorema matemático... descansa en el significado matemático de las ideas que enlaza... Un teorema que relaciona ideas significativas es probable que conduzca a avances importantes tanto en matemáticas como en otras ciencias" (1999, pp. 89).

Por último, **descubrir y construir contenido matemático** es otra de las funciones de la prueba que se van a considerar en este estudio. Ello supone entender la prueba como proceso que ayuda a comprender mejor el contenido matemático con el que se trabaja, obliga a reflexionar y a usar el conocimiento previo, promueve el razonamiento matemático, hace sentir al que prueba que es capaz de razonar y obtener resultados por sí mismo (Hanna y Jahnke, 1996) y permite descubrir relaciones y resultados matemáticos. Como de Villiers (1999) hizo notar, hay muchos resultados matemáticos a los que se ha llegado a través de pruebas vinculadas al proceso de conjeturar.

En el siguiente cuadro se indican los principales investigadores que han servido de referencia, asociados con la función que asignan a la prueba:

Investigadores	***Función de la prueba***
Significado oficial en contextos institucionales.	Verificar/Justificar
Lamy, Bell (1976), Steiner (1978), Alibert (1988), de Villiers (1990), Hersh (1993), Schoenfeld (1994), Hanna (1996), Mariotti (2006).	Explicar
Manin (1977), Alibert y Thomas (1991), Balacheff (1991), Schoenfeld (1994), Thurston (1994), Hanna (1996).	Comunicar contenido matemático
Bell (1976), de Villiers (1990), Hardy (1999).	Sistematizar
Hanna y Jahnke (1996), De Villiers (1998), de Villiers (1999).	Descubrir o construir contenido matemático.

Cuadro I. 1. Funciones de la prueba en la investigación.

I.2.2. La prueba considerada como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Según Hanna y Jahnke (1996) los múltiples significados de la prueba deberían aparecer en el aula. Los investigadores a los que ya se ha hecho referencia otorgan el mismo significado a la prueba también en contextos de enseñanza-aprendizaje y del mismo modo se considera en esta investigación.

En opinión de Harel y Sowder (1998), se debe ayudar a los estudiantes a refinar la idea de lo que constituye **justificación** en matemáticas (**verificar**). Esta justificación conlleva la clara distinción entre comprobar que el argumento es cierto en unos cuantos casos particulares y lo que es establecer su validez en todos los casos posibles (Hanna y Jahnke, 1996). Por otro lado, el carácter **explicativo** de una prueba es lo que da sentido y relevancia a su contenido delante de los alumnos, haciéndole adquirir su verdadero significado (Alibert, 1988; Schoenfeld, 1994; Herbst y Chazan, 2003). La posibilidad de **comunicar** conocimiento matemático es para Hanna y Jahnke (1996) la contribución más importante de la demostración en la educación matemática. Su carácter social también se debe reflejar en la metodología utilizada. El papel de la prueba como elemento que ayuda a **descubrir y construir** contenido adquiere en el aula una especial relevancia. Uno de los aspectos que puede ayudar a los estudiantes a ser autónomos en matemáticas, en opinión de Hanna (1996), es el de poder crear su propio conocimiento, dando validez a sus propios argumentos y a los de sus compañeros. La prueba es un buen instrumento para ello que va a permitir producir conocimiento en vez de consumir el de otros y que va a darles la oportunidad de ser pensadores matemáticos independientes. Ello va a transmitir a los estudiantes el mensaje de que pueden razonar por ellos mismos y que no han de aceptar sin más la "autoridad" de otros. En opinión de Schuck (2003) hay que animar a los estudiantes a formar comunidades matemáticas y a usar la lógica y la evidencia matemática como verificación y a no aceptar al profesor como la única autoridad, cosa que no sucede a menudo en la práctica, ya que suelen ser los profesores y los libros de texto los únicos árbitros de la validez de un resultado matemático (Chazan, 1993).

Harel y Sowder (1998) consideran que se ha de pasar de un concepto de demostración basado en percepciones superficiales, manipulación simbólica y algoritmos rutinarios a un concepto basado en la intuición, la convicción y la necesidad. Para ello creen que en vez de demostrar directamente resultados que para los alumnos son obvios se les debe pedir que previamente investiguen y conjeturen. De esta forma percibirán la demostración como método fundamental de trabajo en matemáticas y como parte de la actividad humana en la que están participando. Tall (2002) indica que la prueba se debe apoyar en las representaciones que poseen los estudiantes empezando con predicciones y experimentos en el mundo real. Es muy poco creíble que sólo la percepción de un problema de prueba conduzca a su solución (Arsac, 1987). Por el contrario, la elaboración de la solución definitiva suele estar precedida de muchos tanteos y en la medida en que éstos representen etapas en el camino del rigor son interesantes. Hanna y Jahnke (1996) van más allá al situar los procesos de prueba como elementos relevantes dentro del campo de las ciencias empíricas y de la realidad y no sólo a la hora de validar resultados que se puedan aplicar posteriormente, sino como método de trabajo. A esta conexión entre matemáticas y realidad a través de la prueba le ven un importante papel como medio de construir conocimiento. Dicha conexión queda establecida simplemente si a la hora de probar hay una experimentación previa, un establecimiento de conjeturas y unas comprobaciones. Hanna y Jahnke (1996) afirman que "la prueba no puede ser enseñada o aprendida sin tener en consideración la relación de las matemáticas con la realidad. Los profesores deben ponderar la contribución que una prueba puede hacer a nuestra comprensión del mundo físico e intelectual que nos rodea" (p. 902). Por otro lado, el carácter **sistematizador** de la prueba puede servir a los estudiantes para ver las matemáticas como un cuerpo unido de resultados con una aplicación práctica, cosa que no va a ocurrir si se presentan a los alumnos los teoremas como resultados independientes, desligados de otros resultados anteriores (Knuth, 2002a y 2002b).

I.2.3. Formas de probar.

Weber y Alcock (2004) plantean la necesidad de un alto nivel de rigor cuando se razona sobre conceptos matemáticos pero también manifiestan la importancia del uso de representaciones intuitivas y no formales de los conceptos para razonar sobre ellos con eficacia. Como ya se ha mencionado, estos investigadores distinguen entre dos tipos de pruebas: las pruebas sintácticas y las pruebas semánticas y estos dos conceptos son los que utilizamos en este estudio, como base desde la que analizar las formas de probar de los profesores de matemáticas. Por *pruebas sintácticas* se hace referencia a aquellas en las que el sujeto que prueba obtiene conclusiones sólo a través del uso y la manipulación lógica de fórmulas simbólicas. Estas pruebas se realizan apoyándose en definiciones y propiedades ya establecidas. Cuando se realiza una demostración sintáctica no es necesario reflexionar sobre el significado de los términos, sólo se realizan transformaciones simbólicas de los mismos. Una prueba sintáctica puede convencer al que prueba en el sentido de que es lógicamente correcta aunque no explique por qué lo que se obtiene es cierto, es decir, que la persona que la realiza o la ve ya hecha puede no entender o captar el significado de lo producido pero sí puede ser capaz de enlazar correctamente la cadena de símbolos matemáticos o entender lo que se ha hecho.

En las *pruebas semánticas,* se usan "instantáneas" de los objetos matemáticos relacionados con el argumento que ha de ser probado para sugerir y ayudar en las conclusiones formales que se producen. Como ya se ha indicado anteriormente, por "instantánea" se entiende la forma sistemática y repetida que un individuo utiliza para pensar sobre un objeto matemático de modo que se convierta en algo significativo para él. La creación de una instantánea se puede concretar en la producción de gráficos, diagramas, etc., y sus manipulaciones y transformaciones, de modo que ayuden al que realiza la prueba a razonar y a entender el significado del argumento a probar, de los conceptos u objetos matemáticos implicados en el proceso y de las relaciones y propiedades que se derivan de su manipulación y, de esta manera, le sea más fácil encontrar una forma de llegar a conclusiones, expresando, finalmente, esos razonamientos e inferencias de manera lógica y formal. Otro aspecto importante para que la prueba sea considerada como semántica es que las representaciones y razonamientos intuitivos que se produzcan sean incorporados como parte integrante de la prueba y que aparezcan por escrito junto a los razonamientos formales. Cuando se realiza una demostración semántica se reflexiona sobre conceptos y objetos matemáticos y se crean instantáneas de los mismos completamente ligadas a ellos de modo que permitan que tanto la persona que desarrolla la demostración como la persona a la que se le transmite, la comprenda y asimile. Las pruebas de este tipo convencen y explican.

También Duval (1993) se refiere a la necesidad de crear imágenes mentales o representaciones internas de los conceptos matemáticos de manera que se facilite el trabajo con ellos, la interiorización y la asimilación de los mismos. Considera que para la formación de imágenes mentales se necesita el uso de representaciones externas. La variedad de representaciones externas de un mismo concepto matemático y su manipulación facilitan su comprensión y apropiación, y permiten descubrir propiedades y relaciones con otros conceptos y procedimientos.

En este contexto subjetivo, personal del sujeto que aprende Tall (2002) utiliza la expresión de "imagen del concepto", entendida como la estructura cognitiva completa asociada con el concepto y que incluye imágenes mentales, propiedades y procesos asociados. La imagen del concepto es utilizada por el sujeto para imaginar experiencias, para concebir definiciones y probar teoremas que puedan surgir de esas definiciones. Todo ello proporciona una forma de llegar desde la intuición a la formulación de teoremas que podrían ser probados formalmente.

En nuestra investigación, para el análisis de la forma de probar de los profesores de matemáticas, se han tenido en cuenta las ideas de Duval (1993) y Tall (2002). Consideramos que ambos investigadores refuerzan la importancia del desarrollo de ideas intuitivas del contenido con el que se ha de trabajar para una mejor comprensión y asimilación del mismo, con lo cual apoyan las pruebas semánticas como desarrollos que conducen a procesos más explicativos, significativos y convincentes, no sólo para los receptores de la prueba, sino también para el autor de la misma.

I. 3. Entornos virtuales e interacción en la formación de profesores.

En este apartado se destacan diferentes investigaciones que indagan sobre el papel que desempeñan en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas la argumentación y las interacciones en foros virtuales de debate. Igualmente, establecemos el sentido de los principales conceptos que se manejan.

Entornos virtuales, comunicación, interacción y construcción del conocimiento.

Hoy en día, las Tecnologías de la Información y Comunicación han llegado a todos los campos y ambientes sociales y en particular al de la Educación Matemática. Encontramos muchos intentos de utilizar Internet para establecer comunidades virtuales de discurso como una manera de promover el diálogo y compartir conocimiento y experiencias entre colegas, así como una forma de acceder a la opinión de expertos. No sólo están aumentando las investigaciones que aportan conocimiento sobre la forma de utilizar estas comunidades virtuales de discurso, sino también las que analizan el uso real que se hace de ellas e indican las ventajas e inconvenientes que conllevan.

Por ejemplo, Bairral (2003) considera que los profesores podrán beneficiarse de la interacción y argumentación que propicia el trabajo dentro de comunidades virtuales de discurso. En concreto, para Bairral y Giménez (2005), los foros de discusión constituyen un espacio de comunicación donde se desarrollan importantes propiedades discursivas. Consideran los foros como espacios para la socialización continua de las prácticas del profesor, así como para la inmersión colectiva en discusiones profesionales y concluyen que al participar en foros virtuales de debate, el profesor reflexiona críticamente sobre su práctica profesional a la vez que desarrolla habilidades de razonamiento metacognitivo. En investigaciones anteriores, nosotros también hemos constatado que la comunicación a través del correo electrónico y la participación en foros virtuales de debate permiten que los participantes al interactuar de manera asíncrona, puedan reflexionar y analizar lo escrito (Torregrosa, Haro y Llinares, 2003).

En la misma dirección, Jonassen y cols. (1995) indican que la tecnología puede ser utilizada para crear comunidades de discurso de estudiantes y profesores y puede facilitar las interacciones y actividades necesarias para resolver problemas reales, siempre que los entornos de aprendizaje proporcionen y permitan:

Un Contexto, en el que los participantes puedan desarrollar fácilmente la tarea y objetivos propuestos.

La Construcción del conocimiento, como resultado de un proceso activo de articulación y reflexión dentro de un contexto. El conocimiento que se crea debe proceder de las experiencias individuales junto con las interpretaciones llevadas a cabo dentro del entorno.

La Colaboración, entre los miembros de la comunidad se debe establecer una interacción que propicie el análisis de las diferentes creencias e hipótesis y que permita que los participantes puedan construir nuevo conocimiento y/o modificar el ya existente.

La Conversación, completamente vinculada a la colaboración. Los participantes deben negociar opciones para resolver los problemas, lo que implica reflexionar sobre lo que se sabe, lo que se necesita aprender, la viabilidad de las diversas opciones y su eficacia.

El carácter sociocultural y discursivo de la interacción adquiere un especial significado cuando ésta se produce dentro de entornos virtuales, considerados como espacios de comunicación y de intercambio de información que favorecen la creación de contextos de enseñanza-aprendizaje donde se facilita la cooperación en un marco dinámico en el que los contenidos se materializan y representan por medio de diversos lenguajes que el medio tecnológico es capaz de soportar (Sigalés, 2002).

Bairral (2003) analiza el desarrollo profesional docente en matemáticas a través de interacciones en un entorno virtual y concluye con que el conocimiento profesional del profesor se desarrolla con el uso del mismo en situaciones concretas de enseñanza, de manera que el conocimiento es gestionado personalmente por los profesores participantes y puede ser socializado continuamente en cada espacio comunicativo y a lo largo del proceso de desarrollo profesional. También Schuck (2003) considera que las discusiones electrónicas que se desarrollan en los foros virtuales de debate proporcionan un camino para apoyar el aprendizaje social, sobre todo con personas que se sienten cómodas trabajando en este tipo de entornos. Así, Rodríguez (2003) manifiesta que los participantes en un entorno virtual intervienen en un proceso socializador en el que se incorporan a una determinada cultura. El proceso de construcción del conocimiento se realiza a través de la interacción con los otros, sean iguales o más expertos, dando lugar a intercambios y contrastes que provocan conflictos sociocognitivos que llevan a negociar las diferentes propuestas que surgen para poder llegar a un consenso en la construcción del significado que dará lugar a la construcción y comprensión del conocimiento. Ante los conflictos que surgen, para que la negociación sea eficaz, es preciso que el individuo construya "enlaces explicativos" entre su conocimiento previo y las nuevas ideas permitiendo coexistir en equilibrio a ambos conjuntos (Derry, S., Glance, S., Glance, L. y Schlager, M., 2000).

Richardson y Placier (2001) afirman que cualquier cambio individual implica cambio en las creencias y conocimiento del profesor, por ello, para que se produzca construcción de conocimiento, el individuo ha de reorganizar su propio sistema de creencias, acomodándolo para recibir la nueva información. Después de estudiar la naturaleza de la interacción social en situaciones de aprendizaje, Kumpulainen y Mutanen (2000) afirman que el hecho de que el conocimiento previo de cada individuo tenga que ver con la construcción de nuevo conocimiento hace que el aprendizaje en contextos sociales se vea enriquecido por la gran variedad de concepciones de sus miembros, ya que éstas aparecerán durante la interacción, de manera que las contribuciones de todos los miembros de la comunidad constituirán una amplia base de recursos de la que el grupo podrá hacer uso. Por otro lado, Jermann y Dillenbourg

(2003) consideran que el hecho de tener que justificar una decisión o resultado en grupo produce argumentos más elaborados, como consecuencia de la necesidad de discutir hasta ponerse de acuerdo sobre la respuesta a dar. El papel relevante de las creencias y concepciones del profesor sobre procesos de enseñanza y aprendizaje en un contexto de diálogo se pone también de manifiesto en las investigaciones de Shinhkuan (2004) que investiga con futuros profesores que compartieron sus experiencias con compañeros y con profesores experimentados a través de un entorno virtual de debate. Los resultados indicaron que en la interacción, las creencias y concepciones de cada participante quedaron expuestas a la opinión de todos y ello supuso reflexión y cuestionamiento de las mismas, lo que llevó a sus autores a ser más cuidadosos con el trabajo que realizaban.

De esta forma, el medio tecnológico crea un contexto y una mediación donde se facilita el proceso comunicativo que, en opinión de Marc y Picard (1992) no debe constituir una transferencia de información sino elaboración y reparto de significados en un contexto portador de sentido. Las perspectivas teóricas que sustentan el aprendizaje en este tipo de entornos (Harasim, 1989; Jonassen y cols., 1995) ponen de manifiesto el alto nivel de aprendizaje generado, debido a la reestructuración cognitiva que realizan los participantes.

Strijbos, Martens y Jochems (2004) proponen un marco teórico que sirva como base para el diseño de entornos virtuales donde se promueva el aprendizaje en grupo. Dicho diseño está sujeto a muchas variables que afectan a la adquisición de habilidades individuales y a la interacción en el grupo. Las diferencias individuales, como capacidades intelectuales y habilidades sociales, afectan a la interacción y deben ser tenidas en cuenta a la hora de diseñar estos entornos, en los que se incluyen los foros virtuales de debate.

Ampliando el marco conceptual de referencia, uno de los propósitos de nuestra investigación es analizar el tipo de interacciones y de argumentaciones que se producen al intervenir los profesores en foros virtuales de debate, como una manera de identificar sus concepciones sobre la prueba, desde su consideración como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje. En este contexto y en relación a la prueba, Knuth (2002a) opina que un punto de partida para que los profesores cambien sus concepciones sobre lo apropiado de la realización de pruebas con todos los estudiantes y para que apliquen la metodología correspondiente, es el de animarlos a que se impliquen y participen en discusiones sobre la misma.

Nuestra investigación asume las ideas del constructivismo social según las cuales los entornos de aprendizaje que animan a la participación activa, a la interacción y al diálogo proporcionan oportunidades de implicarse en un proceso de construcción del conocimiento (Moll, 2001), lo que es una manera de construir significado a partir de nuevas experiencias (Hodson y Hodson, 1998). Este proceso puede llegar a ser incluso más potente cuando la comunicación entre compañeros se lleva a cabo de manera escrita, ya que escribir sin la inmediata respuesta de otra persona requiere reflexionar, explicar, clarificar, elaborar y defender las propias ideas, lo que supone una completa elaboración para llegar a un acuerdo (Pena- Shaff y Nicholls, 2003). En la misma línea se manifiesta Mitchell (2003) al considerar que escribir es una parte clave de la construcción del conocimiento sobre todo si se usa la escritura no para relatar algo que ya se sabe sino para llegar a conocerlo y comprenderlo mejor. El intercambio de ideas afecta no sólo a la cognición individual sino a la cognición distribuida del grupo, según los participantes transmiten, negocian y transforman sus ideas. Derry et al. (2000) consideran que a través de la interacción con un grupo de trabajo, que es diverso en términos de conocimiento previo de los miembros, los individuos encuentran desavenencias entre sus conceptos y los expresados por otros. El conflicto conceptual tiene como objetivo la armonización de la nueva experiencia con el conocimiento previo activo.

Para Morin (1990), interacción significa un conjunto de acciones y reacciones recíprocas que se enlazan en un sistema y modifican el comportamiento de los elementos que interaccionan. Kerbrat-Orecchioni (1990), citado en R. Rodríguez, (2003), define la interacción como el espacio en que se desarrolla la tarea colectiva de producir significado lo que lleva consigo la negociación. Vion (1992) asigna tres funciones a las interacciones:

1. La construcción del significado,
2. La construcción de la relación social y
3. La construcción de imágenes identificativas a través del lenguaje, que se utiliza como medio de convertir el pensamiento individual en pensamientos y acciones colectivas.

Considerando las ideas anteriores, en esta investigación, se entiende por interacción la intervención que se produce como respuesta o reacción a una propuesta/acción/provocación previa de algún otro participante en el proceso comunicativo. Esta serie de intervenciones y respuestas pueden llevar a la negociación de significados y concluir o no con acuerdos. Como Koschmann (2003), se considera que uno de los objetivos de la interacción es hacer patente el desacuerdo, ya que la interacción constructiva es diálogo que promueve el conflicto. Veerman (2003) considera que el aprendizaje colaborativo se logra cuando los aprendices conjuntamente se enfrentan a conflictos, pueden discutir críticamente la información recibida de los propios compañeros o de expertos y exploran diferentes perspectivas llegando a lo que en esta investigación se entiende como negociación de significados y que implica la interpretación compartida de dicha información, la comprensión de conceptos específicos, la elaboración de conclusiones y la reconstrucción y construcción conjunta del conocimiento.

Para que de las interacciones se derive diálogo capaz de crear conflictos que conduzcan a una posible negociación de significados y a un aprendizaje colaborativo es pieza fundamental la argumentación. Se entiende por argumentación cualquier forma de actividad individual colaborativa, basada esencialmente en el lenguaje, que implique confrontar cogniciones y sus fundamentos (Andriessen, Baker y Suthers, 2003). Ello supone una forma de negociación de significados, de resolver problemas, de justificación y explicación de las respuestas individuales a una pregunta, de convencer, de expresar y discutir relaciones entre datos e hipótesis y de intercambio constructivo. Para Veerman (2003) implicarse en procesos argumentativos supone dar relevancia al conflicto, a los procesos de negociación, a la información críticamente discutida y a la exploración de múltiples perspectivas.

La argumentación (Andriessen, J., Erkens, G., van de Laak, C., Peters, N. y Coirier, N., 2003) debe pretender alcanzar uno o más de los tres objetivos conceptuales siguientes:

- Compartir conocimiento: La argumentación lleva a los participantes a comprenderse mejor el uno al otro.
- Constitución del conocimiento: La argumentación conduce a una comprensión más profunda de un concepto.

- Transformación del conocimiento: La argumentación conduce a una creencia o idea diferente.

Para estos autores comunicar argumentando requiere, además, reflexionar y reestructurar el conocimiento y la crítica puede conducir al que habla a elaborar un discurso más coherente. La construcción conjunta del conocimiento que se da mediante la argumentación que se produce al interactuar es un medio de alcanzar un compromiso entre puntos de vista divergentes.

I.4. Preguntas de la investigación.

Vista la importancia que tiene el desarrollo de procesos de prueba en el aula y la trascendencia que tienen las concepciones, y la práctica del profesor sobre el mismo, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

A) ¿Qué concepciones sobre la prueba tienen los profesores?

Objetivos:

1. Identificar las concepciones del profesor de matemáticas sobre el papel de la prueba, en un doble sentido:
    - Como proceso matemático.
    - Como objeto de enseñanza-aprendizaje.
2. Identificar diferentes formas de probar del profesor de matemáticas.

Puesto que, además, se asigna un importante papel a herramientas y a software dinámico que permiten visualizar y recrear situaciones matemáticas, particularmente en geometría, al hacer posible la construcción de configuraciones que el estudiante puede manipular y con las que puede investigar, nos interesa saber:

B) ¿Qué influencia tiene el uso de software dinámico en las concepciones de los profesores sobre la prueba?

Objetivo: Analizar la influencia del uso de software dinámico en los procesos de prueba sobre las concepciones del profesor sobre la misma.

Por otra parte y debido a que el contexto usado para obtener los datos ha sido virtual y que se apoya en las características de entornos de aprendizaje que integran la

Volver al índice/Tornar a l´índex

realización de tareas, la participación en foros y la posibilidad de interactuar con otros, con el fin de obtener mayor información nos preguntamos:

C) ¿Cómo participan los profesores en los foros virtuales de debate?

D) ¿Cuáles son las características de la interacción generada, relacionadas con las concepciones de los profesores sobre los procesos de prueba?

Objetivo: Analizar la forma de participar los profesores en los foros virtuales de debate y la influencia de dicha participación en sus concepciones sobre la prueba.

CAPÍTULO II. Diseño de la investigación.

II. Diseño de la investigación.

En este capítulo se hace referencia a: los participantes en la investigación, las características del entorno de aprendizaje virtual utilizado, los datos de la investigación, los procedimientos de análisis de los datos y la organización de los resultados.

En el primer apartado "Participantes" se hace una presentación de los profesores que han participado en esta investigación. En "Características del entorno de aprendizaje virtual" se hace una descripción del entorno virtual en el que han desarrollado los profesores su trabajo, deteniéndonos especialmente en la estructura, características y contenido del módulo "Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas" y de uno de sus tópicos "Software dinámico. Procesos de prueba" en el que se ha centrado la investigación. En el apartado "Los datos de la investigación" se indica la información que constituye los datos en esta investigación.

En los tres últimos apartados, "Procedimientos de análisis de los datos", "Organización de los resultados" y "Análisis de la forma de participar en foros virtuales de debate", se describen los instrumentos de análisis utilizados, cómo se ha desarrollado el análisis de los datos y cómo se han organizado los resultados, centrándonos en dos aspectos distintos. Por una parte se describe cómo se ha analizado el contenido del texto escrito producido por los profesores cuando realizan las actividades de probar, responden a preguntas relacionadas con las actividades realizadas e intervienen en foros virtuales donde se discute sobre el contenido de dichas actividades y sobre cuestiones referentes al desarrollo de procesos de probar. El objetivo de estos análisis es identificar las concepciones de los profesores sobre la prueba, sus formas de realizar pruebas y la posible influencia de la introducción de software dinámico en todo ello. Para obtener información adicional se analizan también las respuestas de los profesores a las preguntas de un cuestionario. Y, por otra parte, se describe cómo se ha realizado el análisis de la forma de participar de los profesores en los foros virtuales de debate. Con este segundo análisis se pretende dar cuenta de las características de las intervenciones que se producen y la clase de interacciones que se desencadenan, con el fin de apoyar las inferencias realizadas en el análisis de contenido.

II.1. Participantes.

Participaron en esta investigación 20 profesores de matemáticas y 1 ingeniero informático que desarrolla software didáctico de matemáticas (21 participantes en total). Todos ellos eran alumnos de dos ediciones (2ª y 4ª[2]) del módulo optativo "Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas" (Torregrosa, Llinares y Penalva, 2004ª y 2004b) del Master "Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación" del Instituto Universitario de Postgrado (IUP) http://www.iup.es. En cada edición, los participantes han sido repartidos en dos grupos, A y B.

La primera de las ediciones del Master sirvió como toma de contacto y estudio piloto de la investigación y en ella se vio la respuesta de los profesores participantes ante la estructura, organización y contenidos del módulo. También sirvió para que los moderadores adquirieran práctica a la hora de trabajar con este tipo de entornos. De la tercera edición no se analizaron los datos debido a que una parte importante de los profesores inscritos no eran profesores de matemáticas. El módulo tuvo una duración de 40 días en la segunda edición y de 42 días en la cuarta.

El análisis de contenido se ha realizado de las producciones de 12 participantes (6 profesores de matemáticas de la 2ª edición y 5 profesores de matemáticas y el ingeniero informático de la 4ª edición), debido a la pertinencia de sus respuestas a todas las cuestiones y actividades propuestas. Sin embargo, el estudio de la forma de participar en los foros virtuales se centró en 19 de los participantes (18 profesores de matemáticas y el ingeniero informático), ya que dos de los participantes no intervinieron en los foros y sólo entregaron las respuestas a las tareas propuestas.

Los participantes procedían de diversos países y tenían una experiencia profesional muy diversa. Desarrollaban su docencia en diferentes niveles de primaria, secundaria o universidad. Alguno de ellos ha impartido docencia en empresas, formando al personal de las mismas en diversos contenidos de la disciplina de matemáticas. Se muestran a continuación las características de los participantes y el tipo de producción analizada.

[2] La segunda (20-09-2003/01-11-2003) y la cuarta (25-09-2004/07-11-2004),

Edición	Grupo y número de miembros del grupo	Siglas	Características	Participa en los foros	Se analiza el contenido
Segunda	Grupo A: 5 profesores	IJe	Nacionalidad: Ecuatoriana. Ha impartido docencia durante muy pocos años, no especifica cuántos, y lo ha hecho en empresas de su país.	Sí	Sí
		JaSa	Nacionalidad: Ecuatoriana. Imparte docencia desde hace tres años en la Universidad en su país a estudiantes de carreras de ciencias.	Sí	No
		RaMe	Nacionalidad: Ecuatoriana. Imparte docencia desde hace siete años en la Universidad en su país a estudiantes de carreras de ciencias.	Sí	No
		Flo	No ha facilitado datos ni personales ni profesionales.	Sí	No
		MiJi	No ha facilitado datos ni personales ni profesionales.	Sí	Sí
	Grupo B: 6 profesores.	Manulo	Nacionalidad: Española Imparte docencia desde hace 20 años en centros de secundaria de la zona industrial y obrera de la ciudad de Barcelona.	Sí	Sí
		Meñaca	Nacionalidad: Española Imparte docencia desde hace 10 años en centros de secundaria de la zona sur de Madrid.	Sí	No
		Heladio	No ha facilitado datos ni personales ni profesionales.	Sí	No
		Xavi	Nacionalidad: Española Imparte docencia desde hace 6 años en un centro concertado de secundaria de la ciudad de Barcelona.	Sí	Sí
		VV	Nacionalidad: Española Imparte docencia desde hace 27 años en centros de secundaria de Madrid. Ha trabajado en centros públicos, en entornos socio-culturales de todo tipo, desde clase media baja hasta clase media acomodada.	Sí	Sí
		Eva	No ha facilitado datos ni personales ni profesionales.	No	Sí
Cuarta	Grupo A: 6 profesores.	AnDi	Nacionalidad: Ecuatoriana Imparte docencia desde hace 5 años en centros de primaria. El entorno socio-cultural de sus alumnos es alto y son calificados por AnDi como jóvenes muy educados, con gran interés y muy entusiastas, la mayoría con un nivel de desarrollo intelectual muy alto.	Sí	Sí
		FeAn	Nacionalidad: Ecuatoriana. Dedicado a la docencia desde hace muchos años. No especifica cuántos años ni el nivel en el que desarrolla su actividad profesional.	Sí	No
		ReHe	Nacionalidad: Chilena. No ha facilitado más datos.	Sí	No
		Cribor	Nacionalidad: Argentina. Imparte docencia desde hace 27 años en la Universidad. Sus alumnos tienen un nivel cultural aceptable. Durante un tiempo impartió clase a alumnos trabajadores. Esta situación alargaba la duración de las carreras.	Sí	Sí
		TeLo	Nacionalidad: Argentina. Imparte docencia desde hace 28 años. Sus alumnos son estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería.	Sí	Sí
		ViMo	No ha facilitado datos ni personales ni profesionales.	No	Sí
	Grupo B: 3 profesores y un ingeniero informático. Total 4 participantes	OB	Nacionalidad: Ecuatoriana. Imparte docencia desde hace 8 años a alumnos de nivel de bachillerato. Su trabajo se desarrolla en un centro privado católico que acoge a alumnos de nivel alto, que posteriormente continúan sus estudios en la universidad.	Sí	Sí
		AT	Nacionalidad: Ecuatoriana. Imparte docencia desde hace 9 años en universidades de su país. El entorno socio-cultural de sus alumnos es medio y medio-alto. En la actualidad trabaja en una universidad católica con alumnos de carreras de ciencias.	Sí	No
		RR	Nacionalidad: Salvadoreña. No ha facilitado más datos.	Sí	No
		JC	Nacionalidad: Ecuatoriana. Nunca se ha dedicado a la docencia. Es ingeniero informático y trabaja en una empresa que se dedica a desarrollar software educativo de matemáticas. Debido a su trabajo, está interesado en conocer las necesidades e inquietudes de los profesores de matemáticas. Por ello, ha decidido cursar este módulo.	Sí	Sí

II.2. Características del entorno virtual de aprendizaje.

II.2.1. Características generales de la plataforma IUP y del Master "Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación".

En este apartado se presenta información sobre el Instituto Universitario de Postgrado y sobre las características del master "Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación" del que forma parte el módulo "Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas", con el fin de facilitar información que ayude a obtener una aproximación adecuada del contexto del que proceden los datos de esta investigación. El acceso a la plataforma se realiza a través de la URL http://www.iup.es.

El Instituto Universitario de Postgrado (IUP)

El Instituto Universitario de Postgrado es una empresa dedicada a la formación superior. Está constituida por tres universidades públicas (Carlos III de Madrid, Autónoma de Barcelona y Alicante) y la empresa Santillana Formación, perteneciente al grupo Santillana, que está especializada en la formación de adultos a través de Internet. El IUP se ha constituido para dar una respuesta eficaz y ágil a las transformaciones que las nuevas tecnologías están introduciendo en la sociedad y, muy especialmente, en el mundo de la empresa y de la formación. Se da prioridad a la exigencia académica, al rigor científico de los contenidos y a su aplicación práctica.

En la actualidad, el IUP ofrece nueve másteres, siendo éste uno de los más demandados.

Todo ello a través de:

- La metodología adecuada que une la formación teórica con la resolución de situaciones profesionales, lo que facilita la transformación de los conocimientos teóricos en aptitudes y actitudes muy valoradas en el entorno laboral.
- La actualización de los contenidos, añadiendo a los contenidos de texto tradicionales un entorno autodidáctico formado por herramientas de aprendizaje, de seguimiento y de comunicación.
- La formación en innovación e investigación del profesorado.
- La participación de profesionales de empresas y organizaciones del sector correspondiente.

http://www.iup.es/index.php?option=com_content&task=view&id=128&Itemid=300.

Fecha de captura Noviembre de 2005.

Master "Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación"

El master "Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación" es un programa para actualizar los conocimientos de profesores y gestores académicos sobre la introducción de las nuevas tecnologías de la información y comunicación (TIC) en la educación mediante el uso e integración de las mismas en el proceso educativo.

Objetivos:

- Analizar las posibilidades de las tecnologías en el ámbito educativo y curricular.
- Planificar el uso de recursos tecnológicos en la formación.
- Integrar recursos tecnológicos en la enseñanza y en la gestión escolar.
- Posibilitar el conocimiento de experiencias significativas en el uso de las TIC.
- Favorecer el intercambio de experiencias entre profesionales de la educación.

Metodología:

La metodología es la propia de formación on-line del IUP y se basa en un modelo activo y colaborativo. Los contenidos se articulan en escenarios, basados en situaciones con problemas reales ante los que el alumno debe tomar decisiones. El programa se desarrolla en un entorno virtual donde el alumno resuelve los casos prácticos que se le plantean, interactuando con sus compañeros y el profesor-tutor, a través de los foros y del correo electrónico. A través de los mismos medios y en cualquier momento los alumnos pueden consultar sus dudas a los profesores.

En el entorno virtual del master se integran, gradualmente, los documentos y herramientas necesarias para realizar cada tarea, con el fin de facilitar al alumno la resolución de los casos que se le plantean.

La evaluación es continua y se realiza al final de cada ciclo de trabajo por el profesor de cada módulo, teniendo en cuenta no sólo el trabajo individual, sino también su participación en las actividades de grupo y la elaboración de un proyecto final de master.

Programa:

Los contenidos que desarrolla el master se organizan en módulos obligatorios, optativos y en la realización de un proyecto final de innovación educativa o de investigación. A través de ellos se abordan procesos de fundamentación, producción y aplicación.

Estructura del entorno virtual en el que se desarrolla el master:

Mediante un nombre de usuario y una contraseña, cada alumno puede acceder al entorno y al módulo en el que quiere trabajar en ese momento (http://www.iup.es). El acceso es posible desde cualquier ordenador personal con conexión a Internet, a cualquier hora del día y en cualquier día de la semana. La disponibilidad de los profesores-tutores es muy alta y la comunicación se lleva a cabo, también, en días festivos y en vacaciones. Los problemas técnicos son resueltos por los administradores del entorno virtual. Los alumnos se pueden poner en contacto con ellos vía correo electrónico o telefónico si tienen algún problema con el acceso al master o a alguna de las opciones del mismo. El entorno ha sido diseñado por Santillana Formación y la estructura y el contenido de cada módulo por los profesores–autores encargados de cada uno de ellos.

En la página inicial del master, en la parte superior de la imagen, se pueden ver una serie de botones rectangulares, con diferentes nombres, que indican las diferentes opciones del entorno (Figura II.2.1.-1). Estos iconos aparecen en todas las pantallas que constituyen la plataforma virtual, y, por lo tanto, se tiene acceso a ellos en todo momento. Se describen en la Fig. II. 2.1.-2.

Figura II.2.1.-1 Página inicial del Master.

Normativa	Guía del master	En ella se recogen orientaciones para cursar el master.
	Normas del IUP	Se recogen las normas del campus virtual.
	Calendario del master	En él se recoge el periodo de duración del master así como los periodos de vacaciones.
Comunicación	Correo	A través de este espacio se lleva a cabo la comunicación vía correo electrónico con cualquier miembro del campus virtual. Cuando el profesor-tutor o el alumno acceden al mismo, un icono parpadeante les avisa si tienen correo electrónico pendiente de lectura.
	Foros	En estos espacios, se lleva a cabo la apertura de los foros y también se puede acceder a ellos para depositar las intervenciones. Estos foros pueden versar sobre aspectos generales del master o pueden prepararse para trabajar contenidos de cada módulo. Cuando se ingresa en este espacio, se obtiene información sobre los diferentes foros abiertos, ya sea correspondientes a un módulo en concreto o generales del master, y con un simple clic sobre el enlace correspondiente se puede acceder a ellos.
	Tablón del master	Sirve para colocar mensajes de carácter general referentes a diversos aspectos del master.
	Tablón del alumno	Sirve para que el profesor-tutor o los alumnos de un módulo concreto sitúen mensajes accesibles a los restantes miembros de esa comunidad.
Conversación	Chat	E s un espacio reservado para la comunicación síncrona entre varias personas. Contiene varias salas. Una de esas salas está dedicada a la conversación entre alumnos y las restantes están dedicadas a tutorías.
	Videoconferencia	Estas salas sirven para la comunicación por videoconferencia entre dos personas nada más.
	Sala de conferencias	Su finalidad es la misma que la de las salas de videoconferencia pero permite la comunicación entre un máximo de 60 personas.
	Sala de reuniones	Igual que las anteriores pero admitiendo un máximo de 6 personas.
	Salón de actos	Igual que las anteriores pero admitiendo un máximo de 400 personas. En todas las salas relativas a la comunicación se permite el uso de transparencias o diapositivas.
Comunidad	Profesores	Se muestra la relación de profesores-tutores del master, incluyendo un breve currículo de cada uno de ellos.
	Alumnos	Se muestra la relación de alumnos, en la que se incluye nombre y apellidos y dirección de correo electrónico de cada uno de ellos.
	Personal de apoyo	Se muestra la relación de personal de apoyo, entre los que están los coordinadores y los administradores del entorno.
	Usuarios conectados	Se muestran los usuarios que en ese momento están conectados y se ofrece la posibilidad de contactar con ellos en tiempo real.
Documentación	Enlaces	Aparecen enlaces de carácter general para todos los alumnos del master, o de carácter particular, para los alumnos de un determinado módulo.
	Bibliografía	Se muestra una relación bibliográfica general, para todos los alumnos del master o particular, para los alumnos de un determinado módulo.
	Biblioteca	Aparece un listado de libros de carácter general que se pueden descargar.
Herramientas	Agenda del master	En este espacio se coloca el plan de trabajo del master y el calendario académico.
	Software	Los alumnos encuentran en este espacio las herramientas necesarias para obtener el mejor rendimiento de las características y posibilidades que ofrece el entorno virtual.
	Glosario	Se permite acceder a términos específicos del entorno, organizados alfabéticamente.
Progreso personal	Calificaciones	El profesor-tutor de cada módulo sitúa en este espacio las calificaciones de sus alumnos, pudiendo agregar comentarios aclaratorios de las mismas. Cuando el alumno accede a este espacio encuentra las calificaciones de todos los módulos en los que se ha matriculado. Si no está de acuerdo, puede, a través del correo electrónico, contactar con el profesor del módulo correspondiente y plantear sus consideraciones.
	Carpetas de entrega	Aquí es donde el profesor-tutor de cada módulo crea un espacio en el que los alumnos pueden colocar las actividades requeridas. El profesor-tutor, posteriormente accede a dicho espacio para recoger, corregir y calificar lo presentado por los alumnos. Cuando el profesor-tutor accede al lugar correspondiente al módulo que imparte, dentro del campus virtual, un icono le avisa, parpadeando de si tiene trabajos de los alumnos pendientes de corrección. Igualmente otros iconos avisan al alumno de si hay nuevas carpetas o trabajos que le faltan por entregar.
	Estadísticas	Se recoge en este espacio el número de accesos al campus virtual de cada uno de los miembros de la comunidad virtual, así como la fecha y hora de su última conexión y el lugar al que han accedido.
Ayuda	Manual de uso	Aparece un espacio desde el que es posible acceder a una descripción de las funcionalidades de la plataforma y de los iconos del campus.
	Preguntas más frecuentes	En este espacio se muestran las FAQs, clasificadas en tres categorías: Preguntas académicas, preguntas técnicas y preguntas administrativas.
	Asistencia técnica	Aparece en este acceso un formulario y datos de contacto para resolver incidencias técnicas.

Figura II.2.1.-2 Opciones del entorno virtual.

II.2.2. Características del módulo “Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas”.

El módulo “Tecnologías en la Enseñanza de las matemáticas” (Torregrosa, Llinares y Penalva, 2004a y 2004b) es uno de los módulo optativos del master. Tiene como objetivo presentar a los profesores herramientas dinámicas e interactivas con el fin de que las analicen y reflexionen sobre sus posibilidades didácticas y de integración en el aula y utilizar los foros virtuales de debate como espacio de intercambio de experiencias profesionales y reflexiones que propicien el diálogo y la negociación de significados.

- ***Contenidos del módulo***

En la pantalla del master, Figura II.2.1.-1, aparece un enlace que lleva directamente a los contenidos del módulo. Cuando “clicamos” sobre él aparece el índice de los contenidos del módulo:

- Tópico I: Software dinámico. Procesos de prueba.
- Tópico II: Los foros virtuales como espacio de aprendizaje y el proceso de definir.
- Tópico III: Internet, recursos para la enseñanza de las matemáticas y procesos de representación.

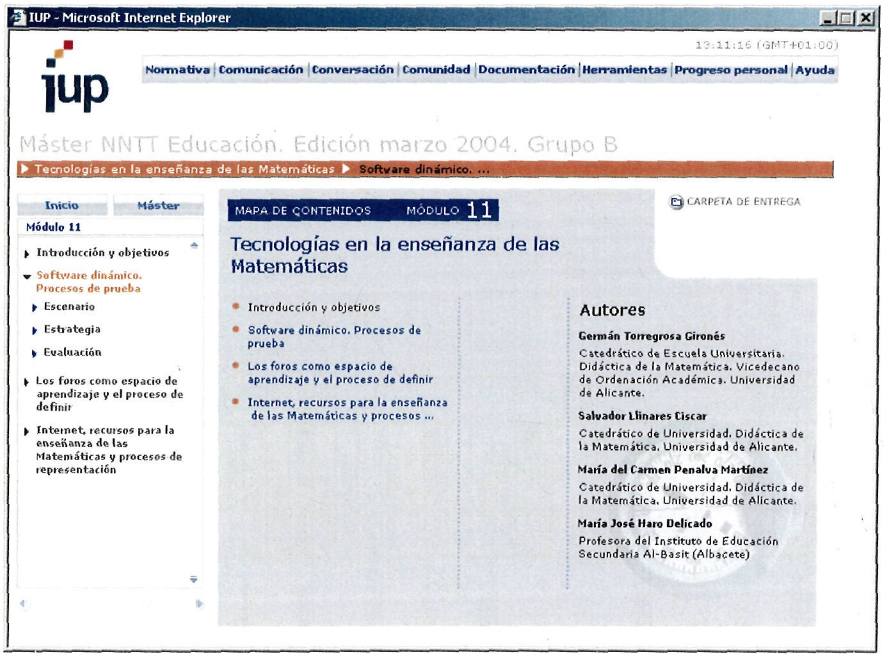


Figura II.2.2.-1 Pantalla de entrada a los contenidos del módulo.

Cada tópico está organizado en 3 partes:

- Escenario: En él se realiza la introducción al tópico.
- Estrategia: En ella se desarrollan los contenidos del tópico.
- Evaluación: En este espacio se presentan las actividades finales a desarrollar como resumen de los contenidos trabajados en el tópico.

Cada tópico se ha diseñado considerando dos dimensiones:

1. Un aspecto característico de las nuevas tecnologías:
   - Software dinámico.
   - Espacio de aprendizaje.
   - Recursos.
2. Un contexto desde la educación matemática:
   - Procesos de probar.
   - Procesos de definir.
   - Modos de representación.

El tópico I: "Software dinámico. Procesos de prueba" está organizado en dos apartados:

1.- Diferentes facetas de la noción de prueba.

2.- Software dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje.

En este tópico se introduce como herramienta dinámica e interactiva para trabajar geometría el software Cabri Géomètre II, con el fin de plantear situaciones de probar relaciones geométricas utilizando procedimientos dinámicos junto a los tradicionales procedimientos estáticos.

En el tópico II: "Foros virtuales como espacio de aprendizaje y el proceso de definir" se presentan situaciones que permiten a los profesores reflexionar sobre la utilización de los foros virtuales para el desarrollo de espacios de aprendizaje profesional para el profesor y espacios de aprendizaje matemático para el alumno. Esta doble finalidad se desarrolla en el contexto de desarrollar procesos de definir en los alumnos (Torregrosa, Llinares y Penalva, 2004a y 2004b)

El tópico III: "Internet, recursos para la enseñanza de las matemáticas y procesos de representación" tiene dos objetivos fundamentales. El primero de ellos es proporcionar información y acceso a los profesores a páginas de recursos educativos y a herramientas de análisis y evaluación de dichos recursos. El segundo de los objetivos se centra en las "reflexiones de cómo la simbolización y los procesos de representar las ideas matemáticas pueden adoptar una nueva perspectiva desde el momento en el que se introducen las TIC en la interacción entre los alumnos, el profesor y el contenido matemático" (Torregrosa, Llinares y Penalva, 2004a, pp. 33).

A continuación, se describe con detalle, el tópico I "Software dinámico. Procesos de prueba", ya que de él proceden los datos analizados en esta investigación. También se indican los cambios introducidos por los administradores de la plataforma entre la segunda edición y la cuarta.

Tópico I: "Software dinámico. Procesos de prueba"

Este tópico consta de tres unidades didácticas:

U.D. 1: El nuevo software y la enseñanza de las matemáticas.

U.D.2: Diferentes facetas de la noción de prueba.

- Resolución de problemas de probar.
- Procesos de construcción y resolución de problemas de probar.
- Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas.

U.D.3: Software dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Los profesores iniciaban su trabajo en cada tópico a través del **Escenario**, espacio en el que se presentaba un contexto en el que había una situación problemática a resolver.

> *"Laura acaba de incorporarse al Instituto Lope de Vega como profesora de Matemáticas y el panorama que encuentra es un poco desalentador. Tratándose de un centro en el que se han implantado muchas de las innovaciones que ofrecen las TIC en el terreno educativo, los medios de que dispone para las clases de Matemáticas son en general muy anticuados. Tras la impresión inicial, Laura decide aprovechar el curso sobre software dinámico y su aplicación a la enseñanza de las Matemáticas al que asistió en sus últimas vacaciones. Quiere llevar al terreno práctico sus recién adquiridos conocimientos, pues piensa que un enfoque más dinámico aportaría mucho a sus clases".*

En el último espacio, llamado **Evaluación** (Figura II.2.2.-2), se propone al profesor-alumno del módulo que diseñe una actividad para sus alumnos. Esta tarea desempeña el papel de síntesis de lo aprendido. La actividad que debe diseñar con algún tipo de software dinámico debe proponer el desarrollo de procesos de prueba. Como ayuda a la realización de la actividad se presentan a los profesores tres enlaces de acceso a información sobre el tema, bajo el nombre de Sugerencias:

El primero de ellos contiene un enlace a la página de Mow's Cabri II (http://www.mowmowmow.com/math/cabri/index_e.htm), donde hay una gran cantidad de relaciones y propiedades geométricas preparadas para ser trabajadas con el software dinámico Cabri. La finalidad de este enlace es la de mostrar las posibilidades que en el campo de la geometría proporciona este software, ofreciendo el tratamiento de varios problemas de geometría. A la vez, presenta ideas para preparar y trabajar actividades sobre procesos de demostración. El segundo enlace lleva a otra ventana, en la que se sugiere la incorporación de foros y correo electrónico a la actividad que se ha de diseñar, con el fin de aprovechar las posibilidades de estas herramientas en el desarrollo de la tarea presentada. La tercera sugerencia indica los puntos que deben incorporarse en la elaboración del informe:

- Los enunciados de las actividades.
- El nivel y características del alumnado al que van dirigidas.
- Los objetivos específicos de cada actividad.
- Las direcciones visitadas en busca de soluciones de experto y el comentario de lo utilizado en el desarrollo de las actividades.
- La metodología, que debe incluir cómo se integran las TIC en el desarrollo de la actividad en el aula y cómo dicha integración permite considerar las diferencias entre los alumnos, los diferentes niveles de desarrollo y aplicación, si el trabajo sería individual o grupal...
- La evaluación: ¿Qué se pretende evaluar?, ¿Cómo se va a evaluar? Debe contener también el diseño de un instrumento de evaluación de la actividad en el aula y del desarrollo de los objetivos y contenidos propuestos.

Actividad de síntesis. Diseño de la enseñanza de procesos de probar usando software dinámico (Cabri-Geometre II)

1. Diseñar actividades para desarrollar los procesos de conjeturar, probar y comunicar utilizando las TIC.
2. Diseñar una estructura metodológica para el desarrollo de la actividad utilizando las TIC para crear entornos de aprendizaje virtuales.

Como apoyo para realizar estas actividades te proponemos las siguientes sugerencias:

Sugerencia 1. El uso de las TIC para obtener información.

Sugerencia 2. El uso de las TIC para el diseño de la arquitectura de la unidad didáctica.

Sugerencia 3. La elaboración del informe.

Figura II.2.2.-2 Actividad de evaluación del tópico I.

Estrategia. En este espacio se integran las tres unidades didácticas que constituyen el contenido del tópico:

U. D. I. El nuevo software y la enseñanza de las matemáticas.

U. D. II. Diferentes facetas de la noción de prueba.

U. D. III. Software dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje.

La estructura de cada una de las unidades didácticas es la siguiente (Torregrosa, Llinares y Penalva, 2004a y 2004b):

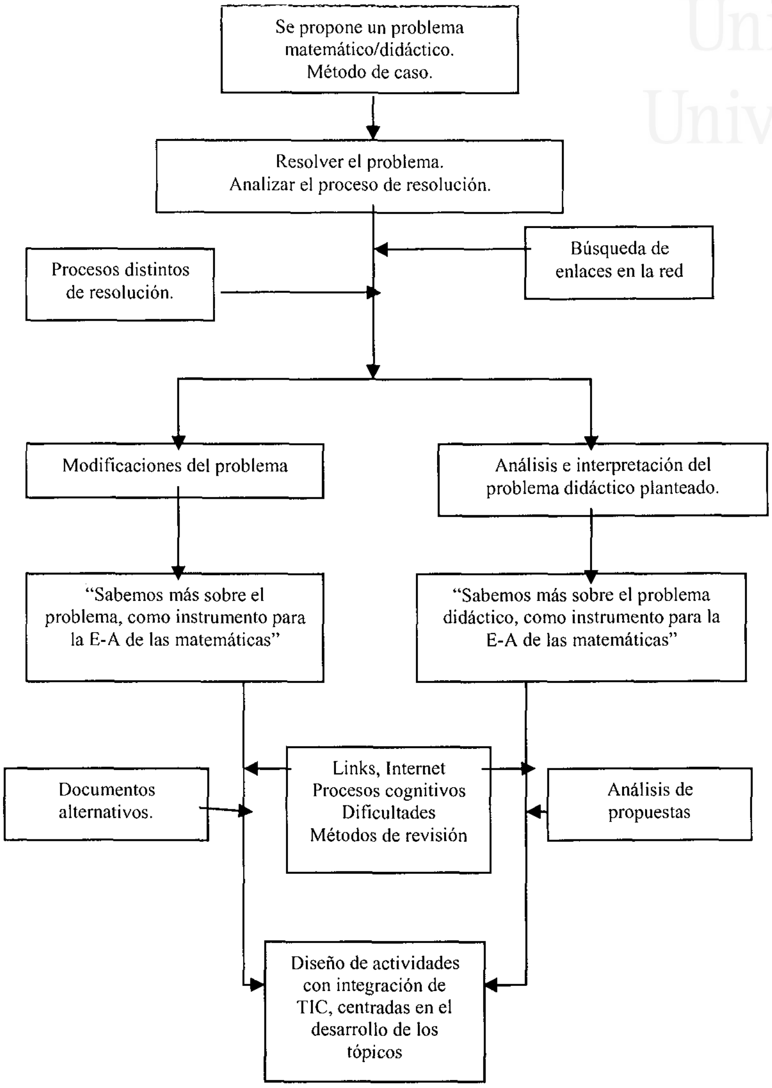


Figura II.2.2.-3 Estructura de las unidades didácticas del módulo.

Esta estructura pretende que los profesores se enfrenten a la resolución de problemas de prueba, no conformándose con realizar una prueba correctamente sino reflexionando en profundidad sobre el proceso que han desarrollado y las diferentes alternativas al mismo, analizando las diferencias, ventajas e inconvenientes de cada una de ellas. Para que puedan realizar toda esta cadena de tareas de manera adecuada, se considera que además del conocimiento matemático necesario, han de tener una amplia y reciente información y para ello, se les presentan enlaces a documentos[3] presentes en la Red de los que se puede obtener la información necesaria que les va a permitir ampliar su conocimiento y puntos de vista.

El conocimiento de diferentes formas de resolver el problema lo pueden lograr, también, a través del intercambio con los compañeros en los foros virtuales y de sus propias maneras de actuar para obtener la solución. Allí presentan sus logros y ven y reflexionan sobre los de los demás, promoviéndose el intercambio de opiniones y la discusión sobre las diferentes formas de proceder, sobre el contenido matemático que se moviliza con cada una de ellas, y sobre las ventajas e inconvenientes de las mismas, siendo posible, a la vez, la corrección de errores.

Finalmente se propone una actividad de evaluación donde el profesor participante debe preparar una tarea de prueba para sus alumnos, introduciendo herramientas interactivas de la manera que considere más apropiada, de modo que potencie el desarrollo de capacidades acordes con sus concepciones sobre las funciones de la prueba.

Unidad didáctica 1: *"El nuevo software y la enseñanza de las matemáticas"*

El objetivo de esta unidad es que los profesores se familiaricen con las diferentes opciones que brinda la herramienta de geometría dinámica Cabri Géomètre II, que aprendan a realizar con ella construcciones geométricas y que adquieran la suficiente habilidad para sacar el mejor rendimiento de las posibilidades gráficas e interactivas de esta aplicación.

Para que los profesores pudieran bajarse una "demo" con la que poder trabajar con todas las opciones de las que dispone la aplicación, se incluyó, dentro del entorno, un

[3] García M. y Llinares, S. (2001). "Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática", en E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*, pp.105-112. Madrid: Síntesis.
Giménez, J. (2001). "Probando a razonar y razonando sobre pruebas". *Didáctica de las Matemáticas*, vol. 28, pp. 5-7.
Ibáñez, M. y Ortega, T. (2001). "Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato". *Didáctica de las Matemáticas*, vol. 28, pp. 39-59.
Gutiérrez, A. y cols. (2001). "Reflexiones en torno a la demostración". En www.uv.es/~didmat/angel/Index.html [Disponible el 4 de junio de 2006]
Recio, T. (2001). "La mecánica de la demostración y la demostración mecánica". En www.uv.es/~didmat/angel/Index.html [Disponible el 4 de junio de 2006]
Actividades del tipo i–matemáticas diseñadas por el profesor J. Murillo. En http://blues.uab.es/~ipdmc/Murillo/Indice.html [Disponible el 4 de junio de 2006]
Seminario de investigación 1: *Prueba y demostración: razonamiento matemático* (Actas del V Simposio SEIEM- Almería 2001). En www.ugr.es/~seiem [Disponible el 4 de junio de 2006].

enlace a la página de descarga del programa (www.cabri.com), un enlace al manual del mismo (centros5.pntic.mec/ies.marques.de.santillana/tallerma/cabri.htm) y a páginas de información y sugerencias. En esta unidad didáctica se resalta en particular la opción "arrastrar" que ha permitido a los profesores resolver, en el campo de la geometría, problemas de prueba planteados en un contexto estático a través de manipulaciones dinámicas, interactuando con las configuraciones geométricas construidas. En el manual se proporcionaba información a los profesores sobre dichas opciones y sobre las posibilidades de uso.

Los profesores participantes tenían la posibilidad de acceder a la profesora-tutora para plantearle sus dudas sobre el funcionamiento del programa o sobre cualquier otra cuestión relacionada con los contenidos del módulo, y a los técnicos para resolver problemas relacionados con las dificultades para bajarse la "demo" o para ejecutar la aplicación en su ordenador personal. La elección de esta aplicación se debe a que ha sido diseñada para trabajar con geometría plana y posee opciones que permiten construir y manipular configuraciones geométricas, arrastrando diversas partes de la misma sin alterar las condiciones y relaciones geométricas de partida, de manera que se puede ver el mismo problema desde diversos puntos de vista y plantear, de este modo, la posibilidad de conjeturar propiedades y resultados que se pueden comprobar con la misma aplicación. Este tipo de software permite plantearse la práctica en el aula de diferente forma, buscando actividades que propicien la reflexión en el alumno y la construcción del propio conocimiento. Por ello se presenta a los profesores como ejemplo de software dinámico, para que piensen en la posibilidad de incorporar a su práctica docente alguna de las herramientas de geometría dinámica a las que es posible acceder en estos momentos.

Unidad didáctica 2: *"Diferentes facetas de la noción de prueba"*

Esta unidad engloba actividades que han de realizar los profesores e interacciones propuestas en los foros. A continuación, se muestra un esquema de los contenidos.

La finalidad de esta unidad es la de introducir a los profesores en la resolución de problemas de probar con la ayuda de software dinámico, proporcionando elementos necesarios para que reflexionen sobre diferentes formas de proceder y sobre las posibles ventajas e inconvenientes de las diversas actuaciones. Se han de analizar conceptos y propiedades geométricas que entran en juego cuando se trabaja de manera estática o bien de forma dinámica, para estudiar si son los mismos o aparecen otros diferentes. Para realizar las actividades propuestas en esta unidad necesitan la "demo" de Cabri Géomètre II para poder experimentar con las diferentes características y posibilidades del software y para poder realizar las actividades que se presentan en la unidad. Se incluyen enlaces a diferentes documentos (Figura II.2.2.-4), para ampliar la información, de manera que sirvan de apoyo en sus reflexiones.

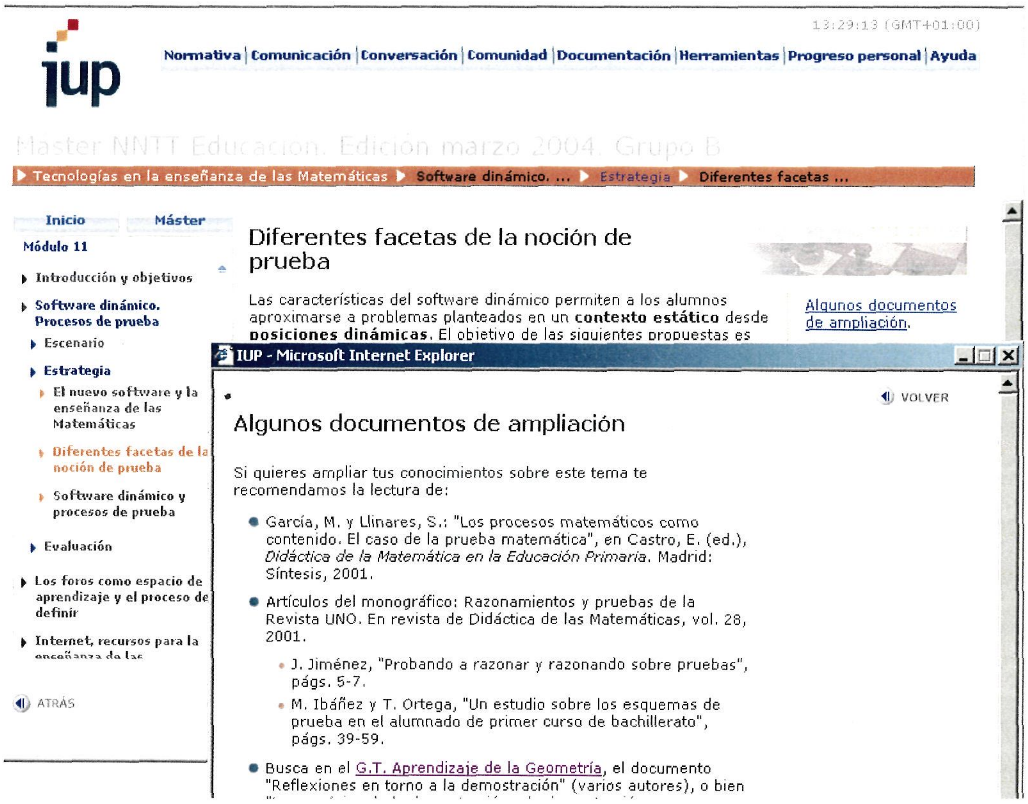


Figura II.2.2.-4 Documentos de ampliación.

En el contenido y la estructura de esta unidad 2 "Diferentes facetas de la noción de prueba" hay que distinguir tres partes:

1. Resolución de problemas de probar.
2. Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos.
3. Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas.

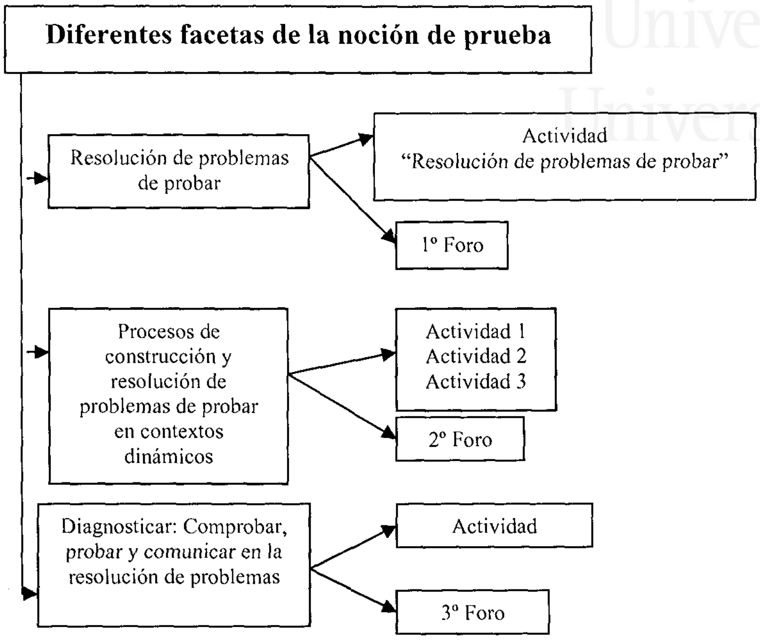


Figura II.2.2.-5 Esquema de la unidad didáctica 2, "Diferentes facetas de la noción de prueba" del tópico I

<u>"Resolución de problemas de probar"</u>

En esta parte, se pide a los profesores:

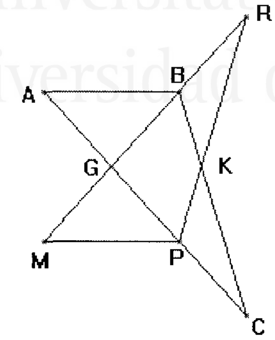
- Resolver un problema de probar estático (Figura II.2.2.-6).
- Comunicar la forma en que lo han resuelto.
- Identificar diferentes formas de resolver ese mismo problema.
- Analizar los diferentes elementos geométricos utilizados cuando resuelven de una forma o de otra y,
- Analizar la manera en que comunicarían los diferentes procesos de resolución.

<table>
<tr><td>

Actividad "Resolución de problemas de probar"
En la figura, los puntos G y B dividen a MR en tres partes congruentes, y los puntos G y P también dividen al segmento AC en tres partes congruentes. Sabemos que AG ≡ BG. Demuestra que los ángulos R y C son iguales.

- Resuelve el problema. Indica el camino que sigues para resolverlo.
- ¿Qué contenidos matemáticos usas en algún momento del proceso de resolución?.
- ¿Existe alguna diferencia entre el proceso real de resolución del problema seguido y la forma en la que has comunicado a tus compañeros la resolución seguida?
- Identifica diferentes maneras de resolver el problema
  - ¿En qué medida los elementos geométricos utilizados en el proceso de probar son diferentes en cada uno de los procedimientos empleados?
  - ¿En qué medida los procesos de comunicar el proceso de resolución (la prueba) han sido diferentes?

</td><td>



</td></tr>
</table>

Figura II.2.2.-6 Actividad "Resolución de problemas de probar".

Debido a la variedad y riqueza de resoluciones distintas que se pueden realizar, el objetivo es hacer que el profesor sea consciente de lo que puede conseguir con sus alumnos, del contenido matemático que se desarrolla y de lo que se puede obtener al trabajar de otra manera. Además, se crea el contexto para que el profesor se enfrente y sea consciente de su propio conocimiento y creencias sobre el tema, de modo que se pueda plantear nuevas formas de proceder. Para ayudar al profesor en esta tarea de toma de conciencia y de descubrimiento se le pide que comunique el proceso desarrollado a través de su participación en el 1° foro.

1° Foro: Resolución de problemas de probar. Actividad.

- Comentad la forma en que habéis resuelto la actividad.
- ¿Qué contenidos matemáticos habéis utilizado en el proceso de resolución?
- ¿Hay diferencias entre vuestra manera de resolver la actividad y la forma en que la habéis comunicado en este foro?

De entre las respuestas de los demás compañeros, comenta los elementos geométricos utilizados por ellos que consideres diferentes a los tuyos, así como las formas distintas de contarlo que hayan utilizado. Participad todos y replicaos los unos a los otros.

Figura II.2.2.-7 Primer Foro.

Esta petición tiene una triple finalidad, en primer lugar constituye un nuevo elemento de reflexión sobre lo hecho, en segundo lugar el profesor se enfrenta a la introducción de nuevos elementos que pueden llegar a explicar mejor los conceptos y procedimientos implícitos y finalmente, los profesores pueden intercambiar información sobre su forma de demostrar y sobre sus concepciones sobre la prueba como proceso matemático. De esta forma, han de cuestionarse una vez más su forma de proceder cuando demuestran y lo que quieren obtener con ello, de modo que al comunicarlo se hallen convencidos de lo que han hecho e intenten convencer a los demás. A la vez, se enriquecen al observar los procedimientos del resto de profesores y pueden hacer comparaciones, descubriendo nuevas posibilidades en la realización de pruebas. Cuando se pide una comparación entre su forma de resolver y comunicar y la de sus compañeros se intenta que presten atención y reflexionen sobre la forma de actuar de los demás, que se establezca un debate entre ellos y que se llegue a alcanzar la negociación de significados.

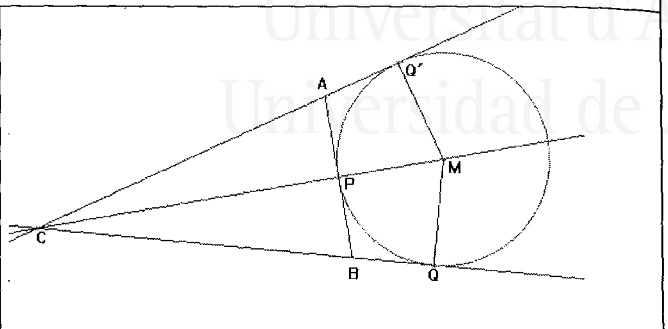
"Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos"

La segunda parte "Procesos de construcción y resolución de problemas en contextos dinámicos" consiste en la resolución de tres actividades (Figuras II.2.2.-8, II.2.2.-9 y II.2.2.-10) y en la participación en un nuevo foro (segundo foro) (Figura II.2.2.-11). Las tres actividades presentan situaciones de procesos de prueba en entornos dinámicos, para que el profesor reflexione sobre las características y posibilidades que ofrecen estas herramientas en el terreno de la demostración y a la hora de diseñar actividades para trabajar con este tipo de procesos en el aula.

La Actividad 1 (Figura II.2.2.-8) es del tipo i-matemáticas. Es decir, una actividad que requiere investigar bajo qué condiciones se verifica una determinada relación o propiedad (conjetura) y después demostrar que se cumple. Se puede manipular y modificar la configuración permitiéndose la experimentación y la elaboración de conjeturas comprobables dentro de la propia configuración. Se pide a los profesores que reflexionen sobre las posibilidades que se derivan de utilizar las características dinámicas de este software para ayudarse a descubrir relaciones matemáticas, realizar pruebas y comunicarlas.

Actividad 1

Una de las características de la geometría dinámica es la posibilidad de utilizar la modalidad de "arrastrar" para desarrollar las capacidades de conjeturar. Las actividades tipo son "investigar bajo qué condiciones se da algún tipo de relación".
Investigad cuando ABC es un triángulo equilátero:



La actividad está pensada para alumnos de 14 años (2º y 3º de la ESO).
La configuración geométrica está construida por:

- Intersección de dos rectas.
- Bisectriz del ángulo (lugar que equidista de los dos lados); por tanto en la bisectriz se encuentra el centro de la circunferencia que es tangente a los dos lados del ángulo.
- Perpendicular a uno de los lados del ángulo (por Q).
- El punto de intersección entre la perpendicular y la bisectriz (M) es el centro de la circunferencia que es tangente al lado del ángulo en Q.
- Punto de intersección de la bisectriz y la circunferencia (P).
- Perpendicular a la bisectriz por P.

Según se ha realizado la construcción podemos usar el modo "arrastrar" de Cabri para dinamizar la construcción en los siguientes casos:

- Se pueden arrastrar las rectas iniciales.
- Se puede arrastrar el punto Q sobre el que se ha construido la perpendicular al lado del ángulo que nos ha permitido determinar el centro de la circunferencia (este centro está determinado por el punto Q y por tanto no se puede mover directamente).

¿Cómo la dinamización de la configuración geométrica puede ayudar a:

- Probar la igualdad pedida
- Comunicar una prueba realizada
- Ayudar a convencer con mayor facilidad al compañero de lo que se ha realizado
- Conjeturar nuevas relaciones (generar nuevos problemas)?

Figura II.2.2.-8 Actividad 1 del apartado "Procesos de construcción y resolución de procesos de probar en contextos dinámicos (U.D. 2 del tópico I)

La Actividad 2 (Figura II.2.2.-9) pide resolver de nuevo la actividad de la primera parte "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-6) utilizando la herramienta Cabri Géomètre II con la finalidad de que usen la herramienta, analicen sus posibilidades y comparen la forma de resolver un problema de manera estática y de manera dinámica, reflexionando sobre sus ventajas e inconvenientes. El hecho de que se utilice la misma actividad pero exigiendo una forma de resolver distinta pretende exponer las diferencias entre una forma de proceder y otra, y las posibilidades de determinadas características de las herramientas dinámicas, como son la interactividad, el dinamismo y la visualización. Se pretende, a la vez, que los profesores reflexionen sobre los elementos que hacen que un proceso de prueba pueda ser válido y admitido como tal en el campo de las matemáticas.

Actividad 2.
▪ Dibuja la configuración geométrica de la actividad "Resolución de los problemas de probar" utilizando Cabri-Géomètre. Usa los datos del problema. ▪ Construye una macro para generar la configuración geométrica del problema. ▪ ¿Te sugiere esta construcción algún método de resolución distinto al anterior? ▪ ¿Ha cambiado algo en tu forma de ver y resolver el problema? ▪ Utiliza las herramientas de Cabri para dinamizar la configuración geométrica construida. ▪ ¿En qué medida la igualdad del problema se mantiene? ▪ ¿Cómo la dinamización de la configuración geométrica puede ayudar a : o Probar la igualdad pedida o Comunicar una prueba realizada o Ayudar a convencer con mayor facilidad a un compañero de lo que se ha realizado o Conjeturar nuevas relaciones (generar nuevos problemas)?

Figura II.2.2.-9 Actividad 2 del apartado "Procesos de construcción y resolución de procesos de probar en contextos dinámicos (U.D. 2 del tópico I).

La tercera actividad de esta segunda parte (Figura II.2.2.-10) presenta unas cuestiones, a modo de resumen, sobre la introducción de las actividades de i-matemáticas y su relación con el desarrollo de procesos de prueba, con la finalidad de que reflexionen sobre las posibilidades de este tipo de actividades en el aula, a la hora de favorecer el descubrimiento y la construcción de contenido matemático. También se cuestiona al profesor sobre el papel del docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el desarrollo del currículo cuando se trabaja con actividades de esta clase y con herramientas como Cabri. Se pretende que se plantee la práctica en el aula más apropiada para que el uso de este tipo de actividades sea verdaderamente eficaz.

Actividad 3.
Cuestiones de síntesis: • ¿En qué medida el software dinámico te ayuda a diseñar actividades del tipo i-matemáticas? • ¿Cómo las actividades del tipo i-matemáticas favorecen el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula? • ¿En qué medida la introducción de actividades del tipo i-matemáticas modifica o La gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor (interacción profesor-alumno, gestión de debates y puestas en común, evaluación de los procesos de aprendizaje...) o El desarrollo del currículo (foco de atención, como, por ejemplo, contenidos curriculares tradicionales – triángulos, paralelogramos, etc.- frente al desarrollo de procesos cognitivos transversales como conjeturar, probar, definir, comunicar, simbolizar, etc.)?

Figura II.2.2.-10 Actividad 3 del apartado "Procesos de construcción y resolución de procesos de probar en contextos dinámicos (U.D. 2 del tópico I).

Este bloque de tres actividades se completa con la apertura de un foro (Figura II.2.2.-11). Con ello se pretende que expresen sus conclusiones "en voz alta", reflexionen sobre ellas y a la vez las expongan a los demás con el fin de posibilitar el intercambio de ideas, el debate y el aprendizaje colaborativo.

2º Foro: Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos. Actividades

Actividad 1.

- Utilizar una herramienta dinámica como Cabri, os ha ayudado a:

¿Probar la igualdad pedida?
¿Conjeturar nuevas relaciones?
¿Comunicar la prueba realizada?
¿Convencer con más facilidad a otros de lo correcto de vuestra prueba?

Actividad 2.

¿El uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de ver y resolver el problema de la actividad?

Actividad 3.

¿En qué medida el software dinámico te ayuda a diseñar actividades del tipo i-matemáticas?
¿Cómo las actividades de tipo i-matemáticas favorecen el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?

No dejéis de participar y de replicar los unos a los otros.

Figura II.2.2.-11 Segundo Foro.

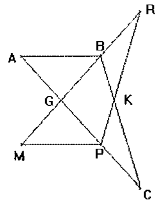
"Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas"

Finalmente, en esta tercera parte de la unidad "*Diferentes facetas de la noción de prueba*" se presenta la actividad (Figura II.2.2.-12) centrada en diferentes formas de realizar la demostración de la igualdad presente en la actividad "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-6) y se pide a los profesores participantes en el módulo que reflexionen sobre las características de cada uno de los procesos, estáticos y dinámicos, determinando razonadamente cuáles pueden ser considerados como pruebas auténticas y cuáles no. Se les pide también que analicen qué tipo de procesos pueden tener más poder de convicción, según los interlocutores a los que se dirijan, que establezcan la diferente demanda cognitiva de cada uno de los procesos y lo que se podría obtener de ellos como objetos de enseñanza-aprendizaje, según el nivel educativo en el que se introduzcan.

Actividad

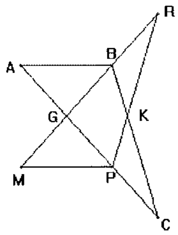
Se incluyen a continuación diferentes maneras de realizar la comprobación-prueba de la igualdad de la actividad del 1° foro

1. Dados los siguientes triángulos, realiza las mediciones necesarias para comprobar que los ángulos de vértices $\hat{C}$ y $\hat{R}$ son congruentes:



Solución:
- Midiendo los ángulos con un transportador de ángulos.
- Midiendo con una regla los tres lados de cada triángulo y viendo que son iguales (congruentes).

2. Indica los movimientos que tendrías que aplicar a uno de los dos triángulos siguientes para demostrar que los ángulos de vértices C y R son iguales.



Solución: Simetría axial y traslación para superponerlos.

3. ¿Qué tipo de transformación se podría aplicar a la figura para probar que los ángulos de vértices C y R son congruentes?

Solución: Trazamos la recta que une los puntos G y K y nos damos cuenta de que la figura tiene a la recta GK como eje de simetría. Luego $\hat{C}$ y $\hat{R}$ son ángulos congruentes.

Cuestiones:
- ¿Alguna de estas soluciones coincide con la tuya? ¿Cuál?
- Si son distintas, ¿en qué se diferencian?
- ¿Alguna de las soluciones propuestas puede tener distinto poder de convicción? ¿Para quién?
- ¿En qué medida podemos considerarlas como pruebas? ¿Cuál podría ser la diferencia del significado dado a la noción de prueba para los alumnos de E.S.O. (12-16 años) y para los matemáticos?
- ¿Qué variaciones podríamos hacer en el enunciado para poder plantear este problema a alumnos de 3° ciclo de primaria (10-12 años)?
- ¿Y para alumnos del 1° ciclo de secundaria (12-14 años)?
- ¿Qué dificultades pueden encontrar unos y otros alumnos a la hora de resolver este problema?

Figura II.2.2.-12 Actividad: "Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".

Se completa esta tercera parte con la apertura de un foro (tercero) (Figura II.2.2.-13) en el que han de responder a las mismas preguntas que en la actividad anterior y con la misma finalidad que en los anteriores foros: que expresen su opinión (lo que les supone otro nivel de reflexión) y que intercambien experiencias y significados, intentando ver también si se produce alguna modificación entre manifestaciones anteriores y las actuales. Con este contexto se pretende detectar los posibles cambios en las creencias y concepciones de los profesores.

3º Foro: Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas. Actividad

Referente a la actividad del apartado "Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".

Si habéis visto las diferentes maneras, que se os muestran, de resolver la actividad de los triángulos, podéis expresar vuestras opiniones en este foro.

- ¿Alguna de estas soluciones coincide con la tuya? ¿Cuál?
- Si son distintas, ¿en qué se diferencian?
- Alguna de las soluciones propuestas puede tener distinto poder de convicción? ¿Para quién?
- ¿En qué medida podemos considerarlas como pruebas?
- ¿Cuál podría ser la diferencia de significado dada a la noción de prueba por alumnos de Secundaria y por matemáticos?
- ¿Cuál es el papel de los contraejemplos en el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?
- ¿Cómo pueden ser integradas las características dinámicas del software en el diseño de actividades para enseñar matemáticas?
- ¿Cómo puede favorecer el uso de dicho software el proceso de enseñanza / aprendizaje de la noción de prueba con alumnos de Secundaria?
- ¿Cuál crees que debe ser el papel del profesor al introducir software dinámico en los contextos de presentar y probar en matemáticas?

Figura II.2.2.-13 Tercer Foro.

Unidad didáctica 3: *"Software dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje"*

En esta tercera unidad se presenta la actividad "Software dinámico y procesos de prueba" (Figura II.2.2.-14), en la que se presentan diferentes formas de resolver el teorema de Pitágoras. Los profesores deben analizar las tres maneras de proceder y reflexionar sobre cómo se llega a la solución en los tres casos, fijándose especialmente en los aspectos geométricos en los que se apoya cada forma de resolución y en el contenido matemático que se usa. Por último se pide a cada profesor que piense en la forma en que estas tres maneras de actuar pueden ayudar a los alumnos a entender el significado del teorema.

Con esta actividad se pretende, una vez más, hacer reflexionar al profesor directamente sobre las características de los desarrollos estáticos y dinámicos. Las situaciones se plantean desde los dos puntos de vista en los que estamos interesados en este estudio: La prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Actividad "Software dinámico y procesos de prueba"

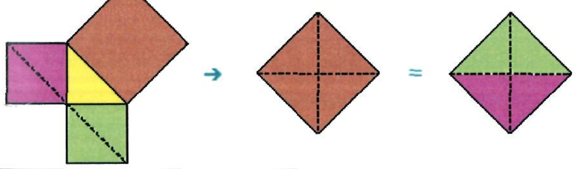
Introducción

El teorema de Pitágoras es una igualdad que suele introducirse en el primer ciclo de la ESO. Las TIC permiten un tratamiento diferente de esta igualdad en el contexto de favorecer los procesos de probar en los alumnos de la ESO, al poder hacer uso de figuras interactivas. El uso de las TIC en este contexto tiene consecuencias en el diseño de las actividades/tareas que pueden presentarse a los alumnos.

Material

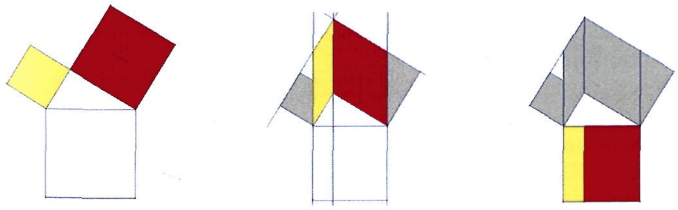
El siguiente texto presenta una versión estática de una demostración del teorema de Pitágoras, con la particularización al caso del triángulo rectángulo isósceles. (Matemáticas 1° ESO. Órbita 2000. Madrid: Santillana, pag.184).

"A continuación puedes ver una comprobación experimental del teorema de Pitágoras para el caso particular de los triángulos rectángulos isósceles. Recortando los cuadrados de los catetos por la diagonal comprobarás fácilmente que con los cuatro triángulos obtenidos puedes construir un cuadrado igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa"



Enlace 1. Entrad en el E-example 6.5: Exploring the Pythagorean Relatioship. (http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.5/index.htm)

Este applet presenta una versión dinámica de una demostración del teorema de Pitágoras.



Discusión

Supongamos que a y b representan las longitudes de los lados del triángulo rectángulo del centro y c la longitud de la hipotenusa. Manipulando la figura interactiva, los estudiantes observan que los cuadrados obtenidos sobre los catetos del triángulo, (de áreas a^2 y b^2) se pueden transformar hasta llenar completamente el cuadrado construido sobre la hipotenusa, de área c^2. Es decir $a^2+b^2=c^2$.

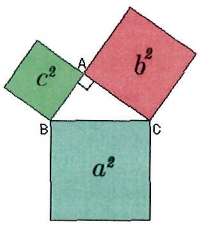
Se puede preguntar a los estudiantes qué pasa con las áreas cuando los cuadrados construidos sobre los catetos son transformados en paralelogramos que finalmente llenarán el cuadrado construido sobre la hipotenusa. Se les puede preguntar, también, que justifiquen el hecho de que las áreas se mantengan constantes a lo largo de todo el proceso de transformación. Finalmente, el triángulo central puede ser también modificado sin dejar de ser rectángulo, y hay que hacer notar a los estudiantes la importancia de que en todos los casos se mantenga lo anteriormente observado.

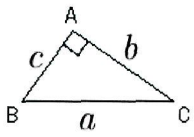
Se pueden considerar, también, cuestiones referentes a las áreas de figuras distintas al cuadrado construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo. O a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos obtusángulos o acutángulos.

Enlace 2. Explorad el applet que presenta el teorema de Pitágoras desde la perspectiva de la descomposición/recomposición de figuras planas.

(http://www.ies.co.jp/math/java/samples/pytha2.html)

Teorema de Pitágoras

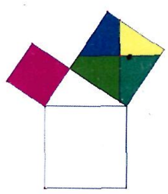




$$a^2 = b^2 + c^2$$

¿Cómo usar el applet?

- **Se mueve el punto rojo**
- **Se presiona el botón define**
- **Se mueven los cinco cuadriláteros para introducirlos en el cuadrado inferior**



Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba"

Cuestiones:

~ Identifica diferentes características de las tres maneras de presentar la prueba del teorema de Pitágoras.

¿Sobre qué aspectos / elementos / propiedades geométricas se apoya cada uno de los tipos de prueba?

~ ¿Cómo la figura interactiva prueba la igualdad del teorema de Pitágoras? Considera las dos variables que utiliza el applet del enlace 1:
  - La modificación de la figura conservando el área para un triángulo dado.
  - La modificación del triángulo rectángulo.

~ Ídem para el applet del enlace 2.

~ ¿Cómo la versión estática prueba la igualdad del teorema? Considera:
  - Los aspectos geométricos sobre los que se apoya.
  - El papel desempeñado por el caso particular del triángulo rectángulo isósceles. ¿Cómo se puede generalizar desde el caso particular?

~ Contesta las siguientes preguntas:
  - ¿Cómo la transformación dinámica del cuadrado en paralelogramo y luego en rectángulo afecta al área?
  - ¿Cómo la modificación dinámica del triángulo rectángulo apoya la generalización?

~ Realiza una lista de aspectos geométricos sobre los que se apoya cada tipo de prueba.

¿De qué manera la versión estática y la versión dinámica de la prueba pueden ayudar a los alumnos a analizar y explicar esta igualdad de manera diferente?

Figura II.2.2.-14 Actividad "Software dinámico y procesos de prueba" perteneciente a la U. D. 3.

- *La entrega de las actividades resueltas.*

Los profesores participantes entregaron la resolución de las siete actividades en las "carpetas de entrega" (Figura II.2.2.-15). Para depositar sus soluciones los profesores participantes disponían del tiempo destinado a la totalidad del módulo, aproximadamente seis semanas, aunque se les orientó sobre el tiempo recomendado para cada bloque de actividades. El tópico I, del que proceden los datos de esta investigación, conllevaba más contenido y actividades a realizar, y tuvo una duración de tres semanas. A ello hay que añadir que este tiempo tuvieron que compartirlo con la realización de actividades del master correspondientes a otro módulo que se desarrolló a la vez. Los profesores no depositaron sus actividades en las carpetas de entrega hasta agotar todo el tiempo disponible, y, en algún caso, pidieron que se les concediera algo más de tiempo, a lo que se accedió.

Las carpetas de entrega correspondientes al tópico I, objeto de este estudio, mostraban el siguiente aspecto y contenido:

1ª Carpeta de entrega: U. D. 2. Diferentes facetas de la noción de prueba	CORREGIR
En esta carpeta debéis introducir las respuestas correspondientes a las siguientes actividades: - Actividad: Resolución de problemas de probar. - Actividades 1,2 y 3: Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos. - Actividad: Diagnosticar. Comprobar y comunicar en la resolución de problemas.	MODIFICAR *ELIMINAR*

2ª Carpeta de entrega: U. D. 3. Software dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje	CORREGIR
Después de haber realizado la actividad relativa al teorema de Pitágoras, "*Software dinámico. Procesos de prueba*", y de haberlo trabajado con versiones estáticas y dinámicas, responde y envía las respuestas a las preguntas que se te plantean.	MODIFICAR *ELIMINAR*

Tópico I: Actividad de evaluación	CORREGIR
1. Diseña, utilizando TIC, una actividad en la que sea preciso desarrollar procesos de conjeturar, probar y comunicar. 2. Diseña una estructura metodológica para el desarrollo de tu actividad utilizando TIC para crear entornos de aprendizaje virtuales. 3. Completa tu actividad, si es posible, con la incorporación de un foro donde debatas con tus alumnos el concepto y procedimientos de demostrar.	MODIFICAR *ELIMINAR*

Figura II.2.2.-15 Carpetas de entrega.

- ***Diferencias entre las ediciones segunda y cuarta.***

En la 4ª edición del master se introdujeron cambios en el tópico I. Estos cambios han afectado a la estructura de la unidad didáctica 2 "Diferentes facetas de la noción de prueba" que quedó de la siguiente forma:

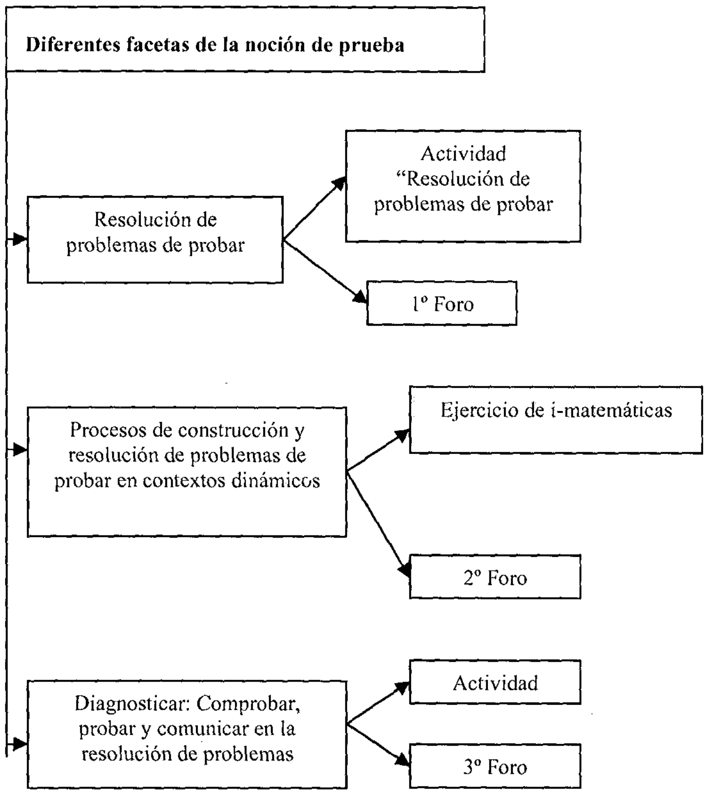


Figura II.2.2.-16 Unidad "Diferentes facetas de la noción de prueba" correspondiente a la 4ª Edición.

La diferencia con la 2ª edición está en el contenido de la casilla sombreada. En la 2ª edición, había tres actividades: Actividad 1 (Figura II.2.2.-8), Actividad 2 (Figura II.2.2.-9) y Actividad 3 (Figura II.2.2.-10). La Actividad 1 aparece en esta 4ª edición, sin modificación alguna, bajo el nombre de Ejercicio de i-matemáticas. En la 4ª edición se suprimieron las Actividades 2 y 3. La Actividad 2 pedía que se resolviera de nuevo la Actividad "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-6) utilizando software dinámico. Esta actividad tenía mucha importancia porque al requerir a los profesores que demostraran la misma igualdad de dos formas, estática y ayudándose de software dinámico, favorecía el que se enfrentaran a dos maneras diferentes de desarrollar el proceso de prueba. La actividad se completaba con preguntas referentes a las diferencias en las formas de proceder, con el fin de hacer que el profesor reflexionara sobre el contenido matemático que se movilizaba al actuar de una forma o de otra y sobre las funciones de la prueba que se ponían de manifiesto según las diferentes formas de actuar. La Actividad 3 hacía referencia directa a las concepciones del profesor sobre la prueba matemática como objeto de enseñanza-aprendizaje.

La suspensión de estas actividades conllevó la modificación de las preguntas de introducción al 2º foro (Figura II.2.2.-11) que quedó en la 4ª edición de la siguiente forma:

2º Foro: Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos. Una vez resuelto el ejercicio de i-matemáticas y resueltos los nuevos planteamientos, participad contestando las siguientes preguntas y replicando a vuestros compañeros. El hecho de utilizar una herramienta dinámica como Cabri os ha ayudado a: - ¿Probar la igualdad pedida? - ¿Conjeturar nuevas relaciones? - ¿Comunicar la prueba realizada? - ¿Convencerías con más facilidad a otros de lo correcto de vuestra prueba? - ¿El uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de ver y resolver el problema de la actividad? - ¿En qué medida el software dinámico te ayuda a diseñar actividades del tipo i-matemáticas (actividades que requieren investigar)? - ¿Cómo las actividades del tipo i-matemáticas favorecen el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula? No dejéis de replicar unos a otros.

Figura II.2.2.-17 Segundo Foro correspondiente a la 4ª Edición.

La primera carpeta de entrega en esta 4ª edición (Figura II.2.2.-15) también se modificó para adecuarla a la nueva situación, quedando como se muestra a continuación:

	1ª Carpeta de entrega: Diferentes facetas de la noción de prueba		CORREGIR
	En esta carpeta debéis introducir las respuestas correspondientes a las siguientes actividades: - Actividad: Resolución de problemas de probar. - Ejercicio de i-matemáticas: Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos. - Actividad: Comprobar-probar: Diagnosticar. Comprobar y comunicar en la resolución de problemas.		MODIFICAR *ELIMINAR*

Figura II.2.2.-18 Carpeta de entrega correspondiente a la actividad de la U. D. 2 "Diferentes facetas de la noción de prueba" de la 4ª Edición.

- *Cuestionarios*

En la 2ª edición, al inicio del módulo se envió a los profesores un cuestionario (Figura II.2.2.-19), con diversas preguntas para recabar información sobre la experiencia y práctica docente de los profesores (las 10 primeras). La última pregunta y sus diversos apartados se centraban en los procesos de prueba, con la intención de obtener información, antes de que los profesores iniciaran su trabajo dentro del módulo, sobre sus concepciones sobre la misma, considerándola como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje. Con los apartados f y g de la pregunta 11 se pretendía obtener información sobre la disposición de los profesores a compartir experiencias y a trabajar en colaboración con los demás. La finalidad última de este cuestionario era la de proporcionar información adicional que pudiera apoyar las inferencias realizadas en el análisis a partir de lo producido por los profesores en las carpetas de entrega y en las intervenciones en los foros.

CUESTIONARIO

1. Años de docencia.
2. Número de centros en los que has trabajado
3. Entorno socio-cultural de los mismos.
4. Características del alumnado.
5. Opinión sobre la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria, Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato.
6. Aspectos que cambiarías de estos tipos de enseñanza.
7. Opinión sobre la metodología a desarrollar en el aula.
8. Herramientas de todo tipo necesarias para llevar a cabo la citada metodología.
9. Opinión sobre la introducción de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en el aula, en los diferentes niveles que impartas.
10. Opinión sobre lo que esperas de ellas en lo referente a mejorar la práctica educativa.
11. Consideraciones sobre el proceso de demostrar:
    a. ¿Qué significa demostrar en matemáticas?
    b. ¿Qué enseñar sobre la demostración en el aula en el nivel que impartes?
    c. ¿Cómo enseñar a demostrar en el aula?
    d. ¿Qué concepciones matemáticas y didácticas se ponen de manifiesto cuando se comunica a los demás el proceso seguido para llevar a cabo una demostración?
    e. ¿Qué tipo de dificultades encuentras a la hora de enfrentarte a la enseñanza del proceso de demostrar y cómo utilizas tu experiencia en el aula para crear nuevos elementos y estrategias que den respuesta al problema surgido?
    f. ¿Compartes esas dificultades con tus compañeros?
    g. Si es así, ¿cómo aceptas las soluciones aportadas por ellos? ¿Introduces algo de lo que te aportan en tu práctica metodológica?
    h. ¿Tu experiencia de años de docente, qué te ha hecho cambiar en lo referente a la práctica educativa del proceso de demostrar?

Figura II.2.2.-19 Cuestionario correspondiente a la 2ª edición.

Este cuestionario no se pasó en la 4ª edición. En dicha edición se envío por correo electrónico, a los profesores inscritos en el módulo "Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas" otro cuestionario (Figura II.2.2.-20) con preguntas relativas a lo trabajado sobre los procesos de probar.

Al igual que con el cuestionario de la 2ª edición, el objetivo de este cuestionario era el de obtener información adicional que permitiera apoyar las conclusiones que se derivaran del análisis de los datos procedentes de lo realizado por los profesores en las carpetas de entrega y de sus intervenciones e interacciones en los foros. En primer lugar se pretendía que los profesores hicieran un último ejercicio de reflexión sobre sus concepciones referentes a la prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje. En segundo lugar, se buscaba obtener apoyo a lo inferido sobre la posible modificación de esas concepciones cuando se introduce el uso de herramientas dinámicas y con posibilidades gráficas en el desarrollo de dichos procesos. Finalmente, se intentó que el profesor analizara y valorara su propia participación, teniendo presente la frecuencia y calidad de sus intervenciones, lo aprendido de los demás y lo aportado por él mismo a la comunidad virtual formada por los profesores participantes en los foros del módulo.

El cuestionario se estructuró de la siguiente forma:

Las 12 primeras preguntas tenían un solo apartado y, al igual que en el cuestionario inicial de la 2ª edición (Figura II.2.2.-19) pretendían recabar información sobre la realidad docente y la práctica metodológica de cada profesor, así como sobre sus consideraciones sobre la misma, haciendo hincapié en los cambios que introducirían y el papel que desempañaría en esos cambios la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. La pregunta número 13, con sus distintos apartados, hacía referencia a las concepciones de los profesores sobre la prueba considerada como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, planteando la cuestión de la introducción de software dinámico en los procesos. En la pregunta número 14 y sus diferentes apartados se formulaban cuestiones relacionadas con el papel de los foros en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas participantes y sobre la importancia e influencia que pueden ejercer en el desarrollo del conocimiento profesional del profesor y en su práctica y actuación en el aula.

CUESTIONARIO

1. Nombre
2. Nacionalidad
3. Años de docencia
4. Nivel en el que impartes la docencia
5. Número de centros en los que has trabajado
6. Entorno socio-cultural de los mismos
7. Características del alumnado
8. Opinión sobre la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en el nivel en el que impartes la docencia
9. Aspectos que cambiarías en tu nivel de enseñanza
10. Opinión sobre la metodología a desarrollar en el aula
11. Herramientas de todo tipo que necesitarías para desarrollar la mencionada metodología
12. Opinión sobre la introducción de las TIC en el aula en tu nivel de enseñanza
13. Consideraciones sobre el proceso de demostrar en tu nivel de docencia:
    a) ¿Qué significa demostrar en matemáticas?
    b) ¿Cuál es la finalidad de una demostración?
    c) ¿Qué tipo de demostraciones se deben desarrollar en el aula en el nivel que impartes?
    d) ¿Cómo puede favorecer realizar demostraciones en el aula el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?
    e) ¿Cómo se modifica la función de una demostración si se realiza con la ayuda de software dinámico?
    f) ¿Qué tipo de dificultades encuentras a la hora de enfrentarte a la enseñanza del proceso de demostrar y cómo las solventas?
14. Consideraciones sobre el papel de los foros en la práctica docente del profesor de matemáticas
    a) ¿Cómo puede influir la participación en foros virtuales de debate entre profesores, en la práctica docente de los mismos?
    b) ¿Qué cambiarías de los foros de este módulo para que el profesor se pueda beneficiar más de ellos?
    c) ¿Cómo valorarías tu participación en los foros de este módulo?
    d) ¿Crees que en tus intervenciones has aportado información relevante sobre alguno de los temas tratados?
    e) ¿Te has limitado a presentar tus opiniones o has leído con atención lo expuesto por los demás y has argumentado sobre ello?
    f) ¿Aceptas lo aportado por tus compañeros y si lo consideras interesante estás dispuesto a introducirlo en tu práctica docente?
    g) ¿Has llegado a conclusiones a partir de la información presentada por ti y por tus compañeros en estos foros?
    h) ¿Qué beneficios has obtenido de tu participación en estos foros?
    i) ¿Se han modificado en algo tus concepciones sobre la demostración después de tu participación en estos foros? Si es así, explica en qué y cómo

Figura II.2.2.-20 Cuestionario correspondiente a la 4ª edición.

- ***Foros***

Otro de los elementos imprescindibles en el master y en este módulo ha sido la interacción a través de los foros (Figura II.2.2.-21). La finalidad de los mismos era la de establecer una vía de comunicación, independiente de horarios y de lugares de ubicación de los participantes, a través de la cual los profesores pudieran intercambiar opiniones, experiencias e incluso materiales, a la vez que experimentaban con un recurso tecnológico de grandes aplicaciones en educación.

La profesora-tutora ejercía también de moderadora, puesto que se encargaba de abrir los distintos foros con unas cuestiones relacionadas con la tarea que se estaba desarrollando y resolvía las dudas que se le planteaban directamente o que eran planteadas pero no respondidas por otros profesores participantes. Igualmente, cuando la conversación se estancaba o el tema perdía interés, la profesora-tutora intervenía planteando nuevas cuestiones o argumentaciones para fomentar el debate y la reflexión y pedía aclaraciones para intentar continuar con alguna línea de argumentos considerada interesante. En todo momento evitó dar su opinión, intentaba dejar completa libertad para que los profesores expusieran cómo habían resuelto sus actividades y dieran respuestas y opiniones.

A la vez que se colocaban las carpetas de entrega se abrían los foros relacionados con las actividades que se depositaban en ellas, para que, según los profesores fueran desarrollando su trabajo, pudieran intercambiar opiniones sobre su resolución y resolver posibles dudas. Además de la presentación en los foros de las demostraciones realizadas, los profesores debieron responder a preguntas relacionadas con los procesos desarrollados y con las diferentes formas de realizarlos, siguiendo procedimientos lógico-deductivos o incluyendo en los mismos herramientas dinámicas como Cabri Géomètre II y diversos applets interactivos. Los foros se abrieron con pocos días de diferencia, con lo cual los profesores pudieron intervenir en varios a la vez, según iban realizando las actividades y según el tiempo del que disponían. A los foros también se podían enviar archivos y documentos adjuntos.

Los objetivos de los foros eran:

1. Hacer que los profesores expusieran la forma en que habían resuelto las actividades y reflexionaran sobre lo hecho y sobre los razonamientos utilizados.
2. Permitir que los profesores vieran diferentes formas de desarrollar procesos de prueba para reflexionar sobre ellas comparándolas con las propias.

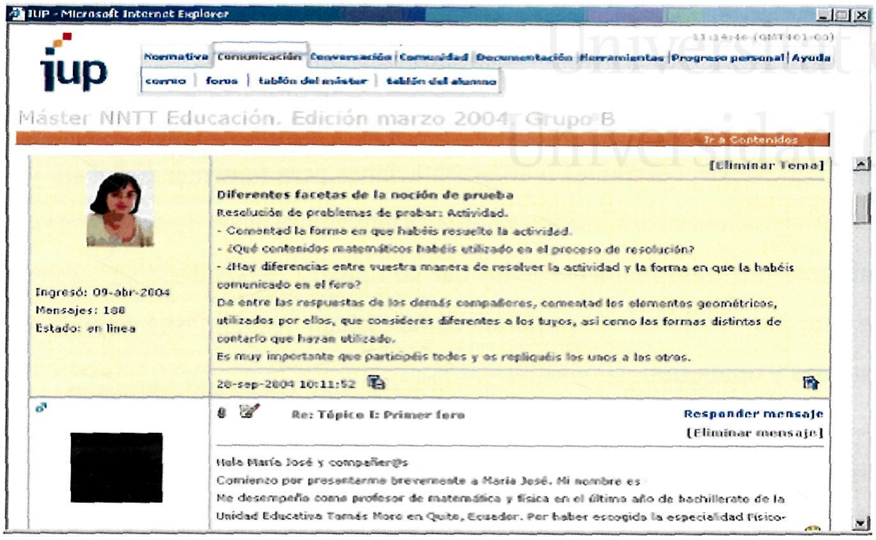


Figura II.2.2.-21 Foros.

Tiempo durante el que estuvieron abiertos los foros en cada una de las ediciones			
	Primer Foro	**Segundo Foro**	**Tercer Foro**
2ª Edición	6 semanas	38 días	5 semanas
4ª Edición	6 semanas	6 semanas	6 semanas

II.3. Los datos de la investigación.

Los datos de esta investigación son las producciones de los profesores participantes en las dos ediciones no consecutivas (2ª y 4ª) del módulo. Dichas producciones son:

- El texto escrito procedente de la realización de todas las actividades descritas en el apartado anterior, en las que se requería demostrar y responder a preguntas relacionadas con procesos de prueba.
- El texto escrito procedente de las intervenciones de los profesores en los foros virtuales de debate.

Tópico I: Software dinámico. Procesos de prueba				
	Actividades a entregar		Foros	
	Segunda edición	Cuarta edición	Segunda edición	Cuarta edición
	Cuestionario inicial (Figura II.2.2.-19)			
U.D.1: El nuevo software y la enseñanza de las matemáticas.				
U.D. 2: Diferentes facetas de la noción de prueba	Actividad: "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-6)	Actividad: "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-6)	Primer foro: Referido a la actividad "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-7)	Primer foro: Referido a la actividad "Resolución de problemas de probar" (Figura II.2.2.-7)
	Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos: Actividad 1 (Figura II.2.2.-8). Actividad 2 (Figura II.2.2.-9). Actividad 3 (Figura II.2.2.-10): Cuestiones de síntesis.	Ejercicio de i-matemáticas (llamada en la 2ª edición Actividad 1) (Figura II.2.2.-8)	Segundo foro: Referido a las actividades 1, 2 y 3 (Figura II.2.2.-11)	Segundo foro: Referido al ejercicio de i-matemáticas y a contenidos de las Actividades 2 y 3 de la segunda edición (Figura II.2.2.-17)
	Actividad: "Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas" (Figura II.2.2.-12)	Actividad: "Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas" (Figura II.2.2.-12)	Tercer foro: Referente a la actividad "Diagnosticar. Comprobar y comunicar en la resolución de problemas". (Figura II.2.2.-13)	Tercer foro: Referente a la actividad "Diagnosticar. Comprobar y comunicar en la resolución de problemas" (Figura II.2.2.-13)
U.D. 3: Software dinámico y los procesos de prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje	Actividad "Software dinámico y procesos de prueba" (Figura II.2.2.-14)	Actividad "Software dinámico y procesos de prueba" (Figura II.2.2.-14)		
	Actividad de evaluación	Actividad de evaluación		
		Cuestionario final (Figura II.2.2.-20)		

Figura II.3.-1 Resumen de los datos analizados y de su procedencia.

Edición		Cuestionario	Actividad "Resolución de problemas de probar"	1º Foro	Actividades 1, 2 y 3/Ejercicio de i-matemáticas	2º Foro	Actividad "Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas"	3º Foro	Actividad "Software dinámico y procesos de prueba"	Actividad de evaluación
2ª Edición	Ue		X	X	X	X	X	X	X	X
2ª Edición	MiJi		X	X	X	X	X	X	X	X
2ª Edición	Manulo	X	X	X	X	X	X		X	X
2ª Edición	Eva		X		X		X		X	X
2ª Edición	VV	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2ª Edición	Xavi	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4ª Edición	AnDi	X	X	X	X	X	X		X	X
4ª Edición	CriBor	X	X	X	X	X	X		X	X
4ª Edición	TeLo	X	X	X	X	X	X		X	X
4ª Edición	ViMd		X		X		X		X	X
4ª Edición	JC	X	X	X	X	X	X		X	X
4ª Edición	OB	X		X		X		X		X

Figura II.3.-2 Textos analizados de cada uno de los profesores.

II.4. Procedimiento de análisis.

El análisis de las producciones de los profesores participantes se ha desarrollado desde dos perspectivas: Contenido y forma.

Para el análisis de contenido se estudia el texto escrito producido por los profesores en los siguientes casos:

- Al resolver las actividades propuestas y responder las preguntas planteadas a lo largo del contenido del módulo.
- Al intervenir en los foros virtuales de debate.
- Al responder las preguntas de los cuestionarios (como apoyo a las inferencias realizadas).

El estudio se efectuó desde dos puntos de vista:

1. Intentando descubrir las concepciones de los profesores sobre la prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje.

2. Estudiando la manera en que los profesores realizan sus pruebas, intentando establecer conexiones entre concepciones y tipo de pruebas realizadas.

La inclusión de software dinámico en las actividades a realizar por los profesores en el módulo, permitió el estudio de los mismos aspectos y de la posible modificación de ellos como consecuencia del uso de este tipo de herramientas, así como de las características de las mismas que provocan dicho cambio. Para el estudio de las concepciones de los profesores sobre la prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, se consideraron a priori las categorías establecidas por Hanna y Janhke (1996) y por Knuth (2002), verificación, explicación, comunicación, sistematización y descubrimiento y construcción de contenido matemático, descritas en el capítulo I. Para analizar la forma en que los profesores realizan sus pruebas se tuvo en cuenta la clasificación en pruebas sintácticas y semánticas debida a Weber y Alcock (2004).

Para apoyar los resultados obtenidos se analiza la forma de participar los profesores en los foros. Se ha pretendido obtener información sobre las intervenciones e interacciones que se producen entre ellos, interesándonos particularmente si, a través del debate y la discusión, llegan a acuerdos que pueden repercutir en la construcción del conocimiento. Para ello se ha tenido en cuenta el sistema de categorías y de gráficos secuenciales de Rey, Penalva y Llinares (2004), con el fin de determinar el tipo de interacciones que se producen y aquellas que forman cadenas conversacionales, entendidas como grupos de interacciones en las que hay debate e intercambio de puntos de vista, pudiéndose llegar a la negociación de significados.

A continuación se describen los objetivos que pretendía el análisis de cada una de las actividades y de los foros asociados a ellas. Al analizar lo producido por los profesores cuando resuelven la actividad "Resolución de problemas de probar" (figura II.2.2.-6) e intervienen en el primer foro (figura II.2.2.-7) se trataba de obtener información sobre cómo realizan pruebas e identificar sus concepciones. En esta actividad, se les preguntaba sobre el procedimiento seguido para demostrar y sobre los contenidos matemáticos utilizados en dicho procedimiento, se pretendía que reflexionaran sobre lo que habían hecho y que de esta forma tomaran conciencia de las características de la prueba que habían desarrollado. Para comunicar en el foro su forma de resolver la citada actividad, los profesores necesitaban hacer un ejercicio de reflexión más profundo que podía llevarlos a cuestionarse sobre las características de su proceso y las formas de mejorarlo. Con ello se pretendía detectar algún cambio entre la forma de realizar la prueba y la forma de comunicar cómo la habían resuelto, identificando algunos elementos que pudieran hacer pensar en un proceso más explicativo.

Las cuestiones referidas a la identificación de diferentes formas de resolver pretendían que los profesores se cuestionaran sobre todo lo que puede conseguirse con la realización de una prueba y sobre la mejor forma de proceder para obtener lo que se pretende de ella.

El análisis de la forma de resolver las actividades 1 y 2 (Figuras II.2.2.-8 y II.2.2.-9) sirve para obtener información sobre cómo los profesores se enfrentan a la introducción del uso de software dinámico en la realización de sus pruebas y si cambia el tipo de pruebas que realizan, así como su manera de concebir las distintas funciones de la prueba (Hanna y Janhke, 1996). Con el fin de obtener más información a la hora de poder establecer las concepciones de los profesores referentes a la demostración matemática se ha tratado de obtener respuestas a preguntas como:

- ¿Los profesores desarrollan el mismo tipo de proceso de prueba cuando utilizan software dinámico?
- ¿Creen que la finalidad de realizar una prueba es la misma?

- ¿Consideran que mejoran las posibilidades de que las pruebas realizadas cumplan con esa finalidad?

Con el análisis de la participación de los profesores en el segundo foro se pretendía identificar sus concepciones, si ha habido cambio en ellas debido a la incorporación de software dinámico y averiguar cuáles son las características del mismo que han podido propiciar el cambio, principalmente, desde el punto de vista de su utilización en el aula. Asimismo, se pretendía estudiar si la propia participación del profesor en el foro, y las aportaciones de los demás referidas a la introducción de software dinámico en los procesos de prueba, han sido causa de modificación en las concepciones del profesor o en sus consideraciones sobre la conveniencia y posibilidades del uso de software dinámico.

Al resolver la actividad "Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas" (Figura II.2.2.-12) y participar en el tercer foro (Figura II.2.2-13) los profesores se encuentran con diferentes formas de resolver una actividad de prueba y han de reflexionar sobre las características que debe reunir un proceso para poder ser considerado como tal. El análisis de la producción de los profesores en estas actividades ha tenido como objetivo intentar profundizar más en las concepciones de los profesores sobre el significado de probar y sobre su forma de realizar demostraciones. El hecho de pedirles también que reflexionen sobre el significado de estos procesos según el tipo de interlocutores a los que estén dirigidos constituye otra fuente de información sobre su consideración de la prueba matemática como objeto de enseñanza-aprendizaje y la posible modificación de la misma al introducir en el aula software dinámico. Se ha hecho especial incidencia en las consideraciones de los profesores sobre la postura del docente y el tipo de actividades a desarrollar para trabajar con procesos de prueba y software dinámico.

II. 4.1. Caracterización de las concepciones sobre la prueba.

Se consideran las cinco categorías establecidas por Hanna y Janhke (1996) y por Knuth (2002) como funciones de la prueba:

- Verificación.
- Explicación.
- Comunicación.

- Sistematización.
- Construcción y descubrimiento de contenido matemático.

La identificación de cada una de estas categorías se realiza a partir de los indicadores obtenidos de diversas investigaciones, que se describen en el capítulo I. Estos indicadores se han refinado desde los propios datos y a ellos se les han ido agregando otros según se avanzaba en el análisis de los protocolos y surgían elementos que se podían asociar con una determinada categoría. Este proceso inductivo de generación de indicadores permite establecer un esquema de análisis estable que finalmente es el que se aplica a todos lo datos.

A continuación se presentan las categorías y los indicadores considerados. Se incluyen como ejemplo segmentos de texto.

Categoría	Indicadores	Protocolos
Verificación: Se identifica la prueba como proceso que permite establecer la verdad y validez general de un argumento. *"Prueba: Objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, en situaciones que requieren justificar el carácter de verdadero de un enunciado…La palabra prueba se puede utilizar en distintos contextos con diversos sentidos. Todos ellos reconocen una idea común que es la de validar una afirmación (tesis) aportando razones o argumentos".* ViMo. Actividad: "Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas" El significado clave en esta función de la prueba se sitúa en el proceso de establecer la verdad de alguna proposición y, por lo tanto, el énfasis se sitúa en lo que hay que hacer para, desde el punto de vista de la manipulación de proposiciones y relaciones entre ellas, poder validar un resultado.	Necesidad de argumentar principios ya establecidos	*"Es necesario aclarar que muchas veces estamos tentados a suponer que una fórmula es verdadera, y aunque las comprobaciones que hagamos pueden parecer evidencias suficientes para una teoría científica. En las matemáticas es necesario construir argumentos infalibles…"* AnDi. 1º foro
	Diferenciar entre comprobación y prueba (Hanna y Jahnke, 1996)	*"Realmente ninguna de las tres soluciones propuestas se puede considerar como una prueba de la actividad planteada, ya que, en ningún caso se tienen en cuenta las hipótesis de partida que nos dan en el enunciado del problema (concepto de congruencia y que los lados AG y BG son iguales). Por tanto, en las tres soluciones propuestas, se comprueba la igualdad de los ángulos prescindiendo de cualquier hipótesis sobre dichos triángulos…".* Eva. Actividad: "Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas"
	Manifestar la imposibilidad de encontrar contraejemplos (Ibañes, 2002)	*"Los contraejemplos sirven para demostrar que una conjetura que pretendemos demostrar no es siempre cierta, por ello, en el proceso de conjeturar, probar y comunicar los programas interactivos juegan un papel muy importante en la búsqueda razonada de contraejemplos por parte de los estudiantes, siendo este proceso previo a la realización de la demostración".* Eva. Respuesta a la pregunta ¿cuál es el papel de los contraejemplos en el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?
	Reconocer la infalibilidad de la demostración (Ibañes, 2002)	*"…los profesores deben instruir a sus alumnos sobre la consecuencia de demostrar un teorema, en particular: la conveniencia de su aplicación, la improcedencia de ulteriores verificaciones…".* TeLo. Consideraciones sobre las implicaciones de demostrar
	Poner de manifiesto la necesidad de pasar de lo particular a lo general	*"Una vez conseguida la construcción con Cabri, todo lo demás parece mágico, ya que al arrastrar el dibujo todas las medidas se ajustan al nuevo modelo y se pueden comprobar tantas combinaciones como se quiera".* Manulo. Actividad 1

Categoría	Indicadores	Protocolos
Explicación: Se considera que una prueba explica cuando proporciona información sobre por qué un argumento es cierto y clarifica el contenido matemático presente en el enunciado y en el proceso, haciendo uso de los conceptos que aparecen en la misma y de las relaciones que se dan entre ellos. *"Al tener la capacidad de arrastrar algunos segmentos y poder incluir la visualización simultánea de las medidas de cada lado del triángulo, resulta evidente que la configuración geométrica final cumple con esta igualdad pedida".* IJe. Actividad "Resolución de problemas de probar"	Proceder desde las definiciones de los conceptos que aparecen en el contenido de la prueba (Lamy, citado por Barbin, 1988; Steiner, 1978)	*"Antes de tratar de resolver el problema, busqué la información necesaria, que me otorgase, según yo los conceptos necesarios para su resolución. Después de su lectura, he tratado de resumir los conceptos o hipótesis necesarias, para determinar que ^R = ^C.* AnDi. Demostración de la igualdad presente en la actividad "Resolución de problemas de probar"
	Poner de manifiesto relaciones entre conceptos (Lamy, citado por Barbin, 1988; Steiner, 1978)	*"Si, además, la dinamización nos muestra qué relación hay entre las condiciones de partida y el resultado que se obtiene, entonces tenemos una clara descripción de las ventajas..."* VV. Actividad 3
	Utilizar representaciones para aclarar significados	*"Siempre es más agradable utilizar gráficos y aplicaciones multimedia en la enseñanza. Considera, que utilizar software para matemáticas hace más interesante y sobre todo más comprensible las matemáticas y en este caso en particular, la enseñanza de la geometría. A veces las demostraciones mediante fórmulas matemáticas no tienen el resultado esperado en los alumnos, ya que no tiene el poder de convicción y que por lo tanto los alumnos no hacen suyo el conocimiento que se intenta que adquieran".* IJe. Actividad 3, respuesta a la pregunta ¿en qué medida la introducción de actividades del tipo i-matemáticas modifica la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor?

Categoría	Indicadores	Protocolos
Comunicación: El proceso de prueba como transmisor de contenido matemático. *"Independientemente de la manera de resolver el problema, el método de comunicarlo es lo importante, pienso que si no se comunica de tal manera que le problema sea visualizado con gráficos parciales, el proceso de aprendizaje se verá evidentemente limitado"* IJe. Alusión a la diferencia entre resolver y comunicar un proceso de prueba. Los indicadores utilizados para la categoría de explicación son también válidos para la categoría de comunicación, siempre y cuando se haga referencia a un contexto en el que el	Utilizar un lenguaje claro y sencillo	*"Una de las características fundamentales es que, al apoyarse en recursos visuales, requiere poca simbolización, favorece el aprendizaje y elimina, o por lo menos, reduce el disgusto de algunos alumnos con dificultades para la abstracción".* CriBor. Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba"
	Experimentar previamente a la realización del proceso de prueba y poner de manifiesto la conclusión a la que se pretende llegar	*"En este caso, una característica sobresaliente y muy útil, es que es posible efectuar transformaciones manteniendo el área pero no la forma de la figura. Es posible repetir las transformaciones para diferentes triángulos rectángulos y además, se podría trabajar efectuando conjeturas sobre diferentes figuras construidas sobre los lados y la hipotenusa del triángulo rectángulo o conjeturar y posteriormente probar con triángulos acutángulos u obtusángulos".* CriBor. Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba"
	Apoyarse en gráficas, diagramas, cálculos, etc.,	*"Independientemente de la manera de resolver el problema, el método de comunicarlo es lo importante, pienso que*

objetivo sea comunicar a otro el significado de la prueba. A ellos se agregan los que se muestran en la columna de la derecha.	buscando formas de transmisión más claras	*si no se comunica de tal manera que el problema se visualice con gráficos parciales, el proceso de aprendizaje se verá evidentemente limitado".* IJe. Actividad "Resolución de problemas de probar"
	Exponer las propias reflexiones con el objetivo de comunicar a otro el "sentido" de la prueba realizada. En este caso es el <u>contexto</u> en el que se describe la prueba el que determina el "objetivo" de la comunicación.	*"Si comienzas arrastrando el punto Q te das cuenta que el punto Q' también se arrastra ya que la circunferencia tangente va cambiando, haciéndose más grande o más pequeña y el triángulo ABC es en todo momento isósceles. De esta forma descubres que intentar que el triángulo sea equilátero arrastrando sólo Q es imposible, puesto que el triángulo de partida es isósceles (lados CA y CB iguales y menores que AB), y al arrastrar Q los lados iguales aumentan o disminuyen proporcionalmente a como lo hace el lado desigual (esto se puede justificar por Tales, ya que al arrastrar Q vamos obteniendo triángulos semejantes entre sí, luego si el de partida no era equilátero los demás nunca van a serlo)...".* Eva. Referencia a la construcción y manipulación de la configuración geométrica correspondiente a la actividad 1
	Distinguir entre diferentes formas de probar según las personas a las que vaya dirigida la prueba, ya que está implícita la idea de comunicar a alguien el sentido de la misma.	*"El segundo applet trabaja sobre un único triángulo y diferentes descomposiciones. La verdad es que es muy espectacular, pero es más rico para niños pequeños el recorta y pega que propone la primera actividad, ya que finalmente podemos llegar a generalizar una solución después de probar muchos casos particulares".* Manulo. Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba"

Categoría	Indicadores	Protocolos
Sistematización: La prueba entendida como proceso que permite la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas. *"Lo más apropiado me parece demostrar lo que se quiere utilizando postulados, teoremas y demás demostraciones de Geometría analítica"* JC. 1º foro	Considerar la realización de procesos lógico-deductivos que permitan sistematizar y organizar resultados diversos. El énfasis se pone en indicar que la prueba conecta resultados y proposiciones distintas, permitiendo establecer cierta organización dentro de un conjunto de proposiciones.	*"...probar se refiere a una serie de proposiciones lógicas y argumentadas que permitirían concluir con una generalización".* OB. Respuesta a la pregunta ¿qué significa probar y qué procedimientos hay para ello?

Categoría	Indicadores	Protocolos
Construcción y Descubrimiento de contenido-conocimiento matemático: La prueba como proceso que ayuda a construir el propio conocimiento y a descubrir nuevas matemáticas. *"La idea subyacente...es un aprendizaje basado en una propuesta constructivista. El docente en su rol de facilitador, los alumnos manteniéndose activos y construyendo, cada uno a su propio ritmo y con su propio bagaje de conocimientos anteriores, sus propios conocimientos.* CriBor. Objetivos de la actividad de evaluación preparada por ella para trabajar pruebas con sus alumnos	Considerar útil el uso de herramientas que permitan manipular, experimentar y conjeturar como paso previo a la realización de una prueba (Knuth, 2002). En este caso el proceso de conjeturar se ve como un proceso en el que se crean nuevas relaciones entre proposiciones matemáticas y, por tanto, se entiende como un proceso de construcción-descubrimiento de contenido matemático.	*"Creo que una herramienta como Cabri o cualquier otro, en el ámbito de la matemática nos puede resultar muy útil, porque lo visual es una excelente ayuda en todos los niveles, los alumnos pueden conjeturar y comprobar y quizás, para los niveles superiores se pueda tomar como base de las demostraciones".* CriBor. 1° foro
	Considerar la prueba como proceso que obliga a la reflexión y al uso del conocimiento previo para construir nuevo conocimiento.	*"Debemos partir siempre de nuestros conocimientos para resolver cualquier problema (de probar) y apoyarnos en la interactividad del programa (Cabri), que nos facilitará la resolución"* Eva. Actividad 2, Desarrollo de la actividad "Resolución de problemas de probar" con la ayuda de software dinámico
	Considerar la prueba como herramienta que ayuda a comprender mejor el contenido con el que se trabaja. Comprender entendido como una manera de "descubrir" el contenido matemático. Este indicador hay que entenderlo en el contexto del aprendizaje y desde una perspectiva constructivista del conocimiento matemático, en el sentido de que "llegar a comprender" algo indica un proceso de construcción del conocimiento.	*"Si llega a hacerlo por sí sólo podremos estar seguros de que entiende todos los elementos geométricos que maneja y entiende la conclusión...".* VV: 1° foro, Actividad "Resolución de problemas de probar", sobre la realización de procesos de prueba con la ayuda de software dinámico
	Considerar la prueba como promotora del razonamiento matemático	*"...las versiones interactivas de los applets, es decir aquellas en las que los alumnos deben razonar las propiedades geométricas en las que se basa cada paso que ellos mismos pueden realizar y visualizar, en mi opinión, son las mejores demostraciones desde el punto de vista didáctico".* Eva. Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba"

	Considerar la prueba como proceso que permite descubrir relaciones	*"Favorece el proceso...de descubrir propiedades...El alumno puede manejarse con soltura en este proceso, aún sin la asistencia del docente".* CriBor. Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", comentario referente a la realización de procesos de prueba con la ayuda de software dinámico
	Poner de manifiesto el carácter antiautoritario que una prueba puede tener para el que la realiza, en el sentido de hacerle sentirse capaz de razonar y llegar a resultados por sí mismo, sin necesidad de que le sean transmitidos (Hanna y Jahnke, 1996)	*"De esa forma, como docentes, vemos que es posible construir problemas dinámicos que le permitan al alumno gradualmente, en un proceso inductivo sistemático llegar a conclusiones que en el contexto tradicional de la enseñanza hubieran sido simplemente explicados por el docente y en el que el alumno hubiera mantenido un rol pasivo con poca motivación, poca fijación de los conocimientos y sin desarrollar la capacidad de aplicar su propia producción a otras situaciones similares".* CriBor: 1ª carpeta de entrega, Actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas", comentario referente a la realización de procesos de prueba con la ayuda de software dinámico

II. 4.2. Fases del análisis de las concepciones sobre la prueba.

Para llevar a cabo la identificación de las concepciones sobre la prueba puestas de manifiesto en las respuestas de los participantes a las tareas propuestas, se ha realizado un análisis de contenido (Erickson, 1986; Clement, 2000; Cobb y Whitenack, 1996; Llinares, 1991). Con el análisis de la lectura inicial de los datos se establecen unas conjeturas que, caso de ser confirmadas, mediante el análisis de nuevos datos, pasan a convertirse en inferencias. El análisis se ha desarrollado en dos fases. La siguiente figura muestra un esquema del proceso realizado:

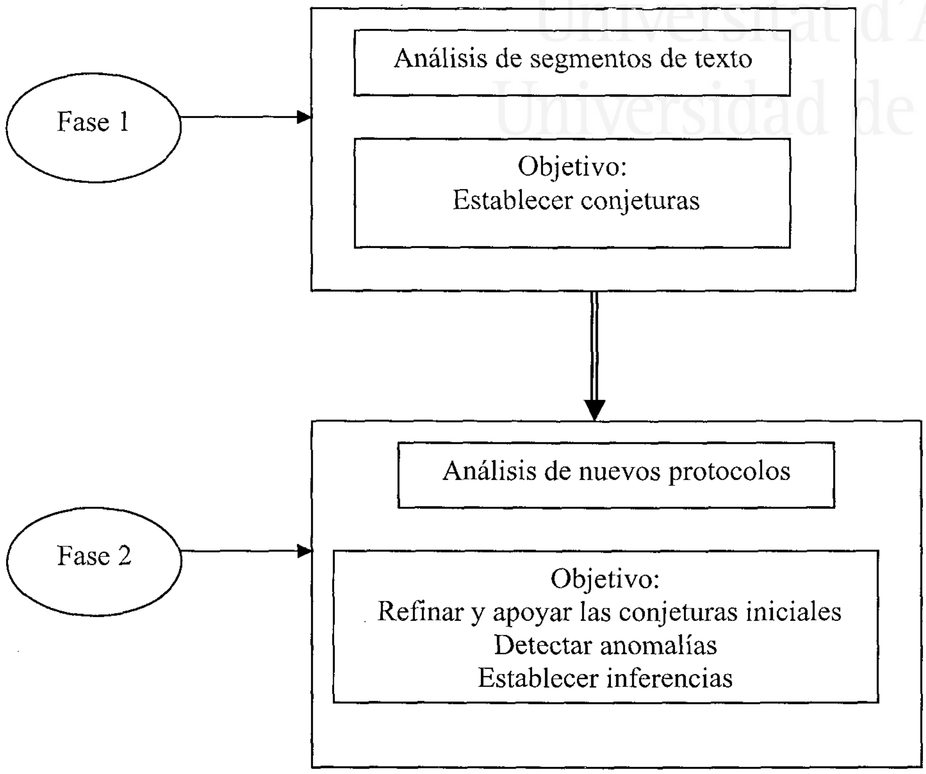


Figura II.4.2.-1 Fases del análisis de los datos

En la primera fase se lleva a cabo la lectura inicial de los datos y la generación de los primeros comentarios preanalíticos. Cada protocolo corresponde al texto completo producido por cada profesor en cada intervención en los foros, o al resolver cada actividad completa. Los protocolos se dividen en fragmentos más pequeños, denominados segmentos de texto, que incluyen ideas completas. De cada uno de los segmentos de texto se intenta obtener indicadores de las concepciones de los profesores sobre la prueba matemática, distinguiendo si se hace referencia a la prueba como proceso matemático o a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. Se trata de identificar en cada segmento de texto alguna de las categorías usadas (Hanna y Jahnke, 1996 y Knuth 2002b), aplicando de manera flexible los indicadores considerados inicialmente para cada una de ellas y siendo muy receptivos a la aparición de otros nuevos, y a su incorporación, caso de considerarse apropiado.

Para realizar este primer análisis de segmentos de texto se elaboró una tabla (Figura II.4.2.-2) en la que aparece la fecha de recepción del protocolo, el nombre del profesor que lo produce, el lugar donde se produce (foro o realización de actividad), y el nombre de la actividad o aspecto al que se hace referencia. Si el protocolo procede de la participación en un foro, se agrega el orden de la intervención, y el tipo y título de la misma. En esta fase del análisis, al hablar de tipo de intervención sólo se especifica si es argumentación, entendida como exposición de argumentos, réplica entendida como reacción a una intervención previa de otro compañero o contrarréplica como respuesta a una réplica. En la primera columna de la tabla, se incluye el protocolo completo tal y como lo presenta el profesor correspondiente. En las otras dos columnas, se sitúan los segmentos de texto en los que se ha dividido dicho protocolo y las conjeturas que se producen del primer análisis de dichos segmentos de texto.

<table>
<tr><td>Fecha:</td><td colspan="2">Nombre del profesor:</td><td colspan="2">Lugar:</td><td>Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Número y tipo de intervención:</td><td colspan="3">Título de la intervención:</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROTOCOLO</td><td colspan="2">SEGMENTOS DE TEXTO</td><td colspan="2">CONJETURAS
(Comentarios preanalíticos)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Figura II.4.2.-2 Tabla para el primer análisis de protocolos

Después de establecer una conjetura referente a alguno de los aspectos analizados, se pasa a la segunda fase del análisis buscando segmentos de texto en el mismo protocolo o en protocolos diferentes que apoyen la conjetura realizada. En ocasiones, los segmentos de texto que permiten admitir como válida la conjetura en cuestión y darle el carácter de inferencia, presentan características que hacen posible refinarla y establecer con más precisión su significado. Otras veces, sin embargo, puede aparecer un nuevo segmento de texto que parece contradecir la conjetura establecida. En estos casos, se procede con la búsqueda de nuevos segmentos de texto que establezcan la aceptación o rechazo definitivo de la misma (Erickson, 1986). Tanto en una fase como en otra se prestó atención a la consideración que los profesores otorgan al uso de software dinámico para ayudarse en los procesos de prueba, intentando detectar si se produce algún cambio en sus concepciones y cuáles son las características de dicho software que pueden ser la causa de ese cambio.

A continuación, se muestra un ejemplo de un protocolo analizado:

Fecha: 05/10/2003	**Nombre del profesor:** VV	**Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia:** Tópico I, 1º Foro, Actividad "Resolución de problemas de probar"- Diferencias entre realizar una prueba y comunicarla
Número y tipo de intervención: 3ª Intervención, Contrarréplica -Respuesta de aclaración a la moderadora	**Título de la intervención:** "Se ve que no entendí la pregunta"	

PROTOCOLO	**SEGMENTOS DE TEXTO**	**CONJETURAS** (Comentarios preanalíticos)
Creo que los alumnos que participen en serio en el foro son "forzados" a expresarse, a explicarse y eso es sólo posible hacerlo bien cuando uno ha comprendido las cosas. Es decir, que les ayuda a asimilar los conceptos y a ir interiorizando los métodos matemáticos. De manera que, efectivamente, explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados. Hace muchos años que tengo conciencia de que enseñando se aprende mucho.	Los alumnos que participan en el foro son forzados a explicarse	**Los foros como herramientas que potencian la comunicación y obligan a explicar las propias ideas.**
	Y eso es sólo posible hacerlo bien cuando uno ha comprendido las cosas	**Comunicar** exige **comprender bien el contenido que se ha de transmitir.**
	Les ayuda a asimilar los conceptos y a ir interiorizando los métodos matemáticos	**Comunicar ayuda al que transmite a asimilar y a apropiarse de los conceptos y procedimientos matemáticos que intenta transmitir.**
	Explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados.	**Comunicar** supone **explicar** y ello exige una **reflexión previa** importante sobre el proceso que se ha de desarrollar para ello.

Figura II.4.2.-3 Ejemplo de análisis de protocolo

En este ejemplo, en el protocolo analizado, el profesor responde a la pregunta de aclaración que le formula la moderadora, después de haber manifestado que no encuentra diferencias entre la forma de realizar una prueba y la de comunicarla. Al hacerlo cambia de discurso manifestando encontrar diferencias y exponiéndolas. El protocolo ha sido dividido en cuatro segmentos de texto que recogen cuatro ideas diferentes pero relacionadas. En el primer segmento de texto, el profesor menciona los foros como lugar en el que se comunica la forma en que se ha desarrollado la prueba aunque la pregunta no se refería a un lugar concreto sino sólo al hecho de tener que comunicar la prueba realizada. La primera conjetura que ha surgido del primer segmento de texto es que la participación en foros obliga a comunicar explicando las propias ideas. El segundo segmento de texto nos lleva a conjeturar que, para este profesor, comunicar un contenido matemático exige al emisor tener muy claros los conceptos y relaciones implícitos en él. La tercera conjetura relaciona la comunicación de contenido matemático con su asimilación y apropiación por parte del transmisor. La cuarta conjetura une comunicación con reflexión sobre las ideas que se comunican y la forma en que se comunica.

Concretamente, en este protocolo, el profesor considera que cuando se comunica una prueba, además de aportar conocimiento matemático al receptor del mensaje, el emisor ha de reflexionar más a fondo sobre ese conocimiento y eso le lleva a una mejor comprensión del mismo y a asimilarlo e incorporarlo de forma más firme a su bagaje de conocimientos matemáticos. Esta consideración otorga a la función comunicativa de la prueba un valor importante de apropiación de conocimiento para el que transmite. El cuarto segmento de texto permite relacionar Comunicación con Explicación, al considerar el profesor que al comunicar se ha de explicar el proceso desarrollado lo que exige reflexionar sobre el procedimiento a seguir para ello.

Esta forma de realizar el análisis permite ser exhaustivo a la hora de obtener inferencias y tener en todo momento presente la procedencia de las mismas, para posteriores revisiones y confrontaciones en la segunda fase del proceso de análisis.

II. 4.3. Caracterización de las formas de probar.

El análisis del tipo de pruebas que desarrollan los profesores participantes se ha hecho considerando la propuesta de Weber y Alcock (2004) que distinguen entre dos formas de probar: sintáctica y semántica.

Cuando se realiza una prueba sintáctica, las conclusiones se van obteniendo a partir de manipulaciones lógicas y simbólicas correctas sujetas a normas establecidas. No es preciso entender ni el significado ni el sentido de lo que se obtiene, sólo seguir la cadena de razonamientos lógicos. Las pruebas sintácticas convencen de la verdad del argumento por la corrección de los pasos que se desarrollan y no porque se explique el significado de los mismos.

A continuación, se muestra un ejemplo de un protocolo analizado en el que se ha considerado que se desarrolla una prueba sintáctica.

*"**PREMISAS:***
1.MG=GB=BR ; AG=GP=PC
2.AG=BG
TESIS:
^R=^C

DEMOSTRACIÓN (SOLUCIÓN 1):

1. AC=AG+GP+PC	*Sumatoria de segmentos*
2. AC=3AG	*Aplicando la premisa "1"*
3. MR=MG+GB+BR	*Sumatoria de segmentos*
4. MR=3BG	*Aplicando la premisa "1"*
5. 3AG=3BG	*Multiplicando la igualdad del dato por 3*
6. AC=MR	*Reemplazando los pasos 2 y 4 en 5.*
7. triangulos ABG=MGP	*Teorema Lado Ángulo Lado.*
8. ^M=^A ; AB=MP	*Semejanza de Triángulos*
9. triangulos MRP=ABC	*Teorema Lado Ángulo Lado.*
*10. **^R=^C***	*Semejanza de ángulos en triángulos congruentes"*

(JC: 1ª carpeta de entrega, Actividad "Resolución de problemas de probar" Figura II.2.2.-6).

Se dice que se realiza una prueba semántica cuando, antes de desarrollar un proceso formal, se crean percepciones informales, representaciones o reflexiones internas ("instantáneas") del contenido presente en el argumento que ha de ser probado, con el fin de entender mejor su significado e implicaciones. Estas instantáneas deben formar parte del desarrollo de la prueba. Al realizar una prueba semántica se pretende comprender el contenido con el que se trabaja y los procedimientos que se llevan a cabo y de esta forma aprehender mejor su significado. Las pruebas semánticas comunican, convencen y explican, no sólo al que realiza la prueba, sino también al que la recibe.

Se presenta como ejemplo el análisis de un protocolo que incluye la creación y manipulación de gráficos como forma de materializar instantáneas, con el fin de usar los elementos geométricos implicados en la actividad de prueba.

"Trazo dos rectas r y s marcando el punto de intersección G.

Con centro en G trazo una circunferencia con un radio que será la medida base del problema marcando los puntos de corte con las dos rectas: A, B, M y P.

Se cumple así, por tanto, la hipótesis AG=GB (utilizo la igualdad porque el símbolo de congruencia no sale en el foro).

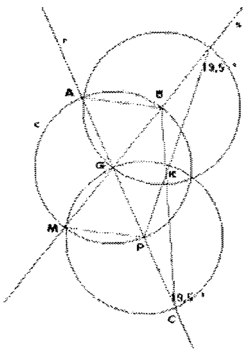
Con centro en B trazo otra circunferencia que pase por G y así marcar el punto R de modo que sean congruentes MG, BG y BR.

De igual modo trazo la circunferencia con centro en P y marco C siendo congruentes AG, GP y PC.

Trazo los triángulos ABC y MPR.

Midiendo en esos triángulos los ángulos $\hat{R}$ *y* $\hat{C}$ *y observo igual resultado. Arrastrando cualquiera de las rectas el "montaje" se mueve de manera que se pueden comprobar dos cosas:*

- *La construcción guarda siempre una perfecta simetría respecto del eje GK.*
- *Los ángulos mencionados tienen siempre igual medida (en la foto miden 19.5º)".*
- *También se puede modificar el radio de la circunferencia c lo que permite agrandar o reducir la construcción.*



Está claro que el procedimiento de construcción de la solución no tiene nada que ver con el que utilicé en el primer foro. El tratamiento es mucho más interesante que el anterior....Finalmente debo reconocer que la posibilidad de dinamizar la escena contribuye notoriamente a la comprensión de qué es lo que hay en la situación que tiene que ver con la propiedad resultante, es decir, bajo qué condiciones se cumple la propiedad que se observa".

(VV: 2º foro, Actividad "Resolución de problemas de probar" Figura II.2.2.-11)

El profesor que presenta este protocolo reflexiona sobre el significado de las condiciones de partida del problema a través de objetos geométricos y propiedades relacionadas con ellos, no presentes directamente en el enunciado. Al hacerlo, relaciona diverso contenido matemático, que adquiere un mayor significado, a la vez que puede representar gráficamente la configuración geométrica en la que se plasman dichas condiciones. La manipulación de dicha configuración le lleva al descubrimiento de propiedades que le permiten comprender el sentido del contenido matemático presente en el problema y sus consecuencias, lo que a su vez le lleva a la solución.

II. 4.4. Fases del análisis de la forma de probar.

Para realizar el estudio de cómo los profesores realizan sus pruebas se han utilizado los mismos protocolos que para analizar las concepciones de los profesores sobre la prueba. Dicho estudio consta de dos fases (Figura II.4.4.-1). En primer lugar se han analizado las pruebas realizadas por los profesores, con el fin de identificar características que permitan clasificarlas como sintácticas o semánticas. Posteriormente se ha buscado en el resto del texto producido elementos que permitan identificar el tipo de prueba que los profesores consideran más conveniente. En esta segunda fase se lleva a cabo el estudio de la posible influencia de la introducción de software dinámico en la realización de procesos de prueba, con el fin de detectar si ello supone un cambio en la forma de probar del profesor o en sus consideraciones sobre cómo se deberían realizar pruebas y cuáles son las características del software que pueden producir ese cambio. La unión de esos dos aspectos, forma de realizar pruebas de los profesores y sus manifestaciones sobre cómo deberían realizarse, son los elementos que al ser analizados permiten obtener conclusiones.

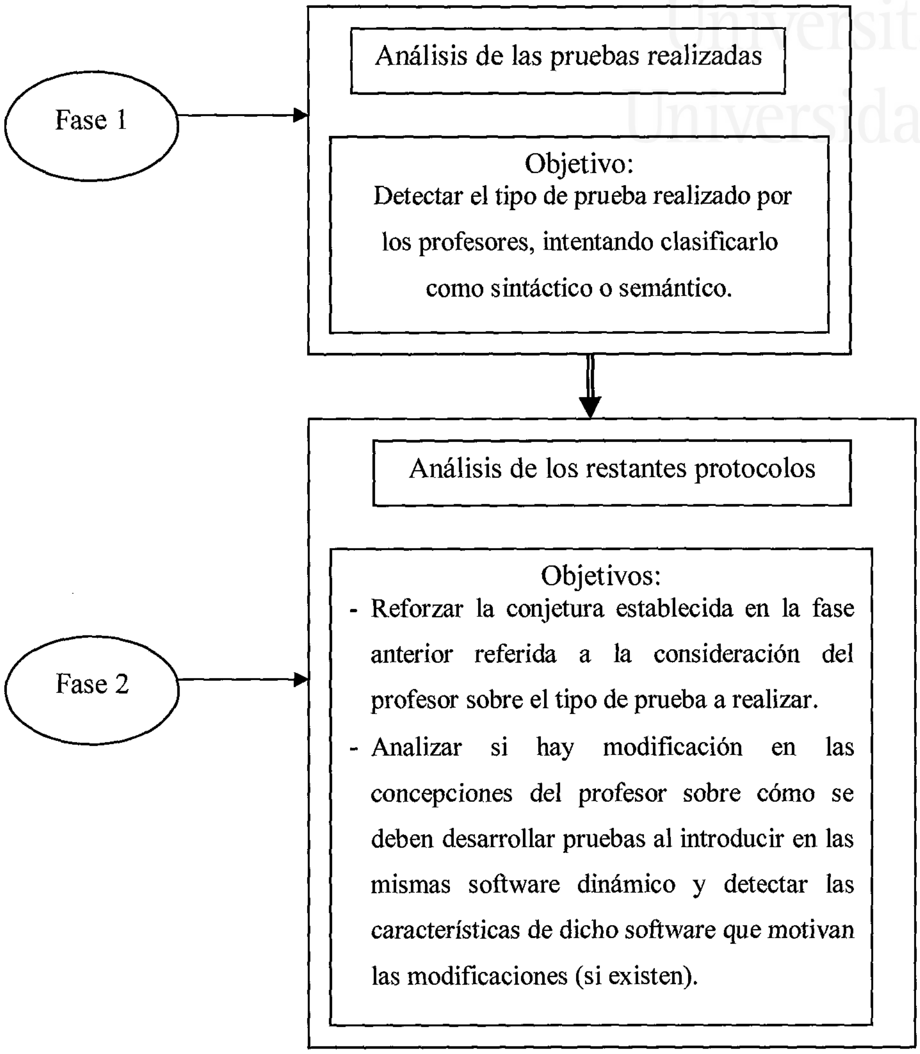


Figura II.4.4-1 Fases del análisis de la forma de probar.

Para organizar este análisis se utilizó una tabla (Figura II.4.2.-2) análoga a la usada para analizar las concepciones de los profesores sobre la prueba. Si bien, para analizar las pruebas realizadas por los profesores se ha introducido, en caso necesario, una pequeña variación que consiste en sustituir la columna de conjeturas por observaciones. Al final de la tabla se agrega una fila para incluir las conjeturas correspondientes a todos los segmentos de texto a nivel global, de modo que se obtiene, de esta forma, una visión en conjunto de las características del proceso de prueba realizado por cada profesor.

Se presenta, a continuación, un ejemplo del análisis de los protocolos procedentes de la profesora Eva. En ellos se puede observar cómo la profesora realiza un proceso lógico-deductivo, en el que utiliza agrupaciones y esquemas en un intento de hacer más clara y explicativa su prueba, manifestándose posteriormente favorable al uso de herramientas que permitan comprender mejor el contenido matemático presente en el proceso y descubrir relaciones y propiedades que sugieran formas de resolver el problema.

<table>
<tr><td>Fecha:
15-11-2003</td><td>Nombre del profesor: Eva</td><td>Lugar: 1ª carpeta de entrega</td><td colspan="2">Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia: Resolución de la actividad "Resolución de problemas de probar"</td></tr>
<tr><td colspan="4">Número y tipo de intervención:</td><td>Título de la intervención:</td></tr>
<tr><td colspan="3">PROTOCOLO</td><td>SEGMENTOS DE TEXTO</td><td>OBSERVACIONES</td></tr>
<tr><td colspan="3">"• Los puntos G y B dividen a MR en tres partes congruentes $\Rightarrow MG=GB=BR$
• Los puntos G y P dividen al segmento AC en tres partes congruentes $\Rightarrow AG=GP=PC$.
• $AG=BG$ (Hipótesis)</td><td>Hipótesis</td><td>Aparecen las hipótesis al principio</td></tr>
<tr><td colspan="3">Veamos que los triángulos ABC y PMR son semejantes $\Rightarrow \hat{R}=\hat{C}$

Procedimiento:

$MR=3GB=3AG=AC \Rightarrow MR=AC$</td><td>Veamos que los triángulos ABC y PMR son semejantes $\Rightarrow \hat{R}=\hat{C}$</td><td>Indica la relación en la que se va a apoyar para llegar a la tesis.
Aparece la tesis de manera explícita y clara</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\boxed{\left.\begin{array}{r} AG=GP \\ BG=GM \\ \hat{G} \text{ es común a los triángulos } ABG \text{ y } PMG \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Los triángulos } ABG \text{ y } PMG \\ \text{son semejantes y la razón} \\ \text{de semejanza es } 1 \end{array}}$$</td><td>A=P (por construcción geométrica)
$\hat{P}=\hat{M}$ (por ser el triángulo PMG isósceles)</td><td>Indica las causas de cada resultado</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\Downarrow$$ $$AB=PM$$
$$\left.\begin{array}{r} \hat{A}=\hat{P} \text{ (por construcción geométrica)} \\ \hat{P}=\hat{M} \text{ (por ser el triángulo } PMG \text{ isósceles)} \end{array}\right\} \hat{A}=\hat{M}$$
Luego hemos demostrado que:
$$\boxed{\left.\begin{array}{r} MR=AC \\ AB=PM \\ \hat{A}=\hat{M} \end{array}\right\} \text{Los triángulos } ABC \text{ y } PMR \text{ son semejantes, luego:}} \hat{R}=\hat{C}$$
Nota: Los recuadros verde y azul han sido agregados por la investigadora para poder hacer referencia a ellos, pero no estaban incluidos en la producción original de la profesora a la que pertenece el protocolo.</td><td>Recuadros verde y azul.</td><td>Agrupa relaciones y enlaza con sus implicaciones</td></tr>
<tr><td colspan="5">CONJETURAS
Para realizar la prueba, la profesora sigue un procedimiento deductivo en el que procede desde las hipótesis, aplica definiciones, propiedades y relaciones para llega a verificar la tesis. Las hipótesis aparecen agrupadas al principio del proceso (recuadro verde) y la tesis aparece resaltada como final del mismo (recuadro azul). Especifica, también al principio, lo que pretende hacer para llegar a concluir con la igualdad pedida. Organiza su demostración de forma esquemática, agrupando las relaciones que conducen a cada resultado parcial, de modo que se pueden apreciar con claridad las causas de cada uno de esos resultados. Consideramos que son características propias de una prueba semántica.</td></tr>
</table>

Figura II.4.4.-2 Ejemplo de análisis de protocolos pertenecientes a la profesora Eva

Para obtener inferencias sobre la forma de probar de cada profesor, lo primero que se ha hecho es buscar entre sus protocolos alguna actividad en la que haya realizado una prueba. En el caso de la profesora Eva, se ha desglosado el protocolo obtenido en segmentos de texto y se han observado indicadores de un proceso lógico-deductivo: procede desde las hipótesis, utiliza reglas lógicas y se apoya en propiedades y teoremas ya demostrados para intentar llegar a establecer la validez de la tesis. Además, se ha intentado detectar si en el proceso aparecen rasgos que permitan inferir que la profesora ha creado "instantáneas" que le hayan permitido desarrollar una prueba en la que se explique el contenido de las definiciones y de las propiedades y relaciones utilizadas, además de sus implicaciones y de las consecuencias de haber procedido de esa determinada forma. En el cuadro de la Figura II.4.4.-2, se indican las conjeturas del análisis de la demostración de la actividad "Resolución de problemas de probar" de la profesora Eva. De cada uno de los segmentos de texto en los que se ha dividido el protocolo se obtienen unas observaciones referentes a la aparición de características de un proceso lógico-deductivo en el que se intenta explicar lo que se hace y adonde conduce, de manera que se entiende mejor el significado del contenido matemático del proceso y del resultado obtenido con su manipulación. Estas observaciones nos llevan también a conjeturar que la profesora Eva intenta realizar una prueba semántica. Con la formulación de conjeturas se concluye la primera fase del análisis de los datos de cada profesor. Posteriormente, en la segunda fase del análisis, se intentan reforzar las conjeturas obtenidas para convertirlas en inferencias, a través de la búsqueda de otros protocolos en los que aparezcan indicadores de esos mismos hechos. En el ejemplo de la profesora Eva, los protocolos encontrados aparecen en los cuadros de las figuras II.4. 4.-3, II.4. 4.-4 y II.4. 4.-5.

<table>
<tr><td>Fecha:
15-11-2003</td><td>Nombre del profesor:
Eva</td><td>Lugar: 1ª carpeta de entrega</td><td colspan="2">Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia: Actividad 2 (Se resuelve de nuevo la actividad "Resolución de problemas de probar" con la ayuda de software dinámico.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Número y tipo de intervención:</td><td colspan="2">Título de la intervención:</td></tr>
<tr><th colspan="2">PROTOCOLO</th><th colspan="2">SEGMENTOS DE TEXTO</th><th>CONJETURAS</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">"Si nuestros conocimientos los ponemos al servicio de este programa, es decir, trabajamos con interactividad pero ayudándonos de los conceptos geométricos que conocemos el rendimiento obtenido será mejor. Luego, debemos partir siempre de nuestros conocimientos para resolver cualquier problema y apoyarnos en la interactividad del programa que nos facilitará la resolución"</td><td colspan="2">Si nuestros conocimientos los ponemos al servicio de este programa, es decir, trabajamos con interactividad pero ayudándonos de los conceptos geométricos que conocemos el rendimiento obtenido será mejor.</td><td>Unión de conocimiento previo e interactividad para resolver problemas de probar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Luego, debemos partir siempre de nuestros conocimientos para resolver cualquier problema y apoyarnos en la interactividad del programa que nos facilitará la resolución"</td><td>Se repite la misma idea pero extendiendo esa unión a la resolución de cualquier problema.</td></tr>
</table>

Figura II.4.4.-3 Ejemplo del análisis de los protocolos procedentes de la profesora Eva

<table>
<tr><td>Fecha:
15-11-2003</td><td>Nombre del profesor:
Eva</td><td>Lugar: 1ª carpeta de entrega</td><td>Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia: Proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de prueba</td></tr>
<tr><td colspan="2">Número y tipo de intervención:</td><td colspan="2">Título de la intervención:</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROTOCOLO</td><td>SEGMENTOS DE TEXTO</td><td>CONJETURAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">"El proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de prueba con alumnos de Secundaria se ve favorecido con el uso de software dinámico, ya que la interactividad facilita que los alumnos puedan investigar hasta llegar a la respuesta correcta"</td><td>"El proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de prueba con alumnos de Secundaria se ve favorecido con el uso de software dinámico, ya que la interactividad facilita que los alumnos puedan investigar hasta llegar a la respuesta correcta"</td><td>La interactividad que permite el uso de software dinámico favorece la investigación y ayuda a resolver actividades de prueba.</td></tr>
</table>

Figura II.4.4.-4 Ejemplo del análisis de los protocolos procedentes de la profesora Eva

<table>
<tr><td>Fecha:
15-11-2003</td><td>Nombre del profesor:
Eva</td><td>Lugar: 2ª carpeta de entrega</td><td>Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia: "Software dinámico. Procesos de prueba" Referencia a las diferentes formas de probar el teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Número y tipo de intervención:</td><td colspan="2">Título de la intervención:</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROTOCOLO</td><td>SEGMENTOS DE TEXTO</td><td>CONJETURAS</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">"Desde el punto de vista didáctico, mi opinión es que la prueba más ilustrativa y con la que mejor pueden entender los alumnos la demostración de este teorema, así como poder comunicarla es el applet del enlace 2. El alumno puede manipular, arrastrar...
Las versiones dinámicas tienen la ventaja de que los alumnos pueden interactuar... y la interactividad, les ayudará a razonar acerca de las propiedades geométricas en que se basa su demostración".</td><td>"Desde el punto de vista didáctico, mi opinión es que la prueba más ilustrativa y con la que mejor pueden entender los alumnos la demostración de este teorema, así como poder comunicarla es el applet del enlace 2. El alumno puede manipular, arrastrar..."</td><td>Los procesos de prueba realizados con la ayuda de software dinámico son más fáciles de comprender y de comunicar

La característica de dicho software que lo permite es la manipulación.</td></tr>
<tr><td>Las versiones dinámicas tienen la ventaja de que los alumnos pueden interactuar...</td><td>El software dinámico permite la interacción con el problema.</td></tr>
<tr><td>...la interactividad, les ayudará a razonar acerca de las propiedades geométricas en que se basa su demostración.</td><td>La interactividad ayuda a razonar acerca del contenido matemático presente en el proceso de prueba.</td></tr>
</table>

Figura II.4.4.-5 Ejemplo del análisis de los protocolos procedentes de la profesora Eva

En las tablas observamos que se refuerza la conjetura de que la profesora Eva es favorable al desarrollo de pruebas semánticas, por sus producciones en diversos momentos y situaciones, en las que hace referencia a la prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje y al uso de herramientas dinámicas como medio de poder, en todos los casos, investigar a través de la manipulación sobre objetos y conceptos matemáticos e interactuar con el contenido del problema de manera que se facilite razonar sobre dicho contenido y sobre las consecuencias de la manipulación llevada a cabo, sirviendo ello de apoyo al razonamiento y a las conclusiones que se derivan del uso del conocimiento previo por parte de la persona que realiza la prueba. Consecuencia de todo ello es la realización de procesos más explicativos y fáciles de comunicar. Finalmente, observamos que la profesora Eva manifiesta la necesidad de concluir también en el aula, con el desarrollo de procedimientos lógico-deductivos (cuadro de la Figura II.4.4.-6). Los instrumentos de análisis utilizados nos sirven también para reforzar la conjetura inicial referente al desarrollo de pruebas semánticas y darle categoría de inferencia.

<table>
<tr><td>Fecha:
15-11-2003</td><td>Nombre del profesor:
Eva</td><td>Lugar:
1ª carpeta de entrega</td><td colspan="2">Título de la actividad o aspecto al que se hace referencia: Sobre los beneficios de iniciar los procesos de prueba experimentando con software dinámico.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Número y tipo de intervención:</td><td colspan="2">Título de la intervención:</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>PROTOCOLO</u></td><td colspan="2"><u>SEGMENTOS DE TEXTO</u></td><td><u>CONJETURAS</u></td></tr>
<tr><td colspan="2">"El profesor debe exigir que una vez realizada la prueba con el software interactivo la presenten escrita en papel y explicitando cuáles son los contenidos matemáticos que han empleado en el proceso de resolución".</td><td colspan="2">"El profesor debe exigir que una vez realizada la prueba con el software interactivo la presenten escrita en papel y explicitando cuáles son los contenidos matemáticos que han empleado en el proceso de resolución".</td><td>Los estudiantes deben acabar cualquier proceso de demostración de manera lógico-deductiva.</td></tr>
</table>

Figura II.4.4.-6 Ejemplo del análisis de los protocolos procedentes de la profesora Eva

Tanto en el estudio de las concepciones sobre la prueba como en el de las formas de probar de los profesores, con el fin de confirmar la veracidad de las conjeturas establecidas y de modo que las inferencias derivadas de ellas se ajusten a las interpretaciones realizadas, cada segmento de texto, en la primera fase del análisis de contenido, fue analizado repetidas veces, en diferentes momentos. Además, para asegurar la fiabilidad de los resultados se efectuó una triangulación de dos formas diferentes: a través de la segunda fase del análisis, buscando protocolos que contuvieran nuevos segmentos de texto que apoyaran las conjeturas y permitieran agruparlas en función del contenido (Clement, 2000; Cobb y Whitenack, 1996; Llinares, 1991) y mediante el estudio de los mismos protocolos por varios miembros del grupo de investigación. Primero se analizaron los protocolos a nivel individual y después se llevó a cabo una puesta en común conjunta donde cada una de las inferencias fue revisada y contrastada para poner de manifiesto las coincidencias y divergencias y obtener así resultados más objetivos y fiables. Después de realizar las dos fases del análisis, con el fin de facilitar la elaboración del informe de resultados y asegurar una mayor fiabilidad del mismo, se redactó, para cada uno de los casos, un documento que contenía todas las inferencias obtenidas con relación a todos los aspectos analizados.

II.5. Análisis de la forma de participar en los foros virtuales de debate.

Además del análisis de contenido de las producciones de los profesores, se ha analizado su forma de intervenir en los foros virtuales de debate. La finalidad de este análisis es la de completar el análisis de contenido a través de una triangulación de datos. Se pretende obtener información sobre los tipos de interacciones e influencia de las mismas en las concepciones de los profesores sobre la prueba. Ello se hace intentando establecer si se ha desarrollado una negociación de significados entre los profesores participantes en los foros, que haya llegado a influir en su forma de demostrar o en sus creencias y conocimiento sobre el significado de la demostración.

Como se ha dicho en el apartado II.2.2. relativo a las características del módulo "Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas", tanto en la segunda edición como en la cuarta, los profesores han intervenido en tres foros. En la segunda edición la apertura de cada foro se distanció de la del anterior en tres o cuatro días. En la cuarta edición se abrieron los tres foros a la vez para no detener el trabajo de los profesores participantes más adelantados. Los profesores podían intervenir desde el principio en cualquiera de los tres foros. No era obligatorio ni necesario haber participado en el anterior para poder intervenir en un foro determinado. De ahí que la mayor o menor participación en un foro o en otro no ha podido estar determinada por la fecha de apertura del mismo o por el tiempo que ha estado abierto. Lo que sí es preciso tener en cuenta es que para poder responder a las preguntas formuladas en los foros era necesario haber realizado previamente las actividades a las que se alude en los mismos.

II.5.1. Descripción de las categorías y representación de las interacciones.

Para determinar la clase de intervención producida se analiza la forma de participar y se utilizan las siguientes categorías y siglas (Rey, Penalva y Llinares, 2004):

- *PR- Preguntas de reflexión:* Son preguntas que requieren una respuesta meditada y razonada. Estas preguntas pueden ser formuladas por cualquier participante del foro. También con este tipo de preguntas, la moderadora abre los foros y también las utiliza, una vez iniciado el debate si considera que el contenido de las intervenciones requiere plantear nuevas cuestiones para obtener nueva información útil para todos o si ya no hay más intervenciones referidas a las preguntas con las que se abrieron los foros y considera que hay que dar un nuevo giro para promover nuevas intervenciones. Un profesor también puede realizar una pregunta de reflexión a algún compañero en particular, a todos o, incluso, a la moderadora.

- *RS- Respuestas:* Son respuestas a preguntas de cualquier tipo en las que se utilizan argumentos de manera razonada. No se consideran respuestas las que se realizan exclusivamente para aclarar algún aspecto de una intervención previa.
- *PA- Preguntas de aclaración:* Son las preguntas que plantean los profesores o la moderadora, solicitando se dé una explicación referente al contenido de una intervención previa o de alguna de las cuestiones surgidas en las preguntas con las que se han abierto los foros. Estas preguntas pueden estar dirigidas a algún participante concreto, a la moderadora o a cualquier profesor que quiera responderlas.
- *RA- Respuestas de aclaración:* Se considera que se da este tipo de respuesta cuando al contestar una determinada cuestión, sea del tipo que sea, la finalidad de la información que contiene es la de aclarar un argumento presentado con anterioridad. La respuesta se puede dirigir a quien ha formulado la pregunta o a todos los participantes si así se considera oportuno por su interés general.
- *CL- Clarificación:* Intervención que sirve para ampliar o explicar mejor algún aspecto de alguna aportación anterior propia o ajena, o para presentar información relevante sobre alguno de los temas que se están considerando.
- *D- Disconformidad:* Son intervenciones de los profesores o de la moderadora en las que se manifiesta disconformidad hacia parte del contenido de alguna de las aportaciones presentadas con anterioridad.
- *RF- Refutación:* Son intervenciones de los profesores o de la moderadora en las que se rechaza con argumentos parte del contenido de alguna de las intervenciones previas.
- *RD- Refrendo:* Son intervenciones de los profesores o de la moderadora en las que se manifiesta acuerdo o apoyo a alguna de las intervenciones

anteriores, no sólo expresando la misma opinión sino mencionando el nombre o haciendo clara referencia a la persona con la que se muestra de acuerdo.

Para visualizar la forma de las participaciones de los profesores en los foros se utiliza una representación gráfica secuencial-temporal (Hara et al., 2000; Kumpulainen y Mutanen, 2000), basada en el modelo de "cadenas conversacionales" de Rey, Penalva y Llinares (2004). Una cadena conversacional es una serie de interacciones en las que hay un intercambio de opiniones entre los participantes. En la representación gráfica de las cadenas conversacionales también se representan las intervenciones de la moderadora del foro y se indican las categorías de las intervenciones. Para evitar que se descontextualicen y pierdan su significado dentro del conjunto de las intervenciones, las cadenas conversacionales se incluyen dentro de la representación gráfica de todas las intervenciones e interacciones ocurridas en el foro. En la Figura II.5.1.-1, se muestra un ejemplo

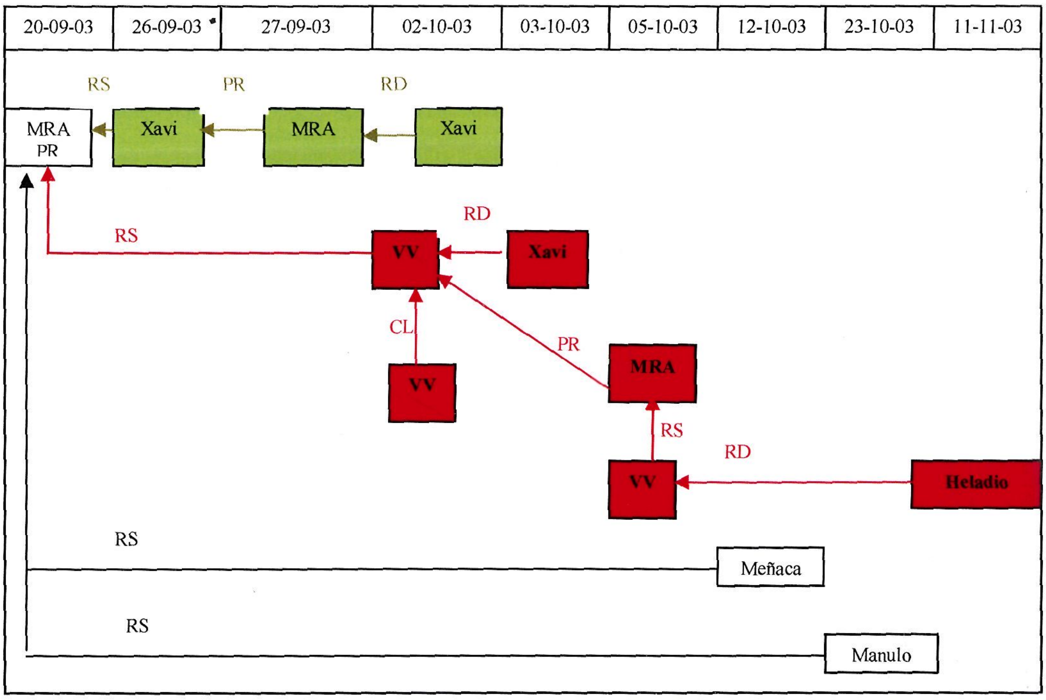


Figura II.5.1.-1 Ejemplo: 2ª Edición, Grupo B, intervenciones en el primer foro.

La estructura de las representaciones gráficas de intervenciones e interacciones es la siguiente:

- En la primera fila aparecen columnas que incluyen la fecha de apertura del foro y las fechas en que realizan las intervenciones los profesores y la moderadora.
- Situados en la columna correspondiente aparecen recuadros con las siglas o nombres de las personas que intervienen o que interaccionan.
- Las flechas que enlazan recuadros conteniendo siglas, nos indican la persona que interviene y a quién dirige su intervención o interacción.
- Además, de las siglas de identificación de los profesores y de la moderadora (MRA), aparecen otras abreviaturas que pueden estar situadas o bien sobre las flechas o dentro de los recuadros debajo de las siglas de identificación de los profesores. Representan el tipo de intervención o interacción que se produce. Si se produce una intervención esperando respuesta de todos los participantes, las siglas que representan la categoría de la intervención aparecen dentro del recuadro correspondiente a la persona que interviene. Si, por el contrario, la intervención demanda respuesta de una persona concreta, las siglas aparecen situadas sobre o en medio de la flecha que enlaza a la persona que interviene con la persona a la que se dirige. El sentido de la flecha va desde la persona que interviene hacia la persona a la que se va dirigida la intervención o interacción.
- Dentro de estas representaciones gráficas se sitúan, en colores diferentes, las cadenas conversacionales, cuando las hay.

II.5. 2. Fases del análisis de la participación en los foros.

El análisis empieza recogiendo información sobre los participantes, la fecha en la que han intervenido y el tipo de intervención que se ha producido, (argumentación, réplica o contrarréplica). La información se plasma en una tabla (Figura II.5.2.-1) a la que se agregan los títulos de las intervenciones, con el fin de localizarlas posteriormente de la forma más rápida posible. La información recogida permite obtener una impresión global del número de intervenciones y de los profesores implicados en ellas.

Argumentaciones	Réplicas	Contrarréplicas
Xavi 26/09/2003 Actividad Nociones de prueba	Moderadora 27/09/2003 Réplica a Xavi	Xavi 02/10/2003 Tienes razón
VV 02/10/2003 Solución a la actividad	Moderadora 05/10/2003 Reflexionar al comunicar	VV 05/10/2003 Se ve que no entendí la pregunta
	Xavi 03/10/2003 ¡Muy bien!	
	VV 02/10/2003 Símbolo de congruencia	
Meñaca 12/10/2003 Por fin puedo dar una opinión		
Manulo 23/10/2003 Metacognición	Heladio 11/11/2003 Resolución de problemas	

Figura II.5.2.-1 Tabla de la información recogida. Fuente 1° Foro, grupo B, 2ª Edición

En el esquema de la Figura II.5.1.-1 se recogen once intervenciones, de las que siete son interacciones (cinco réplicas y dos contrarréplicas). La argumentación del profesor Xavi recibe la réplica de la moderadora, a la que responde con una contrarréplica. La argumentación del profesor VV provoca tres réplicas, una de la moderadora y dos de compañeros. VV sólo responde a la moderadora. El profesor Meñaca argumenta, sin provocar la réplica. Por último, el profesor Manulo argumenta y es replicado por el profesor Heladio.

A partir de la información anterior se busca por orden cronológico el protocolo correspondiente al título de cada intervención y se identifica su contenido de acuerdo a las categorías de Rey, Penalva y Llinares (2004). La información recogida junto con la identificación de las categorías de las intervenciones se ha utilizado para la elaboración de la representación gráfica que sirve para describir las interacciones y las cadenas conversacionales producidas. Una vez completada la representación gráfica se realiza el estudio de las aportaciones, analizando todas las interacciones producidas en torno a una intervención, con el fin de detectar si hay discusión e intercambio de opiniones. En este caso constituyen una cadena conversacional y en la representación gráfica se marca con otro color (la primera cadena conversacional detectada en verde, la segunda en rojo, la tercera en azul...). Se ha estudiado si las interacciones que determinan cada cadena conversacional han producido negociación de significados, sobre qué aspectos se ha producido dicha negociación, y si la misma ha conducido a alguna modificación en las concepciones de los profesores sobre la prueba o en las consideraciones de cómo se deben realizar las pruebas. Las inferencias a las que se llega se ilustran con segmentos de texto.

Se muestra, a continuación, un ejemplo de cómo se ha realizado este tipo de análisis a partir de la representación gráfica recogida en la Figura II.5.1.-1 que se corresponde con la información que se presenta en la Figura II.5.2.-1.

La fecha de apertura de este foro se produjo el 20 de septiembre de 2003 y en él participaron 5 profesores, Xavi, VV, Meñaca, Manulo y Heladio. El primero en intervenir lo hizo el día 26, 6 días después de haberse abierto el foro. El siguiente profesor en intervenir lo hace el día 2 de octubre, 12 días después de la apertura del foro. Los restantes profesores tardarán mucho más en intervenir, uno de ellos lo hace a los 22 días, otro a los 32 días y el último a los 52 días, ya en el límite de cierre del módulo. Todos los profesores responden las preguntas de apertura del foro, excepto uno de ellos, Heladio, que sólo interviene para refrendar la intervención de su compañero VV.

Las preguntas de apertura de este foro hacen referencia a la forma de proceder de los profesores para resolver la actividad "Resolución de problemas de probar". El primer profesor que interviene es Xavi para responder las preguntas de apertura del foro. La moderadora reclama su atención sobre la forma en que ha demostrado la igualdad de la actividad que se está considerando (el profesor utilizaba un teorema que complicaba en exceso el desarrollo del proceso de prueba de manera innecesaria, porque se podía resolver con más sencillez y brevedad). Después de la intervención de la moderadora, el profesor parece reflexionar sobre lo realizado, reconoce lo que se le dice (Xavi, 1º foro, Grupo B: *¡Tienes razón! Vaya me compliqué un poco la existencia. Ya me acostumbra a pasar, ...A ver si aprendo a simplificar las cosas")* y, además, elabora otra demostración mucho más sencilla que presenta en la carpeta de entrega correspondiente, aunque ya no la expone en el foro.

Se considera que se forma una cadena conversacional porque a través del diálogo que se produce entre profesor y moderadora, el profesor reflexiona sobre su forma de probar, y cambia su manera de actuar.

El profesor VV, responde a las cuestiones del foro y hace una aclaración a su propia intervención corrigiendo un error de aparición de un símbolo, lo que muestra su interés por hacerse entender.

VV, 1º foro, Grupo B: *"Acabo de comprobar que el símbolo de congruencia ha sido sustituido por una bolita que no significa nada. Por favor, sustituidlo mentalmente por lo que es. Gracias".*

El profesor VV al responder a las preguntas iniciales del foro provoca otra cadena conversacional en la que se implican dos profesores más y la moderadora. Con su intervención se muestra de acuerdo con el profesor Xavi, que después de su interacción con la moderadora se muestra sensible a las soluciones sencillas y claras (*"¡Muy bien!, Me ha encantado la simpleza con la que has explicado y has buscado la solución, enhorabuena..."*). La moderadora plantea al profesor VV una pregunta referente a su manifestación de no encontrar diferencia entre hacer una prueba y comunicarla (*"No creo que haya ninguna diferencia entre la forma de resolverlo y la de transmitirlo"*) y él responde cambiando de opinión (*"Claro que tienes razón...explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados. Hace muchos años que tengo conciencia de que enseñando se aprende mucho"*). Esta respuesta recibe el refrendo del profesor Heladio que, además, hace referencia a lo interesante de conocer y tratar de entender las formas de resolución de los demás (*"Creo que aunque utilicemos las misma técnicas o 'fórmulas para resolver algún problema la forma de trabajo de cada persona es diferente ya que considero que todos tenemos diferentes formas de razonar, 'por aquello de que cada cabeza es un mundo' y lo interesante de esto es conocerlas y tratar de entenderlas, o como dijo Vicente 'enseñando se aprende mucho'"*). En este grupo de interacciones hay intercambio de opiniones referente a si hay diferencia entre realizar una prueba y comunicar el proceso que se ha seguido para realizarla y se ha llegado a acuerdo en que sí hay diferencia entre ambos procesos, ya que la comunicación requiere explicar lo que se ha hecho, lo que supone reflexión y aprendizaje también para el que transmite. Los profesores Meñaca y Manulo responden a las preguntas de apertura del foro sin hacer referencia a las intervenciones de los compañeros y no se implican en las cadenas conversacionales que se producen.

II. 6. Organización de los resultados.

Después de analizar el contenido de las producciones de cada profesor con el fin de identificar concepciones sobre la prueba, distinguiendo entre la prueba considerada como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, la información obtenida se ha estructurado en 12 casos. El informe de resultados de cada caso se ha organizado (Figura II.6.-1) indicando en primer lugar la principal función o funciones de la prueba para cada profesor desde el doble punto de vista de proceso matemático y objeto de enseñanza-aprendizaje y después aparecen las restantes concepciones que se han inferido. Se reflejan a continuación las consideraciones del profesor sobre la introducción de software dinámico en la ejecución de procesos de prueba y la modificación de sus concepciones, si la hay. Las características de dicho software a las que el profesor otorga una mayor relevancia aparecen ligadas a las funciones de la prueba con las que el profesor las relacione, distinguiendo de nuevo entre los aspectos de proceso matemático y objeto de enseñanza-aprendizaje, y especificando para este último caso el papel que el profesor investigado considera que debe desempeñar el docente al incorporar dicho software al trabajo con procesos de prueba en el aula. El último análisis de los datos se refiere a la forma en que cada profesor realiza sus pruebas o cree que se deben realizar. Se indican también las consideraciones de cada profesor sobre la utilidad del software dinámico a la hora de ayudar en la creación de "instantáneas" que permitan desarrollar procesos de prueba más significativos y explicativos, así como las características del mismo que lo hacen posible.

A continuación se muestra un esquema que visualiza cómo se elabora el informe para cada profesor participante.

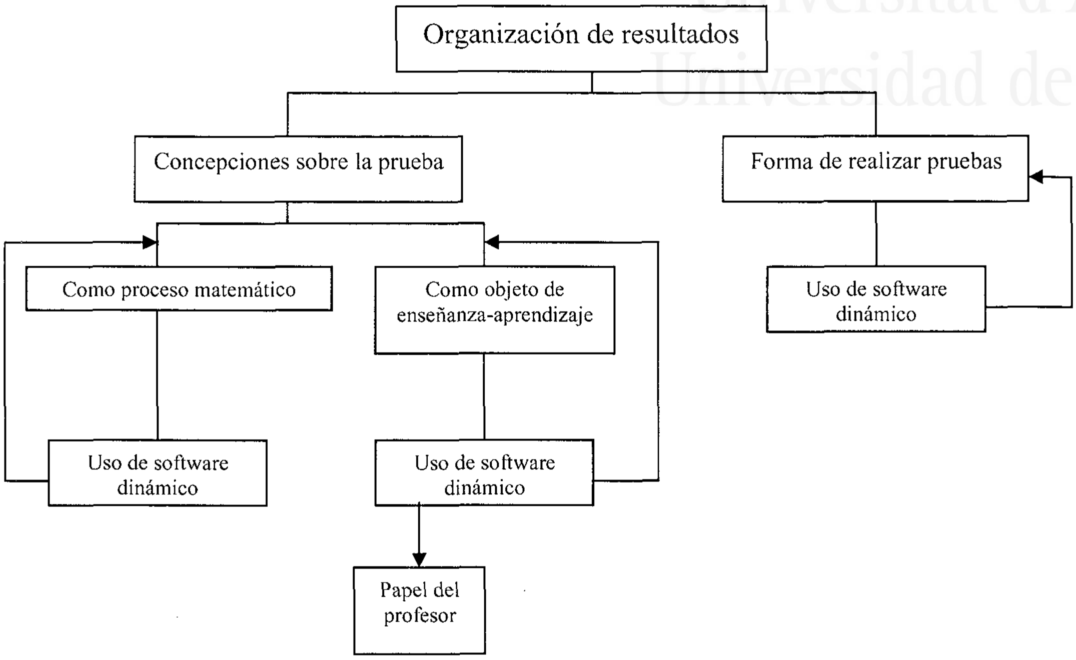


Figura II.6.-1 Organización de resultados

La consideración del uso de software dinámico como elemento que promueve y potencia determinadas funciones de la prueba aparece también en el informe de resultados, haciéndose mención al papel que el profesor asigna al docente.

El informe que se ha elaborado para cada profesor, incluye, después de cada inferencia o grupo de inferencias relacionadas, segmentos de texto o protocolos como ejemplo. Con el fin de sintetizar y mostrar las concepciones identificadas sobre la prueba de cada profesor, desde los puntos de vista, proceso matemático y objeto de enseñanza-aprendizaje, se muestra un ejemplo de gráfico elaborado, Figura II. 6.-2, cuyas características se describen posteriormente.

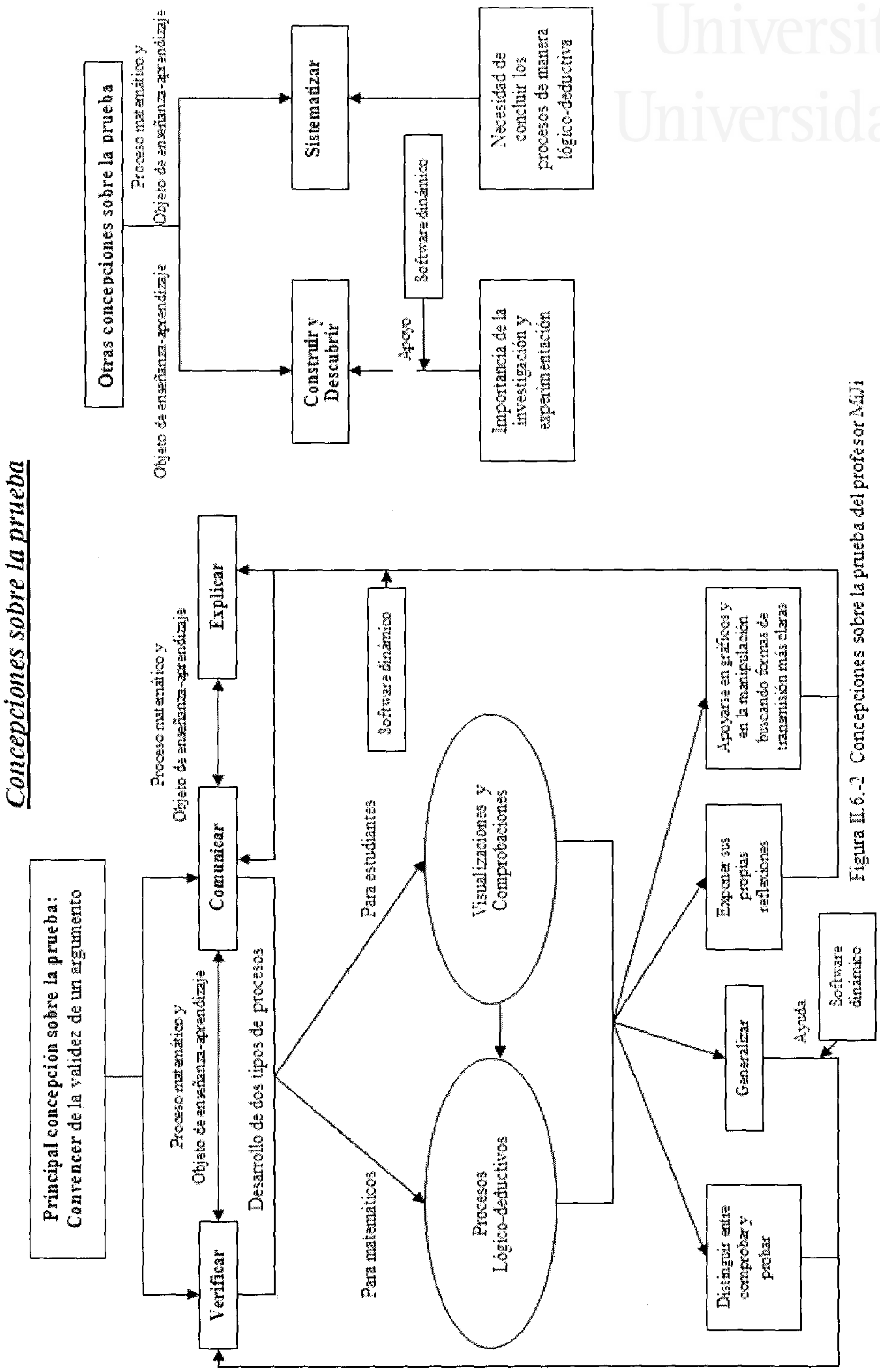


Figura II.6.-2 Concepciones sobre la prueba del profesor MJi

Los distintos elementos que se han utilizado para realizar esta representación gráfica, son los siguientes:

La principal concepción (entendida como la concepción manifestada por el profesor con más insistencia en su producción y que ha generado más indicadores) aparece en el primer recuadro superior izquierdo. Las restantes concepciones aparecen situadas en recuadros a la derecha.

Las categorías aparecen dentro de recuadros y en negrita. Los indicadores de las mismas aparecen también dentro de recuadros pero sin resaltar.

La doble flecha que, a veces, enlaza categorías se utiliza para unir aquellas cuyos significados parece que se relacionan en las concepciones manifestadas por el profesor.

Con una flecha enlazamos los indicadores encontrados en la producción del profesor (han permitido inferir que una determinada categoría se encuentra entre sus concepciones).

Los procesos de prueba que los profesores creen que se deben llevar a cabo para desarrollar una determinada categoría se representan mediante elipses. En algunas ocasiones, los procesos aparecen enlazados con una flecha que puede ser continua o discontinua. Si la flecha es continua, queremos indicar que el profesor considera que primero se debe ejecutar un proceso y después concluir con el otro. Con flecha discontinua indicamos que el profesor considera que puede ser suficiente realizar sólo el primer proceso.

La interpretación del gráfico que se muestra como ejemplo, Figura II.6.-2, sería la siguiente:

La principal concepción sobre la prueba del profesor MiJi, considerada como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, es la de convencer de la verdad de un argumento. La idea de convencer aparece ligada a dos categorías relacionadas entre sí y que son Verificación y Comunicación.

Verificación porque considera que es necesario convencer de que un determinado argumento es cierto y Comunicación porque trata de convencer a través de la transmisión eficaz del contenido matemático implícito en el proceso de prueba. Para lograr este doble objetivo cree conveniente llevar a cabo dos tipos de procesos, según las personas con las que se vaya a trabajar o que vayan a desarrollar pruebas. Indica que para los matemáticos es necesario desarrollar procesos lógico-deductivos y que para

Volver al índice/Tornar a l´index

estudiantes es mejor comenzar con visualizaciones y comprobaciones en casos particulares, para concluir también con procesos lógico-deductivos, como así indica la flecha continua que liga ambos tipos de procesos.

En la producción de este profesor aparecen como indicadores de la categoría Verificación, la distinción entre comprobación y prueba y la búsqueda de la generalización del resultado. Para la categoría Comunicación encontramos como indicadores, el uso que hace de las representaciones gráficas, buscando formas de transmisión más claras, y la exposición de sus propias reflexiones en las pruebas que realiza. Estos dos últimos indicadores lo son también de la categoría Explicación, que se muestra en la producción de este profesor con menor relevancia y ligada a la categoría Comunicación.

La necesidad de concluir todo tipo de proceso de manera lógico-deductiva nos ha llevado a inferir que la categoría Sistematización forma también parte de las concepciones de este profesor sobre la prueba, aunque sólo se aluda a ella en el sentido que se acaba de mencionar.

La categoría Construcción y Descubrimiento de contenido matemático adquiere significado para este profesor sólo cuando considera la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. Esta categoría se manifiesta en la importancia que el profesor MiJi da a la investigación y a la experimentación previa al desarrollo de un proceso de prueba, con el fin de que el propio alumno descubra resultados.

En el desarrollo de todas estas categorías, excepto en la de Sistematización, el profesor MiJi considera el software dinámico como una gran ayuda, debido a las características visuales e interactivas del mismo, que facilitan la experimentación y el descubrimiento de propiedades y relaciones matemáticas.

CAPÍTULO III. Resultados.

III. Resultados.

En este capítulo se exponen los resultados obtenidos al analizar los datos correspondientes a las producciones de los profesores en la resolución de las actividades de prueba e intervenciones en los foros. Se presentan los 12 estudios de caso correspondientes a los profesores analizados.

El análisis de la forma de interactuar los profesores en los foros se presenta en un anexo y ha servido para triangular las inferencias obtenidas en el análisis de contenido de las producciones de los profesores. Se ha pretendido detectar la ocurrencia de discusiones e intercambio de opiniones que han podido conducir a la negociación de significados e influir en las concepciones de los profesores sobre la prueba.

III. 1. Caso 1: Profesor nº 1, IJe.

Para el profesor IJe el significado principal de la prueba es el de **Convencer de que un argumento es cierto**. IJe, al hablar de convencer hace referencia al aspecto verificador de la prueba (convencer de que el argumento en cuestión es cierto) y también hace referencia a la idea de transmitir, de manera clara y significativa para el receptor de la prueba, el contenido matemático implícito en el proceso. Para IJe una prueba sirve para **Verificar** y para **Convencer**, y por eso considera necesario proceder de diferente forma, según que las personas a las que vaya dirigido el proceso (o que hayan de trabajar con pruebas) sean matemáticos o estudiantes de primaria o secundaria. Por ejemplo, manifiesta:

> *"A veces las demostraciones mediante fórmulas matemáticas no tienen el resultado esperado en los alumnos, ya que no tienen el poder de convicción y que por lo tanto los alumnos no hacen suyo el conocimiento que adquieren".* (Segundo foro Foro).
>
> *"Aunque todas las soluciones,* (algunas de ellas son comprobaciones en casos particulares), *son válidas* (para convencer), *considero que son más de comprobación que de demostración matemática, por lo que serían fácilmente aceptadas por alumnos de nivel de secundaria pero no por matemáticos".* (Actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".)

Un aspecto al que IJe habitualmente alude es la distinción entre comprobación y prueba, que indica el carácter de la prueba como medio para verificar argumentos matemáticos. Considera que para que un argumento sea admitido como cierto, el uso de comprobaciones entre estudiantes puede ser una forma de trabajo aceptable, pero no un procedimiento con el que verdaderamente se justifique la validez de un principio matemático.

IJe también subraya la consideración de la prueba como herramienta para **Comunicar** ideas matemáticas a través de la utilización de diversos procedimientos. Para ello se apoya en el uso de representaciones gráficas, además de en la realización de comprobaciones en casos particulares.

> *"Independientemente de la manera de resolver el problema, el método de comunicarlo es lo importante, pienso que si no se comunica de tal manera que el problema sea visualizado con gráficos parciales, el proceso de aprendizaje se verá evidentemente limitado...las gráficas representan una mejor forma de convencimiento que las fórmulas matemáticas".* (Actividad 1. Primera carpeta de entrega.)

Para IJe, los procesos de probar también permiten comunicar a otros el significado del contenido matemático. Sin embargo, IJe enfatiza la idea de la importancia de potenciar los medios a través de los cuales se puede comunicar a otros el sentido de la prueba. Las representaciones gráficas (la visualización) son vistas como los instrumentos que permiten aproximarse al objetivo de "comunicar el sentido de la prueba" realizada.

Así, el software dinámico y las actividades de i-matemáticas proporcionan a IJe la manera de introducir las comprobaciones y la visualización gráfica de situaciones y conceptos matemáticos en los procesos de prueba en el aula. Por ejemplo, ante la pregunta ¿En qué medida la introducción de actividades del tipo i-matemáticas modifica la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor? y su resolución de la actividad "Resolución de problemas de probar", en la primera carpeta de entrega, IJe indica:

> *"Considero que utilizar software para matemáticas hace más interesante y sobre todo más comprensibles las matemáticas y en este caso, en particular, la enseñanza de la geometría".* (Primera carpeta de entrega.)
>
> *Al tener la capacidad de arrastrar algunos segmentos y poder incluir la visualización simultánea de las medidas de cada lado del triángulo, resulta evidente que la configuración geométrica final cumple con esta igualdad pedida".* (Actividad "Resolución de problemas de probar".)

En este contexto, IJe subraya que la visualización y las características técnicas del software dinámico, en particular el arrastre, ayudan a verificar y comunicar adecuadamente la igualdad que predice el problema.

Indicador también del carácter que para el profesor IJe tiene la prueba como medio de verificar un argumento es la utilización que hace de los procesos visuales como instrumentos que ayudan a generalizar, tanto cuando se trabaja de manera lógico-deductiva, como cuando se trabaja con estudiantes en el aula. El software dinámico es de nuevo para él, una gran ayuda en ello, ya que le sirve como medio de ayudarse a considerar y visualizar situaciones matemáticas desde diversos puntos de vista y ello le facilita la formalización y generalización del resultado.

Un ejemplo en el que se pone de manifiesto este aspecto, es su respuesta a la pregunta ¿El uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de ver y resolver el problema de la actividad?, en el que alude a su forma de resolver la prueba de la Actividad "Resolución de problemas de probar":

> *"Sí, en particular agregué nuevas líneas en la figura lo que me permitió visualizarla de otra manera y crear nuevos triángulos, y de esta manera poder aplicar el mismo teorema de ángulos internos y externos complementarios".*

Y en su referencia a las versiones dinámicas del teorema de Pitágoras, al considerar la prueba en el contexto de enseñanza-aprendizaje, IJe indica:

> *"Versión dinámica: Esta versión ofrece la capacidad de visualizar las proporciones de las áreas de cada cateto y el cumplimiento del teorema para diferentes medidas de catetos y diferentes ángulos del triángulo".*

IJe da menos relevancia a la Función de la prueba como medio para **Descubrir y Construir contenido matemático**. Para IJe, en su consideración de la prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, es importante poder experimentar, conjeturar y comprobar las conjeturas, como paso previo a la realización de la prueba. La potencia de las características gráficas y manipulativas del software dinámico aparece, en la producción del profesor IJe, como elemento relevante para ayudar a lograr el desarrollo de esta función de la prueba. Con respecto a esto, IJe, en el 2º foro hace alusión a la utilización de software dinámico para resolver la actividad 1 de la primera carpeta de entrega:

"Resulta de gran ayuda esta capacidad de arrastrar, ya que, además de ahorrar tiempo para demostraciones geométricas, pude interactuar y experimentar con diversas figuras con la finalidad de plantearme nuevas preguntas"

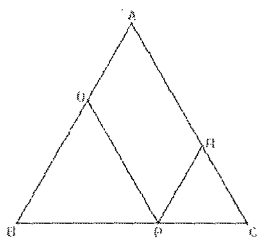
Considerada la prueba sólo como objeto de enseñanza-aprendizaje, IJe subraya el carácter antiautoritario de la misma, entendido como elemento que hace sentir al que la realiza que es capaz de razonar y obtener resultados por sí mismo:

"...el ser protagonista y comprobarlo por su propia ejecución resultará en un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje... ". (Actividad 1).

Las características gráficas e interactivas del software dinámico ocupan un papel muy importante en el desarrollo de este significado debido a la idea de prueba. Así por ejemplo, IJe propone para trabajar con alumnos de secundaria la siguiente actividad:

"La presente actividad consiste en encontrar características geométricas constantes en un triángulo isósceles y dos líneas paralelas internas:

1. *Cuando el punto P se mueve a través del lado BC del triángulo, ¿cuál es la característica geométrica constante en el mismo?*
2. *Si movemos el punto A de manera que su ángulo cambia, ¿cuál sería otra característica geométrica constante?*



Las actividades se realizan en un aula de informática, se sugiere una computadora para cada alumno...." (Actividad de evaluación.)

IJe pretende que con la ayuda del software dinámico Cabri, los estudiantes encuentren relaciones matemáticas, comprendiendo su significado e implicaciones. De esta forma, los alumnos no sólo pueden descubrir resultados sino que deben entender mejor por qué dichos resultados son ciertos. Este hecho nos permite inferir que, para trabajar en el aula, IJe utiliza la prueba con una doble finalidad: que el estudiante descubra y construya su propio conocimiento matemático, a la vez que comprende la razón de las relaciones y resultados. Por ello consideramos que, en la concepción de la prueba de IJe en el aula aparecen unidas las funciones de **Explicación** y **Construcción y Descubrimiento** de contenido-conocimiento matemático.

> *"Los alumnos, a través del software, mueven el punto P a través del lado BC. Sin adicionar longitudes a los segmentos de la figura, los alumnos proponen verbalmente constantes geométricas. Se pide a los alumnos que, a través del software, adicionen longitudes, ángulos y áreas a los segmentos y superficies que consideren importantes para encontrar constantes geométricas y nuevamente los alumnos proponen verbalmente las constantes geométricas encontradas para finalmente obtener una conclusión....y explicar las relaciones geométricas encontradas".* (Actividad de evaluación.)

La importancia que este profesor concede al software dinámico en el desarrollo de todos las funciones de la prueba en el aula, le lleva a considerar nuevas tareas para el docente: diseñar actividades apropiadas que permitan un mayor aprovechamiento de la potencia de dicho software e introducir a los estudiantes en el manejo de los programas que se vayan a utilizar. Por ejemplo, en el 3º foro en la respuesta a la pregunta *¿cuál crees que debe ser el papel del profesor al introducir software dinámico en los contextos de presentar y probar en matemáticas?*, IJe indica:

> *"...el profesor debe proporcionar una capacitación previa de los alumnos en el software que se utilizará para estos objetivos, lo que implicará un mayor tiempo y esfuerzo por parte de los alumnos, así como la modificación en el contenido de actividades del curso".*

En relación a la forma de realizar las pruebas, IJe al probar la igualdad del problema "Resolución de problemas de probar" considera que se debe proceder de manera lógico-deductiva.

> *"Si AG=BG, entonces el triángulo ABG es isósceles, y si consideramos que MP y AB son paralelas, entonces $\hat{A}=\hat{M}$ y $\hat{B}=\hat{P}$, por lo que los ángulos complementarios $\hat{R}$ y $\hat{C}$ de los triángulos ABC y MPR son iguales".*

A pesar de ello se muestra favorable al desarrollo de procesos en los que la visualización, la interacción y la experimentación puedan servir para crear "instantáneas" que ayuden a obtener resultados, lo que significa que el profesor IJe apoya la realización de **pruebas semánticas** en el proceso de aprendizaje.

En cuanto a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje, IJe se muestra a favor de procesos en los que el alumno deba investigar, conjeturar y comprobar, con la finalidad de construir y descubrir contenido matemático y de comprender mejor las relaciones e ideas matemáticas que subyacen en los conceptos y procedimientos implícitos en el proceso, si bien, en ningún momento considera necesario que los estudiantes formalicen las conclusiones y resultados a los que llegan, aspectos estos que deja para el profesor, ya que considera que al final del proceso ha de ser él quien establezca su validez general de manera lógico-deductiva:

"El profesor expone los teoremas y la generalización geométrica de las actividades". (Actividad de evaluación.)

Para IJe es más importante que los estudiantes busquen resultados y propiedades matemáticas (conjeturen) y que lleguen a entender su significado y la relación entre hipótesis y tesis, antes que formalizar con rigor. Por ejemplo, cuando resuelve la Actividad "Resolución de problemas de probar", dice:

"....el software permite agregar líneas y funciones con lo cual se crean nuevas visualizaciones y soluciones del problema. También permite ver errores de hipótesis previamente planteadas antes de utilizar el software dinámico".

A continuación reflejamos en la figura III.1. las concepciones sobre la prueba de IJe.

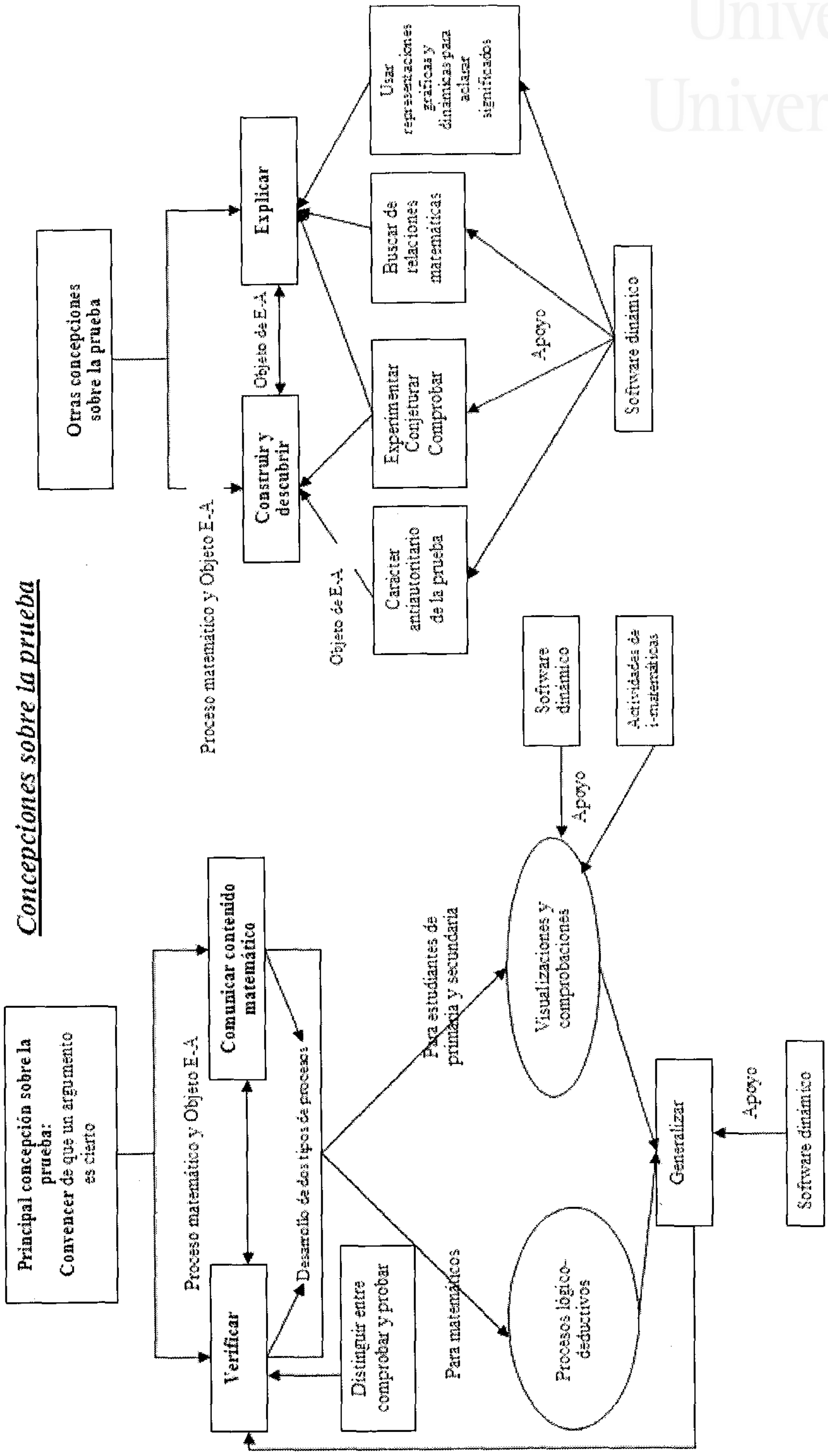


Figura III.1. Concepciones sobre la prueba del profesor He

III. 2. Caso 2: Profesor nº 2, MiJi.

El profesor MiJi concibe la prueba fundamentalmente, como una forma de **Convencer de la validez de un argumento** y ello supone para él **Verificar** ideas matemáticas y Comunicar su contenido e implicaciones. El principal indicador de este doble carácter de la prueba lo encontramos en los diversos procedimientos que cree que es necesario desarrollar para que diferentes interlocutores queden convencidos de los resultados que se les muestran o que ellos mismos obtienen. Los matemáticos necesitan procesos lógico-deductivos para admitir como válida una proposición y los estudiantes de primaria o secundaria se convencen de ello a través de comprobaciones, sobre todo de comprobaciones visuales y dinámicas.

Por ejemplo, en la respuesta a la pregunta *¿En qué medida podemos considerarlas como pruebas?*, de la actividad de la primera carpeta de entrega "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas" indica:

> *"Pueden ser pruebas porque se utilizan para convencer.... Para un alumno de secundaria podría ser suficiente la comprobación visual. Pero para un matemático es necesaria una prueba matemática basada en fórmulas."*

El siguiente ejemplo procede de la respuesta a las preguntas *¿Alguna de las soluciones propuestas puede tener distinto poder de convicción? ¿Para quién?* planteadas en la actividad anterior y en ella alude a las comprobaciones dinámicas:

> *"La solución propuesta basada en la medición puede ser más convincente para los estudiantes de primaria: La solución propuesta basada en el movimiento y la superposición podría ser más convincente para los alumnos de secundaria".*

A pesar de esta doble forma de proceder según cuáles sean los destinatarios de la prueba, MiJi, considera necesario en toda situación, concluir cualquier proceso de prueba de manera lógico-deductiva:

> *"Siempre será necesario acompañar las resoluciones de la demostración matemática, ya que también es necesario aprender el uso de las herramientas matemáticas"* (Segundo foro.)

La prueba que él mismo realiza para resolver la actividad "Resolución de problemas de probar" sigue un proceso lógico-deductivo:

> *"Si GB divide en tres partes congruentes a MR, entonces MG=GB=BR y si GP divide en tres partes iguales a AC entonces AG=GP=PC. Si AG=BG entonces*

> *AG=GP=PC=MG=GB=BR y MR=AC y GR=GC. Para que* $\hat{R}=\hat{C}$, *el triángulo RGP debe ser congruente al triángulo CGB y para que los dos triángulos sean congruentes los segmentos deben ser CG=RG y GP=GB. Y como sí son iguales todos estos segmentos, entonces* $\hat{R}=\hat{C}$ *".*

Para MiJi existe la necesidad de concluir los procesos de manera formal y rigurosa, distinguiendo entre lo que es probar y lo que es comprobar, lo que permite incidir en la Función de **Verificar** de la prueba. Un ejemplo lo encontramos en sus conclusiones al realizar la Actividad "Resolución de problemas de probar", donde expone:

> *"Si se basa en las implicaciones lógicas con los datos fuente de congruencia e igualdad se tienen respuestas exactas. Si se realizan pruebas de mediciones de distancias o ángulos no se tiene una referencia exacta sólo una aproximación geométrica".*

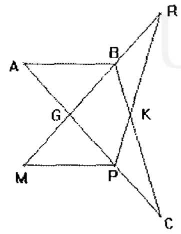
MiJi también cree que la búsqueda de la generalización del resultado se puede conseguir a través de la manipulación y de la visualización de configuraciones geométricas. Para ello el software dinámico también constituye una gran ayuda. Al resolver la actividad 2 de la primera carpeta de entrega, MiJi utiliza Cabri para construir y manipular el gráfico correspondiente a dicha actividad y de la respuesta a la pregunta *¿en qué medida la igualdad del problema se mantiene?*, obtenemos el siguiente ejemplo:

> *"Si se mantienen las condiciones iniciales del problema de la congruencia de los segmentos se observa el cambio proporcional de tamaños de los triángulos y se puede observar cómo se mantiene la dimensión de los ángulos".*

La inferencia realizada sobre el carácter que para MiJi parece tener la prueba como herramienta mediante la que se comunica contenido matemático se refuerza cuando se apoya en gráficos buscando una forma de transmitir más clara y de exponer en el proceso de transmisión de la prueba sus propias reflexiones. Así MiJi subraya la Función Explicativa de la prueba. Por ejemplo, al resolver la actividad 2 explica las conclusiones a las que llega al ir modificando la configuración geométrica relativa al problema y se observa la búsqueda de situaciones para entender mejor las relaciones y propiedades que se obtienen:

> *"...variar las dimensiones de los triángulos me permite observar la relación de dimensiones lineales y angulares...se puede observar más directamente cómo la dimensión*

del ángulo depende de la dimensión del segmento opuesto al ángulo si los lados no varían de tamaño"

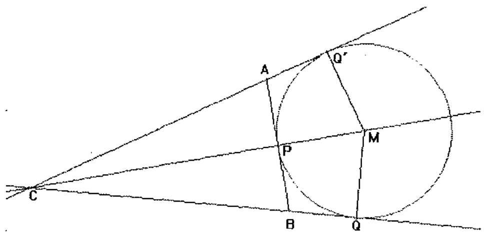


Para comunicar y explicar, MiJi utiliza el software dinámico y manifiesta la gran ayuda que las características gráficas y dinámicas del mismo proporcionan. Por ejemplo, cuando resuelve la actividad 1 hace alusión a la importancia de poder representar gráficamente la situación que se plantea en el problema y explica cómo la manipulación del gráfico ayuda a ver y a describir más fácilmente las variaciones y resultados que se van produciendo:

"El movimiento de los puntos (arrastrar) permite ver el comportamiento de las figuras geométricas, cómo crecen o decrecen en sus dimensiones, el verlo permite describir la transformación de las figuras.

1º Manteniendo sin cambiar de tamaño la recta AB, ni el radio de la circunferencia MP ni los ángulos rectos de Q y Q'. Pero dejan de ser las rectas tangentes a la circunferencia.

2º Manteniendo sin cambiar de tamaño la recta AB, cambiando el radio de la circunferencia MP para que los `puntos Q y Q, sigan siendo perpendiculares a las rectas y tangentes a la circunferencia.



Aquello que se percibe con la vista, y se observa cómo se comportan sus dimensiones y relaciones se puede describir con más facilidad que con fórmulas matemáticas".

Haciendo referencia a la prueba sólo como objeto de enseñanza-aprendizaje, MiJi subraya la idea de la prueba como herramienta mediante la que los estudiantes **Construyen y Descubren contenido matemático**, en el doble sentido de potenciar la generación de conjeturas (descubrimiento de nuevo contenido matemático) y la de dotar de sentido a relaciones matemáticas introducidas por otros, entendiendo así que los procesos de probar pueden ayudar a comprender el contenido matemático que se usa. Indicador de ello es la importancia que da a la realización de actividades que permitan investigar y experimentar como forma de ayudarse a detectar nuevas relaciones y propiedades matemáticas. Considera, además, que el software dinámico, es una herramienta útil para ello. Por ejemplo, en la actividad 3, indica:

> *"...los ejercicios de investigación pretenden a través del ensayo y error que se observen fenómenos de comportamiento y de relación, que difícilmente se observan haciendo problemas en papel. El software dinámico es una alternativa interesante para comprobar comportamientos de problemas matemáticos."*

En relación a la forma de probar del profesor MiJi, éste sigue un proceso lógico-deductivo expresado de manera simbólica. Esto junto a sus afirmaciones, en las que indica que en todos los casos se ha de finalizar con un proceso formal, apoyado en símbolos y razonamientos matemáticos, muestra su disposición favorable a las pruebas **semánticas**.

Resumimos en la figura III.2. las concepciones identificadas en este profesor sobre la prueba.

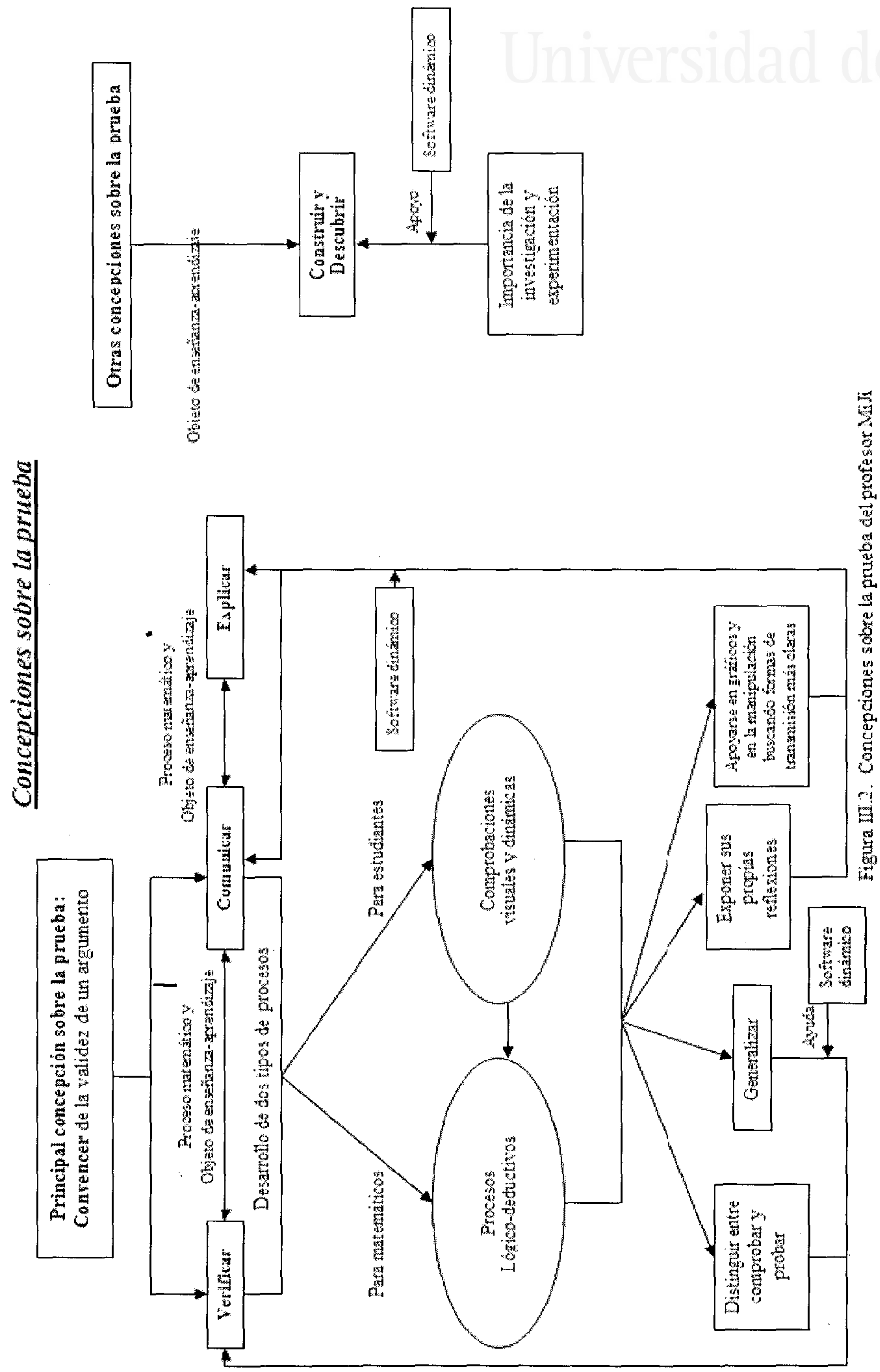


Figura III.2. Concepciones sobre la prueba del profesor MJi

III. 3. Caso 3: Profesor nº 3, Manulo.

Manulo hace referencia sólo a procesos de prueba para trabajar con estudiantes de primaria o secundaria obligatoria. En este caso, el significado de prueba que aparece a lo largo de su producción es el de **Convencer** de que el argumento o propiedad que se presenta es cierto. Ello conlleva la unión de dos categorías: **Verificación y Comunicación** del contenido matemático del proceso, de manera que se convenza de que el argumento que se prueba es cierto y a la vez se transmita el resultado y el contenido del proceso de manera eficaz y significativa. Manulo vincula la concreción de estas dos categorías al desarrollo de diferentes tipos de pruebas, destinadas a diversos tipos de interlocutores: Considera que con alumnos de primaria se ha de trabajar con comprobaciones en casos particulares, y que con estudiantes de secundaria es preciso seguir un proceso inductivo buscando la generalización de los resultados.

Por ejemplo, en la resolución de la actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas", indica:

> *"La primera solución* (que consiste en medir lados y ángulos sobre el gráfico) *es válida para niños de primaria, que aceptarán sin problemas la prueba dada: medir con regla o recortar los triángulos y moverlos uno encima del otro. Esta solución no satisfará tanto a alumnos de la ESO que tienen más armas para llegar a una demostración más general."*

A pesar del poder de convicción que para los estudiantes tienen las comprobaciones en casos particulares, Manulo reconoce la imprecisión de las mismas:

> *"Lo que ocurre es que esta solución* (medir ángulos y lados) *resuelve un caso particular y podemos arrastrar muchos errores..."* (Actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas.)

Para este profesor, el hecho de comunicar eficazmente a todos los alumnos el contenido matemático presente en una prueba, le lleva a reflexionar sobre las dificultades que tiene el estudiante a la hora de generalizar un argumento, concluyendo que dichas dificultades son la abstracción de los conceptos con los que se trabaja y el conocimiento previo de los estudiantes. Por ejemplo, cuando responde la pregunta del cuestionario *¿Qué dificultades encuentras a la hora de enfrentarte a la enseñanza del proceso de demostrar y cómo utilizas tu experiencia en el aula para crear nuevos elementos y estrategias que den respuesta al problema surgido?,* expone:

> *"Los problemas fundamentales son la abstracción del concepto y los conocimientos e intuiciones previos".*

Ello le lleva a buscar formas de solventar estos problemas, llegando a la conclusión de que la metodología desarrollada en el aula es muy importante para asegurarse una forma de transmisión eficaz que permita al estudiante comprender lo que se le quiere comunicar, por qué ello es así y sus consecuencias. Esto nos lleva a inferir que para Manulo comunicar un resultado está relacionado con el desarrollo de un **proceso Explicativo**. Por ejemplo, cuando hace referencia a una posible actividad para trabajar con sus alumnos de 1º de la E.S.O., en la que se requeriría clasificar triángulos, y establecer relaciones entre sus lados y ángulos, intentando justificar dichas relaciones, comenta:

> *"...Es un grupo de alumnos bastante cohesionado...sin embargo, no tienen unos niveles de conocimientos demasiado altos... Hay que cuidar mucho la metodología utilizada con estos alumnos, ya que ante contenidos demasiado abstractos...un buen porcentaje se pierde y empiezan a no entender nada.".*

El método de trabajo que propone apoya la conveniencia de comenzar desarrollando casos particulares y utilizar situaciones en las que el alumno pueda experimentar y manipular como paso previo a la realización de la prueba. Esta forma de actuar permite que el alumno descubra y comprenda relaciones y propiedades matemáticas que le ayuden a llegar a la generalización del resultado. Manulo vincula la eficacia en la **Comunicación** del contenido matemático presente en un problema de probar y el **desarrollo de un proceso Explicativo**, con la **Construcción** y el **Descubrimiento** de propiedades y conceptos matemáticos por parte del propio estudiante. Cuando menciona las características que debería reunir una actividad preparada para trabajar con sus alumnos de 1º de la E.S.O. proporciona un ejemplo de esta conclusión:

> *"Yo soy partidario del aprendizaje por inducción. Por este motivo no me gusta, si es posible, dar reglas generales y después realizar ejercicios para aplicar las reglas generales. Más bien me gusta que los alumnos descubran estas reglas por ensayo-error guiado y que después apliquen esas reglas a casos particulares hasta que esas reglas se puedan generalizar a cualquier caso...Mi primera idea sería proponer un ejercicio motivador cuya resolución no sea evidente. De esta manera dejaría que los alumnos fuesen probando hasta encontrar una solución al problema.".*

Con la metodología que este profesor propone desarrollar en el aula, pretende que el propio alumno, conjeture relaciones, desarrolle sus estrategias, descubra propiedades y relaciones matemáticas, elabore sus propias conclusiones y llegue a la generalización del resultado. En este sentido Manulo otorga a la prueba un carácter antiautoritario, que haga ver al estudiante que es capaz de pensar y de resolver problemas por sí mismo.

> *"El alumno pasa a tomar el control y a ser el protagonista (y constructor) de su aprendizaje. Este sistema respeta las diferentes velocidades de aprendizaje de los alumnos, ya que cada grupo de alumnos puede seguir caminos diferentes para llegar a un mismo resultado"* (Actividad 3.)

Esta inferencia se refuerza con el papel que cree que el profesor debe desempeñar en el aula. Este papel es el de guía del aprendizaje sin llegar en ningún momento a las explicaciones teóricas previas y generales, para todos los alumnos. Por ejemplo, al realizar la Actividad 3, comenta:

> *"El profesor guía el aprendizaje de los alumnos y sólo aporta nuevos datos a aquellos que los preguntan porque han llegado a un punto en que los necesitan, sin necesidad de tener que hacer el profesor una explicación colectiva a toda la clase... ".* Actividad 3.

Para poder desarrollar la metodología ya expuesta, Manulo ve una gran utilidad en determinado software como Cabri o Logo que permite al alumno investigar a través de la manipulación, la visualización y la recreación de relaciones y situaciones matemáticas, si bien, para él lo importante es que el estudiante pueda experimentar e interaccionar con el problema, utilizando cualquier tipo de herramienta. Por ejemplo, en la Actividad 3 y en la Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", indica:

> *"El software dinámico permite manipular conceptos abstractos. Que el concepto a aprender se pueda manipular es muy importante. Pero sin perder de vista que el software dinámico es un recurso más...Con esto quiero decir que a veces es más fácil el uso de metodología algo más tradicional: el uso de regla, compás y transportador de ángulos también es manipulativo"* (Actividad 3.)

> *"...yo prefiero el método estático para trabajar este tema con alumnos de primaria: el método estático pero activo. Grupos de alumnos que fabriquen con papel cuadriculado diferentes triángulos rectángulos y que después expliquen lo que han conseguido e incluso que dejen a los otros compañeros los modelos que han construido para que los manipulen. Si cada grupo realiza modelos diferentes a los que realizan los otros grupos podemos llegar a demostrar el teorema de Pitágoras por inducción. Esta variedad de modelos no se da en ninguno de los applets que hemos visitado a pesar de su espectacularidad"* (Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba".)

Al carácter de la prueba como herramienta útil para comunicar el significado del contenido matemático, le da Manulo un nuevo matiz, diferente del anterior. Este profesor considera que la comunicación a otros de un proceso de prueba, obliga al que comunica a reflexionar y a utilizar el conocimiento previo, lo que le permite, a su vez, comprender mejor el contenido con el que trabaja, descubrir sus deficiencias e intentar subsanarlas, haciéndose de esta forma constructor de su propio aprendizaje. Por ejemplo, en el siguiente protocolo:

> *"Cuando hacemos que un alumno comunique un proceso aprendido, ese alumno toma conciencia de lo que sabe y de lo que no sabe. De esta manera el alumno busca cómo rellenar las lagunas y de alguna manera se responsabiliza de su propio aprendizaje, construye conocimiento".* (Primer Foro.)

Las consideraciones anteriores, en las que Manulo hace referencia a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje y en las que manifiesta estar a favor de la visualización de relaciones matemáticas y a la manipulación de conceptos abstractos y métodos geométricos, son elementos propios de la realización de **pruebas semánticas** en las que se concluye de manera lógico-deductiva pero se desarrollan "instantáneas o imágenes de los conceptos que se manejan y que van a permitir adquirir una mejor comprensión de los mismos.

Podríamos resumir los significados que la prueba, como objeto de enseñanza-aprendizaje, tiene para este profesor mediante el siguiente gráfico de la Figura III.3.

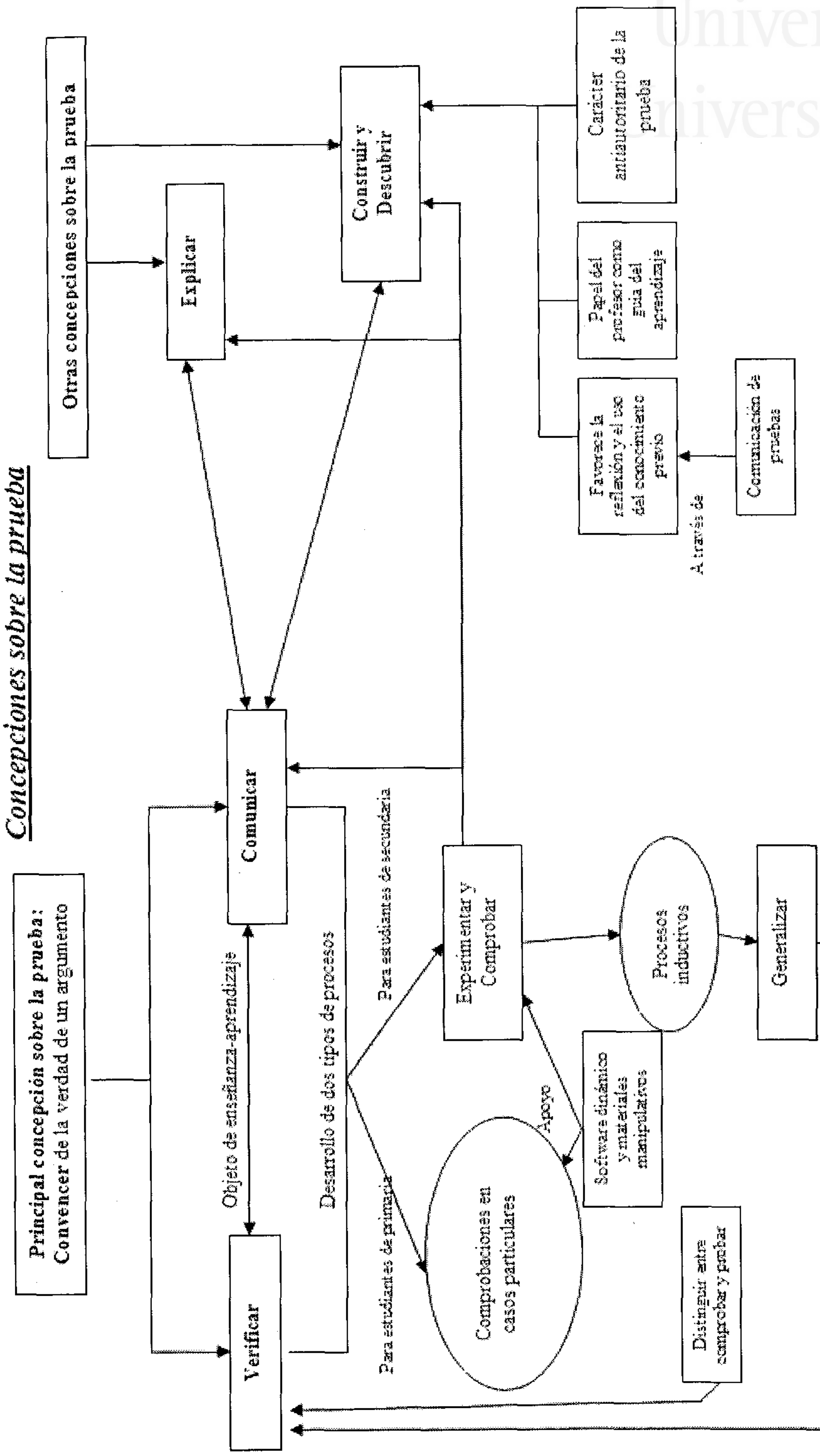


Figura III.3. Concepciones sobre la prueba del profesor Manolo

III. 4. Caso 4: Profesora nº 4, Eva.

Para Eva, demostrar o probar significa **Verificar,** es decir, poner de manifiesto que una relación o propiedad matemática es cierta. Asocia este hecho a la **Comunicación** del proceso, diferenciando entre distintas formas de proceder según las personas a las que se dirija la prueba. Si va destinada a matemáticos, el procedimiento ha de ser lógico-deductivo, partiendo de las hipótesis y llegando a la tesis a través de la relación entre propiedades y conceptos matemáticos. Sin embargo, admite que para los estudiantes podría ser suficiente con la realización de comprobaciones en casos particulares.

> *"La diferencia de prueba para matemáticos y estudiantes de Secundaria,..mientras que para los estudiantes bastaría con comprobar que la igualdad es cierta, para los matemáticos algo está realmente demostrado cuando partiendo de unas hipótesis de trabajo y, empleando los conceptos matemáticos necesarios, somos capaces de deducir lo que queremos probar. Para los estudiantes la prueba está más relacionada con algo visual, es decir, que puedan comprobar su certeza...".* (Actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".)

La búsqueda de contraejemplos es una forma de mostrar el carácter general de un argumento. El software dinámico es una herramienta útil para ello. En el siguiente protocolo tenemos un ejemplo referido a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje:

> *"Los contraejemplos sirven para demostrar que una conjetura que pretendemos demostrar no es siempre cierta, por ello, en el proceso de conjeturar, probar y comunicar los programas interactivos juegan un papel muy importante en la búsqueda razonada de contraejemplos por parte de los estudiantes, siendo este proceso previo a la realización de la demostración".* (Tercer Foro)

Para Eva, el argumento probado debe formar parte de una estructura axiomática, lo que nos indica que **Sistematizar** es otra de las funciones sobre la prueba considerada como **proceso matemático** y como **objeto de enseñanza-aprendizaje**. Indicador de ello es la importancia que da al desarrollo de procesos lógico-deductivos que se inician a partir de las hipótesis y que llegan a la tesis a través de razonamientos y procedimientos formales y que son una manera de relacionar diferentes propiedades matemáticas. De esta manera Eva concibe los procesos lógico-deductivos como elementos a través de los cuales se pueden organizar y vincular resultados diversos. Es desde esta perspectiva desde la que la prueba se considera como una forma de relacionar explícitamente diferentes propiedades matemáticas y, por lo tanto, como una forma de organizar resultados diversos (Función de sistematización de la prueba) Un ejemplo lo encontramos en la demostración que hace de la igualdad que se propone en la Actividad "Resolución de problemas de probar":

"• *Los puntos G y B dividen a MR en tres partes congruentes* $\Rightarrow MG=GB=BR$

• *Los puntos G yP dividen al segmento AC en tres partes congruentes* $\Rightarrow AG=GP=PC$.

• $AG=BG$

Veamos que los triángulos ABC y PMR son semejantes $\Rightarrow \hat{R}=\hat{C}$

Procedimiento:

$MR=3GB=3AG=AC \Rightarrow MR=AC$

$$\left.\begin{array}{r} AG=GP \\ BG=GM \\ \hat{G} \text{ es común a los triángulos } ABG \text{ y } PMG \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Los triángulos } ABG \text{ y } PMG \text{ son semejantes} \\ \text{y la razón de semejanza es } 1 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$AB=PM$$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A}=\hat{P} \ (\text{ por construcción geométrica}) \\ \hat{P}=\hat{M} \ (\text{por ser el triángulo } PMG \text{ isósceles}) \end{array}\right\} \hat{A}=\hat{M}$$

Luego hemos demostrado que:

$$\left.\begin{array}{r} MR=AC \\ AB=PM \\ \hat{A}=\hat{M} \end{array}\right\} \text{Los triángulos } ABC \text{ y } PMR \text{ son semejantes, luego: } \hat{R}=\hat{C}$$ "

Para Eva, esta posibilidad de mostrar en la prueba la relación sistemática entre diferentes propiedades e igualdades matemáticas es una manifestación de la Función de sistematización de la prueba.

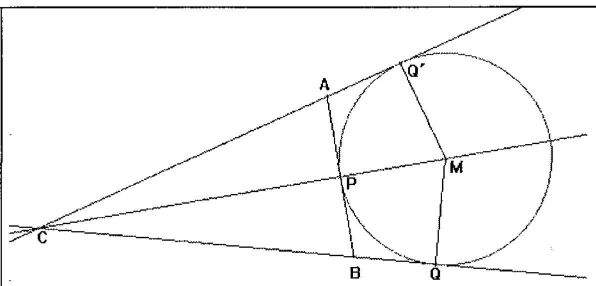
Cuando se refiere al desarrollo de pruebas en el aula, insiste en que después de realizar las comprobaciones oportunas se ha de finalizar de un modo más formal, dejando claro el contenido matemático en el que se apoya el proceso. Por ejemplo en la Actividad 3 indica:

Actividad 3.

Cuestiones de síntesis:
• ¿En qué medida el software dinámico te ayuda a diseñar actividades del tipo i-matemáticas?
• ¿Cómo las actividades del tipo i-matemáticas favorecen el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?
• ¿En qué medida la introducción de actividades del tipo i-matemáticas modifica
  o La gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor (interacción profesor-alumno, gestión de debates y puestas en común, evaluación de los procesos de aprendizaje,...)
  o El desarrollo del currículo (foco de atención, como, por ejemplo, contenidos curriculares tradicionales – triángulos, paralelogramos, etc.- frente al desarrollo de procesos cognitivos transversales como conjeturar, probar, definir, comunicar, simbolizar, etc.)?

"El profesor debe exigir que una vez realizada la prueba con el software interactivo la presenten escrita en papel y explicitando cuáles son los contenidos matemáticos que han empleado en el proceso de resolución."

Otra de las concepciones sobre la prueba, tanto cuando se refiere a la misma como **proceso matemático** como cuando la considera **objeto de enseñanza-aprendizaje**, es la **Construcción y Descubrimiento de contenido matemático** que considera que se consigue cuando se demuestra. Un indicador de ello es el uso que hace del software dinámico con el fin de establecer conjeturas, trabajar con problemas más complejos y poder descubrir relaciones y propiedades matemáticas por uno mismo (carácter antiautoritario de la prueba). Así, al construir y manipular la configuración geométrica correspondiente a la actividad 1, indica:

Actividad 1	
Una de las características de la geometría dinámica es la posibilidad de utilizar la modalidad de "arrastrar" para desarrollar las capacidades de conjeturar. *Las actividades tipo son "investigar bajo qué condiciones se da algún tipo de relación".* Investigad cuando ABC es un triángulo equilátero:	
La actividad está pensada para alumnos de 14 años (2º y 3º de la ESO). La configuración geométrica está construida por: 1. Intersección de dos rectas. 2. Bisectriz del ángulo (lugar que equidista de los dos lados); por tanto en la bisectriz se encuentra el centro de la circunferencia que es tangente a los dos lados del ángulo. 3. Perpendicular a uno de los lados del ángulo (por Q). 4. El punto de intersección entre la perpendicular y la bisectriz (M) es el centro de la circunferencia que es tangente al lado del ángulo en Q.	

5. Punto de intersección de la bisectriz y la circunferencia (P).
6. Perpendicular a la bisectriz por P.

Según se ha realizado la construcción podemos usar el modo "arrastrar" de Cabri para dinamizar la construcción en los siguientes casos:

- Se pueden arrastrar las rectas iniciales.
- Se puede arrastrar el punto Q sobre el que se ha construido la perpendicular al lado del ángulo que nos ha permitido determinar el centro de la circunferencia (este centro está determinado por el punto Q y por tanto no se puede mover directamente).

¿Cómo la dinamización de la configuración geométrica puede ayudar a:

- Probar la igualdad pedida
- Comunicar una prueba realizada
- Ayudar a convencer con mayor facilidad al compañero de lo que se ha realizado
- Conjeturar nuevas relaciones (generar nuevos problemas)

"Si comienzas arrastrando el punto Q te das cuenta que el punto Q' también se arrastra ya que la circunferencia tangente va cambiando, haciéndose más grande o más pequeña y el triángulo ABC es en todo momento isósceles. De esta forma descubres que intentar que el triángulo sea equilátero arrastrando sólo Q es imposible, puesto que el triángulo de partida es isósceles (lados CA y CB iguales y menores que AB), y al arrastrar Q los lados iguales aumentan o disminuyen proporcionalmente a como lo hace el lado desigual (esto se puede justificar por Tales, ya que al arrastrar Q vamos obteniendo triángulos semejantes entre sí, luego si el de partida no era equilátero los demás nunca van a serlo)".
"Una vez obtenido el triángulo equilátero, nos daremos cuenta que las rectas AB y QQ' son paralelas (para ello dibujamos y calculamos las distancias de AQ' y de BQ). Al mismo tiempo, si continuamos calculando medidas, podemos plantear una serie de conjeturas. La altura del triángulo es igual al radio e igual que el doble de la distancia que hay entre las rectas paralelas AB y QQ'".

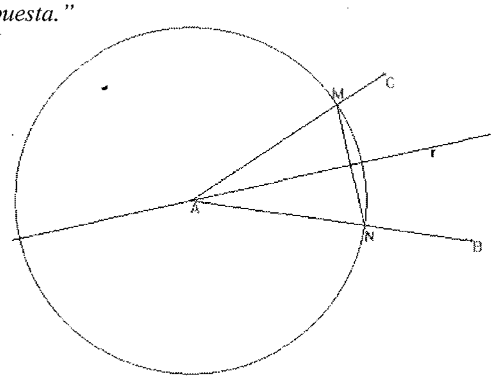
Para Eva, el software dinámico es una herramienta valiosa para investigar las condiciones que se deben cumplir para que se dé una determinada relación o propiedad discriminando entre diversas propiedades. Consideramos que este hecho, pone de manifiesto el carácter que Eva le da a la prueba como herramienta válida para organizar los resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas, pero desde una perspectiva más amplia. Por un lado, a través de la experimentación, se establecen condiciones necesarias y suficientes para que se verifique un resultado y posteriormente, se desarrolla un proceso lógico-deductivo para poner de manifiesto que ello es así. En el proceso de experimentación e investigación que lleva al establecimiento de dichas condiciones, Eva considera que se **Descubre y Construye el propio conocimiento.** Por ejemplo, en la misma Actividad 1 anterior, indica:

"Una vez realizada la construcción con el Cabri he comenzado a investigar sobre las condiciones que se tenían que verificar para obtener la igualdad pedida, es decir cuándo el triángulo ABC es equilátero" (Actividad 1.)

Eva subraya el papel que tiene el software dinámico en la Función de la prueba como instrumento para **Descubrir y Construir contenido matemático**, refiriéndose a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, en algunas actividades que Eva preparó para trabajar con alumnos de 2º ciclo de la E.S.O. requería que, para resolverlas, los estudiantes construyeran diversas configuraciones geométricas y las manipularan, explorando las condiciones bajo las que se podría obtener un determinado resultado. Posteriormente pedía que los alumnos demostraran que desde las condiciones obtenidas se verificaba realmente lo pedido:

> *"Dibuja una altura en un triángulo.*
> *Deforma el triángulo desplazando los vértices y responde razonadamente:*
> *¿Cuándo cae la altura fuera del triángulo? Justifica la respuesta*
> *¿Cuándo coincide con un lado? Justifica la respuesta.*
> *¿Cuándo corta al lado opuesto en su punto medio? Justifica la respuesta."* (Actividad de evaluación)

> *"Traza dos segmento (AB y AC) para formar el ángulo BAC.*
> *Dibuja una circunferencia con centro en A y que corte a los lados del ángulo en los puntos M y N.*
> *¿Cómo es el triángulo AMN? Justifica la respuesta.*
> *Traza desde A la perpendicular al segmento MN. Llámala r ¿Quién es r? Justifica la respuesta."*



(Actividad de evaluación)

En este caso, además de la gran importancia que Eva concede al uso del **software dinámico** como herramienta que permite experimentar, manipular y conjeturar como paso previo a la demostración formal de un resultado, y que favorece el descubrimiento de relaciones y propiedades matemáticas, también considera la prueba como proceso que obliga a la reflexión y al uso del conocimiento previo y que promueve el razonamiento matemático. Esta idea vincula el uso del software dinámico al desarrollo de la Función **Descubrimiento y Construcción de contenido matemático,** de la prueba.

Por ejemplo, cuando resuelve de nuevo la actividad "Resolución de problemas de probar" con la ayuda del software interactivo Cabri, Eva dice:

"Debemos partir siempre de nuestros conocimientos para resolver cualquier problema (de probar) *y apoyarnos en la interactividad del programa* (Cabri), *que nos facilitará la resolución"* (Actividad 2.)

Cuando se refiere al trabajo con pruebas en el aula, manifiesta:

"En la representación de una situación o problema matemático, los alumnos tienen que utilizar una serie de recursos y propiedades matemáticas que les permitan lograr tal representación...Es imprescindible que los alumnos tengan claros los conceptos geométricos, pues sin ellos el programa (Cabri) *por si solo no funciona...Al generar imágenes visuales de las ideas matemáticas los alumnos pueden centrarse en procesos de reflexión, razonamiento,... "* (Actividad 3.)

La búsqueda de una mejor asimilación del conocimiento adquirido y una mejor compresión del contenido matemático con el que se trabaja aparecen entre los ya citados objetivos de las actividades preparadas por Eva para sus alumnos, y ambos son nuevos indicadores del carácter que para ella tiene la prueba como herramienta para **Descubrir y Construir**. Como en las anteriores ocasiones, esta profesora manifiesta la importancia de la ayuda que el software dinámico proporciona para lograr dichos objetivos.

"Todas estas actividades diseñadas con el Cabri facilitan la asimilación y una mejor comprensión de estas propiedades geométricas, que hasta ahora sólo podíamos visualizarlas en un libro, o bien realizarlas con regla y compás". Actividad de evaluación

En la prueba que realiza y que ya ha sido presentada, se observan detalles que hacen pensar que se esfuerza en realizar una prueba que explique el contenido matemático con el que está trabajando y por qué se llega a las conclusiones que va obteniendo. Eva expresa de forma clara las hipótesis de las que parte y la tesis a la que llega, procede desde las definiciones y explica el uso que hace de ellas, además y mediante esquemas pone de manifiesto las relaciones que existen entre los conceptos. Todas estas características son indicadores de que Eva realiza una **prueba Explicativa**. También cuando trabaja con sus alumnos en el aula, en las actividades que prepara y en sus manifestaciones sobre el uso de software dinámico, referentes a que facilita la explicación y la comprensión de los alumnos, encontramos nuevas muestras del **carácter Explicativo** que concede a la prueba.

Por ejemplo, cuando concluye la realización de las actividades de la primera carpeta de entrega y resume sus conclusiones sobre el trabajo con pruebas y software dinámico en el aula, afirma:

> *"El uso de dicho software favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que facilita la explicación del profesor en clase, mejora el entendimiento de los alumnos ante determinados temas en los que realizan actividades previas y potencia el proceso de razonamiento del alumno".*

En cuanto a la forma que tiene Eva de probar y la estructura que considera que debe tener una prueba, son eminentemente **semánticas**. Esta afirmación está basada en las características de la prueba realizada por ella, en la que a partir de las hipótesis intenta dar significado a sus implicaciones, así como a los diversos resultados que va obteniendo, organizándolo todo mediante esquemas y diagramas en los que se reflejan las relaciones que tienen lugar entre los diferentes conceptos, y de modo que los resultados que se van obteniendo queden claros y conduzcan de manera casi evidente a la conclusión final. Además, Eva da importancia a la realización de procesos en los que se refleje el contenido matemático con el que se trabaja y el uso que se hace de él. Manifiesta la utilidad de las herramientas dinámicas como medio de ayudarse a visualizar las relaciones que tienen lugar en cada paso que se da en la realización de una prueba y la necesidad de razonar sobre dichas relaciones, propiedades y resultados que se obtienen. Además, propone la utilización de este tipo de herramientas dinámicas como instrumentos que a través de la manipulación y de la visualización van a ayudar a llevar a cabo esta reflexión. Finalmente, y en todo caso, plantea la necesidad de concluir los procesos de manera lógico-deductiva.

Resumimos las concepciones sobre la prueba de esta profesora en el gráfico de la Figura III.4.

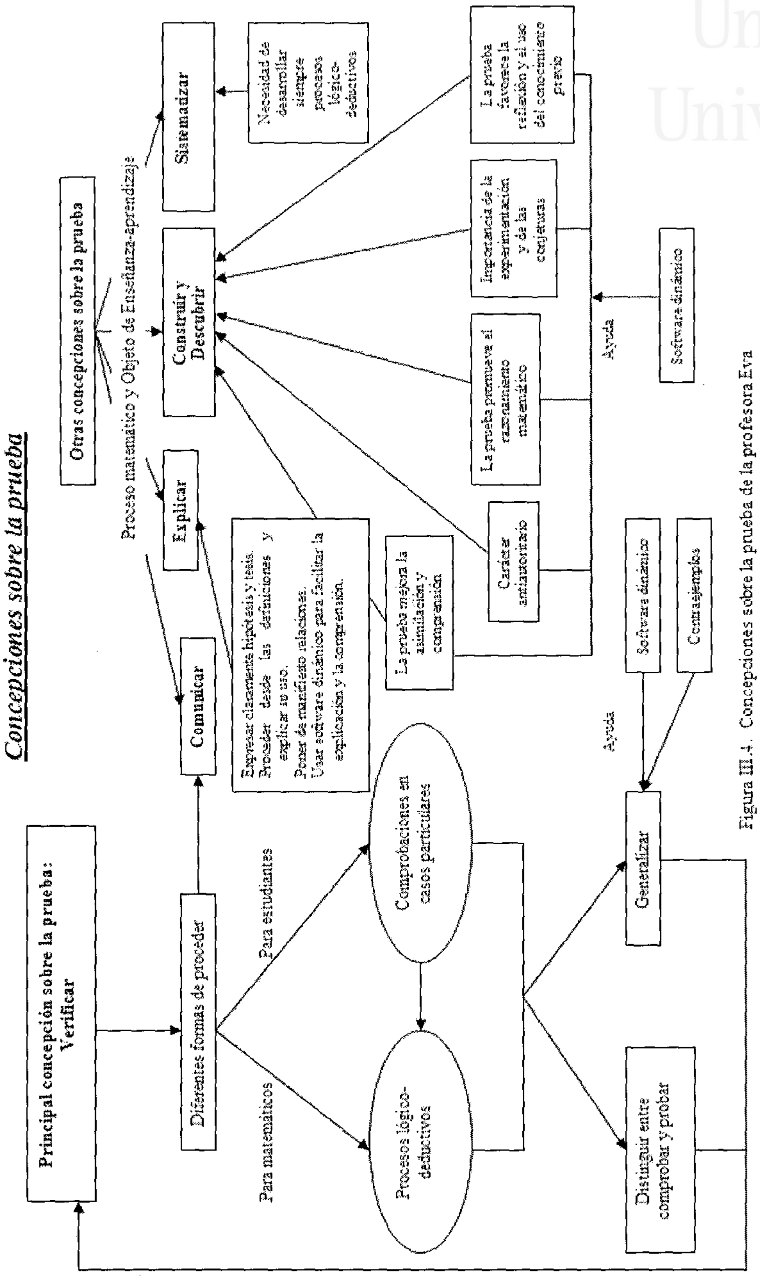


Figura III.4. Concepciones sobre la prueba de la profesora Eva

III. 5. Caso 5: Profesor nº 5, VV.

El análisis realizado a la producción de VV indica que para él la finalidad de la prueba es la de **Verificar** un argumento. Considera como únicos procedimientos válidos los lógico-deductivos, aunque reconoce que los estudiantes aceptan las comprobaciones en casos particulares como forma de poner de manifiesto que un resultado es cierto.

> *"Ninguna de ellas es una prueba rigurosa para un matemático pero sí lo es a efectos de que un alumno quede convencido de que es cierto que se cumple lo que anunciábamos que se iba a cumplir"* (Tercer Foro)

La forma de desarrollar su propia prueba, las actividades que prepara para sus alumnos y sus manifestaciones en los foros indican que, en cualquier contexto, sea o no de aula, busca verificar a través de la generalización del resultado, y considera que ello sólo se puede hacer mediante el desarrollo de procesos lógico-deductivos, estableciendo con claridad la diferencia entre comprobación y prueba.

Por ejemplo, en el 3º foro, VV comenta las diferentes formas, estática y dinámicas, de demostrar el teorema de Pitágoras que se utilizan en la Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba" y comenta:

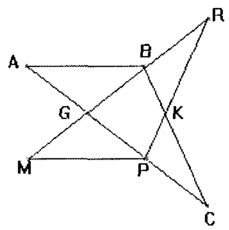
> *"...hay una limitación... y es que el triángulo de partida es siempre el mismo y sólo permite variar la descomposición del rectángulo derecho. No hay generalización en ese sentido y hay que describirla aparte...No tiene el mismo valor de prueba que el método anterior...Los casos particulares sólo prueban la relación en esos casos...No se puede generalizar...*(es necesario) *mostrar al alumno que uno o varios casos en los que se presente una determinada propiedad no son suficientes para generalizarla".*

La forma en que él realiza su prueba de la actividad "Resolución de problemas de probar", deduciendo el resultado de las hipótesis y empleando para ello relaciones y propiedades matemáticas ya establecidas, junto con sus consideraciones, entre las que se incluye la necesidad de que los estudiantes concluyan cualquier proceso de prueba de la misma forma, permite inferir que para VV, en cualquier contexto, otra Función de la prueba es **Sistematizar**.

> "*Utilizando la misma nomenclatura que figura en la actividad propuesta la demostración puede ser la siguiente.*
> *Por hipótesis es* $AG \equiv GP \equiv PC$ *y también* $AG \equiv BG$
> *Por transitividad, a través de esta última relación tenemos que los seis segmentos citados son congruentes. De ahí que los lados AC y MR sean congruentes (de medida triple de cualquiera de los citados).*
> *Siendo congruentes AG y BG el triángulo ABG es isósceles, y también lo es el MGP por la congruencia de MG y GP.*

De manera que los triángulos ABC y MPR tienen dos lados congruentes. Si demostramos que los ángulos comprendidos por esos lados son también congruentes habremos demostrado que los triángulos son iguales.

Sabiendo que el triángulo ABG es isósceles podemos asegurar que sus ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son congruentes y también que $\hat{M} \equiv \hat{P}$. Como los ángulos $\hat{G}$ de ambos triángulos son iguales (por ser opuestos por el vértice) tenemos que los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{M}$ son congruentes, que es lo que nos faltaba por demostrar".



(Primer foro. Actividad "Resolución de problemas de probar")

Cuando responde a la pregunta del cuestionario inicial ¿Qué significa demostrar en matemáticas?, hace referencia al trabajo en el aula y expone:

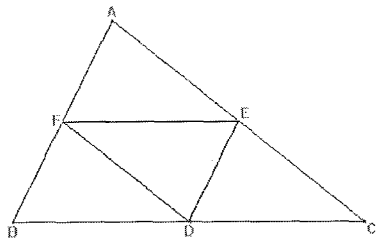
"Partiendo de una hipótesis o condiciones iniciales inferir una tesis previamente propuesta utilizando propiedades y razonamientos conocidos por el alumno".

VV subraya las relaciones explícitas que se deben establecer entre diferentes resultados matemáticos cuando se está realizando una prueba. Este hecho permite suponer que las pruebas, entendidas como maneras de relacionar o vincular resultados matemáticos, (Hipótesis-tesis, más las propiedades usadas en el proceso de probar) desempeñan el papel de sistematizar y organizar relaciones y propiedades matemáticas. Desde este punto de vista es desde el que hay que entender la concepción de VV sobre la prueba en relación a la Función de sistematizar.

En la demostración realizada por VV, presenta al principio y con claridad las hipótesis, así como las propiedades y conceptos de los que se derivan los diversos resultados que va obteniendo. Al comunicar su prueba, intenta poner de manifiesto las reflexiones que le han llevado a los resultados intermedios. Esta forma de proceder nos indica que se esfuerza por transmitir el contenido matemático implícito en el desarrollo de la prueba, añadiendo al proceso deductivo significados adicionales que puedan ayudar al lector a comprender por qué se actúa de esa determinada manera. Al referirse a su trabajo con pruebas en el aula, al igual que en las actividades que prepara para trabajar con sus alumnos de 2º de la E.S.O., expone la necesidad de desarrollar procesos en los que se ponga de manifiesto por qué las conclusiones a las que se llega son ciertas y cómo se llega a ellas . Ello permite inferir la Función **Explicativa** y **Comunicativa** que VV intenta dar a la prueba.

Por ejemplo, en la siguiente actividad, VV pretende guiar al alumno de manera que vaya descubriendo las relaciones, propiedades y conceptos que permiten deducir el resultado que se ha de demostrar. Vuelve a insistir en la diferencia existente entre comprobación y prueba, haciendo ver al alumno la necesidad de usar procedimientos formales como únicas herramientas con las que generalizar el resultado, para poner de manifiesto su validez:

"1ª Actividad
Abre el archivo escena1.fig que está en la carpeta Geometría.
En la figura podemos observar los triángulos ABC y DEF, este último rellenado en azul



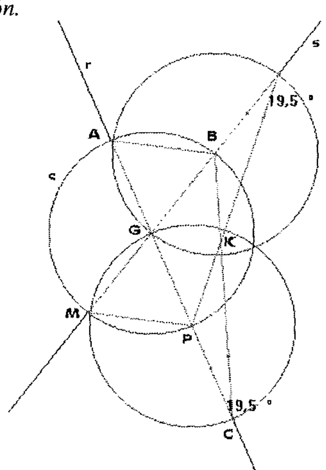
1) *Investiga qué posición ocupa el punto D dentro del lado BC. Comprueba si también ocurre algo parecido con F y E y escribe tus observaciones en la hoja de anotaciones.*
2) *Investiga qué relación hay entre las rectas FE y BC (¡atención que digo rectas!)*
Haz lo mismo con las rectas que contienen a los lados FD y AC ¿Qué puede decirse?
Seguro que ya sabes la relación que hay entre las rectas BA y DE.
Escribe tus observaciones en la hoja de anotaciones.
3) *Investiga cuál es la relación entre las áreas de los triángulos ABC y DEF*
Anota lo que observas en la hoja de anotaciones.
Observa si esa relación es siempre la misma sea como sea el triángulo ABC.
Ten en cuenta que lo que estás haciendo son comprobaciones porque no podemos ver todos los casos posibles. Nos haría falta un razonamiento matemático riguroso que demostrara que lo que nos parece ver es siempre cierto.
4) *Intenta demostrar por qué esa relación, con las condiciones que hemos puesto, es siempre cierta.*
Escribe tu razonamiento en la hoja de anotaciones en el apartado Demostración".

Actividad de evaluación

Su toma de contacto con el software dinámico refuerza el sentido explicativo de comunicación de contenido matemático que intenta dar a las pruebas, tanto en el au como fuera de ella. El dinamismo y las características gráficas y visuales de es software, en su opinión, ayudan a poner de manifiesto las relaciones y propiedades matemáticas que explican los resultados que se obtienen y facilitan la comunicación y comprensión del contenido presente en el proceso de prueba.

Como ejemplo de los intentos de VV por desarrollar pruebas que comuniquen los significados del contenido matemático de la forma más explicativa y comprensible posible, haciendo uso de software dinámico, se presenta la respuesta a la Actividad "Resolución de problemas de probar", que realiza utilizando el programa de geometría Cabri.

> *"Trazo dos rectas r y s marcando el punto de intersección G.*
> *Con centro en G trazo una circunferencia con un radio que será la medida base del problema marcando los puntos de corte con las dos rectas: A, B, M y P.*
> *Se cumple así, por tanto, la hipótesis AG=GB (utilizo la igualdad porque el símbolo de congruencia no sale en el foro).*
> *Con centro en B trazo otra circunferencia que pase por G y así marcar el punto R de modo que sean congruentes MG, BG y BR.*
> *De igual modo trazo la circunferencia con centro en P y marco C siendo congruentes AG, GP y PC. Trazo los triángulos ABC y MPR.*
> *Midiendo en esos triángulos los ángulos $\hat{R}$ y $\hat{C}$ y observo igual resultado. Arrastrando cualquiera de las rectas el "montaje" se mueve de manera que se pueden comprobar dos cosas:*
> - *La construcción guarda siempre una perfecta simetría respecto del eje GK.*
> - *Los ángulos mencionados tienen siempre igual medida (en la foto miden 19.5º)".*
> - *También se puede modificar el radio de la circunferencia c lo que permite agrandar o reducir la construcción.*



> *Está claro que el procedimiento de construcción de la solución no tiene nada que ver con el que utilicé en la 'Actividad' del 1º foro* (Actividad 'Resolución de problemas de probar'). *El tratamiento del problema es mucho más interesante que el anterior...Se pueden ocultar elementos utilizados (como las circunferencias auxiliares) lo que ayuda a 'aclarar' el panorama eliminando 'ruidos' que, sin embargo, puede convenir recuperar para reproducir el proceso... Finalmente, debo reconocer que la posibilidad de dinamizar la escena contribuye notoriamente a la compresión de qué es lo que hay en la situación que tiene que ver con la propiedad resultante, es decir, bajo qué condiciones se cumple la propiedad que se observa".*

El uso de herramientas dinámicas pone de manifiesto el énfasis en la Función de **Construir y Descubrir** de la prueba, como **objeto de enseñanza-aprendizaje**. Un indicador de ello es la utilidad que VV ve en la posibilidad de experimentar e investigar sobre las características de un problema y sobre diferentes aspectos del mismo, a través de la interactividad y características gráficas del software dinámico. Con ello busca que el estudiante, por sí mismo (carácter antiautoritario de la prueba), descubra contenido matemático y comprenda mejor el sentido de sus elementos, propiedades, relaciones y resultados. Este hecho le lleva a preparar actividades en las que los estudiantes han de recrear situaciones matemáticas y por medio de la experimentación, el establecimiento de conjeturas y la comprobación de las mismas han de ser capaces de obtener conceptos y propiedades e indagar sobre su significado. Por ejemplo, VV presenta la siguiente propuesta como Actividad de evaluación en la Unidad Didáctica que diseña:

> *"2ª Actividad*
> *En esta segunda actividad vas a hacerte tú mismo la escena-animación.*
> *Traza un triángulo ABC como el anterior. Marca el punto medio del lado AB y llámale M. Marca el punto medio del lado AC y llámale N. Traza un segmento desde N hasta la base BC, que no sea perpendicular a ésta. Tenemos NQ. Traza una paralela al segmento anterior NQ que pase por el punto M. Tenemos MP. Traza el paralelogramo MNPQ y rellénalo de azul. Pon nombres a todos los puntos obtenidos.*
> *1) Investiga la relación entre MN y PQ.*
> *Observa y escríbelo en la hoja de anotaciones:*
> *Los segmentos MN y PQ son.................y además......................*
> *2) Investiga qué relación hay entre las áreas del triángulo y del paralelogramo.*
> *Observa y escríbelo en la hoja de anotaciones.*
> *El área del triángulo es ....veces la del paralelogramo*
> *Si dinamizas la escena verás que siempre es así.*
> *3) Demuestra por qué se da esa relación.*
> *Razónalo por escrito en el apartado Demostración de la hoja de anotaciones".*
> Actividad de evaluación

La concepción de las pruebas realizadas con software dinámico como herramientas para construir y descubrir conocimiento aparece también en la producción de este profesor identificada en la consideración de las mismas como promotoras de la comprensión y de una mejor aprehensión del contenido con el que el alumno trabaja. Un ejemplo lo tenemos en el segundo foro, donde hace referencia a la resolución dinámica de la Actividad 1.

> *"La utilización de varios elementos de geometría que sin comprender los alumnos no pueden utilizar. En consecuencia que el propio proceso de construcción obliga a un conocimiento exacto de cada uno de esos elementos".*

El carácter que para VV tiene la prueba como elemento que favorece el descubrimiento y la construcción de contenido matemático aparece reforzado, al vincularlo a la comunicación del desarrollo de la prueba. Con ello, la Función de comunicación adquiere un nuevo sentido, la prueba es útil para transmitir contenido matemático a otros, pero también es útil para el que comunica en el sentido de que explicar el desarrollo de un proceso de prueba obliga a reflexionar y a profundizar en las ideas que se transmiten, para poder hacerlo con claridad. Ello conlleva, de nuevo, una mejor comprensión y fijación del contenido con el que se trabaja.

> *"Los alumnos que comunican su prueba son forzados a explicarse y eso es sólo posible hacerlo bien cuando uno ha comprendido las cosas. Es decir, que les ayuda a asimilar los conceptos y a ir interiorizando los métodos matemáticos. De manera que, efectivamente, explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados".*
> Primer Foro, referencia a la Actividad "Resolución de problemas de probar"

VV realiza sus pruebas de manera lógico-deductiva y manifiesta que así ha de ser en todo caso y contexto, sin embargo, también ha intentado que en los procesos desarrollados se reflejara con claridad el significado de cada uno de los elementos y relaciones utilizadas, así como sus implicaciones y ha utilizado las propiedades gráficas y dinámicas del software con el que ha trabajado para visualizar y manipular propiedades y objetos matemáticos con el fin de entenderlos mejor y, de esta forma, llegar con más facilidad al resultado. Con las actividades que ha preparado para sus alumnos ha pretendido que a través de la experimentación, el establecimiento de conjeturas y la comprobación de las mismas, que permite el software dinámico, los estudiantes pudieran descubrir relaciones y propiedades y comprender mejor el contenido con el que trabajaban, de manera que ello les ayudara a encontrar la solución del problema. Todo ello nos lleva a inferir que potencia las **pruebas semánticas** y es partidario del desarrollo de las mismas.

Resumimos en el gráfico de la Figura III.5., las concepciones sobre la prueba de este profesor:

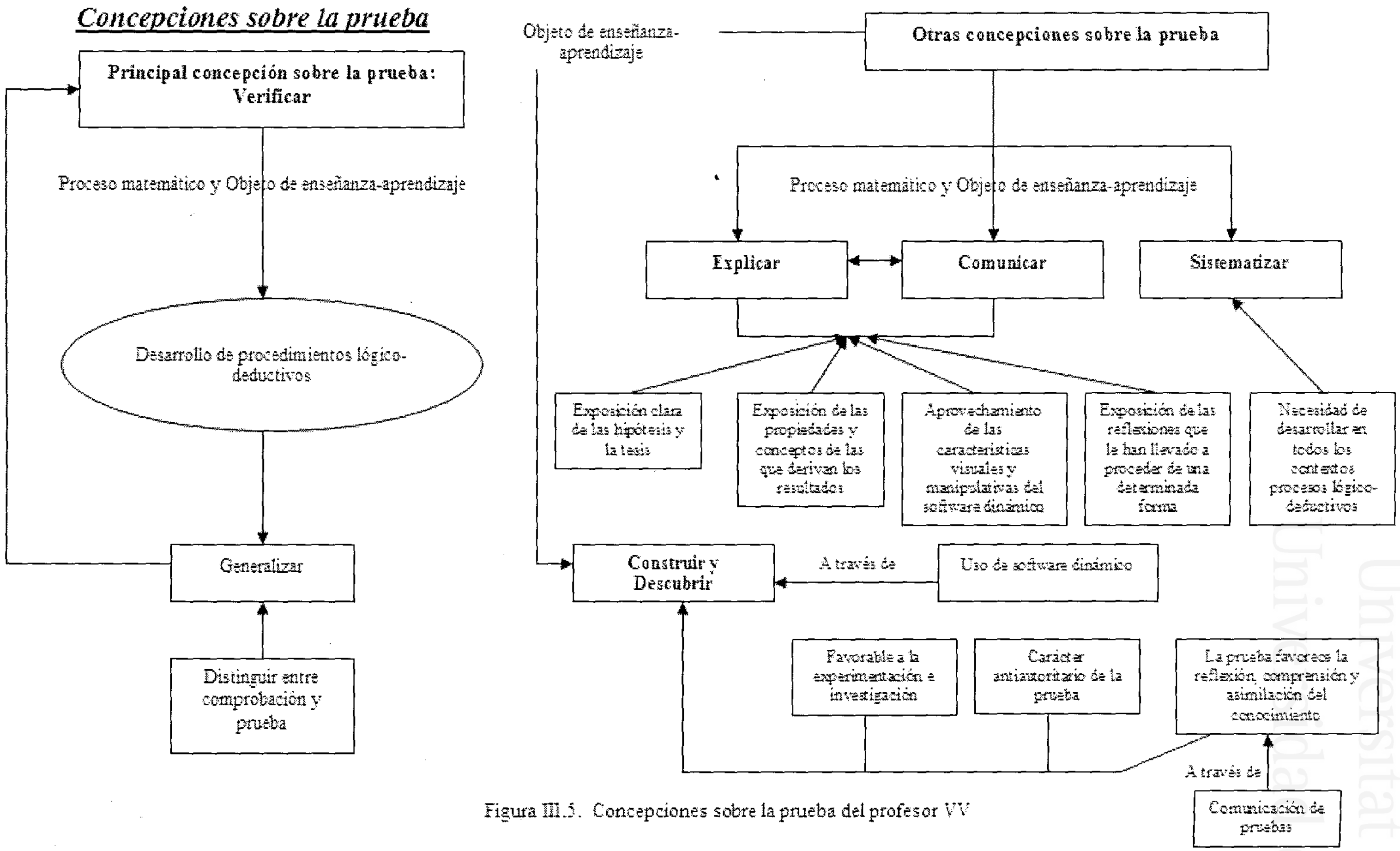


Figura III.5. Concepciones sobre la prueba del profesor VV

III.6. Caso 6: Profesor nº 6, Xavi.

Verificar es la principal concepción sobre la prueba de Xavi, considerada como **proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje**. Quién demuestra condiciona el tipo de procedimiento a desarrollar. Xavi admite la idea de comprobación en los estudiantes como una manera de "ver que lo propuesto se cumple", exigiendo por otro lado, en el campo de los matemáticos y estudiantes universitarios, proceder de manera más formal y rigurosa. Por ejemplo, en el 3º foro como respuesta a la pregunta *¿Cuál podría ser la diferencia de significado dado a la noción de prueba por alumnos de secundaria y por matemáticos?*, que forma parte de la actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas", indica:

> *"Para los alumnos la prueba es la capacidad de comprobar el enunciado, de poder 'jugar' con el enunciado cambiando los parámetros y ver que lo expuesto se cumple. Para un matemático la prueba es una comprobación matemática de la teoría".*

Refiriéndonos a la prueba como proceso matemático, el proceso que utiliza para demostrar la igualdad propuesta en la Actividad "Resolución de problemas de probar" es un desarrollo lógico-deductivo, que parte de las hipótesis y aplica resultados ya admitidos como válidos para llegar a la solución.

> *"Si BG=AG y son iguales a los segmentos que quedan cortados entonces BR=BG=GM=AG=GP=PC y AB=MP porque los segmentos son iguales y el ángulo de las líneas que los cortan también porque son complementarios de los complementarios. A su vez AB y AC al medir lo mismo que MP y MR hace que RP=BC.*
> *Aunque los ángulos aun pueden ser diferentes, pero no las distancias, pero aplicando el teorema del coseno en los dos triángulos para el coseno de R y el coseno de C todos los segmentos se pueden igualar y finalmente quedar cosR=cosC, por tanto R=C".*

Su concepción sobre la prueba como medio de verificar un resultado se manifiesta en la búsqueda de la generalización del mismo, y para ello valora positivamente el uso de software dinámico. Así, en la resolución de la actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", Xavi subraya el papel de los applets dinámicos a la hora de generalizar frente a las pruebas estáticas:

> *"...en el enlace del applet 1 el agrandamiento del triángulo permite la demostración generalizada, mientras que en el segundo caso* (se refiere a la configuración estática) *sólo para el triángulo que se nos presenta".*

El establecimiento de dos formas diferentes de proceder, a la hora de realizar pruebas, según se trabaje con matemáticos o con estudiantes, es para nosotros un indicador de que, para el profesor Xavi, la transmisión y **Comunicación** de contenido matemático es otro de los significados que asigna a la prueba. Xavi reconoce la importancia de transmitir usando argumentos claros y sencillos. Por ejemplo, en el 2º foro, el profesor Xavi felicita al profesor VV, por la claridad con la que ha transmitido la prueba que ha realizado.

> *"¡Muy bien!, Me ha encantado la simpleza con la que has explicado y has buscado la solución, enhorabuena..."*

Considerada la prueba como **proceso matemático**, el hecho de que Xavi, crea que se deben desarrollar procesos formales, en los que se utilicen relaciones y propiedades ya probadas para verificar el resultado, indica un reconocimiento de la Función de **Sistematización** de la prueba, de manera que lo obtenido se reconoce como parte de un sistema organizado de resultados.

Cuando hace referencia a la prueba como **objeto de enseñanza-aprendizaje,** resalta la importancia del software dinámico como herramienta con la que visualizar y manipular contenido matemático, lo que permite al estudiante una mejor comprensión del mismo. Considera, además, que estas mismas características del software dinámico, permiten a los alumnos experimentar, conjeturar y comprobar sus conjeturas. Ello les hace reflexionar y les ayuda a llegar a la solución del problema por sí mismos, lo que indica el carácter que para Xavi tiene la prueba como medio de **Construir y Descubrir contenido matemático.**

En el 3º foro, en la respuesta a la pregunta *¿Cómo puede favorecer el uso de dicho software el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de prueba con alumnos de secundaria?* indica:

> *"En las matemáticas siempre ha faltado el proceso de verificación tangible, que se consigue fácilmente con el programa, además que produce en el alumno el efecto de conjeturar y pensar, lanza teorías,...Ahora existe la posibilidad de que puedan ver de una forma sencilla lo que se les plantea, pueden interaccionar con las matemáticas y lo pueden hacer ellos solos, incluso desde su misma casa".*

Cuando hace referencia al papel del profesor en el aula refuerza su idea referente al carácter antiautoritario de las pruebas y a la conveniencia de que los estudiantes experimenten para descubrir por ellos mismos nuevos resultados. Para Xavi, el docente debe potenciar este papel de la prueba convirtiéndose en guía y olvidando su papel tradicional de transmisor de conocimiento. Por ejemplo, en el 3º foro, indica:

> *"Siempre como una persona que ayuda, deja libertad a los alumnos para que 'prueben', ayuda en el caso de no saber o quedar estancado, pero nunca un 'director de orquesta' o el que hace y los demás miran".*

Por el tipo de prueba que el profesor Xavi realiza, procediendo de manera lógico-deductiva, y por la importancia que concede a la visualización de las relaciones y propiedades que se dan en el problema y a la interacción con el contenido matemático, con el fin de obtener imágenes o ideas que le permitan tener un conocimiento más claro de las condiciones del problema, se puede pensar que es favorable a la realización de pruebas **semánticas**. Pero ello sólo sería válido si se hace referencia a la prueba como **proceso matemático**. Cuando se refiere al trabajo con estudiantes no universitarios valora la posibilidad de experimentar, conjeturar y comprobar, pero en ningún caso hace referencia a la necesidad de concluir el proceso de manera lógica y formal.

Resumimos lo dicho en la Figura III.6.

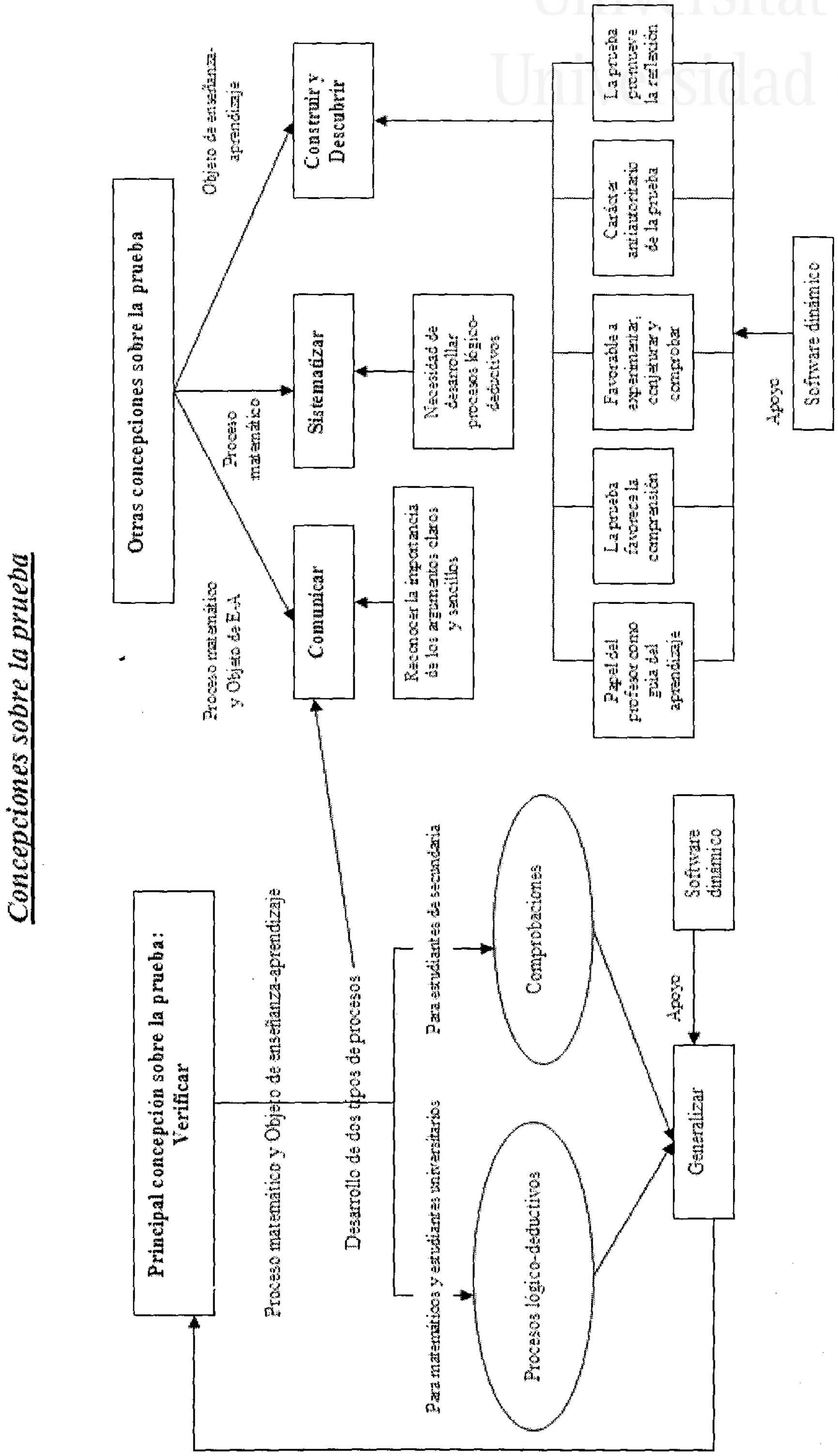


Figura III.6. Principales concepciones sobre la prueba del profesor Xavi

III. 7. Caso 7: Profesora nº 7, AnDi.

AnDi concibe la prueba como medio de **Convencer** de que se **verifica** el argumento a probar. La idea de convencer conlleva para ella un doble significado. Por una parte se trata de poner de manifiesto la validez del argumento que se prueba y por otra es necesario **Comunicar** de manera eficaz los conceptos y procedimientos matemáticos usados, así como los resultados que se obtienen. Un indicador de esto es la diferencia de procedimientos que cree necesario desarrollar para demostrar. En su opinión, los matemáticos sólo admitirán procesos deductivos que conlleven la manipulación de hipótesis para llegar a la tesis y que se apoyen en conceptos y propiedades ya validados. Los estudiantes necesitarán de otros procedimientos más experimentales que les sirvan como soporte para desarrollar posteriormente procedimientos más formales. Por ejemplo, en la actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas", en la que se presentaban diferentes formas de resolver el problema de la actividad "Resolución de problemas de probar", la profesora AnDi indica:

> *"Considero que las pruebas que presenté permiten la demostración de diferentes hipótesis, y podrían convencer a quienes conocen la materia y pueden concordar con ellas o no, pero necesitan un amplio conocimiento de geometría. Para ellos la demostración y la expresión de hipótesis y la expresión de tesis constituyen una parte fundamental de toda demostración.... Pero para nuestros estudiantes muchas veces la demostración dinámica permite convencerlos con una mayor efectividad y llevarlos luego a analizar de forma deductiva las fórmulas e hipótesis, por lo que para ellos, la demostración dinámica constituye un pilar fundamental sobre el cual desarrollar sus conocimientos".*

Esta concepción se refuerza después de haber experimentado ella misma con el software dinámico de geometría Cabri, manifestando que en el trabajo con estudiantes se deben utilizar las comprobaciones en casos particulares, como forma de "verificación" previa, ya que ello puede ser más convincente que empezar desarrollando directamente procesos lógico-deductivos.

Por ejemplo, en el primer foro, al comentar los diferentes procedimientos que sus compañeros han utilizado para demostrar la igualdad de la actividad "Resolución de problemas de probar", dice:

> *"...existen diversos caminos para llegar a la resolución del problema, dependiendo del nivel de cada uno, aunque considero que el factor fundamental de usar este tipo de programas, es de poder ofrecer a nuestros alumnos, otra manera de resolver los problemas, y no tan sólo centrarnos en hipótesis, sino mediante comprobaciones, si cabe la pena decirlo, físicamente al arrastrar las figuras y poder comprobar los triángulos mediante mediciones".*

A pesar de su disposición favorable a la realización de comprobaciones en el trabajo con estudiantes, AnDi diferencia entre comprobar y probar. Lo manifiesta, cuando responde en el primer foro a la pregunta de la moderadora ¿Efectuar mediciones sobre una gráfica es una demostración válida?

"Sobre si efectuar mediciones sobre una gráfica es una demostración válida, debo mencionar que como demostración teórica no es válida, la demostración gráfica sirve para conceptualizar visualmente una teoria pero esto no la autentifica. Es una forma alternativa de aprendizaje".

El carácter verificador que para ella tiene la prueba se refuerza cuando dice que probar supone proceder con argumentos irrefutables que pongan de manifiesto la infalibilidad del proceso y del resultado. Considera que, **en cualquier contexto** (de enseñanza-aprendizaje o no), ello sólo es posible mediante procedimientos lógicos y simbólicos en los que las proposiciones y razonamientos que se utilicen hayan sido ya validados previamente, de manera que el resultado se incorpore a un sistema deductivo de axiomas y teoremas. Estas consideraciones indican la Función de **Sistematizar** resultados que AnDi da a la prueba. El que AnDi subraye el papel que la prueba desarrolla en la conexión entre sí de diferentes propiedades indica la manera en la que la Función de **Sistematización** es integrada en el significado de la prueba.

Así, en el ejercico de i-matemáticas AnDi justifica la necesidad de culminar los procesos dinámicos de manera deductiva.

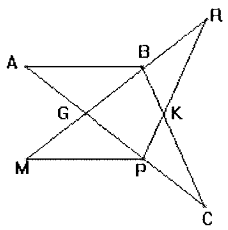
"Pero es importante que mencione que la dinamización y la representación gráfica por si solas no son válidas para probar una proposición, o demostrar hipótesis, o conjeturas, ya que es también necesario la expresión de la hipótesis en forma simbólica, la tesis en forma simbólica, y también constatar proposiciones y razones".

En la extensión al trabajo con pruebas en el aula, AnDi indica:

"Yo considero que sin importar la edad, debemos aclarar a nuestros estudiantes qué es lo que estamos haciendo, que si no es una demostración, que si es una comprobación.....Es necesario aclarar que muchas veces estamos tentados a suponer que una fórmula es verdadera, y aunque las comprobaciones que hagamos pueden parecer evidencias suficientes para una teoría científica. En las matemáticas es necesario construir argumentos infalibles, por lo tanto considero importante que los estudiantes sepan siempre lo que están haciendo". (Primer Foro)

Esta concepción de AnDi sobre la prueba, como medio de convencer de la verdad de un argumento a través de procedimientos lógico-deductivos, se pone de manifiesto también en las pruebas que realiza. Pero en ellas se observa un intento de desarrollar procesos en los que se refleje el significado del contenido matemático con el que se está trabajando y el sentido de proceder de la manera en que se hace. Por ejemplo, cuando intenta demostrar la igualdad de la actividad "Resolución de problemas de probar" usa un proceso lógico-deductivo que desarrolla utilizando lenguaje simbólico y en el que da pequeñas explicaciones de lo que pretende hacer y de las propiedades y conceptos en los que se va apoyar, apareciendo por escrito el enunciado de las propiedades que utiliza. Esto otorga a su prueba mayor **carácter Explicativo**, pretendiendo con ello que se evidencie, no sólo que la igualdad es cierta, sino por qué ello es así. Al proceder de esta forma, se asegura una transmisión más clara y significativa de propiedades y conceptos matemáticos.

"Antes de tratar de resolver el problema, busqué la información necesaria, que me otorgase, según yo los conceptos necesarios para su resolución. Después de su lectura, he tratado de resumir los conceptos o hipótesis necesarias, para determinar que ^R = ^C.



1.-Semejanza de triángulos:
-Determiné lados homólogos.
-Determiné características de semejanza de triángulos. En este caso Reciprocidad: "Si un triángulo es semejante a otro éste es semejante al primero".
En base a esto determiné si tienen sus tres lados proporcionales. Si poseen 2 ángulos respectivamente iguales.
Asocié cada ángulo con su lado opuesto. Estableciendo la proporcionalidad de los lados
Apliqué el teorema fundamental de existencia de triángulos semejantes: "toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero
Que en nuestro caso particular sería la recta imaginaria que se traza entre el punto G y K,
En el triángulo MPR, la recta GK // a la recta MP.
En el triángulo ABC, la recta GK // a la recta AB (// = paralelas)
Entonces el Triángulo MPR es semejante al triangulo ABC.
Y el triángulo MPR es semejante al triángulo GKR.
Y en el triángulo ABC este es semejante al triángulo GKC Si el triángulo MPR es semejante al triángulo ABC entonces
^A = ^M
^P = ^B
^R = ^C que es lo que buscábamos"

El significado que para ella tiene la prueba como proceso explicativo a través del que se comunica contenido matemático también se extiende a su concepción de la misma como objeto de enseñanza-aprendizaje. Una manifestación de ello es la importancia que da a las características gráficas y manipulativas del software dinámico como elementos que van a facilitar la comunicación y la comprensión de las relaciones y propiedades matemáticas integrantes de un proceso de prueba.

Por ejemplo, en el 2º foro, al responder a la pregunta *¿El uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de resolver el ejercicio de i-matemáticas?* afirma:

> *"Sobre si cambia mi forma de ver y de resolver problemas, tengo que estar de acuerdo en que estas herramientas dinámicas permiten hacer una mejor representación espacial de los problemas, que en muchas ocasiones necesitan nuestros alumnos.... Si analizamos los requerimientos para realizar una demostración efectiva, en los textos se menciona la importancia de la representación gráfica, si a ésta le sumamos dinamismo, se presenta la facultad de reducir la complejidad de la resolución del problema, y a la vez permite representar lo más exactamente posible el enunciado de la proposición que se desea analizar... La dinamización ayuda a comunicar la prueba realizada, ya que permite encontrar e incluso sugerir la idea de la resolución, el trazado de los dibujos, permite notar en el gráfico los fenómenos geométricos que se pueden aprovechar".*

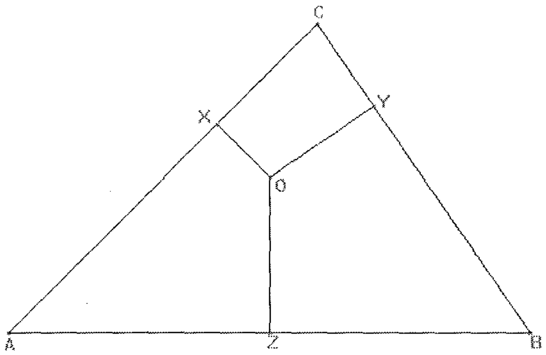
AnDi asigna un nuevo significado cuando se refiere a la prueba como **objeto de enseñanza-aprendizaje**. Desde esta perspectiva, para AnDi la realización de pruebas en el aula ayuda a **Descubrir y Construir contenido matemático**. La manifestación más importante de esta concepción la encontramos en la importancia que concede al software dinámico cuando se usa como medio de representar gráficamente situaciones matemáticas y experimentar manipulando y realizando comprobaciones que lleven a intuir el resultado (conjeturas), que posteriormente, habrá de ser validado de manera formal. Por ejemplo, al identificar características de las pruebas del teorema de Pitágoras, según su versión estática y dinámica, en la actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", expone:

> *"...el tercer tipo de prueba se basa puramente en la teoría de aprendizaje constructivista, el alumno que experimenta con este applet su aprendizaje se va basando en el descubrimiento, al tener que mover los triángulos que surgen de uno de los cuadrados de uno de los lados del triángulo, y el cuadrado que se levantó de el otro lado de los catetos, teniendo que desplazarlos y ubicarlos correctamente en el espacio o en el área que corresponde al cuadrado de la hipotenusa...Considero que las tres formas de enseñanza pueden ser válidas, pero particularmente prefiero las que permiten una mayor interacción, donde está presente el dinamismo. Los jóvenes hoy en día con la multitud de imágenes a las cuales están sometidos constantemente, prefieren modelos mucho más didácticos e interactivos, no prefieren simplemente leer información sino interactuar con ella y así crear sus propios conocimientos".*

Así, la actividad que prepara con el objetivo de que sus alumnos del último año de Bachillerato, investiguen sobre el significado del enunciado del teorema de Fermat y lo demuestren, con la ayuda del software dinámico Cabri Géomètre, es un ejemplo:

"Uno de los numerosos problemas al que este genial matemático dio solución es el conocido como Teorema del Triángulo de Fermat, con el cual se puede encontrar lo que pide la siguiente situación:

Nos encontramos en un aeropuerto que tiene tres pistas de aterrizaje dispuestas de tal modo que forman un triángulo. En la figura las pistas serían los lados AB, AC y BC. Se quiere construir una torre de control en un punto que se encuentre a una distancia mínima de las pistas, es decir, un punto O tal que las distancias OX, OY y OZ sean mínimas, o sea que OX+OY+OZ sea lo menor posible. ¿Cómo encontrar ese punto? Fermat encontró una solución geométrica. Proponemos que intente buscarla"



(Actividad de evaluación)

El papel que asigna al profesor en el aula refuerza el carácter de la prueba como elemento para construir y descubrir contenido matemático. Considera AnDi que el docente no debe entorpecer la tarea descubridora del alumno y debe actuar sólo como ayuda y guía del aprendizaje. Desde este punto de vista describe los objetivos de la actividad anterior:

"... los alumnos desarrollarán sus propias estrategias de aprendizaje...el profesor apoyará las decisiones de los alumnos; se pretende guiar al alumno y no imponer una forma particular de aprender; es decir permitir a los alumnos darse cuenta del valor del descubrimiento". (Actividad de evaluación.)

AnDi subraya el papel de las **pruebas semánticas.** Esta afirmación se fundamenta en el carácter explicativo que da a sus pruebas y en el que se ven características que permiten que su comunicación y con ella la transmisión de contenido matemático sean más eficaces. Además, busca herramientas (como el software dinámico) que permitan que el propio usuario pueda indagar sobre los conceptos y propiedades que subyacen en el problema y en las conclusiones que se derivan de ellos. Para AnDi, este hecho no ha de evitar que, en cualquier contexto en que se considere la prueba, se deba finalizar expresando las conclusiones en forma simbólica y encadenando hipótesis, propiedades y resultados de forma lógica para llegar a la tesis.

Se exponen de manera resumida, en el siguiente gráfico correspondiente a la Figura III.7., las concepciones sobre la prueba de la profesora AnDi:

Concepciones sobre la prueba

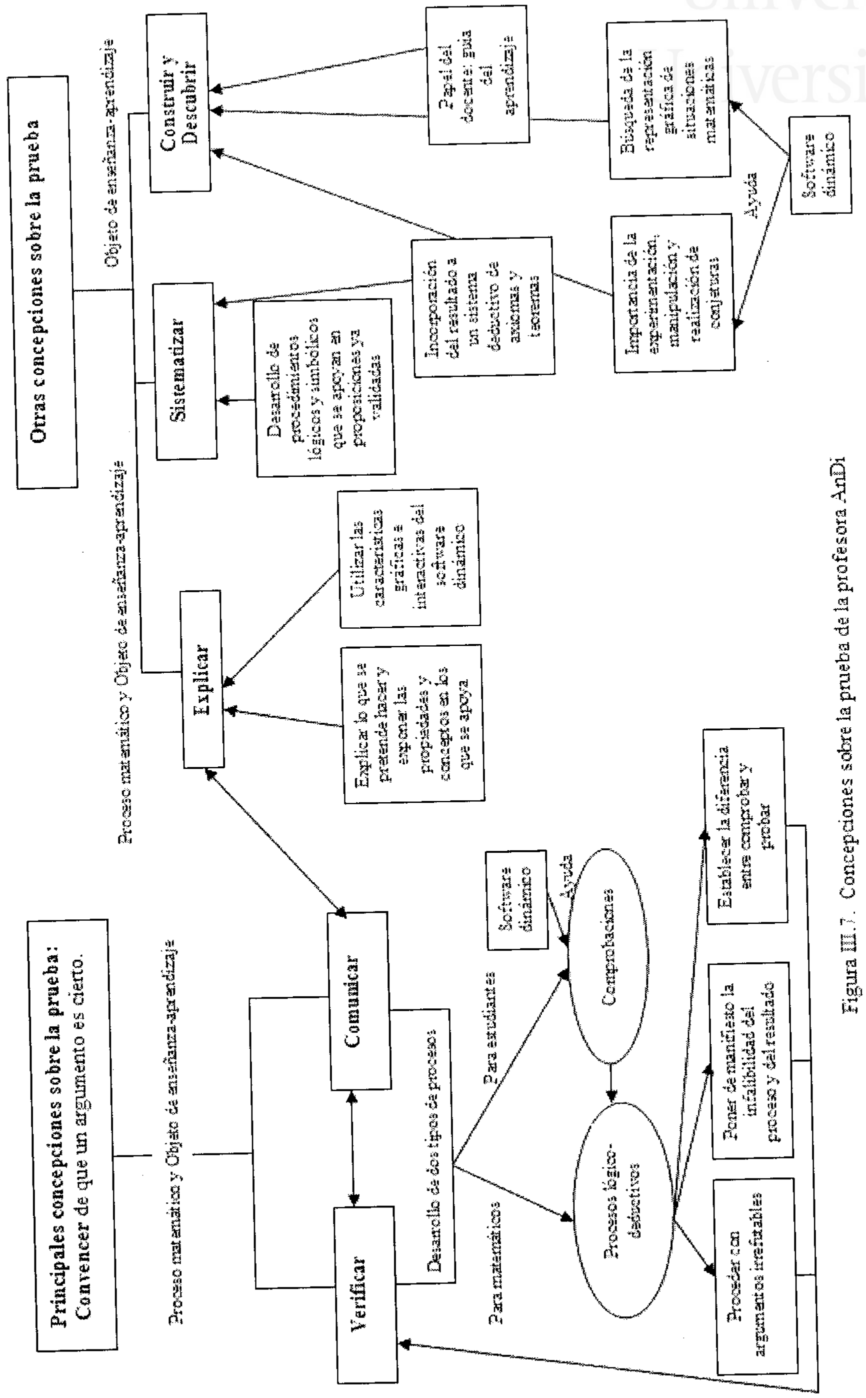


Figura III.7. Concepciones sobre la prueba de la profesora AnDi

III.8. Caso 8: Profesora nº 8, CriBor.

Lo producido por la profesora CriBor indica que la principal concepción sobre la prueba, **en cualquier contexto** (proceso matemático u objeto de enseñanza-aprendizaje), es la de **Verificar** un argumento. Ello se manifiesta en la búsqueda de la generalización del resultado. Por ejemplo, cuando comenta la demostración estática del teorema de Pitágoras de la Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", indica:

"No permite la generalización a un triángulo rectángulo que no sea isósceles".

En la actividad que propone para trabajar con alumnos de 15 años, requiere deducir las posibles soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

"Los alumnos deberán efectuar un proceso inductivo que les permita determinar las características de los sistemas de ecuaciones lineales (compatibles: determinados o indeterminados; o incompatibles). O sea se tratará de ir de los casos particulares a la generalización".

En opinión de esta profesora, la características manipulativas del software dinámico, constituyen una gran ayuda para generalizar. Por ejemplo:

"En este caso, una característica sobresaliente y muy útil, es que es posible efectuar transformaciones manteniendo el área pero no la forma de la figura. Es posible repetir las transformaciones para diferentes triángulos rectángulos". (Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba".)

CriBor distingue entre comprobar un resultado en unos cuantos casos concretos y demostrar. Un ejemplo de ello lo obtenemos de la preparación de un foro, que CriBor utiliza para completar su actividad con alumnos:

"A continuación de la actividad propuesta, se tratará en un foro con los alumnos el concepto y procedimiento de demostrar: Se iniciará el foro con las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de actividad hemos hecho con los sistemas de ecuaciones lineales?
¿Hemos comprobado cuándo un sistema es compatible y cuándo no?
¿O lo hemos demostrado?
¿Qué diferencia hay entre comprobar y demostrar?
¿Es suficiente con comprobar?"

...Después del debate se instará a los alumnos a documentarse sobre el tema, sugiriendo la lectura de: http://www.matematicas.unal.edu.co/logica/Rota1/node7.html
A continuación se iniciará una nueva ronda de discusiones sobre el tema, en base a las preguntas:
¿Qué opináis ahora?
¿Qué hemos hecho durante las clases: Comprobar o demostrar?
¿Qué deberíamos llevar a cabo para DEMOSTRAR?"
(Actividad de evaluación.)

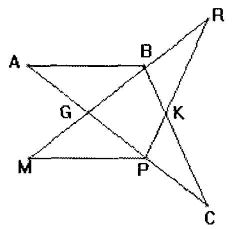
Tanto si se trabaja con alumnos en el aula, como si se considera la prueba como un proceso matemático, la profesora CriBor relaciona la verificación de un resultado con el desarrollo de procesos deductivos, de manera que se asimilen y apliquen razonamientos lógicos y se esté en disposición de considerar los resultados obtenidos como parte de una estructura axiomática, lo que subraya la Función de **Sistematización** de la prueba.

Un ejemplo de la concreción de este significado en el aula, lo encontramos en la Actividad "Diagnosticar: Comprobar y probar en la resolución de problemas", donde indica:

> *"...a medida que se trabaje con alumnos de edades más avanzadas, será posible (como lo señalan varios autores) ir cediendo en las pruebas dinámicas a favor de desarrollos analíticos".*

Por otra parte, en la consideración de la prueba como proceso matemático, CriBor alude a procedimientos deductivos que se desarrollarán en función del conocimiento previo de cada uno.

> *"Para resolverlo cada uno de nosotros pone en juego los recursos pre-existentes, nociones, conceptos, etc., comenzando quizás por aquello que nos llama más la atención. Primero visualizamos un todo y después las propiedades que pueden utilizarse.*
>
> *Por ejemplo:*
> *Probar la congruencia de los triángulos MRP y ABC.*
> *Probar que K es punto medio del segmento BC y del segmento PR, etc.*
> *También se podría tratar de probar que AB es paralelo a MP y utilizar las propiedades de los ángulos formados entre paralelas cortadas por una transversal, etc."*



CriBor enfatiza el significado de "relación entre propiedades" que se pone de manifiesto en la realización de pruebas. Este énfasis sobre la explicitación de las relaciones entre contenidos y propiedades matemáticas al realizar pruebas permite indicar que CriBor ve las pruebas también a través de su Función de **Sistematización**.

Otra concepción de CriBor sobre la prueba es la de considerarla como medio para **Construir y Descubrir** contenido matemático, y ello tanto si se alude a la prueba como **proceso matemático**, como cuando se la considera como **objeto de enseñanza-aprendizaje**. Un indicador de ello es su consideración del software dinámico como herramienta que favorece y propicia la investigación, la realización de conjeturas y su comprobación. Ello va a permitir, en opinión de esta profesora llegar a descubrir relaciones y propiedades.

Por ejemplo, cuando trabaja con una de las versiones dinámicas, que se utilizan en la actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", para demostrar el teorema de Pitágoras, indica:

> *"...se podría trabajar efectuando conjeturas sobre diferentes figuras construidas sobre los lados y la hipotenusa del triángulo rectángulo o conjeturar y posteriormente comprobar con triángulos acutángulos u obtusángulos".*

Cuando se refiere al trabajo con alumnos, mostramos como ejemplo la preparación de una actividad, ya mencionada, para que sus alumnos de 15 años puedan llegar a obtener, por ellos mismos, el número de soluciones posibles para sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su relación con los coeficientes de las ecuaciones. La resolución de la actividad la plantea de manera que los alumnos, a través del programa Cabri o de otro tipo de software apropiado, como Matlab, experimenten, conjeturen, comprueben sus conjeturas y demuestren posteriormente sus resultados.

> *"El objetivo es estudiar los sistemas de ecuaciones lineales, su compatibilidad y resolverlos, cuando sea posible. Comenzará el tema con alguna situación problemática que pueda modelizarse como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se pedirá a los alumnos que ensayen alguna solución. Se presentarán a los alumnos tres sistemas de ecuaciones lineales: Uno con solución única, uno con infinitas soluciones, uno incompatible. Se comenzará por el caso con solución única. Se pedirá que los representen...*
>
> 1) *¿Has obtenido la misma representación que el resto de los integrantes de tu grupo?*
> 2) *En caso negativo ¿por qué?*
> 3) *¿El grupo ha encontrado las diferencias?*
> 4) *En caso negativo debéis consultar al profesor*
> 5) *Subsanado el inconveniente ya tenéis la misma representación*
> 6) *Indicad gráficamente las coordenadas del punto solución*
> 7) *Resolved el ejercicio analíticamente, en forma individual y comparad los resultados con las coordenadas del punto de intersección.*
> 8) *Informad sobre los resultados a vuestros compañeros de clase.*
> 9) *¿Los tres sistemas admiten solución?*
> 10) *¿Qué diferencia se puede encontrar entre el primero y el segundo?*
> 11) *Con respecto al segundo, elegid distintos puntos sobre la única recta que quedó representada y comprobad que todos ellos satisfacen el sistema de ecuaciones.*
> 12) *¿Cuántas soluciones hay en el segundo sistema? ¿Por qué? Diremos que el sistema es compatible pero indeterminado.*
> 13) *¿Qué diferencia se puede encontrar entre el segundo y el tercero?*
> 14) *¿Cuántas soluciones hay en el tercer sistema? Diremos que el sistema es incompatible.*
> 15) *¿Cómo resultan los coeficientes de las incógnitas en el primer sistema?*
> 16) *¿Cómo resultan los coeficientes de las incógnitas en el segundo y tercer sistema?*
> 17) *¿Cómo podéis justificar que uno sea indeterminado y otro incompatible?*
> 18) *¿Qué podéis opinar sobre los términos independientes, en estos dos casos?*
>
> (Actividad de evaluación.)

Como se puede observar, CriBor pretende que sea el propio alumno el que descubra y justifique los resultados que obtiene. Esto otorga a la prueba un carácter antiautoritario, siendo un indicador del significado dado a la prueba como medio de **Construir y Descubrir**.

El papel que atribuye al profesor en el aula constituye un nuevo indicador de la Función de la prueba como medio de **Construir y Descubrir**. CriBor considera conveniente que los profesores aprendan el manejo de nuevas herramientas para analizar las posibilidades de las mismas, con el fin de preparar actividades adecuadas, que permitan al estudiante buscar y obtener respuestas por sí mismo.

Por ejemplo, cuando CriBor trabaja el ejercicio de i-matemáticas y alude al tipo de actividades que requieren investigar y experimentar, comenta:

> *"Obviamente el rol del profesor, en un contexto dinámico debe ser distinto del tradicional. Primero debe prepararse para afrontar situaciones novedosas, debe conocer el entorno dinámico en el que trabajará con sus alumnos (hardware, software, etc), debe estar en condiciones de planificar las actividades en ese contexto, debe ser un facilitador por excelencia abandonando antiguas actividades de "dictado" de clases. Solo podrá inducir al logro de resultados mediante interrogaciones bien planificadas que permitan al alumnado obtener las respuestas precisas sin dispersarse".*

Las características visuales e interactivas del software dinámico, unidas a las funciones dadas a los razonamientos lógicos y deductivos le sirven a CriBor como apoyo para aclarar significados y poner de manifiesto relaciones entre conceptos, tanto dentro como fuera del aula. Por ejemplo, cuando responde a las cuestiones del ejercicio de i-matemáticas, afirma:

> *"Las comunicaciones más convincentes serán aquellas que el interlocutor pueda 'visualizar' mejor... en este contexto dinámico podremos lograr que el otro comprenda globalmente la prueba y que comprenda el razonamiento".*

Por último, cabe indicar que cuando CriBor hace referencia a diversas formas de realizar pruebas, alude a procesos en los que se utilizan propiedades y conceptos matemáticos ya validados y en los que se obtienen resultados de forma deductiva. Además, califica sólo a este tipo de procesos como pruebas o demostraciones. Admite el uso de las características gráficas e interactivas del software dinámico como medio de visualizar y manipular situaciones y resultados que van a conducir a una mejor comprensión del contenido matemático con el que se está trabajando, y el establecimiento de conjeturas y su comprobación como forma de poner de manifiesto la posible validez de un resultado que, posteriormente, habrá de ser generalizado de forma lógico-deductiva. El uso de estas herramientas dinámicas, tal y como CriBor lo plantea permite la inclusión de elementos que ayudan a dotar de mayor significado a determinados objetos matemáticos del mismo, de manera que todo el proceso a nivel general y sus conceptos y relaciones a nivel particular son más fácilmente comprendidos, aprehendidos y asimilados. Todo ello indica que CriBor apoya el desarrollo de **pruebas semánticas**.

Resumimos las concepciones sobre la prueba de la profesora CriBor en el siguiente gráfico, correspondiente a la Figura III.8.

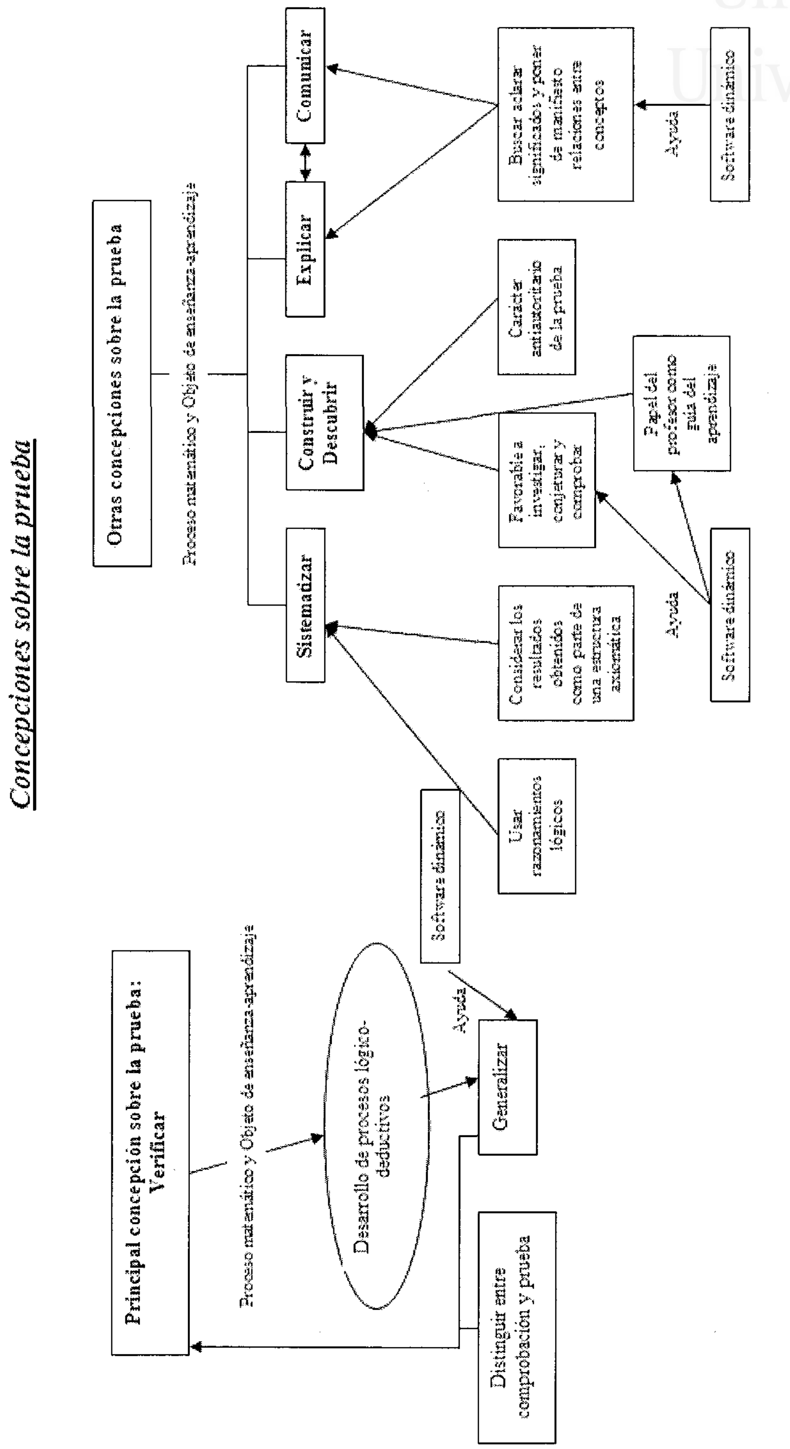


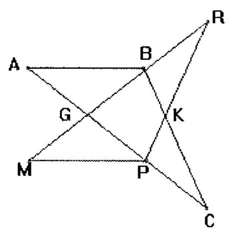
Figura III.8. Concepciones sobre la prueba de la profesora CriBor

III.9. Caso 9: Profesora nº 9, TeLo.

El significado que TeLo da a la noción de prueba, como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, es el de **Verificar** un argumento. Si el trabajo con pruebas lo realizan matemáticos, el proceso a desarrollar es lógico deductivo, puesto que relaciona dichos procesos con la búsqueda de relaciones entre propiedades con el fin de llegar a nuevas relaciones partiendo de una condición o condiciones iniciales. Debido a esta consideración, TeLo enfatiza la función de la prueba de organizar resultados en un sistema deductivo de relaciones y propiedades ya validadas, con lo cual consideramos que relaciona la idea de **Verificar** con la de **Sistematizar.**

Por ejemplo, al repasar las formas de demostrar la igualdad de la actividad "Resolución de problemas de probar" de sus compañeros y compararlas con la suya, hace el siguiente comentario:

> *"Cada uno estudia el problema de acuerdo a sus conocimientos previos... Algunos probaron la congruencia de los triángulos MRP y ABC para llegar a la tesis. Otros trabajaron con las paralelas que contienen a AB y MP y aplicaron las propiedades que poseen los ángulos formados entre paralelas y cortados por una transversal. Yo trabajé con las hipótesis y la congruencia de RPG y BGC, considerando que la recta que contiene a GK es eje de simetría, etc..."*



El objetivo que TeLo persigue al realizar pruebas en el aula es el de que los estudiantes reconozcan la necesidad de probar y la infalibilidad de los argumentos que se han de utilizar. Por ejemplo, cuando se refiere al papel del profesor, menciona la responsabilidad del mismo en la consecución de este objetivo.

> *"...los profesores deben instruir a sus alumnos sobre la consecuencia de demostrar un teorema, en particular: la conveniencia de su aplicación, la improcedencia de ulteriores verificaciones y la imposibilidad de encontrar contra-ejemplos".* (Primer foro.)

Por otra parte, TeLo diferencia entre comprobar y probar. Por ejemplo, en el primer foro, manifiesta:

> *"Creo que debemos ir enseñando a nuestros alumnos la diferencia entre comprobar con un ejemplo o con varios ejemplos y lo que es una demostración".*

Mientras que al considerar la prueba como proceso matemático TeLo subraya la necesidad de desarrollar procesos lógico-deductivos, el desarrollo de pruebas en el aula está, sin embargo, en función del desarrollo de la capacidad de abstracción del estudiante. Si el estudiante no está preparado, considera necesario iniciar con otro tipo de procedimientos que lo preparen para trabajar de manera lógico-deductiva posteriormente. Uno de esos procedimientos está relacionado con la experimentación y la realización de comprobaciones previas y para ello considera importante la ayuda que proporcionan las características gráficas y manipulativas de las herramientas dinámicas.

Por ejemplo, al resolver el ejercicio de i-matemáticas, afirma:

"Las pruebas en un contexto dinámico (considerada como ensayo y error o experimentación) NO PUEDEN SER CONSIDERADAS como DEMOSTRACIONES. Pero éstas se deben realizar cuando los alumnos ya tengan formado el pensamiento abstracto. Lo van a alcanzar con una mayor rapidez si están bien motivados y se los fue preparando para llegar al razonamiento lógico-deductivo".

Se completa este ejemplo con el siguiente, obtenido del 2º foro:

"La visualización y la animación de gráficos que posee Cabri es un elemento importantísimo para la motivación del niño y del adolescente".

Para TeLo, la prueba ayuda al estudiante a **Construir y Descubrir** contenido matemático, y aparece relacionada también con las características gráficas y manipulativas del software dinámico. Según TeLo, estas características permiten manipular, experimentar, conjeturar y comprobar las conjeturas y a partir de ahí el estudiante puede llegar al descubrimiento de nuevas relaciones y resultados. Por ejemplo, al resolver la actividad "Software dinámico. Procesos de prueba" en la que se trabaja con applets dinámicos para demostrar el teorema de Pitágoras, indica:

"Los niños y adolescentes tienen incorporada la computadora a su forma de vida,...sirve para inducir, para fomentar en los más pequeños la exploración, que aprendan a conjeturar, que se cuestionen, que manipulen los objetos, o distintos applets y permitirles ver que por distintos caminos se puede llegar a un mismo fin...".

Esta concepción se ve reforzada con el papel que asigna al profesor como guía e inductor del aprendizaje, subrayando el carácter antiautoritario de las pruebas desarrolladas con software dinámico, que van a permitir que el estudiante obtenga resultados por sí mismo y de este modo se sienta capaz de ello. Un ejemplo lo proporcionan las referencias de TeLo al trabajo con applets dinámicos en la demostración del teorema de Pitágoras:

"Para trabajar con esta modalidad (software dinámico) *el rol del docente debe cambiar. Debe idear problemas dinámicos que le permitan al alumno, en un proceso*

inductivo sistemático llegar, gradualmente a conclusiones que en el contexto tradicional de la enseñanza hubieran sido explicadas por el docente y el alumno hubiera mantenido un rol pasivo con poca motivación, donde no podría desarrollar su capacidad creativa, le costaría más los procesos de demostración lógicos-deductivos y por ende fijar los conceptos". Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba".

Además, TeLo considera la prueba como proceso que promueve el razonamiento, la reflexión y el uso del conocimiento previo, lo que es parte de la Función de la prueba como elemento para **Descubrir y Construir** conocimiento matemático.

Por ejemplo, al responder la pregunta del cuestionario final ¿Cómo puede favorecer realizar demostraciones en el aula el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? afirma:

"Permite al alumno desarrollar el pensamiento abstracto, lo ayuda a razonar, meditar, utilizar conceptos previos, vivencias previas, actuar y argumentar con razonamientos sólidos, es una enseñanza para cualquier situación de la vida".

Tanto cuando trabaja con pruebas en el aula como cuando hace referencia a las mismas como procesos matemáticos alude a la necesidad de desarrollar procesos que faciliten la comprensión de lo que se pretende transmitir. Apoyarse en las propiedades gráficas del software dinámico y desarrollar procesos lógico-deductivos en los que se manifieste con claridad el contenido matemático implícito en ellos son elementos que para TeLo harán posible que las pruebas sean más **explicativas** y que permitan la **comunicación de contenido matemático** de manera más eficaz. Por ejemplo:

"Las comunicaciones más convincentes son aquellas en que las personas a quienes va dirigida la prueba las pueden visualizar o bien seguir el proceso lógico-deductivo sin problemas". "Resolución de la actividad "Software dinámico. Procesos de prueba".

En el siguiente ejemplo, la profesora TeLo, hace referencia al carácter explicativo y transmisor de contenido matemático que deben reunir los procesos de prueba desarrollados en el aula:

"La demostración pretende convencer a todos los interlocutores, incluso a uno mismo. También pretende y eso es importante en la docencia, aclarar y hacer comprender mejor lo que se quiere enseñar". Ejercicio de i-matemáticas.

Para TeLo es importante introducir los procesos lógico-deductivos, únicos que considera válidos para demostrar, de manera que queden claros los conceptos y propiedades que se utilizan, así como los resultados que se van obteniendo. Para lograrlo considera de gran ayuda las características gráficas e interactivas del software dinámico, ya que ayudan a experimentar, conjeturar y descubrir relaciones, propiedades y nuevas formas de resolver los problemas. Estas herramientas facilitan la realización de procesos más explicativos y fáciles de comunicar y comprender. Estas inferencias nos llevan a considerar a la profesora TeLo como favorable a la realización de **pruebas semánticas.**

Resumimos de manera gráfica las concepciones de esta profesora sobre la prueba como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje a través de la Figura III.9.

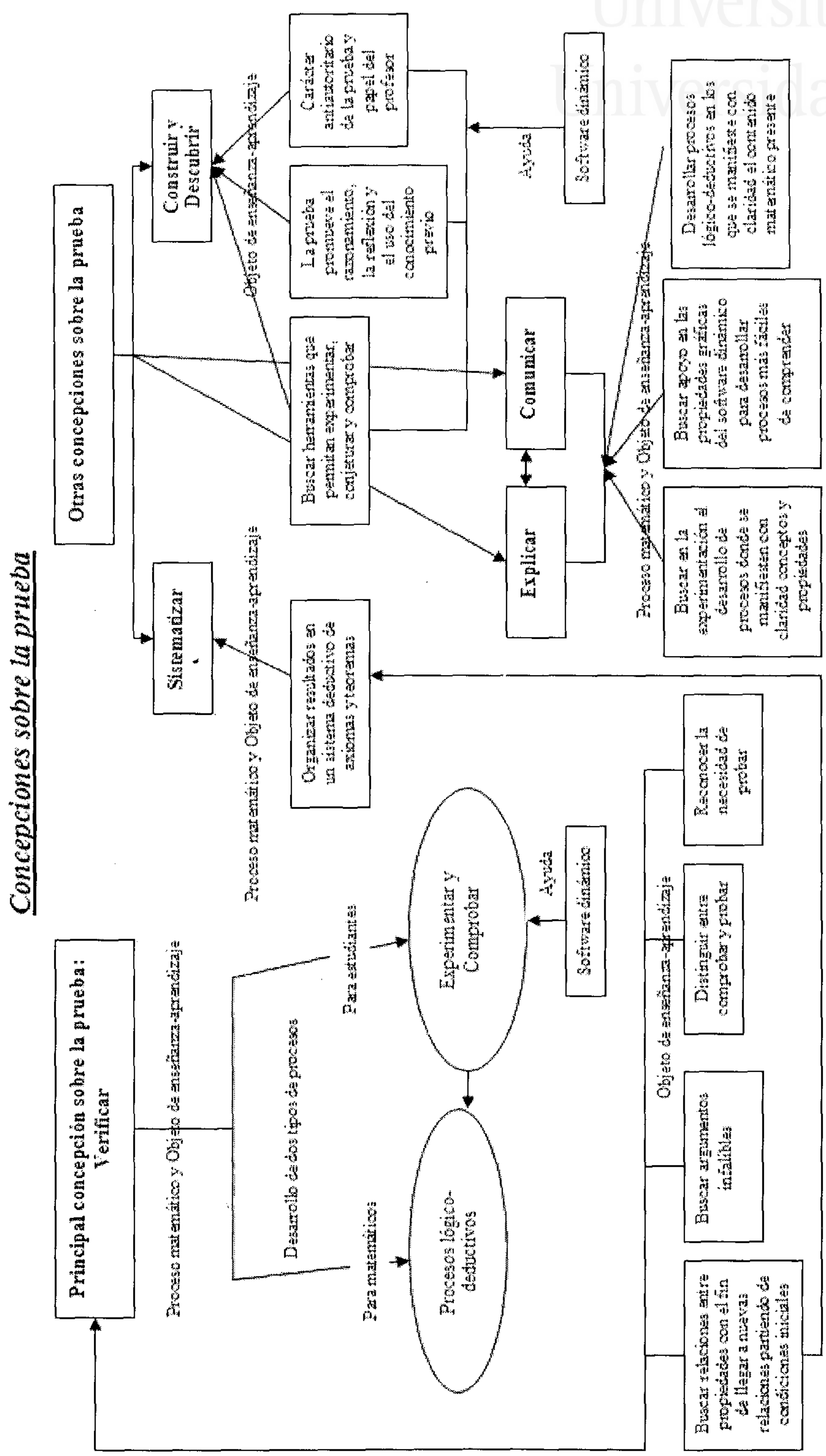


Figura III.9. Concepciones sobre la prueba de la profesora TeLo

III. 10. Caso 10: Profesor nº 10, ViMo.

Para ViMo la prueba, en cualquier situación (dentro o fuera del aula), es un proceso que se desarrolla para **Verificar** un resultado, según indica:

> *"Prueba: Objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, en situaciones que requieren justificar el carácter de verdadero de un enunciado...La palabra prueba se puede utilizar en distintos contextos con diversos sentidos. Todos ellos reconocen una idea común que es la de validar una afirmación (tesis) aportando razones o argumentos".*

Además, ViMo vincula la idea de prueba con la búsqueda de la generalización del resultado. Para lograrlo ve una gran utilidad en la visualización y manipulación de situaciones y objetos matemáticos, y, por ello, en el software dinámico, que permite este tipo de acciones. Por ejemplo, en sus referencias a las formas dinámicas de probar el teorema de Pitágoras en la Actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", indica:

> *"Para demostrar esto se utiliza el procedimiento de arrastrar, de esta forma vamos probando distintos paralelogramos viendo que la igualdad se cumple siempre. Es una demostración visual, no se necesita una demostración matemática para llegar a la solución... Con el método de arrastrar las figuras lo que vemos es que aunque se modifique la distancia de los lados de los paralelogramos seguimos manteniendo la misma área, por lo que se sigue cumpliendo el Teorema de Pitágoras".*

En lo que se refiere a la prueba en situaciones de aprendizaje, dice:

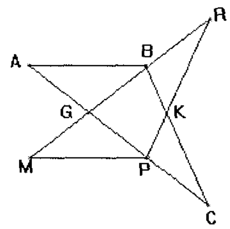
> *"Nos ayuda gracias al modo arrastrar. Una vez dibujada la figura en el CABRI podemos demostrar arrastrando los puntos que se cumple la igualdad aunque modifiquemos las condiciones. Podemos arrastrar los puntos haciendo mayor o menor el ángulo y siempre se cumplirá que la bisectriz divide al ángulo en dos partes iguales y que el punto de la intersección entre la perpendicular y la bisectriz (M) es el centro de la circunferencia que es tangente al lado del ángulo Q...Por lo tanto el modo arrastrar nos facilita mucho el trabajo a la hora de demostrar al alumno otras posibilidades, o mejor dicho demostrarle que aunque cambiemos las condiciones del problema siempre se va a cumplir la igualdad. Nos da infinitas posibilidades sin tener que estar dibujándolas en la pizarra, simplemente arrastramos los puntos y se modifica el problema...Aprovecharán más el tiempo debido a que los dibujos se hacen instantáneamente y podemos utilizar el método de arrastrar para modificar las condiciones y generar nuevos ejemplos".* Ejercicio de i-matemáticas. Respuesta a la pregunta ¿Cómo puede la dinamización ayudar a probar la igualdad pedida?

ViMo admite el uso de herramientas dinámicas como ayuda en la generalización de un resultado en cualquier situación y contexto y, además, considera preciso proceder desde las hipótesis y, a través de la aplicación de propiedades y deducciones lógicas, llegar a establecer la validez de la tesis. El hecho de enfatizar el proceso de prueba desde la perspectiva de las relaciones o vínculos que se manejan o se obtienen entre las proposiciones matemáticas puede ser entendido como que la prueba se ve también desde su Función **Sistematizadora** y organizadora de los contenidos. Por ejemplo:

> *"Para un matemático la veracidad de un teorema descansa en la validez de las reglas lógicas usadas en la prueba. El teorema aparece como una consecuencia lógica y necesaria de las premisas de que parte, mediante la correspondiente inferencia deductiva. Un enunciado (o teorema) aceptado como verdadero tiene una validez universal e intemporal garantizada por la validez de las reglas lógicas usadas en la prueba".* Actividad "Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".

Su propia prueba es un ejemplo de ello, al realizarla apoyándose en principios y criterios ya aceptados como válidos y en razonamientos derivados de la aplicación de dichos criterios, así como haciendo explícitos los vínculos y las conexiones entre las propiedades matemáticas usadas.

> *"...empezar a resolver el problema utilizando todo lo relacionado con triángulos, en este caso con semejanza de triángulos, segmentos congruentes, etc...si se traza una secante a dos rectas paralelas y se conoce la medida de uno de los ángulos, es posible determinar la medida de los otros. Aplicando esto a nuestro ejemplo podemos decir que $\hat{B}$ es igual a $\hat{M}$. Siguiendo con los razonamientos al final llegamos a la conclusión de que $\hat{R} = \hat{C}$ ".*



En situaciones de enseñanza-aprendizaje, las manifestaciones y actuación de ViMo indican que a las anteriores concepciones sobre la prueba agrega la necesidad de ser eficaz en la **Comunicación** y **Explicación** de los conceptos y procedimientos con los que se trabaja en el desarrollo de la misma. Sus reflexiones sobre las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al demostrar, son uno de los elementos que apoyan esta conclusión. Por ejemplo:

> *"La comprensión y dominio de la argumentación deductiva por parte de los estudiantes requiere <u>el desarrollo de una racionalidad</u> y un estado específico de los conocimientos... Para los alumnos de los dos ciclos, es muy complicado comprender el pensamiento abstracto. Ir de lo general a lo particular. Para ellos es muy complicado comprender que a través de letras podemos llegar a algún tipo de igualdad o de demostración".* (Actividad

"Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".)

Además, ViMo busca formas más claras de validar un resultado y transmitir el proceso realizado. En su opinión, ello se consigue a través de las características gráficas e interactivas de determinado software dinámico, como Cabri Géomètre. Por ejemplo:

> "... *a la hora de comunicar las ideas en el campo de las matemáticas hace* (el uso de software dinámico) *que esto sea mucho más sencillo...Al poder hacer infinitas modificaciones del ejercicio el alumno verá...que la igualdad siempre se mantiene...El alumno lo comprende más rápidamente que si la resolución fuera estática"*. (Ejercicio de i-matemáticas.)

Finalmente, ViMo también subraya la Función de **Construir y Descubrir** conocimiento matemático de la prueba. Esta consideración de la prueba, tratada en su doble sentido de proceso matemático y objeto de enseñanza-aprendizaje, surge del trabajo con software dinámico. La posibilidad de representar gráficamente determinados aspectos y condiciones del problema e interactuar con ellos, hace posible, en su opinión, que la prueba se convierta en elemento que promueve la reflexión y el razonamiento. Por otro lado, otra ventaja que ViMo encuentra en la realización de pruebas con software dinámico es que se puede investigar con diferentes posibilidades y conjeturas, llegando a poder descubrir nuevos resultados. Un ejemplo de este aspecto, referido a la prueba como proceso matemático, lo encontramos en la resolución del ejercicio de i-matemáticas del profesor ViMo:

> *"... poder realizar modificaciones sobre el dibujo original por el método de arrastrar, nos da muchas posibilidades a la hora de conjeturar nuevas relaciones. Hace que el ejercicio sea más rico y además aprovechamos más el tiempo debido a que se pueden poner más ejemplos que si lo hiciéramos en papel"*. (Ejercicio de i-matemáticas.)

Referido a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje, ViMo responde en el foro a la pregunta *¿Cómo puede favorecer el uso de dicho software el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de prueba?*, indicando:

> *"La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica...De esta manera, permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de la matemática y tienen oportunidad de poder trabajar sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés...los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento,... "*

Su idea de la actuación que el docente debe llevar a cabo en el aula, planteando actividades y problemas que promuevan la reflexión y la realización de conjeturas, son para nosotros otros indicadores que refuerzan la idea de la prueba como instrumento para **Construir y Descubrir**.

> *"Es importante dar a los alumnos la oportunidad de plantearse y de tratar de resolver problemas interesantes para que formulen hipótesis y conjeturas..."*

Finalmente, para ViMo, en cualquier contexto o situación, los procedimientos a desarrollar han de ser lógico-deductivos, aunque ve en la visualización y manipulación importantes herramientas que van a permitir tener una visión más clara de las situaciones planteadas en los problemas de prueba y que van a ayudar a descubrir conceptos y resultados. Lo que indica que ViMo es favorable a la realización de **pruebas semánticas.** Resumimos a continuación, de manera gráfica en la figura III.10., las concepciones sobre la prueba que inferimos que se dan en este profesor.

Concepciones sobre la prueba

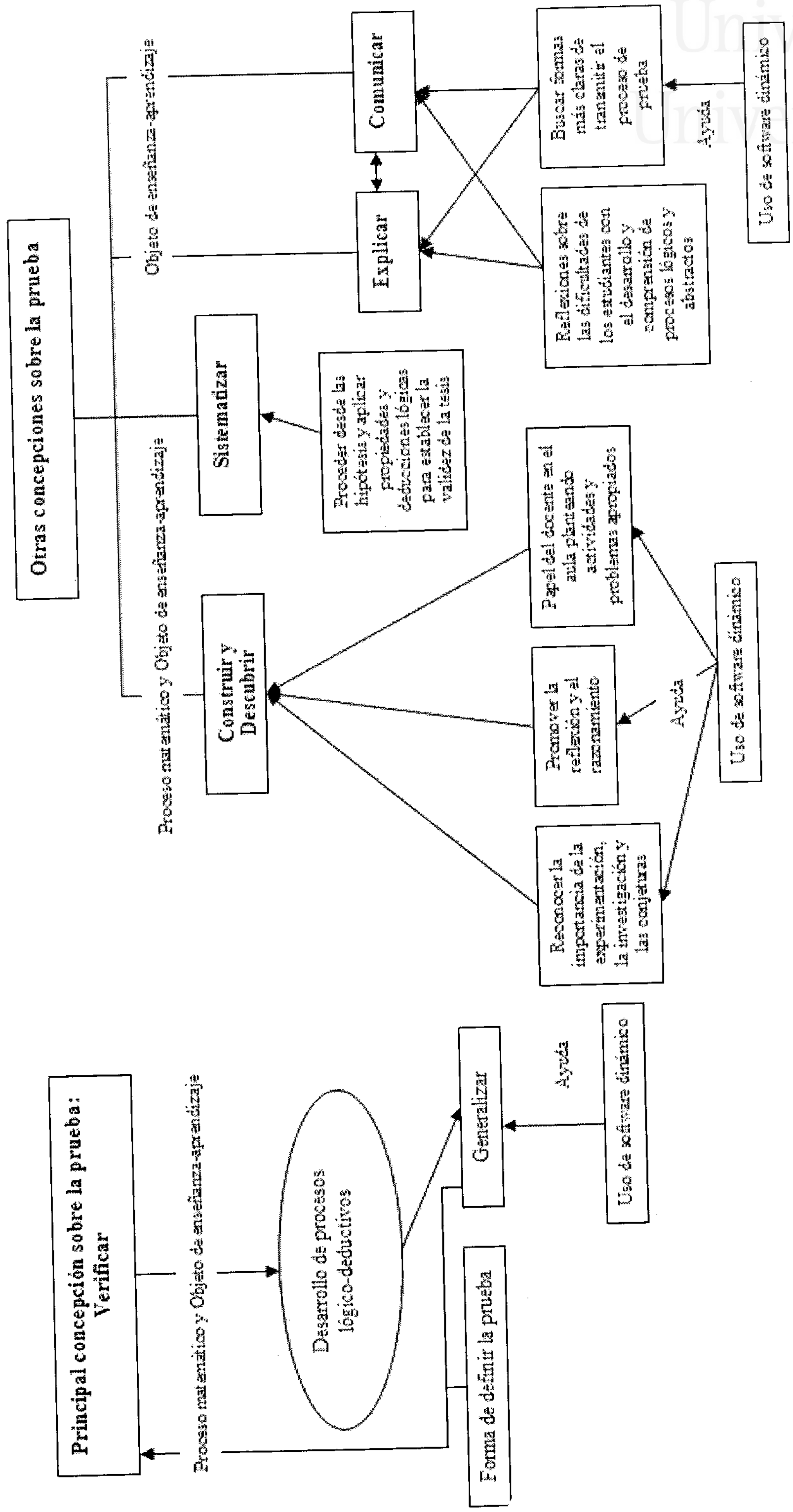


Figura III.10. Concepciones sobre la prueba del profesor ViMo

III.11. Caso 11: Profesor nº 11, JC.

Para JC la demostración como proceso matemático y como objeto de enseñanza-aprendizaje, es un proceso lógico-deductivo mediante el cual se **verifica** un resultado de manera que queda incorporado a un sistema deductivo de axiomas y teoremas. De ahí la Función **Sistematizadora** que este profesor asigna a la prueba.

Por ejemplo, en las dos pruebas que desarrolla para resolver la Actividad "Resolución de problemas de probar", sigue un proceso lógico-deductivo en el que organiza la información de modo que, utilizando lenguaje simbólico, relaciona con claridad las hipótesis y las propiedades, conceptos y teoremas en los que se apoya para llegar a la tesis. De esta forma, valida el resultado, considerándolo parte de una estructura axiomática.

*"**PREMISAS:***

1.MG=GB=BR ; AG=GP=PC

2.AG=BG

TESIS:

^R=^C

DEMOSTRACIÓN (SOLUCIÓN 1):

1.AC=AG+GP+PC	*Sumatoria de segmentos*
2. AC=3AG	*Aplicando la premisa "1"*
3. MR=MG+GB+BR	*Sumatoria de segmentos*
4. MR=3BG	*Aplicando la premisa "1"*
5. 3AG=3BG	*Multiplicando la igualdad del dato por 3*
6. AC=MR	*Reemplazando los pasos 2 y 4 en 5.*
7. triangulos ABG=MGP	*Teorema Lado Angulo Lado.*
8. ^M=^A ; AB=MP	*Semejanza de Triángulos*
9. triangulos MRP=ABC	*Teorema Lado Angulo Lado.*
*10. **^R=^C***	*Semejanza de ángulos en triángulos congruentes".*

DEMOSTRACIÓN (SOLUCIÓN 2):

7.MG=GB=BR; AG=GP=PC; AG=BG	
8.MG=GB=BR=AG=GP=PC	*Transitividad*
9. GB+BR=GP+PC	*Sumatoria de segmentos.*
10. GR=GC	*Sumatoria de segmentos*
11. triángulo GRC es isósceles	*Por tener sus lados iguales.*
*12. **^R=^C***	*Ángulos en la base de un isósceles".*

Para el caso de la prueba tomada como objeto de enseñanza-aprendizaje, JC alude a las demostraciones en geometría de la siguiente manera:

"Pienso que las herramientas que se utilizan en geometría son los teoremas y razonamientos y los estudiantes deberían basarse en esas para resolver los problemas". (Primer Foro)

Además, JC, rechaza aceptar cualquier tipo de herramienta gráfica o manipulativa para ayudarse en la realización de pruebas, con cualquier tipo de interlocutores y en cualquier contexto o situación, incluso, después de intervenir en los foros y conocer los argumentos favorables de sus compañeros. La razón es que cuando se utilizan representaciones gráficas y se manipulan configuraciones geométricas pueden producirse errores que conduzcan a conclusiones equivocadas, mientras que no será así si se utilizan propiedades y relaciones ya demostradas. Por ejemplo:

> *"De los varios métodos que pueden existir para resolver este problema, considerados en el foro, me parece que no es muy apropiado el utilizar el gráfico como referencia exacta para la solución, es decir creo que el medirlo no es una forma apropiada de probar, ya que allí se depende mucho de la percepción de la persona, existen errores en el gráfico, errores en la medición, etc... Aunque suene radical, no creo que se debería invertir tiempo en la comprobación con aparatos de dibujo, ya que éstos son susceptibles a errores y en ese caso se depende de la destreza del dibujante, sino más bien centrarse en los datos de que disponemos y los teoremas que podemos aplicar para su solución...Lo más apropiado me parece Demostrar lo que se quiere utilizando postulados, teoremas y demás demostraciones de Geometría analítica".* (Primer foro.)

Cuando alude a la prueba en el aula, agrega como inconveniente, el que el alumno no va a razonar sobre las propiedades que puede utilizar para resolver el problema:

> *"Las otras* (pruebas) *de software dinámico ayudan a probar pero no ayudan a que el estudiante vaya buscando de forma lógica la manera de demostrarlo. El estudiante arrastra y lo 'demuestra' pero no busca relaciones o teoremas que en verdad demuestren esas verdades".*

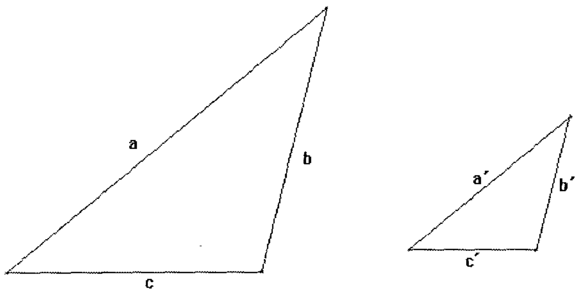
JC establece la distinción entre comprobar y probar, insistiendo en que sólo lo segundo sirve para validar un resultado. Por ejemplo, al resolver el ejercicio de i-matemáticas, utilizando Cabri Géomètre, indica:

> *"Utilizando la herramienta Cabri se puede realizar la construcción geométrica que se solicita y mediante el método arrastrar se puede **comprobar** que el triángulo ABC es equilátero cuando el radio de la circunferencia circunscrita mide igual que el lado del triángulo"*

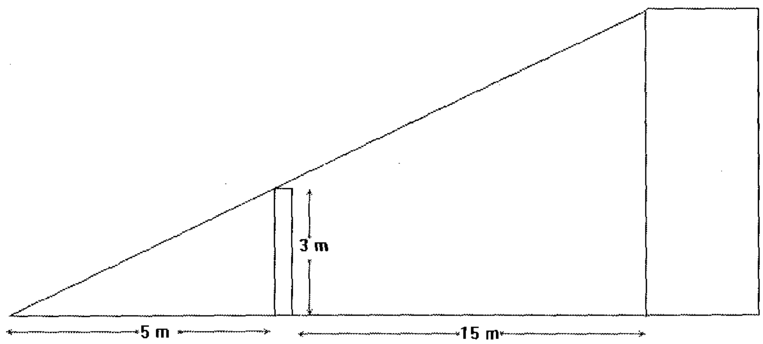
Pero, sin embargo, para JC la finalidad de una prueba, además de poner de manifiesto que un resultado es cierto mediante el uso de reglas lógicas y procedimientos deductivos, es **Explicar** y **Comunicar** contenido matemático, de manera que se exprese claramente por qué dicho resultado es cierto y cómo se obtiene el mismo.

Así por ejemplo, en la actividad de evaluación que JC prepara para trabajar con estudiantes de 14-15 años, y que tiene como objetivo que los alumnos demuestren unas relaciones de igualdad, presenta una situación problemática en un contexto que requiere para su resolución hacer uso del resultado que han de validar. Al hacerlo de esta forma, y no pidiendo que demuestren directamente la relación, presenta una aplicación práctica del resultado que se ha de justificar, y con ello, pretende que los estudiantes den significado al resultado, y vean la necesidad de argumentar resultados ya establecidos, que es otro indicador del carácter verificador que, para JC, tiene la realización de pruebas.

"Lo que se quiere probar es que en triángulos que son semejantes...la relación entre sus lados correspondientes es constante. Es decir, la relación entre los lados es constante.



Se tiene un cable que va desde la punta de un edificio hacia el suelo, pasando sobre un poste de 3m de alto. La distancia desde la base del edificio a la estaca donde llega el cable es de 15 m, y la distancia de la base del poste a la estaca es de 5 m ¿Qué altura tiene el edificio?



Por otra parte, para JC, la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje tiene también la función de ayudar a **Construir y Descubrir** contenido matemático. Un indicador de ello es su alusión al desarrollo de procesos deductivos como medio de fomentar el uso del conocimiento previo, a través del desarrollo de los procesos de conjeturar.

Por ejemplo, cuando en el segundo foro alude a la incorporación de software dinámico a los procesos de prueba, indica el carácter contraproducente que este uso puede tener para el desarrollo de estas dos capacidades.

> *"Creo que nadie discute las ventajas que brinda un software dinámico como Cabri para el aprendizaje. Sin embargo, pienso que, por ejemplo, las personas que contamos con el sentido de la vista no desarrollamos otros sentidos como lo hacen los ciegos, de la misma forma, al contar con una herramienta como ésta no se desarrolla la capacidad de razonamiento y de buscar soluciones utilizando conocimientos, sino la habilidad del ratón de arrastrar para comprobar y medir y ver que es verdad".*

La realización de la prueba y las manifestaciones hechas por JC en lo que respecta a la introducción de herramientas dinámicas en la realización de demostraciones, con cualquier tipo de usuarios, indican que para él sólo tienen validez como formas de mostrar la verdad de un argumento matemático las **pruebas sintácticas**. Reconoce que las herramientas dinámicas pueden ayudar a realizar comprobaciones o a encontrar nuevas vías de resolver un problema, pero, en ocasiones, pueden impedir que se use el razonamiento y el conocimiento previo, que junto con la validación explicativa de forma lógico-deductiva de los argumentos es, para JC, una de las finalidades de la realización de pruebas.

Resumimos a continuación, en la Figura III.11., las concepciones del profesor JC sobre la prueba:

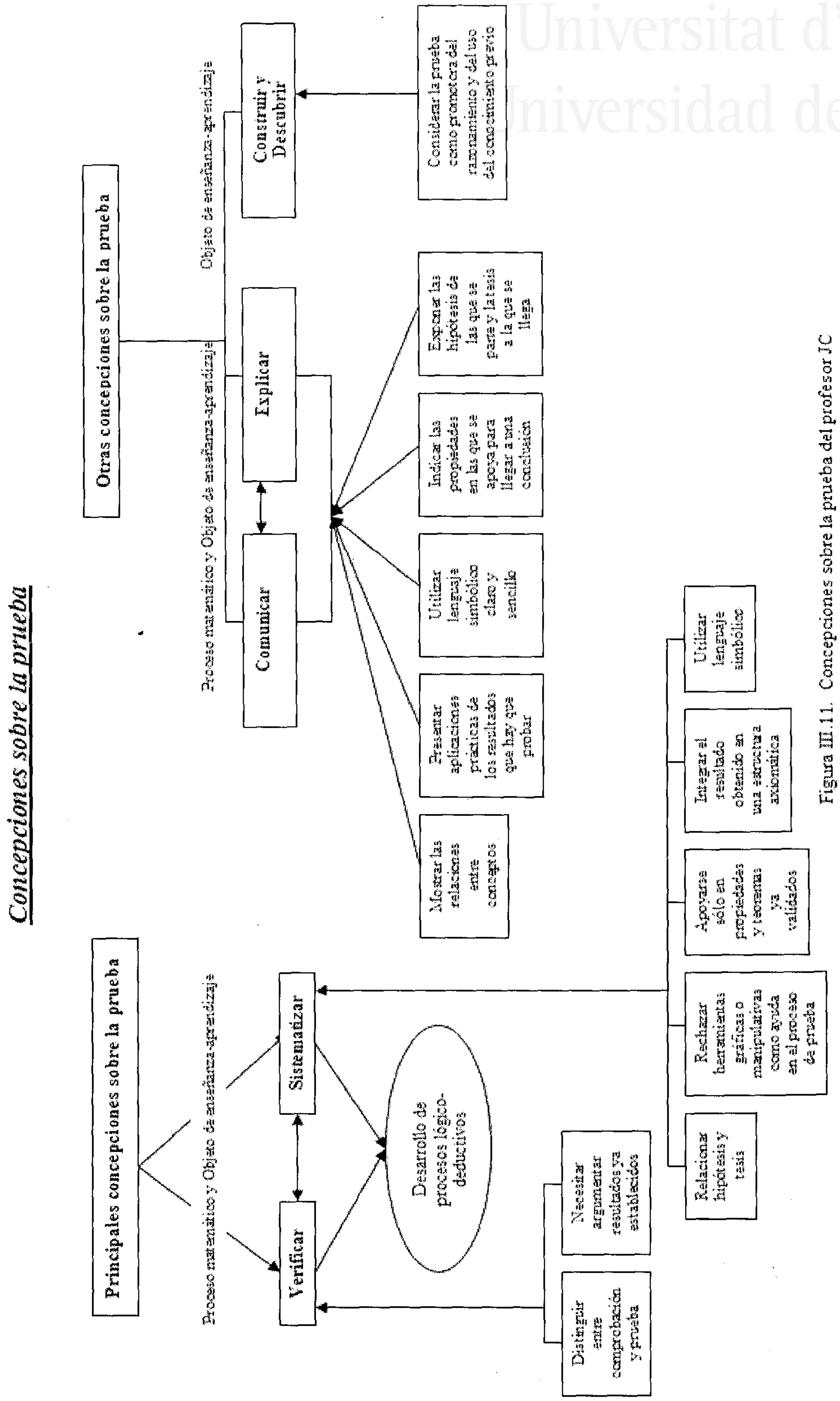


Figura III.11. Concepciones sobre la prueba del profesor JC

III.12. Caso 12: Profesor nº 12, OB.

Las concepciones sobre la prueba de OB son las de **Verificar y Sistematizar**. Estas concepciones se identifican en la búsqueda de la generalización del resultado a través de un procedimiento lógico-deductivo en el que, partiendo de las hipótesis intenta llegar a la tesis a través de razonamientos y argumentaciones lógicas. Por ejemplo, en el 3º foro, el profesor OB responde la pregunta de la moderadora *¿Qué significa probar y qué procedimientos hay para ello?*, e indica:

> *"...probar se refiere a una serie de proposiciones lógicas y argumentadas que permitirían concluir con una generalización".*

También en el 3º foro, hace referencia al papel del profesor en el aula para trabajar procesos de prueba con la ayuda de software dinámico, insiste en la necesidad de verificar desarrollando procesos lógico-deductivos.

> *"Aplicar definiciones, propiedades, postulados, axiomas y teoremas para argumentar afirmaciones que se encadenan en un proceso lógico-deductivo,..., para generalizar una afirmación a partir de una proposición dada como hipótesis...formalizar aplicando rigor en el lenguaje".*

El carácter verificador que la prueba tiene para OB se manifiesta en la distinción que establece entre comprobación y prueba. Por ejemplo, en el segundo foro, alude al uso de herramientas dinámicas para resolver el ejercicio de i-matemáticas y a cómo estas herramientas pueden ser utilizadas en el trabajo para comprobar resultados.

> *"Más bien comprobar, por la posibilidad de hacer medidas exactas. En cuanto a probar, entendiéndolo como demostrar, se hace necesaria la aplicación de postulados y teoremas...La posibilidad de cambiar las posiciones relativas de los elementos sin alterar la configuración permite casi generalizar. Faltaría la parte formal".*

Cuando OB se refiere a la prueba como proceso matemático alude a la necesidad de generalizar un resultado, pero esta vez con el fin de poder incorporarlo a un sistema axiomático que permita aplicarlo o hacer uso de él en posteriores situaciones, lo que es otra muestra del carácter sistematizador que la prueba tiene para él. Por ejemplo, en el 3º foro, en la respuesta a la pregunta *¿Cuál podría ser la diferencia de significado dado a la noción de prueba por alumnos de secundaria y matemáticos?*, indica:

> *"El matemático buscaría la generalización con el objetivo de usarla después en la resolución de otros problemas".*

OB enfatiza las pruebas como procesos lógico-deductivos para verificar un resultado. Sin embargo, también señala la necesidad de que en dichos procesos se deba **Explicar** el contenido matemático existente. Ello se manifiesta en sus afirmaciones a favor del uso de imágenes y gráficas que permitan apoyar, y no sustituir, los procesos formales, que siempre se han de desarrollar. Por ejemplo, en su respuesta a la pregunta *¿El hecho de utilizar una herramienta dinámica como Cabri os ha ayudado a probar la igualdad pedida?*, que hace referencia al ejercicio de i-matemáticas, expone:

> *"Evidentemente, el movimiento de la imagen favorece la explicación sin tener que dibujar líneas sobre líneas que, con una mínima distracción del receptor se convierte en un texto ilegible"*

Un ejemplo, en el que aparece el significado explicativo que para él tiene la prueba, considerada como herramienta para el aprendizaje, procede de su respuesta a la pregunta del tercer foro *¿Cómo pueden ser integradas las características dinámicas del software en el diseño de actividades para enseñar matemáticas?*

> *"Sin la aplicación de esta herramienta,* (applets dinámicos), *muchas veces nos vemos obligados a explicar, o a tratar de explicar, determinados contenidos señalando, dibujando, apelando a la imaginación de los estudiantes, sin tener la seguridad de que todos estén 'viendo' lo que queremos. Varios gráficos que naturalmente varían en longitudes, ángulos, etc. Teniendo qué repetir una y otra vez los movimientos de antes y después... Cuando estamos realmente comprometidos con el aprendizaje de nuestros estudiantes, queremos estar seguros de que todos 'entendieron' el paso de una figura a otra. Este 'entendieron' es en realidad un 'visualizaron' lo mismo que queríamos transmitir como abstracción de nuestros textos gráficos y lingüísticos".*

Al referirse a la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje, OB alude a características de la misma que hacen que sea considerada como instrumento útil para **Descubrir y Construir contenido matemático.** En este sentido, OB considera que el trabajo con pruebas en el aula favorece el uso del conocimiento previo. Por ejemplo, en su respuesta a la pregunta *¿Cómo puede favorecer realizar demostraciones en el aula el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?*, indica:

> *"Sobre todo por la movilización necesaria de un conjunto de 'conocimientos' que los estudiantes están obligados a poner en juego a la hora de demostrar".*

Otro indicador de este carácter de la prueba hace referencia al uso de herramientas dinámicas en su desarrollo. Consideramos que en estos casos la prueba, para OB, se convierte en un proceso que propicia el planteamiento de nuevas cuestiones y que puede llevar al descubrimiento de nuevos resultados. Por ejemplo:

> *"...creo que ofrece la oportunidad de nuevos descubrimientos. La posibilidad de arrastrar plantearía preguntas personales como ¿y si muevo este punto? ¿ y si varío este radio? ¿y si no se aplica este postulado?"* Ejercicio de i-matemáticas. Respuesta a la pregunta ¿el uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de ver y resolver el problema?

Todo ello indica que OB es favorable a la realización de **pruebas semánticas**. Para él la prueba está totalmente vinculada a un proceso lógico-deductivo, tanto si está dirigida a matemáticos como a estudiantes, pero, en todos los casos, ve en las herramientas dinámicas elementos que pueden ayudar a desarrollar procesos más explicativos que ayuden a entender el contenido matemático presente en el proceso y a descubrir nuevos resultados.

Mostramos, a continuación, de forma gráfica, en la Figura III.12., las concepciones sobre la prueba del profesor OB:

Concepciones sobre la prueba

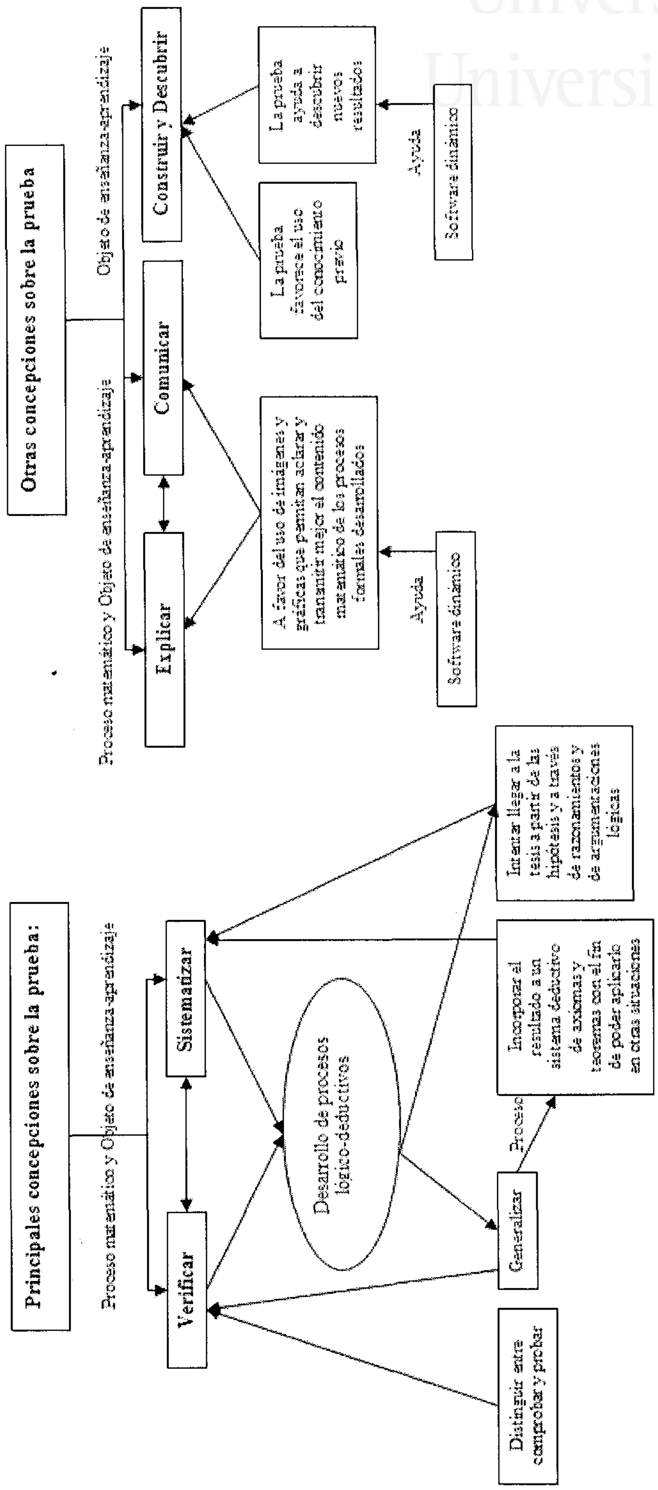


Figura III.12. Concepciones sobre la prueba del profesor OB

CAPÍTULO IV. Discusión y Conclusiones.

IV. Discusión y Conclusiones.

Este capítulo se divide en dos apartados. En el primero de ellos, se realiza un estudio intercasos en el que se identifican aquellas ideas que han permitido detectar grupos de profesores, caracterizados por las relaciones entre los significados que configuran sus concepciones sobre la prueba. En el segundo se presentan y discuten las conclusiones a las que se llega después de indagar sobre los resultados obtenidos, integrándolos y relacionándolos con los resultados de otras investigaciones

IV. 1. Intercasos.

Una vez analizados los 12 casos y después de describir las concepciones de la prueba de cada profesor, los hemos agrupado considerando las relaciones y afinidades encontradas.

Teniendo en cuenta el **principal significado** que para los profesores tiene la noción de prueba, tanto dentro como fuera del aula, se obtienen tres categorías de concepciones:

- Convencer.
- Verificar.
- Sistematizar.

Los resultados obtenidos indican que no podemos considerar estos significados aislados, por ello se establece también la relación existente entre el resto de funciones que los profesores asignan a la prueba.

Convencer.

Esta categoría está formada por aquellos profesores que consideran que la función principal de la prueba es la de convencer de que un argumento matemático es cierto (Profesores: IJe, MiJi, Manulo y AnDi).

Convencer implica verificar, puesto que se ha de justificar la validez del argumento a probar, pero estos profesores ponen el énfasis en la **Comunicación** del proceso, ya que lo más importante es la transmisión del mismo de manera que el destinatario comprenda el sentido de la prueba y acepte sin dudas el resultado.

Desde esta perspectiva, para ser eficaces a la hora de convencer a otros o a uno mismo, se considera que es preciso desarrollar dos procesos distintos, según sean matemáticos o estudiantes los sujetos que tengan que ser convencidos. Los matemáticos sólo admitirán procesos lógico-deductivos en los que el "sentido de la prueba" está en desarrollar correctamente dichos procesos, identificando y vinculando propiedades matemáticas en los diferentes pasos. Alcanzar el objetivo de "convencer" de la verdad del argumento se fundamenta, en estos casos, en la corrección del razonamiento deductivo generado. Por ello, se distingue entre comprobación y prueba, y se busca en el desarrollo de procesos deductivos, la corrección lógica en la manipulación de propiedades, teoremas y proposiciones que ponga de manifiesto de manera inequívoca la validez del argumento a probar y, por lo tanto del resultado. Por otro lado, para convencer a estudiantes es mejor empezar con comprobaciones en casos particulares, para lo que supondrá una gran ayuda el uso de herramientas gráficas y dinámicas.

El papel de la prueba como instrumento para **explicar** por qué un argumento es cierto aparece ligado al papel de la prueba como transmisora o comunicadora de contenido matemático. Se asegura el convencimiento de los receptores del proceso de prueba, comunicando el contenido del mismo de manera que se manifieste por qué se obtienen unos determinados resultados. Para lograrlo se cree oportuno que quien explique exponga sus reflexiones, lo que pretende hacer y los conceptos y propiedades que utiliza. Se considera también de gran ayuda el uso de herramientas dinámicas que van a permitir experimentar y comprobar, a la vez que van a hacer posible la visualización y manipulación de situaciones matemáticas, a través de la representación gráfica de configuraciones geométricas en las que se van a plasmar conceptos y relaciones entre los mismos, así como las propiedades y resultados que se derivan de ellos. Los profesores que enfatizan la función de **convencer** se apoyan, por tanto, en la capacidad explicativa de estas herramientas, utilizándolas de manera que la comunicación de los pasos dados sea lo suficientemente entendible como para que se pueda captar todo el sentido de la prueba.

Se admite y se comprende la verdad de la proposición probada a través de la corrección lógica y simbólica de los pasos dados y a través de la explicación de los significados de las ideas matemáticas usadas, apoyándose, por tanto, en los rasgos semánticos de la prueba.

El intento de convencer a alguien de la verdad de la proposición planteada también repercute en la consideración de la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. Se convence a los estudiantes potenciando los procesos de conjeturar (descubrimiento de nuevas relaciones), y lo que puede derivarse de ello al intentar probar la conjetura conduce a la **Construcción y Descubrimiento** de nuevo conocimiento. Las características gráficas y manipulativas del software dinámico permiten experimentar, conjeturar y comprobar y ello lo convierte en una potente herramienta que va a permitir al estudiante por sí mismo obtener nuevos resultados, llevándole a reflexionar sobre lo que ha obtenido y permitiéndole comprenderlo y asimilarlo mejor. De esta forma aumenta la convicción sobre la validez de los resultados obtenidos. El papel del profesor como guía del aprendizaje refuerza el carácter antiautoritario que esta forma de proceder da a la prueba en el aula. Se considera que el docente ha de preparar actividades que promuevan la reflexión, el razonamiento matemático y el uso del conocimiento previo, para que el estudiante pueda por sí mismo descubrir y construir en los contextos dirigidos a convencer a los demás de lo hecho.

Verificar.

El segundo grupo está formado por aquellos profesores (Eva, VV, Xavi, ViMo, CriBor y TeLo) cuya principal concepción sobre la prueba es la de **verificar** un resultado o argumento matemático, con la única finalidad de darle validez.

Desde esta concepción, la prueba como proceso matemático, requiere desarrollar procedimientos lógico-deductivos. Se buscan argumentos infalibles y relaciones entre propiedades que, partiendo de unas condiciones iniciales, conduzcan a la generalización del resultado. Las características gráficas e interactivas de determinado software dinámico pueden servir de ayuda para lograrlo, al ayudar a generalizar y facilitar la comunicación de los procesos desarrollados, permitiendo que se entienda mejor lo realizado, pero sólo con un carácter motivador o de introducción, ya que no permite verificar la proposición. En situaciones de aula, estos profesores consideran que puede ser conveniente utilizar este tipo de software de modo que el estudiante pueda comprobar la verdad de una proposición antes de iniciar el proceso de la demostración en sí. De esta forma, el estudiante puede entender mejor lo que pretende hacer, y puede descubrir determinadas relaciones y propiedades matemáticas presentes en el contenido con el que trabaja que le van a ayudar a encontrar el camino para verificar el argumento. De esta forma se relaciona el uso de software dinámico en la realización de procesos de prueba en el aula, con la **construcción y descubrimiento** de contenido matemático, pero estableciendo la diferencia entre la necesidad de usar la corrección lógica entre propiedades, teoremas,... y el uso de "casos" particulares para empezar a entender la "situación"

Por lo tanto, cuando se concibe la prueba de esta forma, lo importante es únicamente poner de manifiesto la validez general del proceso que lleva a justificar el resultado, interesando menos la mayor o menor compresión del contenido que subyace en el mismo, por parte del receptor de la prueba. El énfasis se pone en la búsqueda de procedimientos que validen un resultado y no en la búsqueda de formas de convencer de ello. En estos casos, lo único relevante es la corrección en los pasos dados en el proceso de prueba que permite asumir por la colectividad la validez del proceso. El sistema axiomático-deductivo se basa precisamente en la corrección intrínseca de lo realizado, como garante de que la proposición es cierta (dentro de este sistema axiomático) independientemente del significado específico de la proposición probada.

Sistematizar.

Dos profesores (OB y JC) forman este otro grupo. Para estos profesores, la finalidad fundamental de realizar pruebas es la de **verificar** un argumento con el propósito de mostrar su validez y poder integrar el resultado obtenido en una estructura axiomática, de manera que dicho resultado pueda ser utilizado en posteriores demostraciones o situaciones **(sistematizar)**. La única forma de actuar es el desarrollo de procesos lógico-deductivos, de manera que se llegue desde las hipótesis a la tesis a través de argumentaciones y razonamientos lógicos. Sin embargo, y a diferencia del grupo anterior, estos profesores relacionan estas concepciones sobre la prueba, con las funciones de **explicación** y **comunicación**, puesto que se considera importante que el receptor de la prueba entienda el por qué de los resultados que se obtienen, cómo se llega a ellos y su significado, con el fin de que dichos resultados, al haber sido validados, puedan ser utilizados en otras situaciones que así lo requieran.

De todas maneras, estos profesores distinguen entre comprobación y prueba, remarcando la importancia de establecer el carácter general del argumento probado, que va a permitir incorporarlo a un sistema deductivo axiomático, y aplicarlo en posteriores situaciones, ya sea en casos prácticos o como parte de otros procesos de prueba.

La prueba como medio de **construir** y **descubrir** contenido matemático, aparece relacionada con el uso necesario del conocimiento previo y del razonamiento individual cuando se ha de reflexionar sobre el contenido y condiciones del problema de probar y sobre sus consecuencias e implicaciones.

IV. 2. Concepciones de los profesores sobre la prueba matemática y Formas de probar. Influencia del uso de software dinámico en dichas concepciones.

Para Hanna (2000) una de las principales tareas del profesor de matemáticas es la de entender la importancia y funciones de la prueba en el proceso de enseñanza-aprendizaje, obteniendo de esta forma el mayor beneficio posible. En la misma dirección, Movshovitz-Hadar (1993) considera de gran importancia la preparación de actividades adecuadas que permitan al profesor reflexionar sobre su conocimiento actual y creencias y cuestionárselos. En esta investigación, las tareas diseñadas, así como el entorno de aprendizaje seleccionado junto con la estructura metodológica elaborada para el desarrollo de la misma, han provocado que los profesores participantes en el estudio hayan tenido que realizar un ejercicio de reflexión de sus concepciones sobre la prueba, enfrentándose, de forma personal a la resolución de actividades en las que tenían que probar. Posteriormente, y de nuevo de forma individual, tuvieron que realizar pruebas utilizando como herramienta software dinámico. Finalmente concluyeron realizando actividades más colaborativas, comunicando y confrontando sus producciones con las de los compañeros en los foros virtuales de debate. Ello ha permitido a los profesores reflexionar sobre la importancia y potencial de la prueba matemática y del trabajo con pruebas en el aula. El software dinámico ha sido un elemento primordial que ha llevado a los profesores a descubrir características que favorecen y amplían el significado de la prueba y a cuestionarse su forma de actuación, para obtener un mejor aprovechamiento de las mismas.

Una de las conclusiones de la investigación de Knuth (2002a) indica que cuando los profesores introducen la prueba en el aula transmiten generalmente la idea de que la finalidad de probar es sólo la de verificar un argumento o enunciado matemático que, por otro lado, los estudiantes saben que ya ha sido justificado previamente. De esta manera, los estudiantes no encuentran sentido a la realización de pruebas y sólo las ven como ejercicios difíciles de realizar y de entender. Como consecuencia de ello Knuth (2002a) plantea la necesidad de realizar nuevas investigaciones que den alguna respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Qué es preciso que los profesores sepan sobre la prueba y cómo deben utilizar este conocimiento en su práctica en el aula?, ¿Qué concepciones sobre la prueba hay que tener presentes a la hora de seleccionar actividades para que los estudiantes aprendan a razonar matemáticamente? Los resultados de esta investigación nos permiten aportar alguna información a estas cuestiones.

Verificar un resultado matemático y convencer de ello son los principales significados que los profesores asignan a la prueba, pero no son los únicos. Al igual que en la investigación de Peressini et al. (2004) los profesores participantes en esta investigación afirman que es necesario proceder de diferentes formas según el contexto en el que se trabaje. Si la demostración está hecha por matemáticos o se pretende con ella que un resultado sea aceptado por la comunidad matemática, el procedimiento utilizado ha de ser lógico-deductivo y descrito utilizando lenguaje simbólico. Sin embargo, en situaciones de enseñanza-aprendizaje, aunque la función verificadora de la prueba sigue siendo la más relevante, unida a la necesidad de convencer a los estudiantes de la validez general de un resultado matemático, coinciden con Martínez Recio y Godino (2001), con Senk (1985) y con Serra (1989), citados por Marrades y Gutiérrez (2000), al reconocer que las pruebas lógico-deductivas, son poco convincentes y poco significativas para los estudiantes de determinados niveles y que estos aspectos mejoran notablemente si previamente se desarrollan procedimientos en los que se introducen representaciones gráficas del contenido y se permite la manipulación del mismo. Ball, Hoyles, Jahnke y Movshovitz-Hadar (2002) también consideran necesario que los profesores conozcan las dificultades que los estudiantes encuentran cuando han de trabajar con pruebas matemáticas. Los profesores participantes en esta investigación han reconocido que los procesos lógico-deductivos son de difícil comprensión para los estudiantes, debido a su carácter abstracto y a las dificultades que los mismos tienen para entender el lenguaje simbólico y para trabajar con él, además, de que no dotan de significado a los procesos que desarrollan de esta forma. Por ello, al igual que en el estudio de Dickerson (2006), creen que es necesario adaptar los procesos de prueba a las características y nivel de los receptores, y, por ello, aluden a otros procedimientos para iniciar el trabajo con pruebas. Entre estos procedimientos alternativos destacan aquellos en los que se utilizan representaciones gráficas y comprobaciones, aunque, en cualquier caso, consideran, al igual que Sutherland, Olivero y Weeden (2004), que el estudiante debe distinguir entre comprobación y prueba y que ha de finalizar formalizando.

Tanto cuando los profesores aluden a la prueba como proceso matemático, como cuando hacen referencia al trabajo con ella en el aula, aparece la búsqueda de la generalización del resultado como forma de verificación del mismo, contrariamente a lo ocurrido en el estudio de Knuth (2002a) en el que se llega a la conclusión de que un número significativo de profesores no asocia la validación de un argumento con su generalización. Este intento de generalizar lo llevan a cabo, o bien a través de procesos lógico-deductivos o bien, y sobretodo en situaciones de enseñanza-aprendizaje, a través de representaciones gráficas y manipulación de situaciones matemáticas, que permiten experimentar, investigar, conjeturar, comprobar e intuir la validez general del argumento antes de establecerla formalmente.

El carácter social de la prueba como instrumento para comunicar contenido matemático aparece vinculado a la necesidad de convencer de la validez general de un resultado. El software dinámico ayuda a comunicar al permitir desarrollar pruebas más explicativas, y por ello, más convincentes. Algunos profesores, en contextos de enseñanza-aprendizaje, asocian la comunicación de procesos de prueba con la construcción y descubrimiento de contenido matemático. Consideran que comunicar el desarrollo de una prueba promueve en el que comunica la reflexión y el razonamiento y que fomenta el uso del conocimiento previo, lo que permite que el contenido sea mejor comprendido y asimilado por el comunicante. Los estudiantes que comunican un proceso de prueba se pueden dar cuenta de sus deficiencias y tratar de superarlas intentando ampliar y construir su propio conocimiento.

Mientras que en la investigación de Knuth (2002a) no hay evidencias de que los profesores conciban la prueba como medio de explicar por qué un argumento matemático es cierto, en esta investigación, un número significativo de profesores pretende que sus pruebas expliquen por qué un resultado matemático es cierto y cómo se llega a él. Lo hacen diferenciando las hipótesis de la tesis, exponiendo las relaciones existentes entre conceptos, procediendo desde las definiciones y explicando el uso que hacen de ellas y poniendo por escrito el enunciado de las propiedades que utilizan. Consideran que el software dinámico les facilita mucho esta tarea. Los profesores utilizan dicho software para representar y manipular situaciones y objetos matemáticos, con el fin de poner de manifiesto conceptos, relaciones y propiedades y aclarar su significado, de manera que sean más fáciles de comprender y de transmitir.

El significado de la prueba como medio de sistematizar no aparece entre las concepciones de los profesores participantes en esta investigación unido al carácter de la prueba como medio de construir conocimiento, como ocurre en la investigación de Knuth (2002a). Los resultados en esta investigación reflejan la necesidad manifestada por los profesores de desarrollar procesos lógico-deductivos y en muy pocos casos se los relaciona directamente con la necesidad de incorporar el resultado validado a un sistema deductivo de axiomas y teoremas, con el fin de poderlo utilizar en el desarrollo de otras pruebas o en situaciones prácticas posteriores.

Son numerosas las investigaciones en las que se analiza el papel del software dinámico en el desarrollo de pruebas en el aula. Mariotti (2000, 2001 y 2003) vuelve a insistir en la delicada situación existente entre el conocimiento intuitivo y su formalización teórica, y en lo difícil que resulta a los estudiantes admitir que algo evidente para ellos, y ya reconocido como verdadero, necesite tantos argumentos para ser justificado. Trabajar con software dinámico e investigar sobre el papel del profesor como mediador, y de cómo se han de tener en cuenta las nuevas características que poseen las herramientas dinámicas, para obtener un mejor rendimiento de su aplicación al desarrollo de pruebas en el aula, es una necesidad hoy en día. En nuestro estudio, la función explicativa de la prueba aparece como una herramienta para convencer y el software dinámico se utiliza de modo que se potencie esta función, empleando la visualización y la manipulación de elementos y configuraciones geométricas como medio de poner de manifiesto con más claridad el significado de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas, de manera que se facilite, a la vez, la transmisión del contenido de la prueba y se asegure el convencimiento por parte del receptor de la validez del argumento probado. Para convencer en el aula, se procede permitiendo a los estudiantes investigar y experimentar y se buscan herramientas que promuevan la elaboración de conjeturas y que permitan la comprobación de lo acertado o no de las mismas. Sin embargo, para poder crear este tipo de situaciones de aprendizaje, los profesores deben concebir la prueba como un instrumento que permita desarrollar esta capacidad en los estudiantes, de modo que, además de validar un argumento, descubran y construyan nuevo conocimiento matemático por si mismos, lo que refuerza el poder de convicción de la prueba, a la vez que permite que el estudiante use su conocimiento previo, desarrolle su capacidad de razonamiento, su autoestima se vea favorecida y se produzca una mayor asimilación y apropiación de los resultados obtenidos.

El software dinámico es utilizado de este modo, como instrumento que hace posible experimentar visualizando y manipulando situaciones y objetos matemáticos, de modo que se favorezca la elaboración de conjeturas y su posterior comprobación, a la vez que se descubren nuevas relaciones y propiedades matemáticas. Los profesores asocian de esta forma un nuevo significado a la realización de pruebas con herramientas dinámicas. Ven la prueba como medio para construir y descubrir contenido matemático, coincidiendo así con Alibert y Thomas (1991), Figueiras y Deulofeu (2005) y Laborde y cols. (2006), que consideran que el software dinámico permite representar gráficamente conceptos, objetos y situaciones matemáticas y manipularlos introduciendo modificaciones en determinados aspectos del problema, lo que permite observarlo desde diferentes perspectivas y descubrir, de esta forma, nuevas propiedades y resultados. Arsac (1987), Dreyfus y Hadas (1996), Chazan y Yerushalmy (1998), Palais (1999), Marrades y Gutiérrez (2000), Rodd (2000), Bruckheimer y Arcavi (2001), Pandiscio (2002), Tall (2002), Healy y Vaz (2003-2006) y Christou et al. (2004), también indican que es muy importante introducir a los estudiantes en los procesos de prueba permitiéndoles experimentar, conjeturar y comprobar sus conjeturas como paso previo al desarrollo de procesos formales y que todo ello puede fomentar en los estudiantes la reflexión sobre los nuevos resultados y sus relaciones. Los profesores participantes en esta investigación consideran, al igual que en Hanna y Jahnke (1996), que el hecho de que el propio usuario sea el que manipule este software y experimente e investigue, según sus conocimientos y capacidad para razonar e interpretar los resultados que van apareciendo, es un medio de hacer que el estudiante se sienta capaz de descubrir y construir contenido matemático por sí mismo, de ahí el carácter antiautoritario que los profesores asignan a las pruebas así realizadas.

Por otro lado, en esta investigación, aparece la función verificadora de la prueba asociada al desarrollo de procesos lógico-deductivos cuya finalidad es la generalización del resultado que se ha de probar. Esta concepción de la prueba hace que se utilice el software dinámico como un recurso que hace posible analizar las condiciones del problema desde diferentes puntos de vista interaccionando con sus elementos. Con ello se pretende entender mejor su significado y consecuencias y encontrar ideas que ayuden a establecer la validez del argumento a probar en todos los casos en que se cumplan las condiciones requeridas. Con esta forma de actuar también se persigue comunicar el proceso de manera más eficaz, mostrando con más claridad los pasos seguidos y las propiedades y relaciones utilizadas.

En situaciones de enseñanza-aprendizaje, el software dinámico es utilizado con el fin de realizar comprobaciones en casos particulares que ayuden a establecer la diferencia entre comprobar y generalizar. Se considera que la experimentación hará posible una mejor comprensión del contenido matemático que subyace en el argumento a probar y facilitará el descubrimiento de nuevas propiedades y relaciones que favorecerán la generalización del resultado. Por ello, y al igual que en Stylianides, Stylianides y Philippou (2005), también se reconoce la importancia del docente en el aula, que ha de actuar como guía y no como persona que dirige todas las situaciones y transmite el conocimiento que los estudiantes han de adquirir. El docente ha de conocer a fondo los contenidos que ha de trabajar con sus alumnos y el manejo y posibilidades del software que va a utilizar para poder diseñar las actividades apropiadas que permitan a los estudiantes descubrir y adquirir por sí mismos los contenidos que han de aprender.

En lo que concierne a la forma de realizar pruebas, la mayor parte de los profesores estudiados desarrollan o se muestran favorables al desarrollo de pruebas semánticas. Desde un punto de vista eminentemente matemático, se ha llegado a la conclusión de que probar requiere llevar a cabo procedimientos lógico-deductivos, en los que, apoyándose en símbolos y razonamientos matemáticos, desde las hipótesis se deduzca la tesis. Pero a la vez, buscan herramientas y procedimientos para descubrir y aclarar el significado de los conceptos y propiedades matemáticas con las que trabajan, de manera que se entiendan mejor las relaciones que se producen y por qué se llega a través de ellas al resultado. De esta manera, buscan situaciones matemáticas desde las que se favorezca la creación de "instantáneas" y de imágenes mentales que permitan entender y asimilar mejor el contenido matemático del proceso.

Estas consideraciones se trasladan a situaciones de enseñanza-aprendizaje. De esta forma, se enfatiza el hecho de que hay que apoyar las definiciones y demostraciones rigurosas construyendo modelos mentales no formales, pero útiles para que el que demuestra entienda los conceptos con los que trabaja (Fischbein, 1982, Thurston, 1994).

Sólo ha habido un caso en el que el profesor se ha mostrado favorable a las pruebas eminentemente sintácticas. Considera que el desarrollo de una prueba se debe basar solamente en razonamientos lógico-deductivos que se expresen a través de lenguaje simbólico. Para él, sólo estos razonamientos son válidos para justificar la validez del resultado y para facilitar la comprensión del mismo. Experimentar, conjeturar, comprobar e intentar visualizar o recrear situaciones matemáticas y las relaciones y propiedades que se derivan de ellas, son elementos inconvenientes, porque pueden entorpecer la reflexión y el razonamiento basado en el desarrollo de argumentos puramente formales.

La conclusión a la que se llega es que cuando los profesores han de resolver actividades de prueba que les fuerzan a reflexionar sobre el sentido y significado de la misma, en diferentes contextos y situaciones, llegan a cuestionarse sus concepciones sobre ella. Como consecuencia de ello reconocen la importancia del desarrollo de pruebas en el aula y asignan diversas funciones a la prueba. El uso de software dinámico es fundamental a la hora de utilizar la prueba como un elemento que ayuda a construir y descubrir contenido matemático y para ello el profesor debe conocer a fondo las posibilidades de dicho software y debe estar dispuesto a cambiar su forma de actuación en el aula, preparando las actividades apropiadas para explotar al máximo esas posibilidades y para conseguir que el alumno aprenda a razonar matemáticamente y sea capaz de obtener resultados por sí mismo, encontrando significado al desarrollo de pruebas.

Consideramos de gran importancia la realización de nuevas investigaciones en las que los profesores tengan que reflexionar sobre su conocimiento matemático y sobre su forma de actuación en el aula, a la hora de desarrollar diversos tópicos, enfrentándose a sus creencias a través de sus propias reflexiones y del conocimiento de formas de proceder de otros profesores, aspecto que se puede producir a través del intercambio de experiencias en entornos virtuales de aprendizaje. Obtener información sobre el uso que los profesores hacen de diversas herramientas gráficas y dinámicas con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es también para nosotros un punto de estudio de gran importancia y en el que, en nuestra opinión, se requieren más investigaciones.

Por último, queremos indicar que, a pesar de que los profesores participantes en esta investigación pertenecen a comunidades distintas y hay entre ellos diferencias substanciales en las tradiciones culturales relacionadas con la educación matemática, se han obtenido ideas en las que ha habido un amplio consenso y que los resultados obtenidos no sólo satisfacen nuestras expectativas como investigadores, sino también como docentes ya que tienen implicaciones para favorecer el aprendizaje de la prueba en contextos educativos.

CAPÍTULO V. Referencias.

V. Referencias.

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics: An International Journal of Mathematics Education, 8(2),* 31-35.

Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Andriessen, J., Baker, M. y Suthers, D. (2003). Argumentation, Computers Support and Educational Context of Confronting Cognitions. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment* (pp. 1-25). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Andriessen, J., Erkens, G., van de Laak, C., Peters, N. y Coirier, N. (2003). Argumentation as negotiation in electronic collaborative writing. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment* (pp. 79-115). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Araujo, J., Giménez, J.y Rosich, N. (2006). Afectos y demostraciones geométricas en la formación inicial docente. *Enseñanza de las ciencias, 24(3),* 371-386.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathématiques, 8(3)*, 267-312.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). Londres: Kodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bairral, M. (2003). Teleinteracciones y construcción de la identidad del profesor de matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 34*, 111-123.

Bairral, M. y Giménez, J. (2005). Dialogic Use of Teleinteractions for distance Geometry Teacher Training (12-16 years old) as an Equity Framework. *Proceedings of the 15th ICMI Study Conference: Education and Development of Teachers of Mathematics.* Strand II: Contributed Papers, Demonstrations and Work sessions.

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. y Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *Proceedings of ICM 2002, III* (pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique: Significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin de l'A.P.M.E.P., 366*, 591-619.

Bell, A. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40

Borwein, P. y Jörgenson, L. (1997). *Visible structures in number theory.* Centre for Experimental & Constructive Mathematics. Department for Mathematics & Statistic. Simon Fraser University, Burnaby, B.C. Canada. Recuperado el 19 de junio de 2005, de http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

Boyer, C. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Bruckheimer, M. y Arcavi, A. (2001). A Herrick Among Mathematicians or Dynamic Geometry as an aid to proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8 (1),* 113-126.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387.

Chazan, D. y Yerushalmy, M. (1998). Charting a course for secondary geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 67-90). Mahwah, NJ: Erlbaum Asso.

Christou, C. et al. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 339-352.

Clement, J. (2000). Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547-589). Mahwah, NJ: Erlbaum Asso.

Cobb, P. y Whitenack, J. (1996). A method conducting longitudinal analyses of classroom video recordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 213-228.

Davis, P. (1986). The nature of proof. En M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education* (pp. 352-358). Adelaide, South Australia: Unesco.

De Lorenzo, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia.* Madrid: Tecnos.

De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space,* (pp. 369-393). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Derry, S., Glance, S., Glance, L. y Schlager, M. (2000). Toward Assessment of Knowledge- Building Practices in Technology- Mediated Work Group Interactions. En S. Lajoie (Ed.), *Computers as cognitive tools: No more walls, 2,* (pp. 29-68). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dickerson, (2006). Aspects of preservice teachers´ understandings of the purposes of mathematical proof. En Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. y Méndez, A. (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 710-716). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Dreyfuss, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113-133). Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T y Hadas, N. (1996). Proof as an answer to the question why. *Z.D.M. International Reviews on Mathematical Education, 96(1),* 1-5.

Duval, R. (1993). Semiosis y Noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela francesa* (pp. 118-144). México, D.F.: Departamento de Didáctica Educativa del CINVESTAV-IPN.

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. En M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching,* 3rd edition (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Ernest, P. (1988). The impact of Beliefs on the Teaching of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the art* (pp. 249-254). London: Falmer.

Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *23(2)*, 217-226.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3(2),* 9-24.

Freudenthal, H. (1983). *Didactic phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel

García, M. y Llinares, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación primaria* (pp. 105-122). Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. y Martínez Recio, A. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. En E. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the Internacional Group for Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 313-320). Lathi: Universidad de Helsinki.

Golafshani, N. (2002). Teachers' Conceptions of Mathematics and their Instructional Practises. *Philosophy of Mathematics Educational Journal, 18,* 1-14.

Hadas, N. y Hershkowitz, R. (1998). Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 25-31). Stellenbosh. South Africa.

Hadas, N. y Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contraditions and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometric environments. *Educational Studies in Mathematics, 44(1-2),* 127-150.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, *1* (pp. 21-34). Valencia (Spain).

Hanna, G. (2000). Proof and Its Classroom Role: A Survey. *Proceedings of the Conference at the IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matemática.* Fundao. Portugal.

Hanna, G. y Jahnke, N. (1996). Proof and Proving. En A.J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hara, N., Bonk, C.J. y Angeli, C. (2000). Content análisis of online discusión in an applied educational psychology course. *Instructional Science, 28,* 115-152.

Harasim, L. (1989). On-line education: A new domain. En R. Mason y A. Kaye (Eds.), *Mindweave: Communication, Computers and Distance Education* (pp. 50-62). New York: Pergamon Press.

Hardy, G.H. (1999). *Apología de un matemático.* Madrid: Nivola.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students´ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Healy, L. y Vaz, R. (2003-06). Using the transformation tools of Cabri-Géomètre as a resource in the proving process. En Communication *Actes en ligne du colloque international ITEM.* Reims, France. Recuperado el 5 de diciembre de 2006, de http://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001335/en.

Herbst, P. y Chazan, D. (2003). Exploring the Practical Rationality of Mathematics Teaching through Conversations about Videotaped Episodes: The Case of Engaging Students in Proving. *For the Learning of Mathematics, 23(1),* 2-14.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24(4),* 389-399.

Hodson, D. y Hodson, J. (1998). From constructivism to social constructivism: A Vygotskian perspective on teaching and learning science. *School Science Review, 79(289),* 33-41.

Ibañes, M. (2002). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 11-25). Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería.

Ibañes, J. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números*, *61*, 19-40.

Jermann, P. y Dillenbourg, P. (2003). Elaborating new arguments through a CSCL script. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment* (pp. 205-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jonassen, D. y cols. (1995). Constructivism and Computer Mediated Communication. *The American Journal of Distance Education, 9(2),* 7-26.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Tomos I, II y III.* Madrid: Alianza Universidad.

Knuth, E. (2002a). Secondary School Mathematics Teachers′ Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(5),* 379-405.

Knuth, E. (2002b). Teachers′ Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 61-88.

Koschmann, T. (2003). CSCL, Argumentation, and Deweyan Inquiry. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment* (pp. 261-269). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kumpulainen, K. y Mutanen, M. (2000). Mapping the dynamics of peer group interactions: A method of analysis of socially shared learning processes. En H. Cowie y G. Van der Aalsvoort (Eds.), *Social Interaction in Learning and Instruction. The meaning of discourse for the construction of knowledge* (pp. 144-160). Amsterdam: Pergamon-Earli.

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6 (3),* 283-317.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Hanbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Levin, L.A. (1999). Holographic Proofs. *Encyclopaedia of Mathematics, Suplement II.* Kluwer Academic Publishers. Recuperado el 18 de septiembre de 2005, de http://www.wkap.nl

Llinares, S. (1991). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En C. Marcelo (Coord.), *La investigación sobre la formación del Profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos* (pp. 57-96). Buenos Aires: Cincel.

Manin, Y. (1977). *A course in mathematical logic.* New York: Springer-Verlag.

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas.* Barcelona: Paidós.

Marc, E. y Picard, D. (1992). *La interacción social. Cultura, instituciones y comunicación.* Barcelona: Paidós.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics, 44 (1/2),* 25-53.

Mariotti, M.A. (2001). Justifying and Proving in the Cabri Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3),* 257-281.

Mariotti, M.A. (2003). The influence of technological advances on students' mathematics learning. En L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 695-723). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Hanbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics, 44,* 87–125.

Martin, T. y cols. (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics, 60(1),* 95-124.

Martínez Recio, A. (2002). La demostración en matemáticas. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 11-25). Almería: Servicio de Publicaciones, Universidad de Almería.

Martínez Recio, A. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83-99.

Mireles, J.D. (2004). Cuatro colores. *Epístola de la Ciencia, 5,* 7-11.

Mitchell, J. (2003). On-line writing: a link to learning in a teacher education program. *Teaching and Teacher Education, 19,* 127-143.

Moll, L.C. (2001). Through the Mediation of Others: Vygotskian Research on Teaching. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4ª Edition) (pp. 111–129). Washington, DC: American Educational Research Association.

Morin, E. (1990). *Science avec conscience.* París: Editions du Seuil

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior, 12 (3)*, 253-268.

N.C.T.M. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Palais, R.S. (1999). The Visualization of Mathematics: Toward a Mathematical Exploratorium. *Notices of the AMS, 46(6)*, 647-658.

Pandiscio, E. (2002). Exploring the Link between Preservice Teachers´Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry Software. *School Science and Mathematics, 102 (5)*, 216-225

Pena-Shaff, J. y Nichols, C. (2004). Analyzing student interactions and meaning construction in computer bulletin board discussions. *Computers and Education, 42,* 243-265.

Peressini, D. et al. (2004). A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics: A situative perspective. *Educational Studies in Mathematics, 56,* 67-96.

Putnam, R y Borko, H. (1997). Teacher learning: Implications of New Views of Cognition. En B. J. Riddle et al. (Eds.), *International Handbook of Teachers and Teaching* (pp. 1223-1296). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Raman, M. (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52,* 319-325

Rey, C.; Penalva, M.C. y Llinares, S. (2004). Multientorno de aprendizaje como estrategia didáctica. *En 3º Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación,* [CD-ROM]. Gerona: 3er Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (III CIDUI).

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. En E.von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Richardson, V. (Ed.). (1994). *Teacher change and the staff development process: A case in reading instruction.* New York: Teachers College Press.

Richardson, V. y Placier, P. (2001). Teacher Change. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching (3ª Ed.)* (pp. 905-947). Washintong DC: AERA.

Rodd, M.M. (2000). On mathematical warrants. *Mathematical Thinking and Learning, 2(3),* 221-244.

Rodríguez, R. (2003). *L'aprenentatge de les matemàtiques com a participació i construcció social en un entorn virtual.* Memoria de Tesis Doctoral. Bellaterra.

Sánchez, E. y Sacristán, A.I. (2003). Influential aspects of dynamic geometry activities in the construction of proofs. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA (PME27 & PME-NA 25) Vol. 4* (pp. 111-118). Honolulu, USA: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.

Schoenfeld, A. (1994). What we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13(1),* 55-80.

Schuck, S. (2003). The Use of Electronic Question and Answer Forum in Mathematics Teacher Education. *Mathematics Teacher Education and Development, 5,* 19-30.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34(1),* 4-36.

Shinhkuan, H. (2004). Using case discussion on the web to develop student teacher problem solving skills. *Teaching and Teacher Education, 20,* 681-692.

Sigalés, C. (2002). *El potencial interactiu dels entorns virtuals d'ensenyament i aprenentatge en l'educació a distancia.* Recuperado el 18 de marzo de 2005, de http://www.uoc.edu/web/cat/art/uoc/sigales0102/sigales0102.html

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE Universidad de Barcelona- HORSORI.

Soucy, S. y Martín, T. (2006). Going beyond the rules: making sense of proof. En Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. y Méndez, A. (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the Internacional Group for thr Psychology of Mathematics Education, vol. 2* (pp. 235-236). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies, 34,* 135-151.

Strijbos, J.W., Martens, R.L. y Jochems, W.M.G. (2004). Designing for interaction: Six steps to designing computer-supported group-based learning. *Computers & Education, 42,* 403-424.

Stylianides, A.J., Stylianides, G.J. y Philippou, G, N. (2005). Prospective Teachers' Understanding of Proof : what if the truth set of an open sentence is broader than that covered by proof ?. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings* *of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 241-248). Melbourne:PME

Sutherland, R., Olivero, F. y Weeden, M. (2004). Orchestrating Mathematical Proof Through the Use of Digital Tools. En M.J. Hoines y A. Flugestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 265-272). Bergen (Norway).

Tall, D. O. (2002). Differing Modes of Proof and Belief. Proceedings of the *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (pp. 91-107). National Taiwan Normal University.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the AMS, 30*, 161-177.

Torregrosa, G., Haro, M. J. y Llinares, S. (2003). Conceptions regarding the notion of Proof. The influence of virtual debates. En A. Méndez, J.A. Mesa y J. Mesa (Eds.), *Advances in Technology-Based Education: Towards a Knowledge-Based Society* (pp. 1601-1605). Badajoz: Junta de Extremadura.

Torregrosa, G., Llinares, S. y Penalva, M.C. (2004a). Diseño de entornos de aprendizaje integrando las TIC: Construcción de conocimiento necesario para enseñar Matemáticas. *Comunicación y Pedagogía,* 29-33.

Torregrosa, G., Llinares, S. y Penalva, M.C. (2004b). Características de un Módulo de Aprendizaje Interactivo: un ejemplo. *Comunicación y Pedagogía,* 34-37.

Usiskin, Z. (1980). What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? *The Mathematics Teacher*, *73,* 413-424.

Veerman, A. (2003). Constructive Discussions Through Electronic Dialogue. En J. Andriessen, M. Baker and D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognitions in Computer-Supported Collaborative Learning Environments* (pp. 117-143). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vion, R. (1992). *La communication verbal. Analyse des interactions.* París: Hachette.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48 (1),* 101-119.

Weber, K. y Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 1-26

ANEXOS.

Anexo I.

Módulos del Master "Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación".

Los módulos obligatorios son ocho. Los tres primeros se consideran de fundamentación y tratan de acercar al participante a la problemática general que acompaña a la introducción de las TIC en la enseñanza. Son los siguientes:

- Módulo 1: "La educación en la sociedad de la información". Se pretende formar, a nivel general, a los profesionales de la educación, para hacer frente a los cambios culturales que están transformando la sociedad y promover la reflexión acerca del impacto de las TIC en todos los contextos educativos.
- Módulo 2: "Las nuevas tecnologías en el diseño curricular". Con este módulo se pretende introducir a los participantes en el diseño del currículum y sus implicaciones para la integración de las tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En segundo lugar, se pretende dotarles de un bagaje teórico-práctico que les permita reflexionar sobre su forma actual de concebir el currículum e introducir elementos de mejora. Y, por último, familiarizar a los participantes con las distintas modalidades de utilización de las TIC en función de las finalidades y tareas educativas.
- Módulo 3: "Las implicaciones organizativas de las nuevas tecnologías". Se pretende delimitar la naturaleza y sentido de las innovaciones en educación, analizar los cambios organizativos que promueven las TIC y esbozar propuestas de futuro para una escuela tecnológicamente avanzada.

Los cinco módulos siguientes se relacionan con los procesos de producción y tratan de proporcionar herramientas destinadas para la elaboración y mejora de materiales, y para la captación de información en la Red. Los módulos son los siguientes:

- Módulo 4: "El uso didáctico de la red Internet". El objetivo de este módulo es la integración de herramientas de Internet en los procesos de enseñanza y gestión. Se analizan las posibilidades, recursos, ventajas y desventajas, etc.
- Módulo 5: "El diseño y la producción de aplicaciones multimedia". El propósito de este módulo es el proporcionar un conocimiento suficiente sobre los diferentes programas multimedia, desarrollar habilidades básicas de diseño y producción de los mismos e identificar las principales herramientas utilizadas.
- Módulo 6: "Las técnicas multimedia aplicadas a la educación". Se pretende introducir y familiarizar a los alumnos con algunas herramientas de tratamiento de texto, imagen y sonido, así como con los diferentes lenguajes de autor, con el fin de que se inicien en el diseño y producción de recursos educativos multimedia.
- Módulo 7: "La evaluación de multimedia". En este módulo se proveerá al alumno de diferentes estrategias para valorar el interés y la adecuación de materiales multimedia a la enseñanza y se profundizará en los criterios de evaluación de los trabajos multimedia dentro del aula.
- Módulo 8: "El marketing y la distribución multimedia". Se pretende que los alumnos conozcan las estrategias y canales de distribución y publicidad de los productos y recursos multimedia educativos, con o sin fines comerciales. Este módulo tiene un carácter práctico y pretende guiar al docente en la distribución y publicidad de su obra multimedia realizando para conseguirlo un plan de negocio.

Los módulos optativos presentan una amplia oferta dirigida a posibilitar que el participante elija, de acuerdo con sus intereses profesionales, dos módulos de entre los cinco ofertados. Dichos módulos son los siguientes:

Volver al índice/Tornar a l´índex

Módulo 9: "Las tecnologías en la enseñanza de las Ciencias Sociales".
Módulo 10: "Las tecnologías en la enseñanza de la Lengua y la Literatura".
Módulo 11: "Las tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas".
Módulo 12: "Las tecnologías en la enseñanza de las Ciencias Experimentales".
Módulo 13: "Las tecnologías en la gestión escolar".

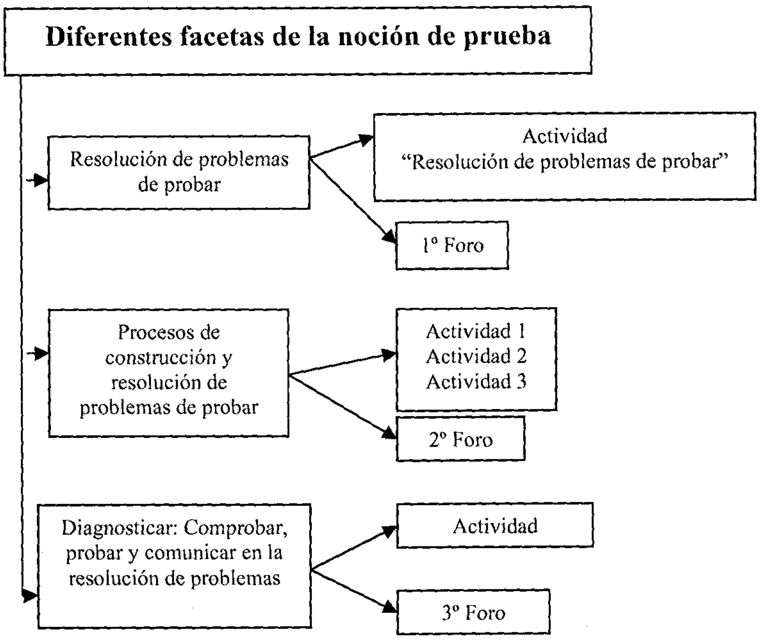
El objetivo general de los módulos del 9 al 12 es el de facilitar al profesorado la utilización en el aula de recursos tecnológicos. El objetivo del módulo 13 es el de formar a los gestores y directores de instituciones educativas sobre la incidencia y utilización de las TIC en la gestión escolar.

Anexo II.

La forma de participar: La generación de cadenas conversacionales.

La información en este anexo se ha organizado en cinco secciones. En las cuatro primeras se presentan los resultados del análisis de la forma de participar en los foros los profesores. Nos centramos en los tipos de interacciones que se producen y en la existencia de debates y diálogos que conducen a acuerdos y a negociación de significados.

En la segunda edición del Master se abrieron tres foros en los que participaron los profesores en dos grupos. La apertura de los tres se realizó con una diferencia de tres o cuatro días y se mantuvieron abiertos hasta el final del módulo, lo que significó 6 semanas para el primero, entre 6 y 5 para el segundo y cinco semanas para el último. Las actividades a las que se hace referencia en cada uno de los foros aparecen en el apartado II.2.2. del capítulo "Diseño de la Investigación" y son las que se muestran en el esquema siguiente:



En el primer foro los profesores trabajaron sobre la actividad "Resolución de problemas de probar", en el segundo foro tenían que responder unas preguntas referentes a las actividades 1, 2 y 3, y en el tercer foro, las preguntas estaban referidas a la actividad "Diagnosticar: Comprobar, probar y comunicar".

Los profesores pudieron intervenir en los tres foros a la vez. Esto dio lugar, en alguna ocasión, a algún error de ubicación que en todos los casos fue subsanado por los propios profesores participantes (Xavier, 1º foro, grupo B: *Me he equivocado de foro y de actividad, es la uno no la dos. Lo siento, pero el comentario lo traslado al foro que toca que es el siguiente"*). Los profesores que formaban parte de cada grupo ya se conocían por haber trabajado en módulos previos y, además, podían contactar con el resto de compañeros de módulo y grupo.

En la cuarta edición, al igual que en la segunda, los profesores fueron separados en dos grupos A y B. El número de foros abiertos en esta edición fue también de tres. Puesto que en anteriores ediciones se había podido comprobar que los profesores intervenían indistintamente en un foro o en otro según iban trabajando las actividades, con el fin de no demorar a los profesores que iban más deprisa, se decidió abrir los tres foros a la vez. El tiempo que permanecieron abiertos los tres foros fue de 6 semanas. Igual que para la 2ª edición, las actividades a las que se hace referencia en cada uno de los foros aparecen en el apartado II.2.2., dentro del capítulo "Diseño de la Investigación".

También en esta edición se conocían los profesores que formaban parte de cada grupo por haber trabajado en los mismos módulos con anterioridad y, de igual manera que en la segunda edición, en la sección Comunidad, del entorno virtual, se les facilitaba la foto, nombre y apellidos y dirección de correo electrónico de todos y cada uno de los profesores inscritos en el master.

Segunda edición, Grupo A.

Este grupo A estaba formado por cinco profesores que respondían a las siglas IJe, RaMe, Flo, JaSa y MiJi. Se presentan a continuación los resultados correspondientes a cada uno de los tres foros.

1º Foro.

Se abrió el 20 de septiembre de 2003 y permaneció abierto durante 6 semanas. En él han intervenido los cinco profesores que formaban parte de este grupo. Todos han respondido las preguntas con las que la moderadora abrió el foro.

1º Foro: Resolución de problemas de probar. Actividad.

- Comentad la forma en que habéis resuelto la actividad.
- ¿Qué contenidos matemáticos habéis utilizado en el proceso de resolución?
- ¿Hay diferencias entre vuestra manera de resolver la actividad y la forma en que la habéis comunicado en este foro?

De entre las respuestas de los demás compañeros, comenta los elementos geométricos utilizados por ellos que consideres diferentes a los tuyos, así como las formas distintas de contarlo que hayan utilizado.

Los profesores se han limitado, casi exclusivamente, a exponer cómo han resuelto la actividad a la que se aludía y no ha habido comparación entre las formas de proceder. Sólo ha habido un refrendo de Flo, que a la vez que respondía las preguntas de apertura del foro se mostraba de acuerdo con las respuestas dadas por IJe y manifestaba haber resuelto él la actividad de manera semejante (*"Al igual que tú, "IJe", recurrí a resolver el problema de manera gráfica"*).

Por otra parte, RaMe planteaba a la moderadora unas preguntas de aclaración sobre uno de los conceptos implicados en la actividad sobre la que había que debatir (*"Ma. José, en la actividad 2, dice que G y B, así como G y P dividen congruentemente a las rectas AC y MR respectivamente...si dividen congruentemente no significa necesariamente que las dividan en partes iguales...Además el hecho de que AG=GB no sirve de mucho...*). La moderadora le respondió en el mismo foro puesto que las preguntas se efectuaron en dicho entorno y el carácter de las mismas era de interés general. Después de la respuesta de la moderadora, el profesor que había preguntado contestó, a su vez, las preguntas de inicio del foro. Hay que mencionar que RaMe dirigió sus dudas hacia la moderadora y no hacia ningún otro profesor participante, a pesar de que ya se conocían de su trabajo en módulos anteriores y de que uno de ellos ya había intervenido presentando la actividad resuelta.

Después de estas interacciones, los profesores que aún no habían entregado sus respuestas se limitaron a hacerlo sin otro tipo de participación.

La primera de las intervenciones se produjo el día 26 de septiembre, 6 días después de haberse abierto el foro, lo que supone tiempo suficiente para resolver la actividad y poder contestar a las preguntas que se proponían. Hay que recordar que las carpetas de entrega de las actividades se colocaron en el entorno virtual el mismo día de apertura de los foros correspondientes al tópico al que estamos haciendo referencia, "Software dinámico. Procesos de prueba", aunque los profesores tenían acceso al contenido del módulo con anterioridad, (se les facilitó en un CD tres meses antes). Cabe indicar que durante ese tiempo, los profesores participantes tuvieron que trabajar en otros módulos obligatorios.

El segundo de los profesores en intervenir lo hizo dos días después del primero y 8 días después de abrirse el foro, en su intervención pidió a la moderadora las aclaraciones a las que ya se ha hecho referencia sobre el concepto de congruencia. La moderadora le respondió dos días después. Los demás profesores tardaron algo más en intervenir, uno de ellos casi agotó el tiempo establecido. La moderadora se limitó a abrir el foro y a responder la cuestión que se le planteó.

Los acontecimientos descritos nos llevan a concluir que no ha habido cadenas conversacionales, si bien, representamos gráficamente las aportaciones realizadas. Se muestra la fecha de apertura del foro y las fechas de las intervenciones de los profesores. También se indican las siglas de los profesores participantes y el tipo de intervención que realizan. Las flechas representan la persona o personas con las que interactúan los profesores.

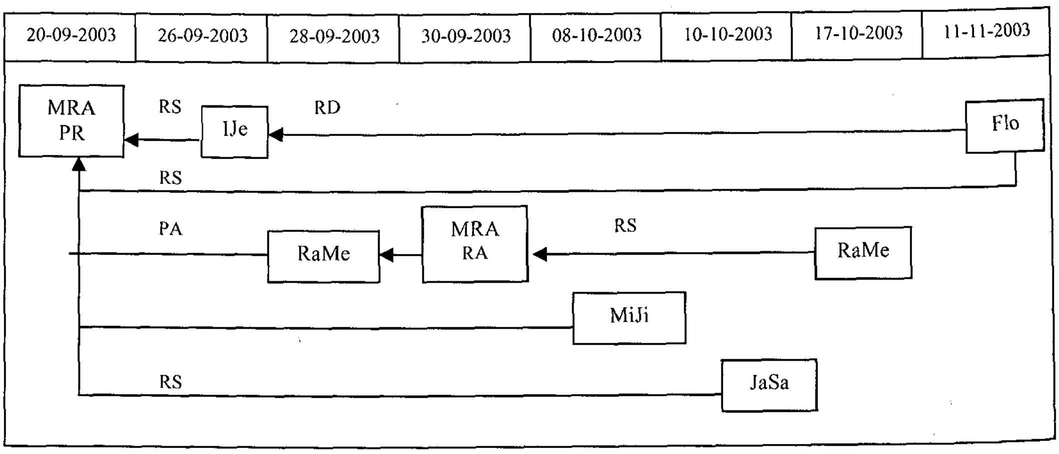


Figura 1. Actuaciones en el 1º Foro, 2ª Edición, Grupo A

2º Foro.

En este 2º foro participaron sólo cuatro de los cinco profesores que formaban parte de este grupo, IJe, MiJi, RaMe y JaSa. Las preguntas con las que la moderadora abrió estos foros fueron las siguientes:

> **2º Foro: Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos. Actividades**
>
> Actividad 1.
>
> - Utilizar una herramienta dinámica como Cabri, os ha ayudado a:
>
> ¿Probar la igualdad pedida?
> ¿Conjeturar nuevas relaciones?
> ¿Comunicar la prueba realizada?
> ¿Convencerías con más facilidad a otros de lo correcto de vuestra prueba?
>
> Actividad 2.
>
> ¿El uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de ver y resolver el problema de la actividad?
>
> Actividad 3.
>
> ¿En qué medida el software dinámico te ayuda a diseñar actividades del tipo i-matemáticas? ¿Cómo las actividades del tipo i-matemáticas favorecen el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?

No se produjo interacción alguna entre ellos, e, incluso, una pregunta de aclaración formulada por la moderadora y dirigida a un profesor en particular, no obtuvo respuesta. Los profesores participantes se limitaron a exponer su forma de resolver las actividades y a responder a las preguntas con mayor o menor detalle y sin hacer referencia a lo presentado por los compañeros, a pesar de que en el inicio del foro se les pidió que replicaran unos a otros. La moderadora se limitó a abrir el foro y a responder cuando se le planteó alguna cuestión. Este foro se abrió el 24 de septiembre, 4 días después del primero y permaneció abierto hasta mediados de noviembre, fecha en la que finalizaba el tiempo de realización del módulo. La representación gráfica que resume la participación en el 2º foro es la siguiente:

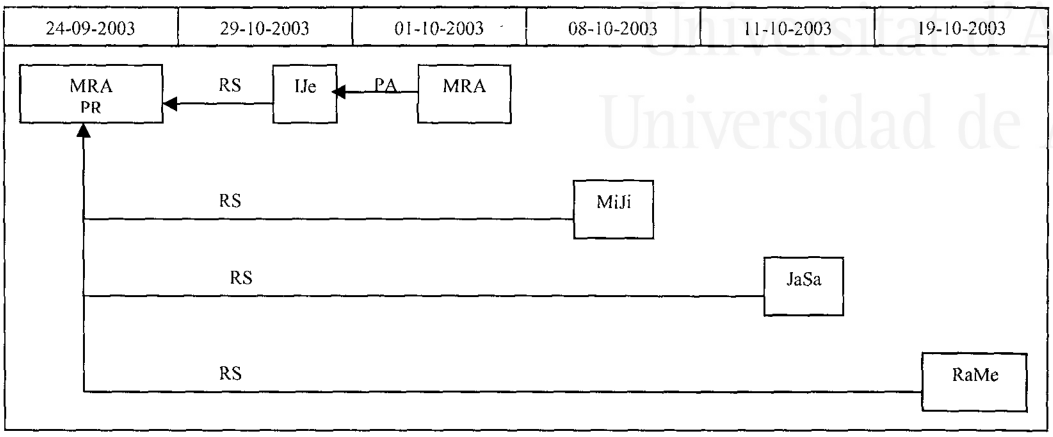


Figura 2. Actuaciones en el 2º Foro, 2ª Edición, Grupo A

3º Foro.

En este tercer foro intervinieron, de nuevo, los cinco profesores del grupo. Las preguntas con las que la moderadora abrió los foros fueron:

> **3º Foro: Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas. Actividad**
> Referente a la actividad del apartado "Diagnosticar. Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas".
> Si habéis visto las diferentes maneras, que se os muestran, de resolver la actividad de los triángulos, podéis expresar vuestras opiniones en este foro.

- ¿Alguna de estas soluciones coincide con la tuya? ¿Cuál?
- Si son distintas, ¿en qué se diferencian?
- Alguna de las soluciones propuestas puede tener distinto poder de convicción? ¿Para quién?
- ¿En qué medida podemos considerarlas como pruebas?
- ¿Cuál podría ser la diferencia de significado dada a la noción de prueba por alumnos de Secundaria y por matemáticos?
- ¿Cuál es el papel de los contraejemplos en el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?
- ¿Cómo pueden ser integradas las características dinámicas del software en el diseño de actividades para enseñar matemáticas?
- ¿Cómo puede favorecer el uso de dicho software el proceso de enseñanza / aprendizaje de la noción de prueba con alumnos de Secundaria?
- ¿Cuál crees que debe ser el papel del profesor al introducir software dinámico en los contextos de presentar y probar en matemáticas?

Hubo interacción entre tres de ellos, JaSa, Flo y RaMe que consistió en mostrarse de acuerdo los dos últimos con la aportación del primer profesor, aunque por motivos diferentes. RaMe manifestó su conformidad con lo expuesto por JaSa referente al papel del docente en el aula al trabajar procesos de prueba; y Flo refrendó su forma de resolver la actividad. La moderadora abrió los foros e intervino en otras dos ocasiones pidiendo aclaración a las intervenciones de dos de los profesores (IJe y MiJi) y haciendo también una aclaración a uno de ellos (MiJi). Esta vez, al pedir explicaciones la moderadora a IJe sobre lo manifestado con relación a la complejidad que conlleva para el docente trabajar con software dinámico en el aula, el profesor sí que respondió. Sin embargo, la pregunta dirigida por la moderadora a MiJi, intentando obtener más información sobre su consideración sobre las pruebas visuales, no obtuvo respuesta. En esta misma intervención, la moderadora aclaró el término contraejemplo, puesto que parecía haber discrepancias con el significado del mismo (MiJi: *Los contraejemplos son los ejercicios que se aprenden de memorización pero que no e comprenden ni se aplican"*).

Como en los foros anteriores, IJe fue el primero en intervenir, y lo hizo dos días después de la apertura del foro. MiJi respondió a los 11 días y los demás lo hicieron posteriormente. Tampoco en este foro se produjeron cadenas conversacionales. La representación gráfica, resumen de la participación se muestra a continuación:

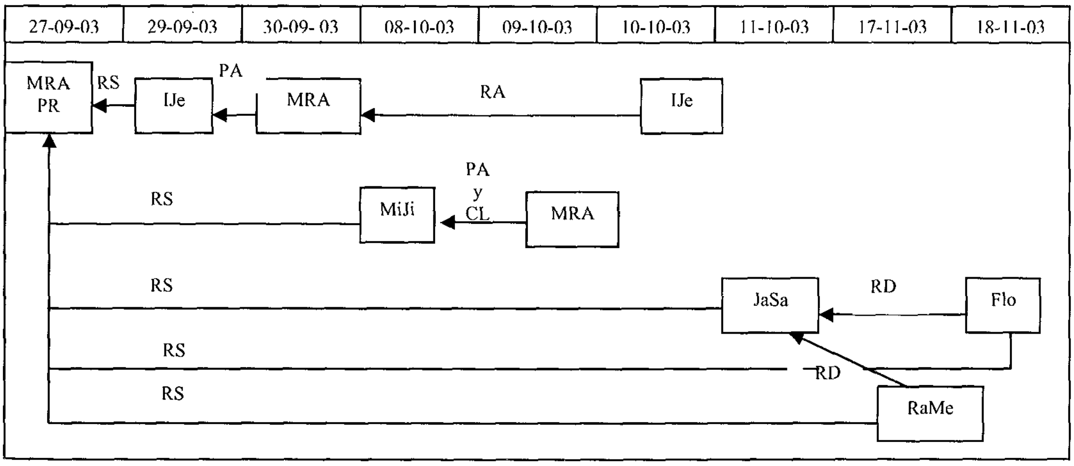


Figura 3. Actuaciones en el 3° Foro, 2ª Edición, Grupo A

En estos tres foros los profesores de este grupo se limitaron a comentar cómo habían resuelto las actividades y a responder con argumentos las preguntas planteadas. Sus respuestas fueron bastante completas, sin embargo, en muy pocas ocasiones hubo comentarios relativos a lo presentado por otros compañeros, a pesar de que se les solicitaba en las tareas de inicio de los foros. Tampoco se reflejó en el contenido de sus intervenciones información aportada por el resto de los participantes, ni siquiera respondieron las preguntas de aclaración planteadas por la moderadora. Por ello, no hubo intercambio de opiniones ni debate, y, por tanto, no se produjeron cadenas conversacionales. Tampoco encontramos indicios de que lo producido en los foros haya podido influir en las concepciones de los profesores sobre la prueba ni en su conocimiento profesional.

Segunda edición, Grupo B.

Este grupo estaba formado por 6 profesores de matemáticas, de los que han participado en los foros 5: Manulo, Meñaca, Heladio, Xavi y VV.

1º Foro.

La fecha de apertura de este foro fue el 20 de septiembre de 2003. El primero en responder fue Xavi y lo hizo 6 días después de haberse abierto el foro. El siguiente profesor en intervenir fue VV que lo hizo el día 2 de octubre. Los restantes profesores lo hicieron bastante tiempo después.

Este foro se abrió con preguntas referentes a la forma de proceder para resolver la actividad "Resolución de problemas de probar". Xavi presentó su resolución de dicha actividad. La moderadora le hizo un comentario con el fin de que reflexionara sobre lo expuesto y al hacerlo cambió de parecer y se mostró de acuerdo con lo que la moderadora le planteaba. El comentario hacía referencia a su forma de resolver la actividad a la que se aludía en el foro. El profesor se apoyaba en un teorema que complicaba en exceso el desarrollo del proceso de prueba, ya que se podía resolver procediendo de manera más sencilla y breve. La moderadora le hizo reflexionar sobre este hecho y el profesor no sólo reconoció que su planteamiento era innecesario, sino que realizó otra demostración mucho más sencilla que presentó en la carpeta de entrega correspondiente, aunque no la expuso en el foro (Xavi, 1º foro, Grupo B: *¡Tienes razón! Vaya me compliqué un poco la existencia. Ya me acostumbra a pasar, ...A ver si aprendo a simplificar las cosas.*). De esta forma se produjo una cadena conversacional.

VV, respondió las cuestiones del foro e hizo una aclaración a su propia intervención, más de forma que de contenido, lo que es una muestra de su interés por hacerse entender.

VV, 1º foro, Grupo B: *"Acabo de comprobar que el símbolo de congruencia ha sido sustituido por una bolita que no significa nada. Por favor, sustituidlo mentalmente por lo que es. Gracias".*

VV provocó otra cadena conversacional donde se implicaron otros profesores, además de la moderadora. Su intervención, respondiendo las preguntas de apertura del foro, recibió el refrendo de Xavi, que después de su interacción con la moderadora se mostraba más dispuesto a admitir soluciones sencillas y claras (*"¡Muy bien!, Me ha encantado la simpleza con la que has explicado y has buscado la solución, enhorabuena..."*). La moderadora planteó a VV una pregunta de reflexión referente a su manifestación de no encontrar diferencia entre hacer una prueba y comunicarla (*"No creo que haya ninguna diferencia entre la forma de resolverlo y la de transmitirlo"*) y él respondió cambiando de opinión (*"Claro que tienes razón...explicar el procedimiento seguido exige una seria reflexión sobre todos los pasos dados. Hace muchos años que tengo conciencia de que enseñando se aprende mucho"*). Esta respuesta recibió el refrendo de Heladio que aludió a lo interesante de conocer y tratar de entender las formas de resolución de los demás, (*"Creo que aunque utilicemos las misma técnicas o 'fórmulas para resolver algún problema la forma de trabajo de cada persona es diferente ya que considero que todos tenemos diferentes formas de razonar, 'por aquello de que cada cabeza es un mundo' y lo interesante de esto es conocerlas y tratar de entenderlas, o como dijo "VV" 'enseñando se aprende mucho'"*).

En esta cadena conversacional, se llegó a acuerdo en lo referente a la diferencia entre realizar una prueba y comunicarla explicando lo que se ha hecho. Por ello, consideramos que ha habido aprendizaje colaborativo y que las interacciones generadas han producido modificaciones en las concepciones manifestadas por algunos profesores respecto a los procesos de prueba.

Los profesores Meñaca y Manulo intervinieron sólo para presentar sus respuestas a las preguntas del foro.

A continuación se muestra la representación gráfica de lo acontecido en este foro, colocando en verde y en rojo las interacciones que determinan las dos cadenas conversacionales.

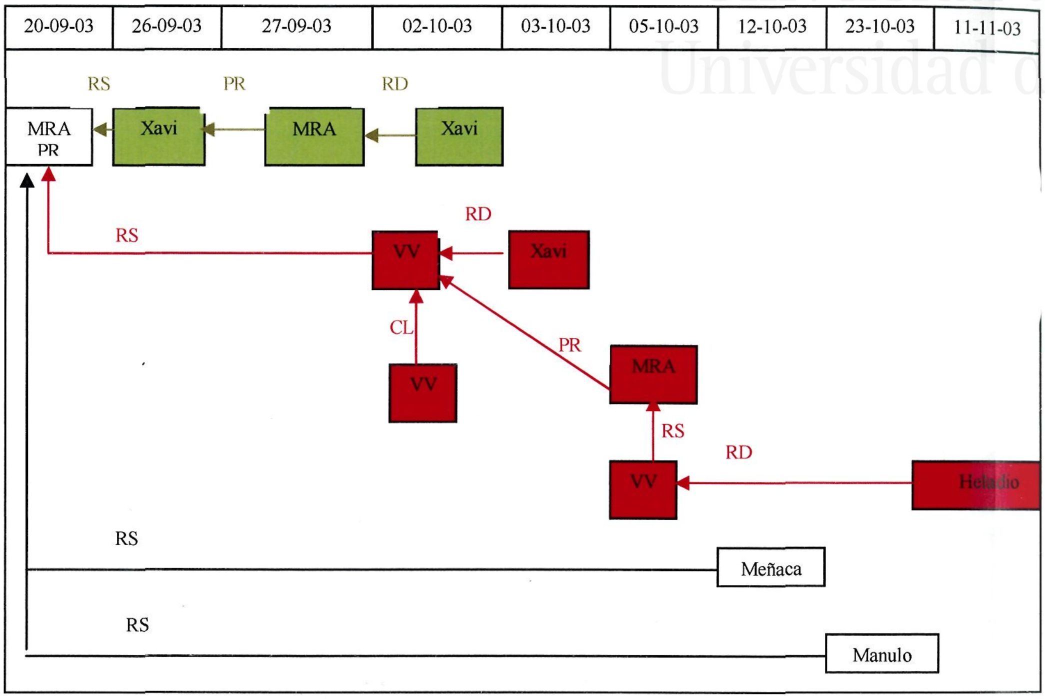


Figura 4. Actuaciones en el 1º Foro, 2ª Edición, Grupo B

2º Foro.

Al igual que en el foro anterior, el primer profesor en intervenir ha sido Xavi. Hay que destacar su diligencia al responder, pues lo hizo el día 25 de septiembre, al día siguiente de haberse abierto el foro. Como el foro contenía una gran cantidad de cuestiones, Xavi escalonó el envío de sus respuestas y lo hizo en dos días sucesivos. La moderadora discrepó con parte del contenido de la segunda intervención, pero se mostró de acuerdo con otra parte del mismo y así lo manifestó. Sin embargo, no hubo reacción por parte de Xavi.

El día 2 de octubre VV envió sus respuestas a los temas planteados en el foro. La primera cadena se formó a partir de esas respuestas y de la intervención de la moderadora que, ante las manifestaciones del profesor referentes a la consideración de las comprobaciones visuales como pruebas válidas cuando se trabaja con alumnos de secundaria, le planteó dos preguntas una para que le aclarara lo que había querido decir exactamente y otra para que reflexionase sobre los diferentes tipos de procesos de prueba que se pueden desarrollar y sobre su idoneidad con respecto a los interlocutores a los que van dirigidos. VV respondió ese mismo día, aclarando su respuesta y haciendo una reflexión, que completó en el 3º foro, en la que reforzó su consideración de la prueba como proceso a través del cual se debe transmitir contenido matemático de manera que se comprenda el significado de los conceptos y relaciones que intervienen, insistiendo sobre todo en el trabajo con pruebas en el aula.

La segunda cadena conversacional surgió de otra parte de la misma intervención de VV en la que al resolver la actividad 1, manipulando una configuración geométrica tenía que llegar a obtener una igualdad y después demostrarla. Llegó a una respuesta trivial, que no se desprende de la manipulación de la configuración sino de la aplicación de una definición. Ante las preguntas de reflexión y las aclaraciones que le hizo la moderadora llegó a la solución correcta argumentando con razonamientos su respuesta y demostrando lo que se le pedía (*...el radio de la circunferencia y la altura del triángulo son iguales! Eso es coherente con mi conclusión e inseparable de ella. Veamos, si el ángulo que cito es de 30º entonces el ángulo CMQ es de 60º...En consecuencia MQ y la altura citada son iguales"*).

Además de las dos cadenas anteriores, esa misma intervención de VV provocó otra intervención, la de Xavi preguntándole cómo había podido grabar y enviar al foro una imagen realizada por él mismo (*"¿Cómo te la ha dejado grabar?, a mí al bajarme el programa no me ha dejado hacer nada con él"*). VV le respondió a los dos días, explicándole con detalle los pasos que había tenido que seguir para conseguirlo (*"La imagen está capturada del siguiente modo: 1) Estando la imagen en pantalla pulsas la tecla Impr Pant (está sobre la tecla Insert) 2) después en Photoshop abro un archivo nuevo, acepto las medidas que me ofrece y con la opción pegar se pega una imagen de la pantalla completa. 3) Recorto la parte que me interesa y la guardo 4) añado las letras, lo guardo en formato jpg. Eso es todo. Tengo una copia limitada como tú."*). Meñaca intervino el día 12 de octubre para presentar sus respuestas. Casi un mes después se produjo la interacción de Heladio, que refrendó la opinión de Meñaca en lo que se refiere a las posibilidades didácticas del software dinámico a la hora de trabajar con procesos de prueba en el aula (*"...Por lo que considero que es una excelente herramienta para la enseñanza/aprendizaje ya que permite englobar como dijo Meñaca las etapas de deducción, investigación, resolución y volver más ameno estos temas matemáticos que en ocasiones son difíciles de abordar"*). Finalmente, Manulo, aunque no respondió las preguntas propuestas en el foro, aportó información relevante para todos al hablar de otro programa interactivo y gráfico para trabajar geometría con estudiantes y exponer su propia experiencia en el aula con el mismo (*"El software que permite construcciones dinámicas permite que los alumnos prueben y manipulen...Logo es un programa antiguo pero genial. Yo lo he usado con niños más pequeños* *y puedes llegar a explicar perfectamente la relación que hay entre lados y ángulos en un triángulo construyendo el tejado de una casa"*). La moderadora se mostró de acuerdo con él y, a la vez, le presentó una pregunta de reflexión a la que no respondió.

Hay que destacar que las dos cadenas conversacionales que se produjeron fueron generadas por VV, cuyas intervenciones han sido claras y han estado llenas de contenido.

Consideramos que lo acontecido en este segundo foro, ha servido para reforzar las concepciones de VV en lo que se refiere a la importancia del aspecto comunicativo y explicativo de la prueba, llegando a la conclusión de que es muy positivo incorporar la visualización y el dinamismo a los procesos de prueba buscando diferentes formas de transmitir, sobre todo al desarrollar procesos de prueba en el aula. El conocimiento profesional de este profesor también se ha visto enriquecido con las intervenciones que han tenido lugar a lo largo de la segunda cadena conversacional y que le han permitido ver que una reflexión más profunda sobre lo que se nos plantea, nos puede conducir a obtener mejores y más interesantes resultados. Otra intervención que consideramos que ha sido interesante para el desarrollo profesional de los profesores participantes en este foro, es la de Manulo, que presentó información sobre un nuevo software dinámico para trabajar geometría en el aula y expuso su experiencia con dicha herramienta.

Se muestra a continuación el gráfico que representa la actividad en el foro.

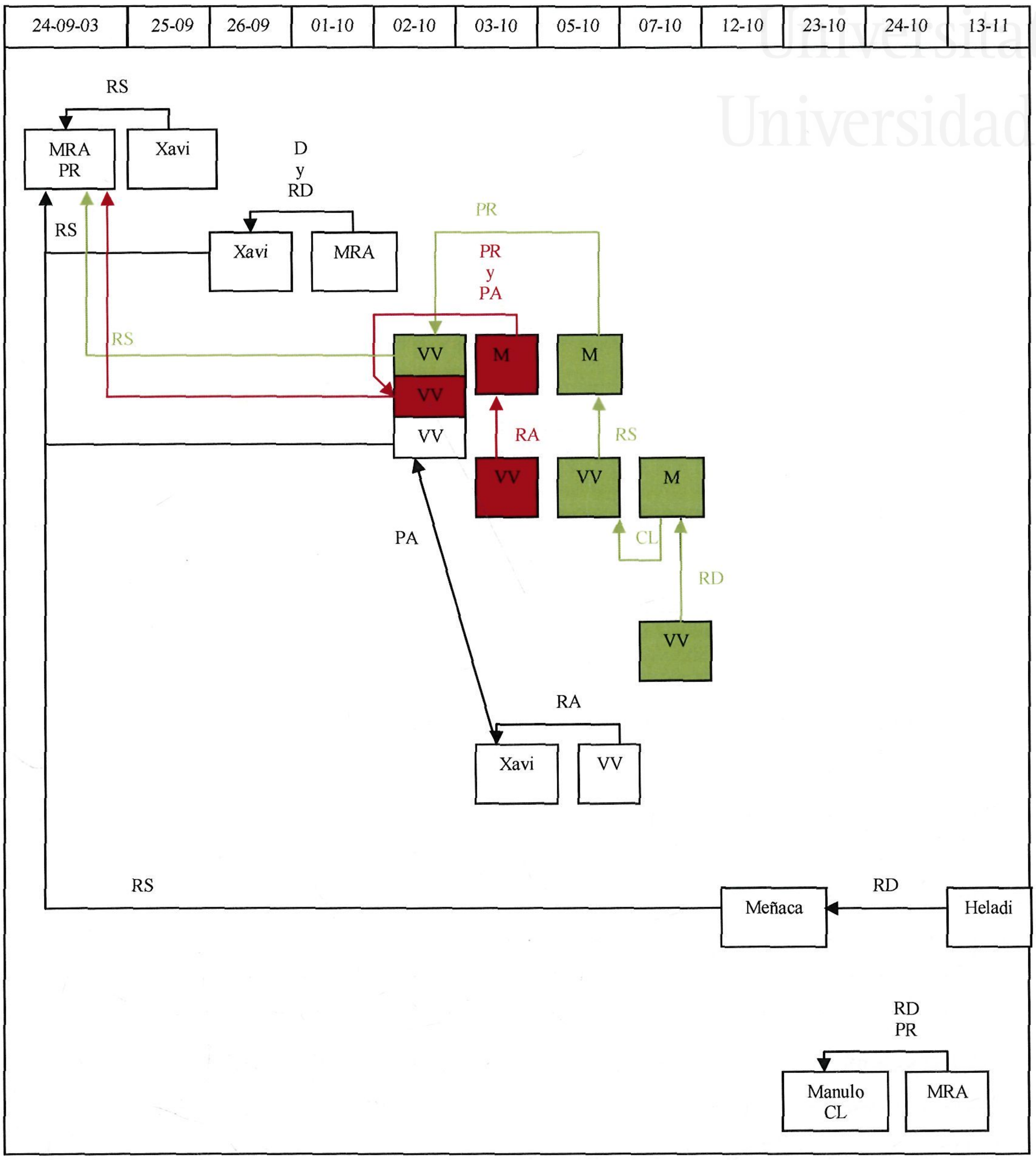


Figura 5. Actuaciones en el 2º Foro, 2ª Edición, Grupo B

3º Foro.

Este tercer foro, se inició el 27 de septiembre, y en él se generaron dos cadenas conversacionales diferentes a raíz de dos intervenciones distintas de Xavi. En la primera de las intervenciones, comentó las diferentes formas de resolver la actividad "Resolución de problemas de probar". Ante una manifestación de él en la que parecía confundir el término probar con comprobar, (*Son pruebas en el momento que se realizan los* *ejercicios y que no se pueden demostrar o hacer infinitas veces para cubrir todas las posibilidades"*), la moderadora le hizo una aclaración en ese sentido, diciéndole que en estos foros se estaban considerando como sinónimos demostrar y probar. En la misma intervención, la moderadora manifestó su acuerdo en algún aspecto de lo dicho por él con relación a cómo trabajar procesos de prueba con alumnos de secundaria y le hizo una pregunta para que reflexionara sobre lo manifestado al respecto. Xavi respondió reafirmando y justificando su postura (*"Para los alumnos la prueba es la capacidad de comprobar el enunciado, de poder 'jugar' con el enunciado cambiando los parámetros y ver que lo expuesto se cumple".... "Creo que basta. Esa es mi opinión, sobre todo en lo que he comentado sobre que en secundaria la capacidad de razonamiento está más limitada o se empieza a desarrollar, se puede intentar incidir en ello, pero no insistir demasiado si ellos no lo piden (cosa que dudo que hagan)"*).

Consideramos que en el diálogo entre Xavi y la moderadora, el primero reflexionó y reafirmó sus concepciones sobre la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje. La cadena conversacional que se originó aparece en verde en el gráfico. La segunda cadena conversacional, en color rojo en el gráfico, se generó también a partir de las respuestas de Xavi a una parte de las preguntas con las que se abrían los foros. La moderadora le pidió que aclarase si antes de practicar con la herramienta dinámica Cabri tenía las mismas ideas sobre lo que significa enseñar y aprender geometría. Su respuesta nos confirmó su cambio de concepción en lo que concierne a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general (*"Antes de experimentar con Cabri veía las matemáticas más o menos estáticas...Enviar ejercicios también estáticos o de una forma de hacerlos. Ahora existe la posibilidad de que puedan ver de una forma sencilla lo que se les plantea, pueden interaccionar con las matemáticas y lo pueden hacer ellos solos y desde su misma casa..."*). Al mismo tiempo, la moderadora lanzó una pregunta de reflexión para todos relacionada con lo expuesto por Xavi sobre el excesivo tiempo que puede suponer trabajar con software dinámico en el aula.

¿No creéis que trabajar de esta forma puede ser un proceso demasiado lento?

Respondieron Xavi y VV. El primero de ellos para reiterarse en la conveniencia de utilizar software dinámico a pesar de todos los inconvenientes que pueda haber (*"La forma de trabajar puede ser lenta, pero más vale pájaro en mano que ciento volando. Además, si se llega a entender más con las matemáticas aplicadas, luego quizá se puede acelerar más en conceptos posteriores. Se pueden enseñar cosas iguales con metodologías diferentes, aunque quizá el uso del software dinámico desde pequeños potencie más y puedan recordar más lo que hacen a diario por el hecho de que se lo pasan bien, en cambio en las clases aburridas el alumno aparca directamente el* *temario una vez se ha examinado, al usar el programa siempre deben saber al menos las definiciones y relaciones que en él se piden"*).

VV intervino para responder las preguntas de apertura del foro y para responder también la última pregunta de reflexión de la moderadora. En sus respuestas se mostró de acuerdo con lo dicho por Xavi en lo referente a las ventajas del uso de software dinámico en el aula (*Tiene razón "Xavi" cuando dice que el programa pone en manos del alumno la posibilidad de verificar que se cumple (o no) una proposición previamente presentada. Y además de conjeturar y pensar, la posibilidad que tiene de asimilar uno a uno, usándolos conceptos y construcciones geométricas...No creo que pueda compararse el aprendizaje que puede conseguirse con este programa con el que se obtiene por medios convencionales. Nada es lento en matemáticas si es definitivo. Un problema que tenemos es la capacidad de 'olvido' de un curso a otro que tienen los alumnos. Las ideas aprendidas de esta manera, 'aseguradas' con un trabajo de formalización y memorización posterior creo que pueden resultar más definitivas"*). En este grupo de interacciones que se produjeron entre los dos profesores y la moderadora, cada uno de ellos expuso sus opiniones con argumentos, respondieron las preguntas justificadamente y llegaron a acuerdos. Estos acuerdos se concretaron en la consideración de que el software dinámico mejora el aspecto explicativo y comunicativo de la prueba, refuerza el carácter antiautoritario de la misma, al permitir al estudiante manipular y experimentar para llegar a conclusiones por sí mismo, y favorece la asimilación y apropiación del contenido matemático con el que se trabaja.

La tercera cadena, en azul en el gráfico, está formada por las intervenciones que sólo dos de los profesores realizaron para responder a preguntas que habían sido planteadas en las carpetas de entrega y no en el foro, pero que a ellos les parecieron suficientemente interesantes como para tratarlas en él. Las preguntas correspondían a la actividad "Software dinámico. Procesos de prueba", en la que tenían que reflexionar sobre tres formas diferentes de demostrar el teorema de Pitágoras. La iniciativa la tiene concretamente VV y a ella se une su compañero Xavi. En esta decisión se aprecia un gran deseo de compartir sus reflexiones con los demás. La moderadora refrenda totalmente esta iniciativa.

VV: *"Aunque esto no parece que se pida me parecen interesantes para compartir las reflexiones a las que me ha llevado la realización de esta actividad".*

Ambos profesores dieron sus respuestas y hubo acuerdo en lo que concierne a la riqueza de los procesos desarrollados con el uso de software dinámico ("*Estoy de acuerdo con "VV", en el enlace 1 el agrandamiento del triángulo permite la demostración generalizada...*").

En todos los temas trabajados en este tercer foro sólo intervinieron los profesores VV, Xavi y la moderadora. El resto de compañeros no aportó información al mismo. Los dos profesores intervinieron con diligencia mandando sus respuestas y opiniones con prontitud. En una semana se realizaron las 11 intervenciones producidas.

Hay que hacer notar que el módulo constaba de dos tópicos más con sus foros correspondientes, que fueron abiertos posteriormente a éstos. Las interacciones a tres bandas que se iniciaron en estos otros foros, entre VV, Xavi y la moderadora, continuaron posteriormente, obteniéndose un diálogo más intenso y fluido que dio lugar a un gran intercambio de experiencias didácticas e ideas. El resto de profesores también intervino pero continuaron siendo bastante independientes sin interactuar de la misma forma ni con la misma intensidad.

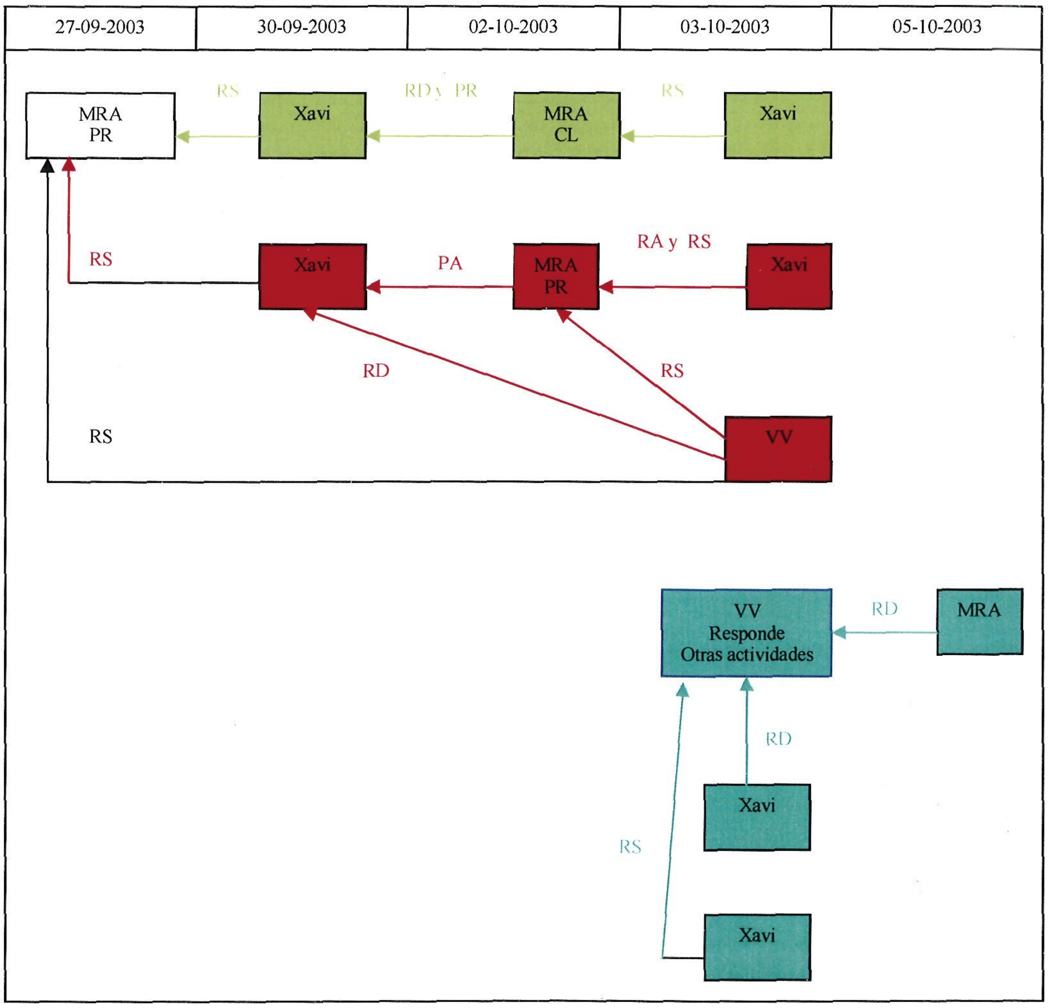


Figura 6. Actuaciones en el 3º Foro, 2ª Edición, Grupo B

En general, la participación de los profesores de este grupo B en los foros, excepto en dos de los casos, ha sido muy escasa, limitándose a presentar la resolución de las actividades y a refrendar la intervención de algún compañero. La mayor riqueza de contenido procede de las intervenciones de dos de los profesores. En sus interacciones ha habido diálogo, discusión y en algunos casos acuerdo. Concretamente en lo que respecta a la importancia de realizar procesos claros y explicativos, a las diferencias entre realizar una prueba y comunicarla y a la importancia de la introducción de software dinámico en el aula. En lo referente a la modificación de concepciones y a la forma de realizar pruebas de estos profesores, se puede decir que en el caso del profesor Xavi, sí que la ha habido, al descubrir la importancia de la claridad y brevedad al trabajar con pruebas. Ello le ha llevado a rectificar y a intentar desarrollar otro tipo de procesos más explicativos. También han cambiado las concepciones de VV sobre la importancia de comunicar el contenido de una prueba por lo que supone de reflexión para la propia persona que comunica. Las actividades que han suscitado más participación han sido las relativas al uso de software dinámico.

La moderadora ha ido cambiando sus intervenciones e implicación en el diálogo, llevada por la dinámica de los foros que ha propiciado sus actuaciones y la ha animado a presentar más preguntas de reflexión.

Cuarta edición, Grupo A.

El grupo A estaba formado por 6 profesores de los que han participado en los foros 5: Andi, FeAn, ReHe, CriBor y TeLo.

1º Foro.

El foro se abrió el 25 de septiembre pidiendo a los profesores que expusieran la forma en que habían resuelto la actividad "Resolución de problemas de probar", que comentaran las diferencias entre demostrar y comunicar la prueba y que analizaran y compararan con la suya la forma en que habían resuelto y comunicado sus pruebas los demás profesores. A los cinco días de abiertos los foros, AnDi presentó sus respuestas y comentarios con todo detalle. Esta profesora realizó una prueba deductiva que expresó en lenguaje simbólico, aunque, en esta misma intervención, comentó las ventajas del uso de software dinámico debido a sus características que permiten visualizar hipótesis y propiedades. FeAn y ReHe, además de exponer sus respuestas, mostraron su acuerdo con la forma de proceder de AnDi al realizar su demostración (FeAn: *"La demostración de "AnDi" es perfecta"*, ReHe: *"Me parece que lo expuesto por "AnDi" y "FeAn" es correcto"*). Ambos presentaron una prueba lógico-deductiva y FeAn manifestó que hay muchas formas de realizar la demostración pero que siempre hay que apoyarse en propiedades y relaciones matemáticas (*"Como decía la resolución de"AnDi" está muy bien realizada, aunque existen otros caminos, pero siempre basados en teoremas geométricos..."*). CriBor consideró interesante lo dicho por AnDi (*"Creo que lo propuesto por "AnDi" es muy útil"*), comentó cómo había resuelto la actividad y afirmó que cada uno resuelve un problema de este tipo según sus conocimientos y preparación ("*...podríamos llegar a la conclusión de que cada uno de nosotros resuelve según su "equipaje de supervivencia" en este caso geométrico...Creo que cada uno encara un ejercicio re-creando sus propios conocimientos*"). La moderadora solicitó aclaración referente al comentario en el que AnDi aludía a las mediciones y a los movimientos de las figuras geométricas como opciones válidas a la hora de realizar demostraciones (*"...también considero que hacer mediciones sería factible, y el movimiento de la figuras, también..."*). En la misma intervención planteó unas preguntas generales sobre cómo trabajar con procesos de prueba en el aula. ReHe fue el primero en responder las nuevas preguntas de la moderadora y lo hizo con detalle exponiendo la conveniencia de llevar a cabo diferentes procedimientos según a quién vaya dirigida la prueba (*"diría que depende del nivel escolar en donde se apliquen las mediciones, creo que para primaria e incluso en secundaria, aplicar mediciones y comprobarlas es una forma didáctica de aprender; en niveles mayores se le da más importancia al razonamiento abstracto que es, en definitiva, la herramienta metodológica que permitirá resolver problemas"*). En esa misma intervención también comentó las ventajas del software dinámico y cómo utilizarlo en el aula. TeLo respondió algunas de las últimas preguntas de la moderadora e hizo un repaso de lo dicho por los compañeros. Se mostró de acuerdo con lo dicho por CriBor referente a que en la forma de desarrollar pruebas de cada uno interviene el conocimiento previo (*"...pero como dice Cristina todo depende del bagaje de conocimientos que uno tenga a mano..."*). Hizo un comentario a la forma, no muy clara, de ReHe de presentar su demostración (*"Algunos como "ReHe" puso letras que traté de imaginarme donde estaban para seguir el razonamiento..."*). Ella misma respondió la pregunta de aclaración que la moderadora formuló a AnDi referente a la validez de efectuar mediciones (*"...creo que es positivo trabajar con mediciones, pero debemos tener en cuenta al armar la actividad, la edad del estudiante...*). A continuación, AnDi intervino de nuevo, mostrándose de acuerdo con TeLo y con los compañeros que afirmaban la existencia de diversas formas de proceder según el nivel de las personas a las que se dirigía el proceso (*"Estoy de acuerdo con vuestras resoluciones, es verdad existen diversos caminos para llegar a la resolución del problema, dependiendo del nivel de cada uno..."*). Ella misma se reiteró en esta opinión al responder la pregunta de aclaración que le había formulado la moderadora (*"...considero que el factor fundamental de usar este tipo de programas, es de poder ofrecer a nuestros alumnos, otra manera de resolver los problemas, y no tan solo centrarnos en hipótesis, sino mediante comprobaciones, si cabe la pena decirlo, físicamente, al arrastrar las figura, y poder comprobar los triángulos mediante mediciones*). En esta misma intervención, AnDi facilitó información a FeAn sobre la forma de obtener el programa Cabri, con el que debían trabajar (*"'FeAn' si tienes problemas con descargar el programa te recomiendo que vayas a las oficinas de Santillana en Quito,, donde me dieron una copia del programa demo, el cual pude descargar en otro ordenador*"). Finalmente, Telo intervino para responder las restantes preguntas de la moderadora.

Se puede observar que como consecuencia de las cuestiones que se plantearon en este primer foro y de las respuestas que dio a las mismas AnDi, se produjeron una serie de interacciones donde cada uno presentó sus respuestas y comentó las respuestas de los demás. La mayoría de los profesores se mostró de acuerdo en utilizar diversos procedimientos para desarrollar procesos de prueba, entre los que se incluyen efectuar mediciones y comprobaciones dependiendo de la edad y nivel de los interlocutores. También estuvieron a favor del uso de software dinámico para trabajar estos procesos con estudiantes. Sólo FeAn, aunque aceptó la existencia de diversas formas de actuar, consideró que en todas ellas se ha de proceder con rigor.

Con todas las intervenciones se formó la primera cadena conversacional que aparecerá en color verde en el gráfico representativo de las intervenciones e interacciones (Rey, Penalva y Llinares, 2004). Las interacciones que se produjeron y cómo algunos profesores se implicaron y respondieron fueron la causa de que la moderadora interviniera en más ocasiones, presentando nuevas preguntas que buscaban profundizar más en los temas que se trataban en este foro. Esas preguntas hicieron referencia a la conveniencia de trabajar procesos de prueba con alumnos de secundaria y al papel del software dinámico en dichos procesos. Sólo recibió respuesta de TeLo que, además, aportó información sobre las discusiones habidas en torno a la aceptación como pruebas válidas de las comprobaciones gráficas (*"Actualmente el matemático puro está enrolado en dicha corriente. Corriente , que en el ámbito de la enseñanza se viene cuestionando desde* *antes de 1995. Ya en ese año, en el IX CLAEM ,efectuado en Santiago de Chile ,Miguel de Guzmán se cuestionaba si se podía aceptar como demostración una comprobación gráfica"*).

A continuación se muestra la representación gráfica que visualiza las primeras interacciones producidas en este 1° foro.

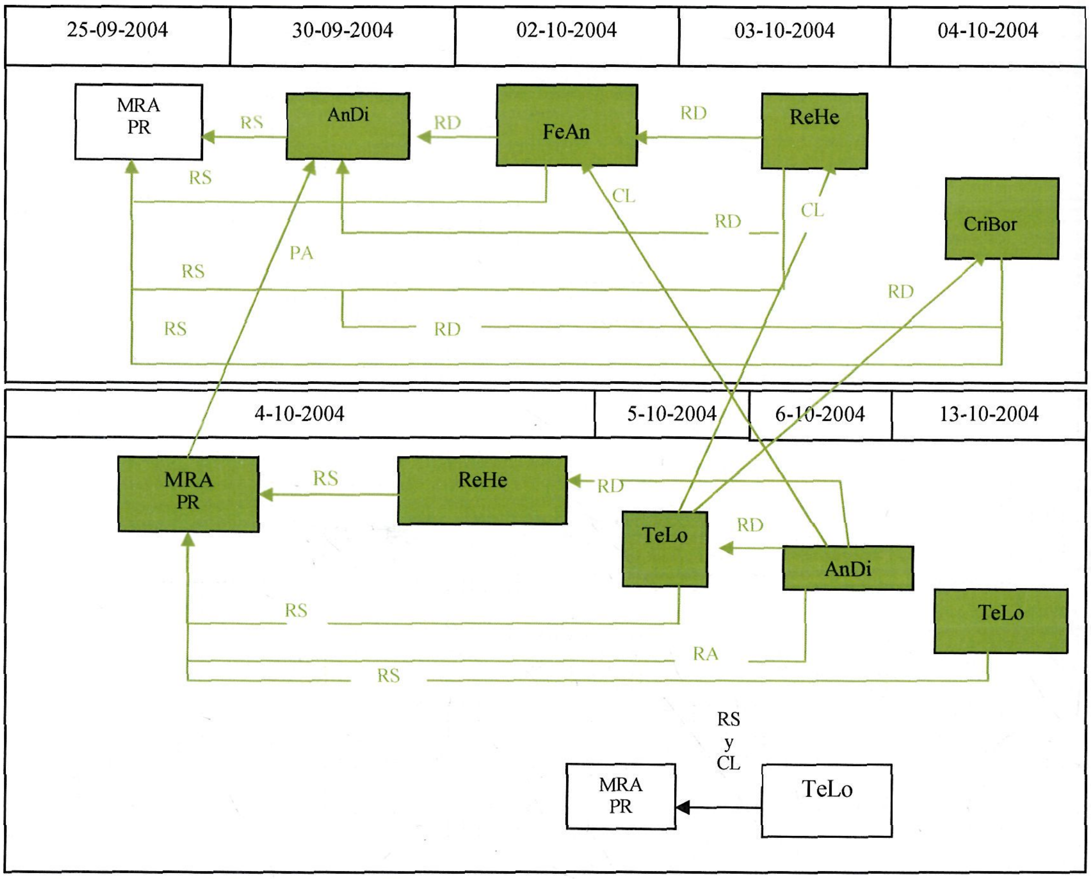


Figura 7. Actuaciones en el 1° Foro, 4ª Edición, Grupo A

Después de la poca respuesta obtenida a las últimas preguntas formuladas, la moderadora interesada en que los profesores reflexionaran sobre los temas ya propuestos, insistió con cuestiones más directas. Hubo respuesta de tres de las profesoras, AnDi, TeLo y CriBor. Las tres se limitaron a responder sin hacer ningún tipo de comentario a las respuestas de las compañeras, aunque expusieron sus argumentos razonadamente. Como en ocasiones anteriores, TeLo apoyó sus reflexiones sobre referencias de expertos como Piaget (*"Volviendo a las preguntas que efectúas, creo que no* *se pueden responder sin tener en cuenta la edad del educando y en ese momento tenemos que pensar en qué estadio de pensamiento se encuentra, cual es su ámbito socio cultural y si ha recibido las motivaciones adecuadas (J. Piaget)").*

Ante la intervención de AnDi sobre lo que consideraba demostración y lo que no, la moderadora pidió una aclaración que fue, además, una pregunta de reflexión para todos. Sólo respondió, muy brevemente, TeLo. Las interacciones que se produjeron aparecen recogidas en la siguiente gráfica.

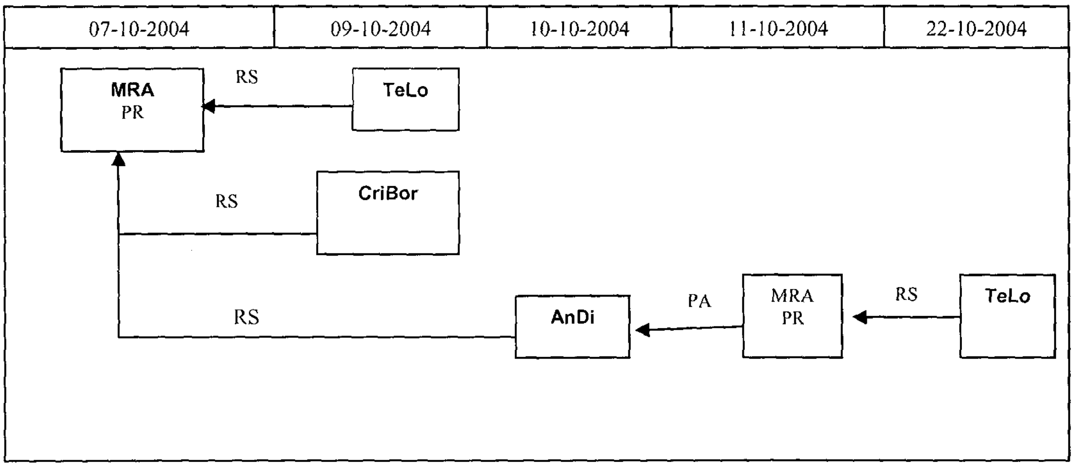


Figura 8. Actuaciones en el 1º Foro, 4ª Edición, Grupo A

Después de las intervenciones anteriores la moderadora consideró que se estaba llegando a resultados que podían ser interesantes para todos e intentó hacer que continuaran con su ejercicio de reflexión para ver si a través del diálogo y el intercambio de ideas, podían obtener conclusiones válidas para la práctica educativa. Para ello presentó otra pregunta de reflexión enlazando con los aspectos que se estaban desarrollando.

> *¿Cuál creéis que es la finalidad de realizar demostraciones en el aula con alumnos de secundaria?*
>
> *¿Qué beneficios podemos obtener de ello?*
>
> *¿El uso de herramientas dinámicas como Cabri puede ayudar a nuestros alumnos a realizar demostraciones?*
>
> *Con Cabri es relativamente sencillo realizar configuraciones geométricas, experimentar con ellas y realizar comprobaciones en casos particulares ¿podría esto confundir a nuestros estudiantes y hacerles pensar que comprobar es demostrar? ¿Hasta qué punto es importante que distingan entre una cosa y otra?*

Respondieron AnDi y TeLo. La moderadora hizo una pregunta de aclaración a TeLo sobre el significado de contraejemplo. TeLo respondió acompañando su respuesta de referencias y ejemplos (*"Según los libros de didáctica en educación matemática, o las investigaciones hechas en este campo por Argentinos en los congresos de Chivilcoy y luego de escuchar a Brousseau, Damore, Gagatsi ,etc. Un contraejemplo es exponer o pedir a los alumnos que enuncien un caso en que NO SE CUMPLA LA PROPIEDAD ENUNCIADA. Por ejemplo: TODA MATRIZ CUADRADA TIENE INVERSA, el alumno deberá deducir si esa proposición es verdadera o buscar un caso en el cual no se cumpla"*). La moderadora se mostró de acuerdo con su respuesta. Se muestra a continuación el grupo de interacciones que se produjeron:

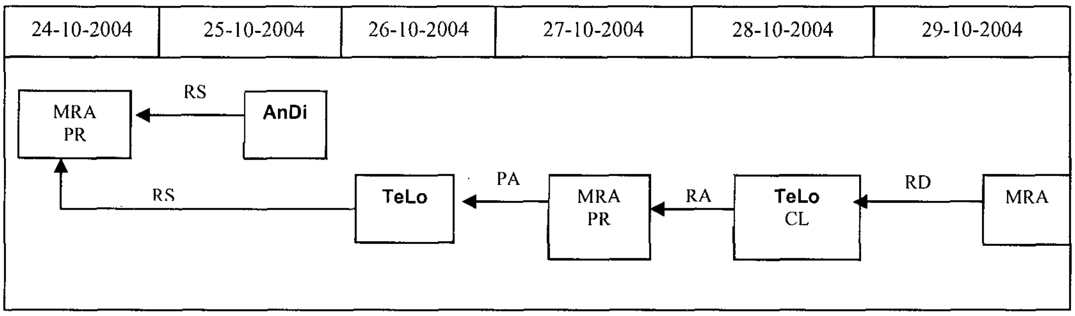


Figura 9. Actuaciones en el 1° Foro, 4ª Edición, Grupo A

Analizando lo anterior, se puede llegar a la conclusión, de que el mayor número de intervenciones se produjo al principio, cuando los profesores respondieron las preguntas con las que se abrió el foro. Es también en esas primeras intervenciones donde hubo interacción entre ellos. Argumentaron sobre lo expuesto por los compañeros, refrendaron e hicieron aclaraciones o aportaron información que consideraron interesante y al final hubo acuerdo en cuanto a la aceptación de diferentes formas de probar y a la importancia del software dinámico en el desarrollo de dichos procesos. Todo ello nos lleva a hablar de la existencia de una cadena conversacional formada por todas las interacciones a las que se ha hecho referencia.

Posteriormente el diálogo perdió fuerza y sólo continuaron en el foro tres profesoras, AnDi, TeLo y CriBor. Las tres respondieron las sucesivas preguntas que formuló la moderadora, pero ya no hubo ningún tipo de interacción. Es de destacar que aunque la actividad a la que se hace referencia en el foro, no estaba relacionada con el uso de software dinámico, los profesores participantes trataron el tema en él, lo que es una muestra del interés que suscitó el uso de este tipo de herramientas.

2º Foro.

En el segundo foro se plantearon cuestiones relativas al trabajo con software dinámico y a la introducción de éste en el desarrollo de procesos de prueba tanto dentro como fuera del aula.

> **2º Foro: Procesos de construcción y resolución de problemas de probar en contextos dinámicos.**
> Una vez resuelto el ejercicio de i-matemáticas y resueltos los nuevos planteamientos, participad contestando las siguientes preguntas y replicando a vuestros compañeros.
> El hecho de utilizar una herramienta dinámica como Cabri os ha ayudado a:
> - ¿Probar la igualdad pedida?
> - ¿Conjeturar nuevas relaciones?
> - ¿Comunicar la prueba realizada?
> - ¿Convencerías con más facilidad a otros de lo correcto de vuestra prueba?
> - ¿El uso de herramientas dinámicas hace que cambie tu forma de ver y resolver el problema de la actividad?
> - ¿En qué medida el software dinámico te ayuda a diseñar actividades del tipo i-matemáticas (actividades que requieren investigar)?
> - ¿Cómo las actividades del tipo i-matemáticas favorecen el desarrollo de procesos de conjeturar, probar y comunicar en el aula?

Se planteó la cuestión de cómo aprovechar las características del mismo para diseñar un tipo de actividades que favoreciera la investigación y el establecimiento de conjeturas. Todas las preguntas planteadas exigieron del profesor reflexión sobre las implicaciones del uso de software dinámico en el desarrollo individual de procesos de prueba y en su posterior comunicación.

El foro se abrió el día 25 de septiembre y la primera intervención se produjo el 4 de octubre. En este foro participaron las mismas personas que en el anterior. Fue CriBor la primera en intervenir, comentando que el uso de este tipo de software dinamizaba la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La moderadora le pidió un poco más de detalle sobre lo que quería decir, pero CriBor no respondió. Intervino a continuación TeLo que dio sus respuestas y expresó su acuerdo con lo dicho por CriBor y habló de una forma más amena de aprender que empuje al alumno a la búsqueda de respuestas y a la necesidad de demostrar (*"Los impulsa a la búsqueda, al cuestionamiento y a la demostración de las hipótesis"*). AnDi intervino para dar sus respuestas y, posteriormente, lo hizo de nuevo para expresar su acuerdo con lo dicho por TeLo referente a lo que se puede lograr cuando los estudiantes realizan demostraciones en el aula. Aunque hubo interacción entre estas tres profesoras para refrendar lo dicho por unas y otras, no se entabló ningún tipo de diálogo o discusión, con lo cual no se puede hablar de la existencia de cadenas conversacionales.

FeAn intervino para responder algunas de las preguntas que se plantearon en el foro, pero también para expresar su poco convencimiento con la introducción de estas herramientas en el aula, que podrían ser útiles para los estudiantes más pequeños que todavía tienen dificultades para trabajar con conceptos abstractos, pero que podrían no ser convenientes para los demás. La moderadora le cuestionó para que aclarara su postura y él se reiteró en lo dicho, aunque consideró que podría ser cuestión de educación y se mostró dispuesto a experimentar con sus alumnos (*"...no quiero decir que la lógica deductiva sea el único camino, fui formado de esa manera... es asunto de educación y hasta no tenerlo lógica y deductivamente demostrado, no te sientes satisfecho, a veces pienso si la pantalla me engaña... Creo que los dos caminos son complementarios, voy a hacer unos ensayos con mis alumnos de segundo curso y te lo cuento"*). AnDi respondió a FeAn hablándole de las posibilidades en el aula de programas como Cabri con características gráficas. A la vez le dio información sobre las ventajas en el aula de otros programas de características similares a las de Cabri y le facilitó una dirección donde encontrar gran variedad de ellos. TeLo hizo una aclaración a AnDi sobre un programa con el que habían trabajado en otro módulo y manifestó su acuerdo con FeAn en cuanto al tipo de educación que todos ellos recibieron y que los empuja a no aceptar nada que no haya sido demostrado de forma lógico-deductiva, pero también le habló de cómo, en la actualidad, se están empezando a cuestionar estos planteamientos. Le comentó, además, su esfuerzo por buscar las actividades más apropiadas para trabajar según edad y nivel de los estudiantes (*"'FeAn' vos hablas de cómo nos educaron. Lo que decis es totalmente real, nuestros profesores (principalmente hablo de los Argentinos) fueron educados bajo la teoría formalista y con todo el impetu del grupo Bourbaki, donde el máximo exponente fue Dieudonné. En la cual nada era aceptado salvo que fuera demostrado lógicamente. Hace ya unos años se comenzó a cuestionar que cosa se puede aceptar por deducción... debemos tener en cuenta la edad del educando , en qué nivel de sus estudios está y obrar en consecuencia... Yo misma me cuestiono cual de las actividades serían las más convenientes para alumnos de la facultad de Ingeniería. No sé si te pude aclarar el panorama, el debate está abierto"*).

A diferencia de lo ocurrido con el primer bloque de interacciones ya comentado, si consideramos el grupo de intervenciones e interacciones que se inició con las respuestas y opiniones de FeAn y finalizó con la intervención de TeLo, sí que se puede hablar de diálogo, discusión e intercambio de opiniones e información que, partiendo del cuestionamiento de la aceptación del uso de determinado software en el aula como herramienta para desarrollar procesos de prueba válidos, intentan llegar a conclusiones y resultados. FeAn, aunque al principio se mostró en desacuerdo, reflexionó sobre las posibles ventajas de su uso y terminó dispuesto a experimentar con él. ReHe intervino bastante tiempo después para presentar sus respuestas, pero no hizo ningún comentario sobre la polémica surgida en el foro.

Con la finalidad de mantener abierto el debate y de que los profesores se vieran obligados a responder cuestiones muy concretas, la moderadora planteó otras preguntas referentes a las capacidades que podrían desarrollar los alumnos al trabajar con procesos de prueba y cómo podría el software dinámico ayudar a desarrollar esas capacidades. Sólo respondió TeLo que hizo mención a las características dinámicas y visuales de Cabri. A continuación, la moderadora hizo comentarios sobre la complejidad de los resultados que se obtienen en la actualidad y que no permiten demostrar mediante procesos lógico-deductivos, como se ha hecho hasta ahora, e invitó a los profesores a reflexionar sobre ello. No obtuvo ninguna respuesta.

La moderadora hizo una nueva pregunta referente a cómo ayudar a los alumnos para que aprendieran con más facilidad y se sintieran más atraídos por las matemáticas. Sólo respondió CriBor que habló de introducir las características dinámicas de cierto software en el aula (*"Creo que el atractivo de las matemáticas pasa justamente por los aspectos dinámicos que podamos introducir, sobre todo y tal como opinaron los demás, en el caso de la escuela primaria y secundaria y esto se está extendiendo, también a la universidad. Mis alumnos, al menos, toman con más entusiasmo lo que les cuelgo en la plataforma que lo que les explico en clase. Nuevas formas de comunicación!!"*). La moderadora le preguntó sobre el tipo de material que utilizaba para trabajar con sus alumnos pero ya no obtuvo respuesta.

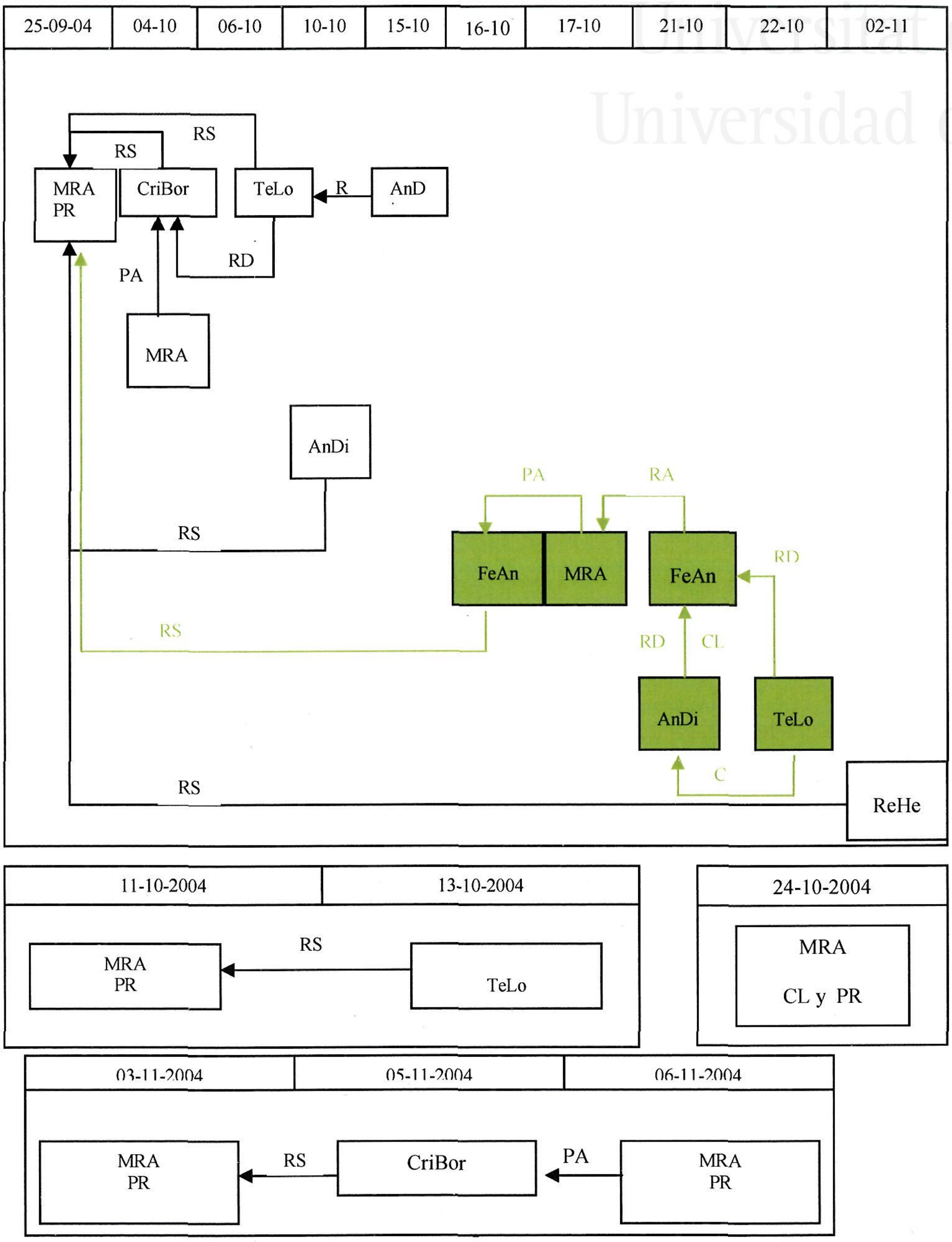


Figura 10. Actuaciones en el 2º Foro, 4ª Edición, Grupo A

Con fecha 28 de septiembre la moderadora abrió el tercer foro en el que no se produjo ninguna intervención. El tercer foro hacía referencia a la actividad "Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas". Con la introducción de esta actividad se pretendía que los profesores reflexionaran "en voz alta" sobre los procesos que creían que debían ser considerados como pruebas válidas. Estas cuestiones, aunque no formaban parte del tema que se pretendía tratar en el segundo foro, surgieron en él de manera natural en las argumentaciones de los profesores, sobre todo al hacer referencia a los tipos de procesos de prueba que se podían desarrollar con el uso de software dinámico. Esta pudo ser la causa de que los profesores, dado el exceso de trabajo que les ocasionaban los diferentes módulos en los que estaban implicados a la vez, optaran por no responder, considerando haber debatido ya sobre ello.

Del análisis de lo acontecido en estos dos foros se desprende que lo que más ha interesado a estos profesores ha sido el desarrollo de diferentes formas de probar en el aula y la utilidad y conveniencia del uso de herramientas dinámicas. Estos temas han estado presentes en las dos cadenas conversacionales que se han producido.

Los profesores de este grupo manifestaron haber descubierto al participar en el módulo unas herramientas que han cambiado su visión como matemáticos, y sobre todo como docentes, de la forma de trabajar con procesos de prueba. Pero esta conclusión, excepto en el caso de FeAn, no parece haber tenido nada que ver con la participación en estos foros, sino como consecuencia de haber realizado las tareas propuestas en el módulo. A través de su participación en los foros debatieron sobre ello, intercambiaron puntos de vista y llegaron a acuerdos que reforzaron sus concepciones. En el caso de FeAn las argumentaciones de los compañeros y las preguntas directas de la moderadora le hicieron reflexionar sobre los tipos de procesos a desarrollar según las personas con las que se trabajara. Aunque continuó mostrándose reacio a utilizar herramientas dinámicas, al menos aceptó plantearse su uso y experimentar para obtener formas de sacar un rendimiento de ellas.

Cuarta edición, Grupo B.

Los profesores que formaban parte de este grupo eran 4, y en los foros participaron los cuatro. Las siglas por las que los identificamos son: OB, JC, AT y RR.

1º Foro.

La primera cadena conversacional surgió de las respuestas de OB a las cuestiones de inicio del foro. Se estableció una discusión sobre comprobar y probar, la moderadora pidió aclaraciones sobre los dos conceptos y cuando se expuso claramente la diferencia entre uno y otro se pasó a hablar de la conveniencia o no de realizar comprobaciones antes de pasar a demostrar utilizando argumentos lógico-deductivos. Surgió la discusión entre los profesores OB y JC, ya que el primero no rechazaba por completo las comprobaciones en el trabajo con pruebas en el aula (*"estoy de acuerdo en que hacer medidas no es una demostración. Sin embargo, me parece que sí es una forma, en geometría, de ofrecer a los estudiantes la posibilidad de comprobación. Además de permitirles desarrollar otras habilidades, como la precisión, el orden, la limpieza, la motricidad, la concentración, etc."*), mientras que el segundo no lo consideraba oportuno en ningún momento ("*nunca hubiera tratado de resolverlo con regla y compás o un graduador, creo que son más herramientas de dibujo técnico. Pienso que las herramientas que se utilizan en geometría son los teoremas y razonamientos y los estudiantes deberían basarse en esas para resolver los problemas. Aunque suene radical, no creo que se debería 'Invertir tiempo' en la comprobación con aparatos de dibujo, ya que éstos son susceptibles a errores y en ese caso se depende de la destreza del dibujante, sino más bien centrarse en los datos que disponemos y los teoremas que podemos aplicar para su solución"*). JC discrepó con la demostración de OB y así lo manifestó (*"Te comento que por más que veo el ejercicio no veo los dos isósceles de los que hablas"*). OB le respondió aclarándole lo que había hecho. La profesora AT intervino estableciendo también las diferencias entre comprobar y probar y considerando que para probar podía ser conveniente utilizar en unas ocasiones argumentos deductivos y en otras inductivos y ser ambas formas de proceder igualmente válidas (*"inclusive hay que utilizar los argumentos deductivos, y a veces los argumentos inductivos para la demostración de algo"*). Aunque cada profesor mantuvo su posición, sus intervenciones e interacciones en el foro sirvieron para que reflexionaran, discutieran y argumentaran intentando convencer al compañero.

Con el fin de obtener más información sobre las concepciones de los profesores y hacerles reflexionar sobre ellas, la moderadora planteó nuevas preguntas cada vez más concretas, que exigían una respuesta más precisa y profunda. En sus respuestas AT habló de otra característica de la prueba, la de permitir descubrir concepciones erróneas (*"...con la comprobación, la demostración, la argumentación y por qué no con el dibujo, se logra ver no solo la comprobación sino los errores posibles que se pueden dar, es decir uno cree que está en lo correcto o en la veracidad del caso y resulta que al argumentarlo, al probarlo, no necesariamente resulte así, · 'vale, entonces, la prueba para ver los errores y no solo para verlos sino para corregirlos'"*).

Un mes después de la apertura del foro intervino otro profesor, RR, que no había participado en las discusiones anteriores y que lo hizo ahora indicando cómo realizaría él su demostración. En ella dedujo propiedades directamente de las imágenes y la moderadora le pidió que aclarase un poco más cómo había realizado realmente su prueba. RR respondió ratificándose en ello (*"He considerado que según la gráfica, los triángulos son semejantes y es por eso que lo afirmo en la hipótesis, posteriormente efectúo las relaciones necesarias para llegar a comprobar la tesis buscada."*). JC intervino mostrando su desacuerdo con RR por obtener conclusiones directamente de un gráfico (*"No estoy de acuerdo con "RR" en que mediante el gráfico se puedan sacar datos como verdaderos (ya "OB" comentó que el gráfico no era exacto por ejemplo)"*) y completó, a la vez, sus respuestas a las cuestiones de apertura del foro.

Al principio, las intervenciones en el foro se desarrollaron con celeridad, dejando pasar poco tiempo entre una intervención y otra. El debate se centró en cuestiones relativas a los procedimientos que debían ser considerados como auténticos procesos de prueba. A continuación se muestra la representación gráfica de las intervenciones e interacciones producidas, con los elementos que determinan la cadena conversacional, (Rey, Penalva y Llinares, 2004), en color verde.

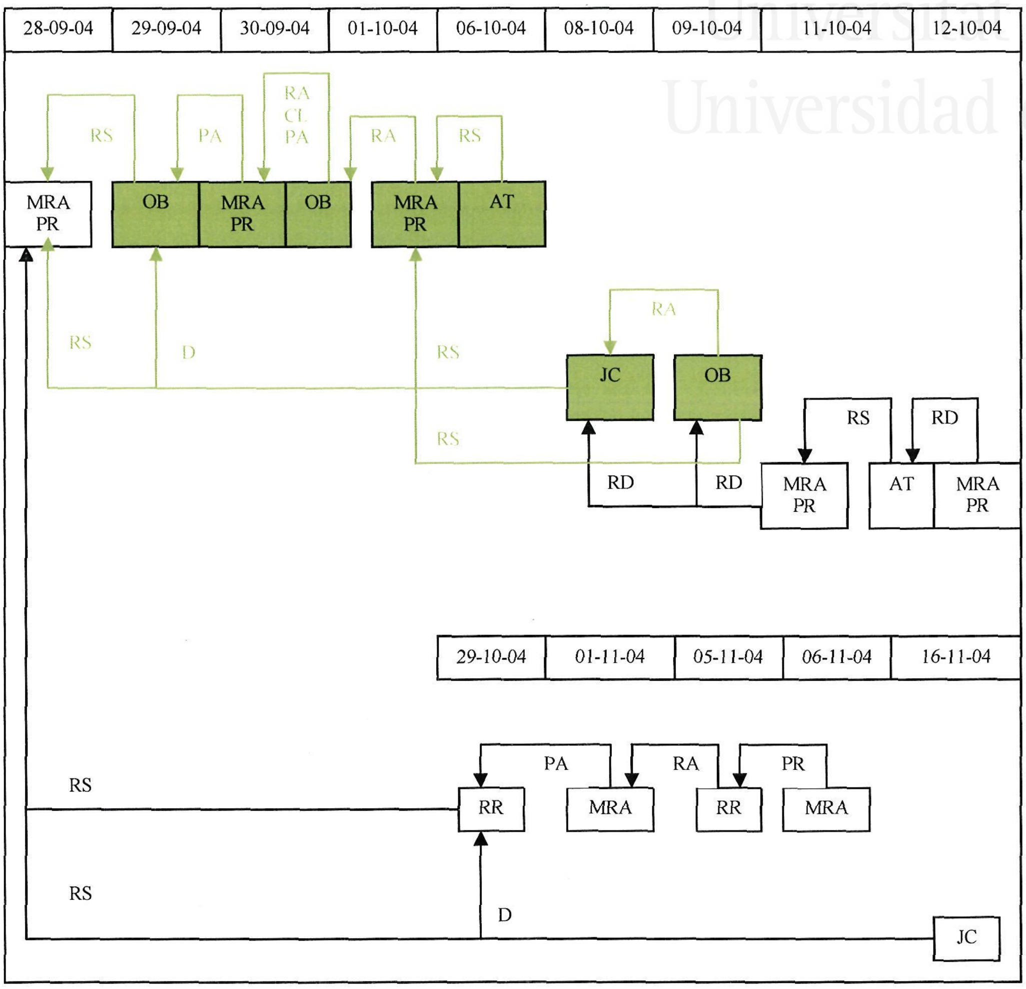


Figura 11. Actuaciones en el 1º Foro, 4ª Edición, Grupo B

2º Foro.

En el 2º foro se hizo referencia al ejercicio de i-matemáticas en el que se resolvió una actividad en la que, a través de la experimentación y la visualización que permite el software dinámico, hay que descubrir una relación y demostrarla. Se plantearon, asimismo, cuestiones referentes a las posibles ventajas de dicho software cuando se utiliza para trabajar procesos de prueba y para diseñar actividades que requieran investigar, conjeturar y probar en el aula.

En este foro participaron los profesores OB, RR y JC. En este caso las intervenciones se distanciaron más en el tiempo. El foro se abrió el 28 de septiembre y la primera intervención se produjo el 6 de octubre. La segunda persona en intervenir no lo hizo hasta el 30 de octubre.

OB respondió las preguntas de inicio del foro y la moderadora le pidió que expusiera directamente la igualdad que había obtenido. OB respondió presentando dicha igualdad y demostrándola a la vez. La moderadora se mostró de acuerdo con él. RR respondió algunas de las preguntas de inicio del foro y refrendó lo dicho por OB referente a la importancia del software dinámico a la hora de resolver actividades que requieran investigar y descubrir relaciones. La moderadora siguió planteando cuestiones relacionadas con el tema intentando hacer reflexionar con más profundidad a los profesores sobre la relación entre demostración y software dinámico. Primero obtuvo respuestas parciales de RR y finalmente fue JC quien respondió reafirmando su postura en relación con la no conveniencia de introducir el software dinámico en los procesos de prueba porque pueden dificultar, incluso, la capacidad para razonar. La moderadora cuestionó su respuesta y le planteó preguntas para hacerle ahondar más en la cuestión, pero ya no recibió contrarréplica por parte del profesor.

En este foro no se produjo ninguna cadena conversacional. Los profesores se limitaron a contestar lo que se proponía al principio del foro, en algún caso de manera parcial, sin interactuar entre ellos, excepto para refrendar alguna intervención previa de otro profesor. La moderadora, como en anteriores ocasiones, intentó profundizar más en los temas planteando más preguntas, pero sin éxito a la hora de fomentar el debate entre ellos, a pesar de haber respuestas encontradas.

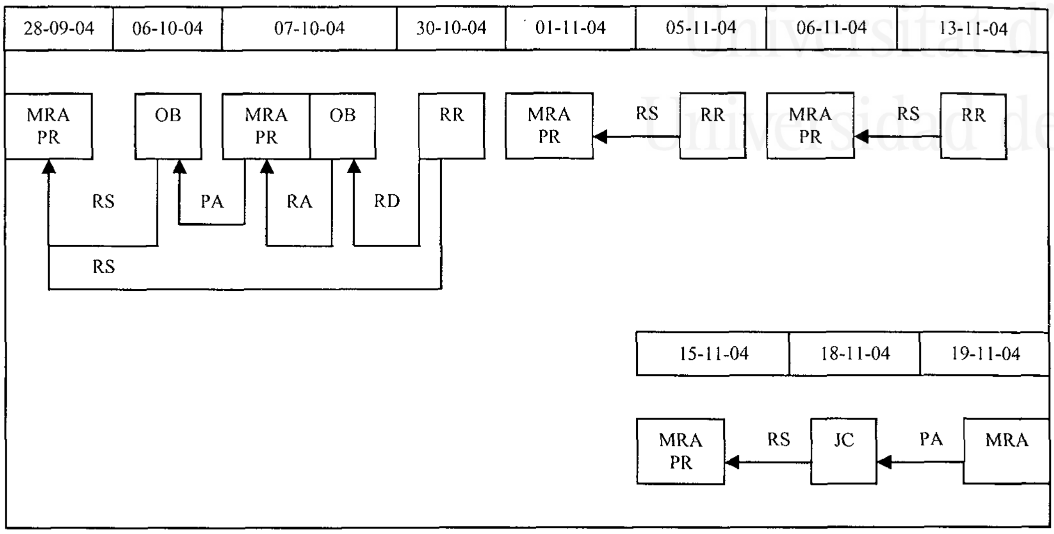


Figura 12. Actuaciones en el 2º Foro, 4ª Edición, Grupo B

3º Foro.

En el 3º foro se debatió sobre la actividad “Comprobar, probar y comunicar en la resolución de problemas” y se volvió a insistir en el tema de lo que podía ser considerado como prueba matemática válida y lo que no. Sólo intervinieron OB y RR. No se produjo ninguna interacción. Los profesores se limitaron a responder, reiterándose en lo que ya habían dicho anteriormente. La moderadora hizo nuevas preguntas intentando obtener más reflexiones. Sólo respondió RR. Ante un término algo confuso la moderadora le pidió aclaración pero ya no obtuvo respuesta.

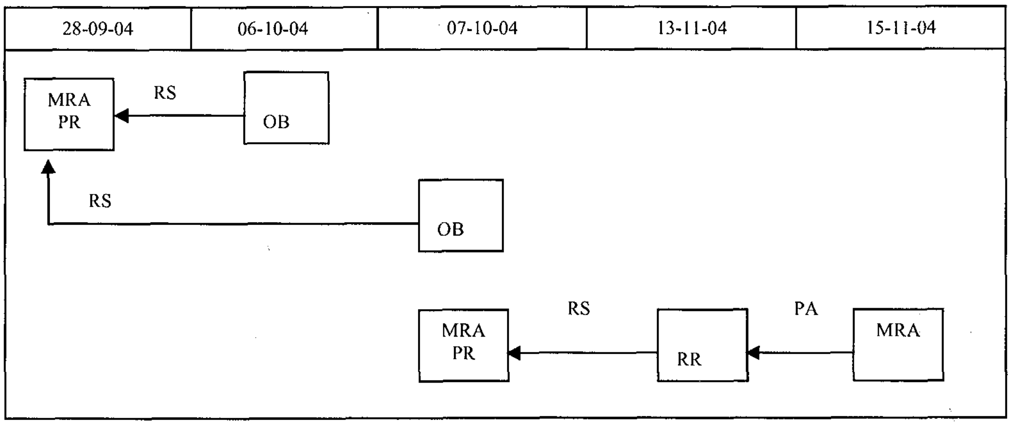


Figura 13. Actuaciones en el 3º Foro, 4ª Edición, Grupo B

Del análisis de las interacciones de los profesores de este grupo en los foros, se desprende que el tema que ha generado más discusiones e interacciones ha sido el referente a las diferencias entre comprobar y probar y a la conveniencia de realizar comprobaciones previas al desarrollo del proceso de demostración. En todos los profesores ha habido acuerdo, excepto en el caso de uno de ellos, JC que ha defendido con argumentos su postura contraria a esta forma de proceder. Otro tema debatido ha sido el de la incorporación de software dinámico a los procesos de prueba e igual que en el caso anterior, todos los profesores, excepto JC, se han mostrado a favor del uso de este software. A pesar de la discrepancia no se llegó a entablar una verdadera discusión sobre el tema y los profesores mantuvieron sus posturas sin poderse, por ello, hablar de cambio en las concepciones de los profesores sobre la prueba, sino más bien de refuerzo de las mismas.

VI.1.5. Resumen.

Del análisis realizado sobre la forma de participar los profesores en los foros de debate virtual se desprende que los aspectos que han suscitado más intervenciones, y parece ser que un mayor interés, han sido: las diversas formas de proceder a la hora de realizar pruebas y la introducción de software dinámico para demostrar, ya fuera dentro o fuera del aula. En las interacciones producidas, los profesores han reflexionado, argumentado y discutido, llegando en algún caso a acuerdo, como en el grupo A de la cuarta edición, y sin llegar a acuerdo, como en el grupo B de la misma edición. También se ha llegado a acuerdos en el grupo B de la segunda edición en lo que concierne a la importancia de realizar pruebas más claras y explicativas y a la diferencia entre realizar un proceso de prueba y comunicarlo. Las actividades han influido en el número de intervenciones e interacciones, no por su diseño sino por los temas que se trataban en ellas. En la Figura 14 se recoge el número de intervenciones y de cadenas conversacionales que se han producido en cada foro, grupo y edición.

Los profesores intervinieron mayoritariamente poco después de abrirse los foros, quizás por la novedad que ello suponía y por verse un poco obligados a participar respondiendo las cuestiones que se les planteaban, por considerarlo, como realmente lo era, un ejercicio necesario para obtener una mejor calificación final. La mayoría de ellos se limitaron a exponer el trabajo realizado al resolver las actividades. En pocas ocasiones refrendaron las argumentaciones de los demás o hicieron aclaraciones, a no ser que les fuera solicitado explícitamente por la moderadora o por algún compañero. En muy pocos casos aportaron información relevante que pudiera repercutir en la práctica profesional de todos. Sólo en el caso de dos profesores (uno del grupo B de la segunda edición y otro del grupo A de la cuarta), ocurrió lo contrario, al informar sobre sus experiencias en el aula utilizando un software dinámico específico y distinto del que se presentaba en el módulo y al informar sobre las discusiones que aparecen entre los matemáticos sobre nuevas formas de demostrar.

Es de destacar el papel de algunos profesores (VV del grupo B de la segunda edición y AnDi y TeLo del grupo A de la cuarta edición). Estos profesores demostraron gran interés y disposición plena a compartir sus experiencias y terminaron, por ello, empujando a intervenir a algún compañero más. Las concepciones sobre la prueba de estos profesores se reforzaron en lo que concierne a la importancia de la introducción de software dinámico para desarrollar pruebas en el aula. En algunos casos se modificaron en determinados aspectos. Por ejemplo, Xavi, profesor del grupo B de la segunda edición, reconoció la importancia de desarrollar pruebas claras y explicativas. VV, del mismo grupo y edición descubrió las posibilidades de la prueba como instrumento para comunicar contenido matemático también para el que la transmite. FeAn, profesor del grupo A de la cuarta edición, reconoció determinadas cualidades en las herramientas dinámicas que podrían favorecer el desarrollo de pruebas en el aula, y, aunque con reticencias, se mostró dispuesto a experimentar con ellas.

		2ª Edición		**4ª Edición**	
Grupo A		**Nº de intervenciones**	**Nº de cadenas conversacionales**	**Nº de intervenciones**	**Nº de cadenas conversacionales**
	1º Foro	7	0	23	1
	2ª Foro	5	0	17	1
	3º Foro	8	0	-	-
Grupo B		**Nº de intervenciones**	**Nº de cadenas conversacionales**	**Nº de intervenciones**	**Nº de cadenas conversacionales**
	1º Foro	11	2	15	1
	2º Foro	16	2	11	0
	3º Foro	11	3	5	0

Figura 14. Número de intervenciones y de cadenas conversacionales