



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

**Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.**

**Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.**

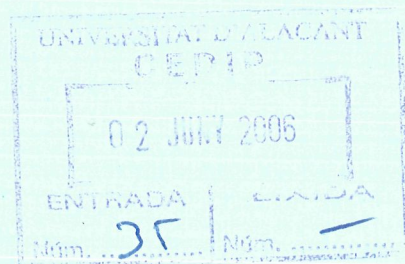
**[Ir directamente al índice](#)**

**Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriores**

**Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'índex al principi i final de cadascun dels capítols .**

**[Anar directament a l'índex](#)**

**Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriors.**



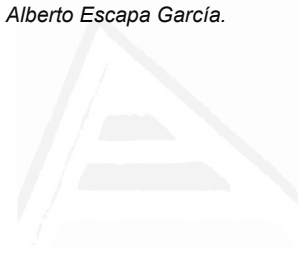
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

NUEVAS CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO  
HAMILTONIANO DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA:  
INFLUENCIA DEL NÚCLEO INTERNO SÓLIDO Y DE  
LA TRIAXIALIDAD EN LAS NUTACIONES LIBRES Y  
FORZADAS

LUIS ALBERTO ESCAPA GARCÍA

DIRECTORES: DR. JUAN GETINO FERNÁNDEZ  
DR. JOSÉ MANUEL FERRÁNDIZ LEAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
EN MATEMÁTICAS

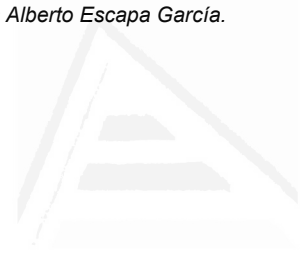


Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

T 2006/69

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Prólogo

Esta tesis está dividida en cinco capítulos. En el primero se introduce el problema de la rotación de la Tierra, se desarrollan los métodos propios del formalismo hamiltoniano y se resumen los resultados obtenidos en la Investigación. Los cuatro capítulos restantes incluyen las cuatro publicaciones:

- I.- **Escapa, A.**, J. Getino y J. M. Ferrándiz, Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model, *Journal of Geophysical Research*, 106, 11387–11397, 2001.
- II.- Getino, J., A. B. González y **A. Escapa**, The rotation of a non-rigid, non symmetrical Earth II: free nutations and dissipative effects, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 76, 1–21, 2000.
- III.- Getino, J., J. M. Ferrándiz y **A. Escapa**, Hamiltonian theory of the non-rigid Earth: semidiurnal terms, *Astronomy & Astrophysics*, 370, 330–341, 2001.
- IV.- **Escapa, A.**, J. Getino y J. M. Ferrándiz, Indirect effect of the triaxiality in the Hamiltonian theory for the rigid Earth nutations, *Astronomy & Astrophysics*, 389, 1047–1054, 2002.

Dada la diversidad de estilos editoriales que presentaban las revistas donde se publicaron los artículos, he creído conveniente unificar el formato de todos ellos, homogeneizando la presentación de los mismos por lo que ha sido necesario realizar alguna modificación tipográfica o de estilo sobre las versiones originales. De igual forma, y para facilitar su consulta, todas las referencias bibliográficas se han agrupado en una única sección. Por último, se incluye un apéndice donde aparece la primera página de cada uno de los artículos tal y como fueron publicados.

Finalmente, quisiera reconocer la inestimable labor de los doctores Juan Getino y José Manuel Ferrándiz, sin cuya dirección científica esta Investigación no hubiera sido posible. Tampoco puedo olvidar los valiosos consejos y las enriquecedoras discusiones desarrolladas con muchos compañeros, y el

aliento de mis amigos, que, sin duda, han sido de gran ayuda en la realización de este trabajo.

El agradecimiento a mi familia más cercana debe ser de otro tipo. Creo que nunca llegaré a ser consciente de la importancia de su apoyo en estos años, aunque sí que sé que ha sido y será el único incondicional. Es más de lo que merezco.

*San Vicente, España, mayo de 2006*  
*L.A.E.G.*



# Contenidos

|          |                                                                              |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>                                                          | <b>1</b>   |
| 1.1      | La rotación de la Tierra . . . . .                                           | 1          |
| 1.1.1    | Preliminares . . . . .                                                       | 1          |
| 1.1.2    | Rotaciones en el espacio afín tridimensional . . . . .                       | 4          |
| 1.1.3    | Los sistemas de referencia celeste y terrestre . . . . .                     | 9          |
| 1.1.4    | El problema de la rotación de la Tierra . . . . .                            | 14         |
| 1.1.5    | Precesión, nutación, movimiento polar y duración del día . . . . .           | 19         |
| 1.1.6    | No uniformidad del movimiento de rotación de la Tierra                       | 25         |
| 1.2      | Estudio de la rotación mediante el formalismo hamiltoniano .                 | 30         |
| 1.2.1    | Mecánica hamiltoniana . . . . .                                              | 32         |
| 1.2.2    | Energía cinética, potencial y momentos generalizados .                       | 41         |
| 1.2.3    | Formulación hamiltoniana de la rotación de la Tierra .                       | 59         |
| 1.3      | Contribuciones de esta Investigación . . . . .                               | 104        |
| 1.3.1    | Objetivos . . . . .                                                          | 106        |
| 1.3.2    | Conclusiones . . . . .                                                       | 108        |
| <b>2</b> | <b>Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model</b> | <b>111</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                                       | 111        |
| 2.2      | Basic Assumptions and Preliminary Relations . . . . .                        | 117        |
| 2.2.1    | Tensors of Inertia . . . . .                                                 | 118        |
| 2.2.2    | Angular Momenta . . . . .                                                    | 120        |
| 2.3      | Canonical Expression of the Kinetic Energy . . . . .                         | 121        |
| 2.3.1    | Formulation in Andoyer Variables . . . . .                                   | 121        |
| 2.3.2    | A Nonsingular Canonical Set of Variables . . . . .                           | 124        |
| 2.4      | Solution in Nonsingular Variables . . . . .                                  | 126        |
| 2.4.1    | First Solutions . . . . .                                                    | 127        |
| 2.4.2    | Solution for $Y$ . . . . .                                                   | 128        |
| 2.5      | Polar Motion . . . . .                                                       | 129        |
| 2.6      | Discussion . . . . .                                                         | 132        |

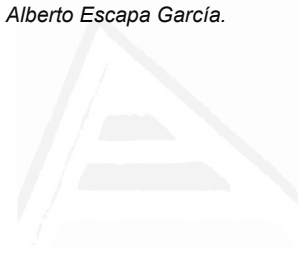


|          |                                                                             |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.6.1    | Comparison With Numerical Solutions . . . . .                               | 132        |
| 2.6.2    | Estimation of the Effect of the SIC . . . . .                               | 134        |
| 2.6.3    | Comparisons with Mathews et al. (1991a) Approach . . . . .                  | 135        |
| <b>3</b> | <b>The rotation of a non-rigid, non-symmetrical Earth II</b>                | <b>139</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                                      | 139        |
| 3.2      | Hamiltonian for Free Motion in Andoyer variables . . . . .                  | 140        |
| 3.2.1    | Preliminary assumptions . . . . .                                           | 140        |
| 3.2.2    | Formulation in Andoyer variables . . . . .                                  | 141        |
| 3.3      | Canonical Formulation of Dissipative Forces . . . . .                       | 143        |
| 3.3.1    | Dissipative coupling torque . . . . .                                       | 143        |
| 3.3.2    | Generalized Forces . . . . .                                                | 143        |
| 3.3.3    | Canonical Formulation . . . . .                                             | 145        |
| 3.3.4    | Generalized Equations of Motion . . . . .                                   | 147        |
| 3.4      | Canonical Transformation . . . . .                                          | 147        |
| 3.4.1    | The Set of Non-Singular Variables . . . . .                                 | 147        |
| 3.4.2    | Hamiltonian in Non-Singular Variables . . . . .                             | 148        |
| 3.4.3    | Transformation of the Generalized Forces . . . . .                          | 149        |
| 3.4.4    | Generalized Equations of Motion . . . . .                                   | 150        |
| 3.4.5    | First Results . . . . .                                                     | 150        |
| 3.4.6    | System of Equations . . . . .                                               | 151        |
| 3.5      | Polar Motion . . . . .                                                      | 151        |
| 3.5.1    | Non-Singular Variables . . . . .                                            | 151        |
| 3.5.2    | System of Equations . . . . .                                               | 152        |
| 3.5.3    | Free Frequencies of Polar Motion . . . . .                                  | 153        |
| 3.6      | Discussion and Numerical Estimates . . . . .                                | 153        |
| <b>4</b> | <b>Hamiltonian theory for the non-rigid Earth: Semidiurnal terms</b>        | <b>161</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                      | 161        |
| 4.2      | The symmetrical two-layered Earth model: An overview . . . . .              | 162        |
| 4.2.1    | Canonical variables and kinetic energy . . . . .                            | 163        |
| 4.2.2    | Dissipative coupling torque . . . . .                                       | 165        |
| 4.2.3    | Hamiltonian for the symmetrical Earth and first order integration . . . . . | 166        |
| 4.2.4    | Unperturbed solutions . . . . .                                             | 167        |
| 4.3      | Effect of the triaxiality of the Earth . . . . .                            | 171        |
| 4.3.1    | Triaxial potential $V_{Tr}$ . . . . .                                       | 171        |
| 4.3.2    | Triaxial kinetic energy $T_{Tr}$ . . . . .                                  | 172        |
| 4.3.3    | Hamiltonian $H_{Tr}$ and first order integration . . . . .                  | 173        |
| 4.4      | Generating function $W_{Tr}$ and first simplifications . . . . .            | 173        |

**CONTENIDOS**

ix

|          |                                                                          |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.1    | Auxiliary integrals . . . . .                                            | 174        |
| 4.4.2    | Generating function . . . . .                                            | 177        |
| 4.5      | Forced Nutations . . . . .                                               | 177        |
| 4.5.1    | Nutations of the Andoyer plane . . . . .                                 | 178        |
| 4.5.2    | Nutations of the figure plane . . . . .                                  | 179        |
| 4.5.3    | Comparison with the rigid Earth results of Kinoshita<br>(1977) . . . . . | 179        |
| 4.5.4    | Reference to Greenwich prime meridian . . . . .                          | 182        |
| 4.6      | Nutation Series . . . . .                                                | 182        |
| <b>5</b> | <b>Indirect effect of the triaxiality</b>                                | <b>187</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .                                                   | 187        |
| 5.2      | Torque-free motion . . . . .                                             | 190        |
| 5.3      | Disturbing function in terms of action-angle variables . . . . .         | 191        |
| 5.4      | Generating function . . . . .                                            | 192        |
| 5.5      | Nutations of the fundamental planes . . . . .                            | 195        |
| 5.5.1    | Nutations of the Andoyer plane . . . . .                                 | 196        |
| 5.5.2    | Nutations of the equatorial plane . . . . .                              | 197        |
| 5.5.3    | Nutations of the plane perpendicular to the rotational<br>axis . . . . . | 197        |
| 5.6      | Numerical results . . . . .                                              | 199        |
|          | <b>Referencias</b>                                                       | <b>207</b> |
|          | <b>Apéndice</b>                                                          | <b>217</b> |



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 1

## Introducción

Este capítulo comienza dando una visión general del movimiento de rotación de la Tierra, que muestra la unidad temática de las investigaciones abordadas posteriormente, introduciendo el problema tanto desde una perspectiva matemática como observacional. A continuación, se exponen los métodos y técnicas fundamentales en los que se basa el formalismo hamiltoniano para el estudio de la rotación, prestando una especial atención a la construcción de las fuerzas canónicas y de los diferentes conjuntos de variables utilizados en los capítulos posteriores. También se incluye un apartado en el que se exponen las líneas maestras para calcular las nutaciones libres y las nutaciones forzadas de un modelo de Tierra no rígido, formado por varias capas. Finalmente, se concluye con una sección en la que se resumen los resultados y las conclusiones alcanzadas en esta Investigación.

### 1.1 La rotación de la Tierra

#### 1.1.1 Preliminares

La Mecánica Celeste trata, entre otros, el problema de predecir el movimiento de la Tierra en el Sistema Solar. Este movimiento es debido, en parte, a las fuerzas gravitatorias que el Sol, la Luna y los planetas ejercen sobre la Tierra. Desde el punto de vista de la Mecánica este estudio se reduce a la integración de un cierto conjunto de ecuaciones diferenciales, establecidas mediante la consideración de distintas hipótesis relativas al espacio, al tiempo y a la naturaleza de los cuerpos y sus interacciones.

El marco teórico newtoniano junto con la teoría de la gravitación de Newton, esto es, la Mecánica Celeste newtoniana, conforma uno de los posibles conjuntos de axiomas y leyes de los que es posible derivar las ecuaciones

diferenciales del movimiento. Las soluciones obtenidas a partir de estas ecuaciones han sido confrontadas durante años con las observaciones disponibles para fenómenos tan diversos como, por ejemplo, el propio movimiento de la Tierra, las libraciones de la Luna o las mareas. Esta comparación ha mostrado que en la mayor parte de los casos la diferencia entre las observaciones y las soluciones permanece dentro de los umbrales permitidos por los errores inherentes a los métodos de observación, a los que casi siempre hay que añadir los derivados de las simplificaciones matemáticas necesarias para obtener las soluciones.

No obstante, existen problemas particulares como el del avance del perihelio de Mercurio que escapan de las posibilidades de predicción de la Mecánica Celeste newtoniana; mostrando el alcance limitado de la misma y, por lo tanto, obligando a establecer otro marco teórico u otra teoría más generales capaces de explicar estos fenómenos y, por supuesto, todos los ya explicados por la Mecánica Celeste newtoniana.

El marco teórico relativista junto con la teoría de la gravitación de Einstein constituye otro posible conjunto de axiomas y leyes con los que describir el movimiento de los cuerpos celestes que responde a los requerimientos anteriores. La estructura conceptual y matemática que subyace en el marco y las teorías relativistas es mucho más complicada que en el caso newtoniano, lo que dificulta enormemente su aplicación directa en la resolución de los problemas clásicos de la Mecánica Celeste.

Sin embargo, las soluciones de las ecuaciones del movimiento obtenidas en este marco pueden ser aproximadas por las soluciones de las correspondientes ecuaciones establecidas en el marco newtoniano; esta aproximación es tanto mejor cuanto más lentos sean los movimientos de los cuerpos bajo estudio, es decir, su velocidad debe ser pequeña en comparación con la velocidad de la luz en el vacío, y cuanto más débiles sean los campos gravitatorios que afectan a tales cuerpos. Estas dos condiciones se verifican para la mayoría de los cuerpos del Sistema Solar, lo que justifica que la Mecánica Celeste newtoniana siga siendo utilizada en estos estudios, pues proporciona predicciones suficientemente precisas para muchos de los problemas astrodinámicos del Sistema Solar.

Aun así, en algunas situaciones particulares es preciso considerar los efectos relativistas total o parcialmente como, por ejemplo, en la definición de los sistemas de referencia astronómicos, en el modelado de los procesos de reducción de las observaciones o en el ya mencionado avance del perihelio de Mercurio. En ambos casos, un tratamiento compatible con la precisión que proporcionan en la actualidad las técnicas astrométricas debe estar basado en el marco relativista (Soffel et al. 2003). Esto se logra utilizando el denominado formalismo post-newtoniano (véanse, por ejemplo, Soffel 1989,

Brumberg 1991), que aproxima las teorías relativistas de la gravitación en el caso de campos débiles y movimientos lentos, situación que sucede en el Sistema Solar. No obstante, a pesar de las simplificaciones que introduce la aproximación post-newtoniana, la formulación completa en este marco de problemas tan importantes como el de la rotación de los cuerpos celestes sigue siendo todavía una cuestión abierta (Soffel y Klioner 2005).

Recordemos que el espacio utilizado en la Mecánica Celeste newtoniana es un espacio afín real tridimensional, cuyo espacio vectorial asociado es euclídeo. Consideremos en este espacio un cuerpo o sólido rígido, es decir, un conjunto de puntos cuyas distancias mutuas permanecen invariables. El movimiento más general de tal cuerpo se logra componiendo una traslación seguida de una rotación respecto a un punto del espacio afín (teorema de Chasles). Por ejemplo, es posible considerar una traslación dada por el movimiento del centro de masas o baricentro del cuerpo rígido y una rotación respecto a este mismo punto; lo que en el caso del movimiento de la Tierra en el Sistema Solar se corresponde con el movimiento de traslación alrededor del Sol y con el movimiento de rotación alrededor de su centro de masas. Aunque la Tierra no es un cuerpo rígido, esta descomposición es útil en tanto que a lo largo de su movimiento la Tierra no se expande, contrae o cambia su forma sustancialmente, es decir, a estos efectos, puede considerarse en primera aproximación como un cuerpo rígido.

Esta descomposición del movimiento también es extremadamente ventajosa a la hora de establecer las ecuaciones del movimiento, pues permite un estudio independiente de los movimientos de traslación y rotación. Sin embargo, no se debe olvidar que tal independencia sólo se verifica exactamente desde el punto de vista cinemático, por lo que en determinadas circunstancias el acoplamiento dinámico entre el movimiento de rotación y de traslación del cuerpo puede ser importante y habrá de considerarse. En cualquiera de los casos, el estudio de ambos movimientos constituye un problema formidable.

El movimiento de traslación del centro de masas de la Tierra alrededor del Sol se ve constantemente perturbado por las fuerzas gravitatorias ejercidas por el resto de los cuerpos del Sistema Solar, que a su vez interactúan entre sí. De forma similar, el movimiento de rotación de la Tierra respecto al centro de masas también está afectado por el resto de los cuerpos del Sistema Solar, a lo que hay que añadir la influencia de los procesos que suceden en la propia Tierra como los movimientos internos de sus capas, la circulación atmosférica y oceánica, los terremotos, etc.

En esta Investigación estudiaremos el movimiento de rotación de la Tierra respecto a su centro de masas, considerando que este movimiento es independiente del de traslación, que se supondrá conocido. Realizaremos este estudio desde la perspectiva de la Dinámica Analítica, tratando de determi-

nar una representación matemática del movimiento de rotación de la Tierra compatible con la precisión de las observaciones actuales. Así, será necesario establecer en el marco de la Mecánica newtoniana las ecuaciones diferenciales que gobiernan tal movimiento de rotación para, posteriormente, obtener su solución exacta o aproximada en forma analítica. Por este motivo, no entraremos a discutir los aspectos relativos a las técnicas astrométricas o geodéticas disponibles y a los procesos de reducción de datos que permiten medir de forma efectiva el movimiento de rotación (véase, por ejemplo, Moritz y Mueller 1987).

### 1.1.2 Rotaciones en el espacio afín tridimensional

A continuación precisaremos qué se entiende por movimiento de rotación de la Tierra y en qué consiste el problema de su determinación. Con este propósito es conveniente, en primer lugar, realizar una descripción de las rotaciones en el marco newtoniano, necesaria, para definir el movimiento de rotación. Consideremos en el espacio afín  $\mathbb{E}^3$  dos sistemas de referencia ortonormales directos  $OXYZ \equiv \{O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$  y  $Oxyz \equiv \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  que comparten un origen común. Como es sabido existe una única aplicación lineal  $\mathbf{R}$  del espacio vectorial euclídeo asociado a  $\mathbb{E}^3$  que transforma la base ortonormal directa  $B = \{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$  en la base ortonormal directa  $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Además, dicha aplicación lineal es una transformación ortogonal propia, es decir, una rotación. Así, dado un vector  $\vec{r}$  de  $\mathbb{R}^3$  sus componentes  $x, y, z$  en  $B$  están relacionadas con sus componentes  $x', y', z'$  en  $B'$  mediante las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

siendo  $\mathbf{R}$  la matriz  $3 \times 3$  asociada a la aplicación  $\mathbf{R}$ , matriz que será ortogonal de determinante 1, es decir, un elemento del grupo  $SO(3)$ . La rotación  $\mathbf{R}$  queda determinada mediante un mínimo de tres parámetros reales aunque, por diferentes motivos, puede ser conveniente utilizar un número superior. Por ejemplo, podemos caracterizar la rotación mediante el vector unitario  $\vec{a}$ , eje de giro, y mediante su ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$  recorrido en sentido antihorario, de forma que la rotación se puede escribir como

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\vec{a}, \alpha} = \cos \alpha \mathbf{1} + (1 - \cos \alpha) \vec{a} \otimes \vec{a} + \sin \alpha \vec{a} \times \mathbf{1}, \quad (1.2)$$

con lo que los vectores de la base de  $B$  se transformarán mediante la expresión

$$\mathbf{R}_{\vec{a}, \alpha} \vec{E}_i = \cos \alpha \vec{E}_i + (1 - \cos \alpha) (\vec{a} \cdot \vec{E}_i) \vec{a} + \sin \alpha \vec{a} \times \vec{E}_i = \vec{e}_i, \quad (1.3)$$

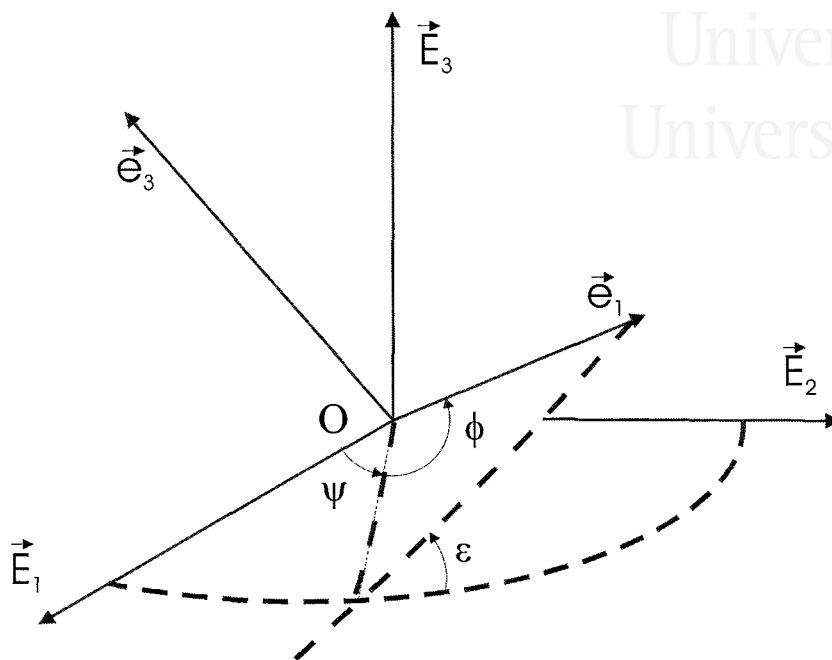


Figura 1.1: Ángulos de Euler

denotando  $\vec{a} \cdot \vec{E}_i$  y  $\vec{a} \times \vec{E}_i$  los productos escalar y vectorial, respectivamente, del espacio euclídeo. Otra posibilidad muy extendida en Mecánica Celeste es utilizar los ángulos de Euler<sup>1</sup>  $\psi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\phi$  (véase la figura 1.1) con  $0 \leq \psi < 2\pi$ ,  $0 < \varepsilon < \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Utilizando estos parámetros la rotación viene dada por

$$R = R_{\psi, \varepsilon, \phi} = R_{\vec{e}_3, \phi} R_{\vec{e}_n, \varepsilon} R_{\vec{E}_3, \psi}, \quad (1.4)$$

siendo  $\vec{e}_n$  el vector unitario resultante de normalizar el vector  $\vec{E}_3 \times \vec{e}_3$ , que define la denominada línea de los nodos. Por ello los ángulos de Euler no están definidos si el vector  $\vec{e}_n$  es nulo. Es posible escribir la ecuación (1.4) de forma que las rotaciones que intervienen se realicen únicamente respecto a los vectores de la base  $B$ . En particular (véase, por ejemplo, Leubner 1981), se tiene que

$$R_{\psi, \varepsilon, \phi} = R_{\vec{E}_3, \psi} R_{\vec{E}_1, \varepsilon} R_{\vec{E}_3, \phi}, \quad (1.5)$$

igualdad especialmente útil para obtener la expresión de la matriz  $\mathbf{R}(\psi, \varepsilon, \phi)$  asociada a la rotación  $R_{\psi, \varepsilon, \phi}$ . Utilizando las ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.5)

<sup>1</sup>Existen numerosas formas de definir los ángulos de Euler (véase, por ejemplo, Goldstein 1980). Aquí seguimos la denominada secuencia 3-1-3 ó convenio  $x$  (ecuación 1.6). La notación empleada para cada ángulo tampoco es estándar.



podemos escribir

$$\mathbf{R}(\psi, \varepsilon, \phi) = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\varepsilon)\mathbf{R}_3(\psi), \quad (1.6)$$

donde hemos introducido las matrices

$$\mathbf{R}_1(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \operatorname{sen} \beta \\ 0 & -\operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \operatorname{sen} \beta & 0 \\ -\operatorname{sen} \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

matrices que para otras secuencias en los ángulos de Euler deben ser completadas con

$$\mathbf{R}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\operatorname{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Para los propósitos de esta Investigación, y de la Mecánica en general, es preciso considerar la situación en la que la aplicación lineal  $\mathbf{R}$ , y por lo tanto la matriz  $\mathbf{R}$ , depende de una variable real  $t$  que llamaremos tiempo. Así, los parámetros que caractericen cada rotación también serán funciones del tiempo; funciones que supondremos al menos de clase  $\mathcal{C}^2$  en el intervalo  $I$  de la recta real donde varíe  $t$ . La dependencia temporal de la rotación  $\mathbf{R}$  induce una dependencia temporal en los vectores de la base  $B'$ , lo que permite definir unas funciones  $\vec{e}_i(t)$  con  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ . A estas funciones debidas a la dependencia temporal de la rotación  $\mathbf{R}$ , las denominaremos movimiento de rotación del sistema de referencia  $Oxyz$  respecto al sistema de referencia  $OXYZ$ .

La descripción del movimiento de rotación se facilita considerando el vector velocidad angular de  $B'$  respecto a  $B$ , que denotaremos por  $\vec{\omega}(t)$ . La relación entre este vector y la rotación  $\mathbf{R}(t)$  se sigue de la ortogonalidad del grupo de rotaciones, es decir, de la igualdad

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^t(t)=1, \quad (1.9)$$

donde el superíndice  $t$  denotará, según el caso, la aplicación o la matriz traspuesta. Derivando esta expresión respecto al tiempo obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^t(t) = - \left[ \frac{d}{dt}\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^t(t) \right]^t. \quad (1.10)$$

De donde se sigue que la aplicación  $\Sigma(t)$ , definida por

$$\Sigma(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^t(t) \quad (1.11)$$



## 1.1 La rotación de la Tierra

7

es antisimétrica. Por ello siempre es posible asociar a  $\Sigma(t)$  un vector único  $\vec{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$ , de forma que para cualquier vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  se tiene la identidad

$$\Sigma(t)\vec{v} \equiv \vec{\omega}(t) \times \vec{v}. \quad (1.12)$$

En concreto, si consideramos un vector de la base  $B'$

$$\frac{d}{dt} [\vec{e}_i(t)] = \frac{d}{dt} R(t) \vec{E}_i = \frac{d}{dt} R(t) R^t(t) \vec{e}_i(t) = \Sigma(t) \vec{e}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i(t), \quad (1.13)$$

que son las fórmulas de Poisson. En este sentido, la evolución de los vectores de la base  $B'$  permite definir el vector velocidad angular de  $B'$  respecto a  $B$ .

De forma recíproca, dado un vector  $\vec{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$ , cuyas componentes sean funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  en un intervalo  $I$ , siempre es posible encontrar una rotación  $R(t)$  de velocidad angular  $\vec{\omega}(t)$  o, equivalentemente, una rotación que verifique la relación (1.11). Si además consideramos la condición  $R(t_0) = R_0$ , siendo  $R_0$  una rotación arbitraria, es posible determinar  $R(t)$  de forma única mediante la igualdad (Wintner 1941)

$$R(t) = R_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \Sigma(s) ds\right). \quad (1.14)$$

Las distintas parametrizaciones  $R(t)$  nos permiten calcular directamente las expresiones del vector velocidad angular. Así, si utilizamos la ecuación (1.2) considerando que tanto el ángulo como el eje son funciones del tiempo, obtenemos que el vector velocidad angular es

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \vec{a}(t) + \sin \alpha(t) \frac{d}{dt} [\vec{a}(t)] + [1 - \cos \alpha(t)] \vec{a}(t) \times \frac{d}{dt} [\vec{a}(t)]. \quad (1.15)$$

Una consecuencia inmediata de esta expresión es que en  $\vec{\omega}(t)$ , además de la variación del ángulo  $\alpha(t)$ , interviene el cambio de posición del eje de giro  $\vec{a}(t)$  que se corresponde con los dos últimos sumandos de la ecuación. De igual forma, podemos obtener la expresión del vector velocidad angular si la rotación está parametrizada por los ángulos de Euler. Para ello es conveniente emplear la fórmula (1.5), pues refiere todos los ejes de rotación a los vectores de la base original  $\vec{E}_i$  que son independientes del tiempo. Partiendo de esta fórmula podemos escribir

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_1(t) + R_{\vec{E}_3, \psi(t)} \vec{\omega}_2(t) + R_{\vec{E}_3, \psi(t)} R_{\vec{E}_1, \varepsilon(t)} \vec{\omega}_3(t). \quad (1.16)$$

En esta expresión  $\vec{\omega}_i(t)$  es la velocidad angular asociada a cada una de las rotaciones,  $R_{\vec{E}_3, \psi(t)}$ ,  $R_{\vec{E}_1, \varepsilon(t)}$  o  $R_{\vec{E}_3, \phi(t)}$ , respectivamente. Como estas rotaciones se realizan en torno a un eje fijo, en virtud de (1.15), se tiene que

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\psi}(t) \vec{E}_3 + \dot{\varepsilon}(t) R_{\vec{E}_3, \psi(t)} \vec{E}_1 + \dot{\phi}(t) R_{\vec{E}_3, \psi(t)} R_{\vec{E}_1, \varepsilon(t)} \vec{E}_3, \quad (1.17)$$

donde como es habitual en Mecánica la derivada temporal se designa con un punto sobre las funciones. Equivalentemente se tiene

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\psi}(t)\vec{E}_3 + \dot{\varepsilon}(t)\vec{e}_n(t) + \dot{\phi}(t)\vec{e}_3(t). \quad (1.18)$$

Esta expresión permite obtener las componentes de  $\vec{\omega}(t)$  en cualquier base de  $\mathbb{R}^3$ . Por ejemplo, proyectando todos los vectores que intervienen en  $B'$  se obtiene que

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varepsilon(t) \sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ \sin \varepsilon(t) \cos \phi(t) & -\sin \phi(t) & 0 \\ \cos \varepsilon(t) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

relaciones que se pueden recuperar con ayuda de la matriz  $\mathbf{R}(\psi(t), \varepsilon(t), \phi(t))$ , puesto que combinando (1.11) y (1.12) se sigue que

$$\dot{\mathbf{R}}(\phi(t), \varepsilon(t), \psi(t))\mathbf{R}^t(\phi(t), \varepsilon(t), \psi(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Las expresiones obtenidas para el vector velocidad angular se puede generalizar de forma inmediata al caso en el que la rotación venga descrita por más de tres ángulos, siempre que esta esté formada por una secuencia de Euler (Leubner 1981), es decir, por una rotación  $\mathbf{R}$  que pueda escribirse como la composición de  $n$  rotaciones de forma que el eje de giro de la rotación  $k$  ha sido generado por la aplicación de las  $k - 1$  rotaciones anteriores sobre alguno de los vectores de la base  $B$ . En concreto,  $\mathbf{R}$  debe ser de la forma

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}} = \mathbf{R}_{\vec{e}_{n-1}i_{n-1}, \alpha_{n-1}} \cdots \mathbf{R}_{\vec{e}_{1}i_1, \alpha_1} \mathbf{R}_{\vec{E}_i, \alpha_0}, \quad (1.21)$$

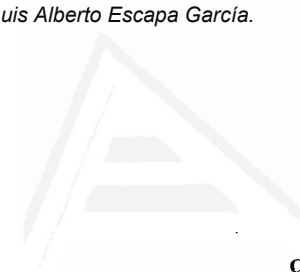
con

$$\vec{e}_{k j} = \mathbf{R}_{\vec{e}_{k-1}i_{k-1}, \alpha_{k-1}} \cdots \mathbf{R}_{\vec{e}_{1}i_1, \alpha_1} \mathbf{R}_{\vec{E}_{i_0}, \alpha_0} \vec{E}_j, \quad (1.22)$$

donde los subíndices  $j$  e  $i_k$  pueden tomar los valores 1, 2 ó 3, y  $k$  los valores 1, 2, ... ó  $n - 1$ . Si la rotación depende del tiempo, el vector velocidad angular asociado a la misma es

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\alpha}_0(t)\vec{E}_i + \dot{\alpha}_1(t)\vec{e}_{1 i_1}(t) + \dots + \dot{\alpha}_{n-1}(t)\vec{e}_{n-1 i_{n-1}}(t). \quad (1.23)$$

Asimismo, razonamientos análogos a los utilizados para derivar la igualdad (1.18) permiten establecer la expresión del vector asociado a la diferencial de la rotación, de tanta importancia en Mecánica cuando se construyen los desplazamientos reales o virtuales de un sistema dado (véase, por ejemplo, la



sección 3.3). Por ejemplo, en el caso en el que la rotación  $R$  venga parametrizada en términos de los ángulos de Euler, ecuación (1.4), el vector asociado a la diferencial de  $R$  se escribirá como

$$d\vec{R} = \vec{E}_3 d\psi + \vec{e}_n d\varepsilon + \vec{e}_3 d\phi, \quad (1.24)$$

expresión que se conoce como rotación infinitesimal. Utilizando esta igualdad es posible calcular el desplazamiento respecto al sistema  $OXYZ$  que realiza un vector  $\vec{r}$  solidario con el sistema  $Oxyz$ . Si denotamos por  $d\vec{r}$  a tal desplazamiento se tiene que

$$d\vec{r} = d\vec{R} \times \vec{r}. \quad (1.25)$$

En resumen, el movimiento de rotación de  $Oxyz$  respecto a  $OXYZ$  queda determinado cuando se conoce una expresión explícita en función del tiempo de la rotación  $R(t)$  o de cualquiera de sus parametrizaciones. Alternativamente, si el vector velocidad angular es una función conocida del tiempo y se conoce el valor de  $R(t)$  en un instante determinado, también es posible obtener la expresión de  $R(t)$  utilizando la igualdad (1.14).

### 1.1.3 Los sistemas de referencia celeste y terrestre

Hasta aquí la descripción realizada del movimiento de rotación ha sido de carácter puramente geométrico, por lo que es preciso establecer alguna relación entre los objetos matemáticos que intervienen en la definición de tal movimiento y el sistema material bajo estudio, es decir, la Tierra. Como se desprende de las consideraciones expuestas anteriormente, el movimiento de rotación se refiere a un tipo particular de transformación entre dos sistemas de referencia. Debemos, por lo tanto, utilizar algún criterio que permita escoger tales sistemas. Nos referiremos a ellos como sistema de referencia celeste ( $OXYZ$ ) y sistema de referencia terrestre ( $Oxyz$ ), respectivamente.

En este sentido, no está de más recordar que tal elección es puramente una convención, eso sí, guiada por algún criterio de utilidad, de forma que los sistemas elegidos presenten alguna ventaja desde el punto de vista teórico u observacional. En lo que sigue nos ocuparemos de la definición ideal de tales sistemas, considerando de entre todas las posibilidades especialmente aquellas en las que las ecuaciones diferenciales del movimiento de rotación tomen una forma lo más sencilla posible. No entraremos por lo tanto en la realización particular de tales sistemas de referencia, es decir, en la determinación del marco de referencia celeste y el marco de referencia terrestre. Como consecuencia, se utilizarán indistintamente las palabras sistema (system) y marco (frame) de referencia. Una discusión detallada sobre este tema



y los estándares actuales se puede encontrar en Kovalevsky et al. (1989) y en IERS Conventions 2003 (2004), respectivamente.

En la definición del sistema de referencia celeste y terrestre impondremos primeramente que el origen de ambos coincida con el centro de masas o geocentro de la Tierra. Como se señaló anteriormente, esta elección permite separar cinemáticamente los movimientos de rotación y traslación de la Tierra. El sistema de referencia celeste será un sistema de referencia cuasi inercial (véase, por ejemplo, Moritz y Mueller 1987), es decir, aunque el origen de tal sistema experimente aceleraciones, el sistema de referencia como tal no realizará ningún movimiento de rotación respecto al espacio absoluto. Como es sabido, la existencia de tales sistemas está asegurada dentro de la Mecánica newtoniana, habiendo una infinidad de ellos que se diferencian únicamente en una rotación independiente del tiempo respecto a su origen común. De entre todos estos sistemas cuasi inerciales consideraremos aquel en el que el plano  $XY$  del sistema de referencia coincide con la eclíptica<sup>2</sup>, definida con la ayuda de algunas efemérides del Sistema Solar para un valor determinado del tiempo (época) y a la que se suele denominar eclíptica de la época (Kinoshita 1977). Más aún, impondremos que el vector  $\vec{E}_1$  apunte al equinoccio de la época siendo, como ya se ha señalado, el vector  $\vec{E}_3$  perpendicular a la eclíptica de la época.

La consideración del sistema de referencia celeste en el marco relativista exige la modificación apropiada de la definición anterior (Soffel et al. 2003). No obstante, desde el punto de vista de la dinámica del movimiento de rotación, la adaptación al marco relativista se puede lograr incorporando a la descripción newtoniana pequeñas correcciones. En la actualidad, la única corrección relativista considerada es la debida a la precesión y nutación geodéticas (véase, por ejemplo, Fukushima 1991).

La elección del sistema de referencia terrestre también es complicada. Esta complicación se debe, fundamentalmente, a los movimientos relativos que experimentan las distintas partículas que componen la Tierra<sup>3</sup>. En efecto, si la Tierra fuera un cuerpo rígido podríamos determinar el sistema de referencia terrestre por la condición de que las partículas de la Tierra permanecieran en reposo respecto a él, es decir, de que evolucionaran solidariamente con dicho sistema terrestre. De esta forma, la posición de cualquier partícula

---

<sup>2</sup>La eclíptica se puede definir de dos formas diferentes según se describe, por ejemplo, en Fukushima (2003). El utilizar una u otra es, en este punto, irrelevante para nuestros propósitos.

<sup>3</sup>En lo que sigue simplificaremos a menudo los razonamientos visualizando la Tierra, o alguna de sus partes, como un sistema de partículas determinado; aunque a efectos matemáticos el tratamiento conjunto de ellas las considerará como un sistema continuo.



respecto al sistema celeste se podría escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{R}(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

siendo  $x$ ,  $y$  y  $z$  sus componentes en el sistema terrestre que son independientes del tiempo y con la matriz  $\mathbf{R}(t) \in SO(3)$ . Así, la condición adoptada permite definir de modo inequívoco un movimiento de rotación (véase la ecuación 1.1).

No obstante, existe una infinidad de sistemas de referencia que cumplen la condición anterior; de entre todos ellos podemos escoger el más conveniente desde un punto de vista matemático, lo que se consigue tomando como sistema de referencia terrestre el sistema de ejes principales del cuerpo rígido, estando los vectores  $\vec{e}_1(t)$  y  $\vec{e}_3(t)$  dirigidos según los ejes respecto a los cuales los momentos principales de inercia toman el menor y el mayor valor, respectivamente.

Sin embargo, la Tierra no es exactamente un cuerpo rígido por lo que los requerimientos anteriores son imposibles de satisfacer, ya que, al no ser constante la distancia entre sus partículas es imposible definir un movimiento de rotación similar al expresado en la igualdad (1.26), es decir, común para todas ellas. Como consecuencia de esto, es necesario utilizar definiciones que no impongan ninguna limitación a los movimientos internos de la Tierra. Existen numerosas opciones (Munk y Macdonald 1960), de entre las que destacaremos la que divide el movimiento del sistema de partículas respecto al centro de masas en un movimiento de rotación más un movimiento residual, al que es costumbre referirse como movimiento de deformación. La dificultad de esta división radica en que, como se señaló anteriormente, es imposible definir un movimiento de rotación común para todas las partículas. Por este motivo hay que introducir alguna definición que considere este movimiento en forma promediada; en este sentido, la separación entre rotación y deformación es una convención.

En cualquier caso, si  $\vec{r}$  denota la posición de una partícula de la Tierra, su velocidad respecto al sistema de referencia celeste se podrá escribir como

$$\vec{v} \doteq \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_d, \quad (1.27)$$

donde para simplificar la escritura se ha omitido la dependencia en  $t$ . En esta igualdad,  $\vec{\omega}$  es el vector velocidad angular, común para todas las partículas, asociado a la rotación de cierto sistema de referencia auxiliar respecto al sistema de referencia celeste y  $\vec{v}_d$  es la velocidad de cada partícula respecto al sistema auxiliar. Por ejemplo, si la Tierra fuera rígida, y el sistema auxiliar

coincidiera con el sistema terrestre fijado anteriormente para esta situación, se verificaría que  $\vec{v}_d = \vec{0}$  para cualquier partícula.

Partiendo de la descomposición (1.27) se pueden realizar diferentes separaciones entre rotación y deformación según las condiciones que se impongan sobre  $\vec{\omega}$  y sobre  $\vec{v}_d$ ; a su vez, esta separación servirá para definir el sistema de referencia terrestre. Por ejemplo, podemos imponer que la velocidad angular  $\vec{\omega}$  sea un vector constante y extraer el movimiento de rotación común, de velocidad angular  $\vec{\omega}'$ , del campo de velocidades  $\vec{v}_d$ , entendiendo por tal movimiento el que resulta de promediar para el sistema de partículas considerado el modo toroidal de grado 1 que se obtiene al descomponer los desplazamientos asociados al campo  $\vec{v}_d$  en vectores toroidales y esferoidales (véanse, por ejemplo, Wahr 1982, Kinoshita y Sasao 1989). De esta forma, el sistema de referencia terrestre viene caracterizado por aquel sistema cuyo vector velocidad angular asociado es  $\vec{\omega} + \vec{\omega}'$ . Esta descomposición ha sido empleada por Smith y Wahr (véanse, por ejemplo, Smith 1977, Wahr, 1981b, 1982).

Otra posibilidad, que será la utilizada en esta Investigación, es imponer que las velocidades  $\vec{v}_d$  provengan únicamente de un movimiento de deformación pura. Es decir, forzar a que todo el movimiento de rotación del sistema de partículas considerado quede incorporado en el propio movimiento de rotación del sistema de referencia auxiliar, que en este caso coincidirá con el propio sistema terrestre y se llama sistema de Tisserand<sup>4</sup> (véanse, por ejemplo, Routh 2005, Munk y Macdonald 1960, Moritz y Mueller 1987). En concreto, para determinar que el sistema terrestre sea un sistema de Tisserand impondremos que la integral

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{v}_d)^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (1.28)$$

sea mínima. Esta condición determinará el valor de la velocidad angular  $\vec{\omega}$  como función del tiempo, valor que a priori es desconocido. En esta expresión  $\vec{v}_d$  viene dada por la ecuación (1.27) y  $\rho(\vec{r})$  es la función densidad de masa; la integral se extiende al volumen  $\mathcal{V}$  ocupado por todas las partículas que componen la Tierra o sólo por algunas de ellas, por ejemplo  $\mathcal{V}$  podría referirse únicamente al manto o a la corteza terrestre. Por otra parte, debemos señalar que minimizar esta cantidad es equivalente a exigir que en un sentido global el movimiento de deformación  $\vec{v}_d$  sea mínimo o, equivalentemente, que tal movimiento no contenga, en promedio, ningún movimiento de rotación (Jeffreys 1976).

Teniendo en cuenta la relación (1.27), la integral (1.28) se escribe como

<sup>4</sup>También denominado sistema de ejes medios de Tisserand (Tisserand's mean axes system).



una función  $F$  de la velocidad angular

$$F(\vec{\omega}) = \int_{\mathcal{V}} (\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r})^2 \rho(\vec{r}) dV, \quad (1.29)$$

donde remarquemos que  $\vec{\omega}$  es independiente de las variables de integración. Imponiendo la condición necesaria de extremo, se obtienen las ecuaciones

$$\left[ \int_{\mathcal{V}} (r^2 \mathbf{1} - \vec{r} \otimes \vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \right] \vec{\omega} - \int_{\mathcal{V}} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho(\vec{r}) dV = \vec{0}, \quad (1.30)$$

siendo  $r$  el módulo de  $\vec{r}$ . En esta igualdad se identifican dos objetos de gran importancia en Mecánica. Por un lado, aparece el tensor de inercia del sistema de partículas

$$\Pi = \int_{\mathcal{V}} (r^2 \mathbf{1} - \vec{r} \otimes \vec{r}) \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.31)$$

Recordemos que este tensor de orden dos es inversible y definido positivo. Por otra parte, también interviene el momento angular del sistema de partículas respecto al origen  $O$

$$\vec{L} = \int_{\mathcal{V}} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.32)$$

Según esto<sup>5</sup>, la ecuación (1.30) permite obtener un único punto estacionario de  $F$  dado por

$$\vec{\omega} = \Pi^{-1} \vec{L} \quad (1.33)$$

La condición de mínimo se determina estudiando el hessiano de  $F$  para el valor obtenido de  $\vec{\omega}$ . Teniendo en cuenta la ecuaciones (1.30) resulta

$$\text{Hess } F = \Pi. \quad (1.34)$$

De donde se deduce que el hessiano de  $F$  es definido positivo y así el valor de  $\vec{\omega}$  dado por la igualdad (1.33) minimiza la integral (1.28). Además, de esta misma ecuación se sigue que el momento angular relativo al sistema de Tisserand del sistema de partículas es cero, ya que, combinando las ecuaciones (1.32) y (1.27) se tiene

$$\vec{L} = \int_{\mathcal{V}} (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) \rho(\vec{r}) dV + \int_{\mathcal{V}} (\vec{r} \times \vec{v}_d) \rho(\vec{r}) dV = \Pi \vec{\omega} + \vec{h}, \quad (1.35)$$

<sup>5</sup>Debe recordarse que en Mecánica el momento angular se calcula utilizando la velocidad de la partícula respecto a un sistema de referencia inercial. Así, en la igualdad (1.32) se debería considerar  $\vec{v}_o + \vec{v}$ . Sin embargo, como  $O$  es el centro de masas del sistema la parte que contiene a  $\vec{v}_o$  no contribuye al momento angular.



que en virtud de la igualdad (1.33) exige que el momento angular relativo  $\vec{h}$  sea  $\vec{0}$ . Esta condición es equivalente a la utilizada anteriormente para definir un sistema de Tisserand. Por lo tanto, si la velocidad de una partícula se descompone según la igualdad (1.27) con  $\vec{v}_d$  referida al sistema de Tisserand, la expresión del momento angular del sistema de partículas es formalmente análoga a la del cuerpo rígido, es decir

$$\vec{L} = \Pi \vec{\omega}. \quad (1.36)$$

Sin embargo, existe una diferencia fundamental, ya que, en el caso rígido es posible encontrar sistemas de referencia  $\{O; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$ , como el de ejes principales, que evolucionen solidariamente con las partículas, es decir, donde

$$\vec{r}(t) = x_1 \vec{e}_1(t) + x_2 \vec{e}_2(t) + x_3 \vec{e}_3(t), \quad (1.37)$$

por lo que el tensor de inercia es independiente del tiempo con respecto a estos sistemas. Por contra, en la situación actual  $\Pi$  depende del tiempo respecto al sistema de Tisserand, pues también lo hacen las coordenadas de las partículas.

Al igual que en el caso del sistema de referencia celeste, las condiciones anteriores no determinan de forma unívoca un único sistema de Tisserand. Esto es claro, si tenemos en cuenta que para determinar una rotación, además de conocer el vector velocidad angular en función del tiempo, es necesario conocer el valor de la rotación en un instante determinado, véase la ecuación (1.14). Una posibilidad para fijar esta condición adicional (Kinoshita y Sasao 1989) es exigir que el sistema de Tisserand coincida con el sistema de ejes principales de un cuerpo ideal resultante de promediar o eliminar las deformaciones del sistema de partículas, en el que, al igual que en el caso rígido, los vectores  $\vec{e}_1(t)$  y  $\vec{e}_3(t)$  están dirigidos según los ejes respecto a los cuales los momentos principales de inercia tomen el menor y el mayor valor. En este caso, al plano generado por los vectores  $\vec{e}_1(t)$  y  $\vec{e}_2(t)$  se le llama ecuador terrestre.

#### 1.1.4 El problema de la rotación de la Tierra

Una vez fijados los sistemas de referencia celeste y terrestre es posible precisar qué se entiende por rotación de la Tierra y en qué consiste su problema asociado. La rotación de la Tierra se refiere al movimiento de rotación del sistema de referencia terrestre respecto al sistema de referencia celeste y el problema de la rotación de la Tierra consiste en determinar de forma explícita la dependencia en función del tiempo de la rotación que transforma el mencionado sistema de referencia celeste en el terrestre. Como vemos,



la formulación del problema exige que previamente se hayan elegido estos dos sistemas de referencia, por ello el modo en el que se realiza la elección de tales sistemas también forma parte del propio problema de la rotación. En este sentido, tendríamos tantos problemas de la rotación de la Tierra como posibles elecciones que determinen ambos sistemas de referencia. Así, la expresión movimiento de rotación de la Tierra carece de sentido por sí misma, a no ser que se conozcan los sistemas de referencia a los que se refiere tal movimiento y las condiciones que los definen.

Para los propósitos de esta Investigación consideraremos que el sistema de referencia celeste es un sistema de referencia newtoniano cuasi inercial fijado a través de la eclíptica de la época. El sistema de referencia terrestre será un sistema de Tisserand definido en las condiciones expuestas anteriormente. Si el sistema de partículas considerado fuera un cuerpo rígido, este sistema coincidiría con el sistema de ejes principales del cuerpo. Determinados ambos sistemas de referencia, la expresión de la rotación  $R(t)$  se obtiene resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales. Para obtener estas ecuaciones se ha de tener presente que la definición del sistema de referencia terrestre está vinculada a un cierto sistema de partículas que forman parte de la Tierra. Por ello, el movimiento de rotación del sistema de referencia terrestre respecto al celeste viene determinado por el movimiento de estas partículas respecto al propio sistema de referencia celeste.

Como es sabido, en la Mecánica newtoniana la evolución temporal de las partículas se determina a través de un sistema de ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales, de segundo orden, mediante las que se obtiene en función del tiempo la posición respecto a un sistema de referencia de tales partículas. Dichas ecuaciones diferenciales se establecen por diferentes procedimientos, según que se considere el sistema de partículas como discreto o continuo, y se utilice la Mecánica Vectorial o los Principios Variacionales (véanse las secciones 1.2 y 2.1).

En cualquiera de los casos, esta construcción ha de tener en cuenta las interacciones que experimenta el sistema de partículas considerado que, por conveniencia, dividiremos en interacciones internas y externas. Por interacciones externas entenderemos aquellas cuya causa es exterior a todo el sistema de partículas que compone la Tierra, como por ejemplo las causadas por la Luna, el Sol o los planetas, y que principalmente se deben a la acción gravitatoria de estos cuerpos sobre la Tierra. Las interacciones internas son debidas al resto de partículas que componen la Tierra, independientemente de que estas formen parte o no del sistema de partículas considerado.

A pesar de la simplificación en la división, esta descripción da una idea de cómo la estructura interna de la Tierra, esto es, el modelo de Tierra considerado, puede influir en el movimiento de rotación. Así, por ejemplo, si

asumimos que la Tierra es un cuerpo rígido, las únicas interacciones relevantes para construir las ecuaciones diferenciales del movimiento se deben a la Luna, el Sol y los planetas, es decir, todas ellas son externas. Dentro de este modelo es posible establecer diferentes submodelos según que se suponga, por ejemplo, el cuerpo rígido simétrico o triaxial, es decir, según que en la expresión del tensor de inercia

$$\Pi(t) = A \vec{e}_1(t) \otimes \vec{e}_1(t) + B \vec{e}_2(t) \otimes \vec{e}_2(t) + C \vec{e}_3(t) \otimes \vec{e}_3(t), \quad (1.38)$$

donde  $A \leq B \leq C$  son los momentos principales de inercia respecto a los ejes del sistema de referencia terrestre  $\vec{e}_1(t)$ ,  $\vec{e}_2(t)$  y  $\vec{e}_3(t)$ , se considere  $A = B < C$  ó  $A < B < C$ . Los modelos rígidos constituyen el caso más simple para estudiar la rotación de la Tierra, aunque esto no quiere decir que la resolución del problema sea sencilla (véanse, por ejemplo, Woolard 1953, Kinoshita 1977, Navarro 2002).

Otra posibilidad es considerar un modelo de Tierra elástico (véase, por ejemplo, Getino 1989). En este caso, además de las interacciones externas debidas a la Luna, el Sol y los planetas, es necesario tener en cuenta las interacciones internas que sufren las partículas de la Tierra y que, por ejemplo, se derivan del tensor de tensiones o, equivalentemente, de la energía potencial elástica. En la actualidad, los estudios de la rotación de la Tierra (véanse, por ejemplo, Mathews et al. 1991a, Getino y Ferrándiz 2000b, Escapa et al. 2001) consideran un modelo de Tierra cuyas partes principales son un manto sólido que contiene a un núcleo externo fluido que a su vez contiene a un núcleo interno sólido. Esta estructura interna de tres capas se deriva del análisis de la propagación de las ondas sísmicas y de sus oscilaciones (Gilbert y Dziewonski 1975).

De esta forma, el problema de la rotación de la Tierra se aborda para una sucesión de modelos que cada vez se aproximan más a la compleja estructura real de nuestro planeta. Por supuesto, la paulatina mejora de los modelos terrestres se hace a costa de aumentar la complejidad en la obtención de las ecuaciones diferenciales que proporcionan la evolución del sistema de partículas y en su posterior resolución. A este respecto cabe recordar que, para nuestros fines, esta consideración sucesiva de diferentes modelos tiene sentido en cuanto que influya en el movimiento de rotación de la Tierra. Es decir, en cuanto que sea capaz de proporcionar predicciones más ajustadas a los datos observacionales disponibles en cada momento o muestre aspectos novedosos respecto a modelos anteriores que ayuden a profundizar en el conocimiento de la relación entre el movimiento de rotación y la estructura de la Tierra.

La resolución de las ecuaciones diferenciales que describen la evolución del sistema de partículas considerado, junto con un conjunto de condiciones

iniciales, permite obtener el movimiento de rotación de la Tierra, es decir, determina explícitamente la forma de la rotación  $R(t)$ . Como se señaló anteriormente, esta rotación se puede parametrizar en función de los ángulos de Euler (ecuaciones 1.4 y 1.6). En los estudios de la rotación de la Tierra los dos ángulos de Euler  $\psi(t)$ , y  $\varepsilon(t)$  se denominan, respectivamente, longitud y oblicuidad<sup>6</sup>. Empleando esta parametrización, el conocimiento de las funciones  $\psi(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  y  $\phi(t)$ , derivado del sistema de ecuaciones diferenciales, es suficiente para obtener  $R(t)$ . Equivalentemente, si de la solución del mencionado sistema de ecuaciones se obtienen las funciones  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  y  $\omega_3(t)$  y unas condiciones iniciales para los ángulos de Euler, en virtud de las igualdades (1.14) y (1.19), es posible obtener el valor de las funciones  $\psi(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  y  $\phi(t)$  o de la rotación  $R(t)$ .

Además de estas funciones, también se acostumbra a obtener la dependencia temporal respecto al sistema de referencia celeste de ciertos vectores con una especial significación geométrica, cinemática o mecánica, lo que ayuda a obtener una mayor comprensión del movimiento de rotación de la Tierra. Este es el caso de los vectores  $\vec{e}_3(t)$ ,  $\vec{e}_\omega(t)$  y  $\vec{e}_L(t)$ , es decir, del tercer vector de la base asociada al sistema de referencia terrestre, de un vector unitario dirigido según la velocidad angular asociada al movimiento de rotación y de un vector unitario dirigido según el momento angular del sistema de partículas (1.35). A estos vectores se les suele denominar (Kinoshita 1977) eje de figura, eje de rotación y eje del momento angular, respectivamente.

Su movimiento se puede derivar de la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema de partículas aunque, por supuesto, están estrechamente relacionados con las funciones  $\psi(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  y  $\omega_3(t)$ . Así, las componentes del eje de figura  $\vec{e}_3(t)$  en el sistema de referencia celeste son

$$\begin{pmatrix} X_{\vec{e}_3}(t) \\ Y_{\vec{e}_3}(t) \\ Z_{\vec{e}_3}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{R}^t(\psi(t), \varepsilon(t), \phi(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \varepsilon(t) \text{ sen } \psi(t) \\ -\text{sen } \varepsilon(t) \text{ cos } \psi(t) \\ \text{cos } \varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

A la luz de esta relación es claro que a partir del conocimiento de estas componentes se puede obtener el de los ángulos  $\psi(t)$  y  $\varepsilon(t)$ . De hecho, estos dos ángulos se pueden reinterpretar como la longitud del nodo y la inclinación del plano perpendicular al eje de figura, esto es, del ecuador terrestre. Por otra parte, las componentes del eje de rotación  $\vec{e}_\omega(t)$  en el sistema de referencia

<sup>6</sup>No parece haber un nombre común para el ángulo  $\phi(t)$ , que está relacionado con el tiempo sidéreo.

celeste se obtienen mediante las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} X_{\vec{e}_{\vec{\omega}}}(t) \\ Y_{\vec{e}_{\vec{\omega}}}(t) \\ Z_{\vec{e}_{\vec{\omega}}}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega(t)} \mathbf{R}^t(\psi(t), \varepsilon(t), \phi(t)) \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

siendo  $\omega(t)$  el módulo de  $\vec{\omega}(t)$ . Al igual que en el eje de figura, estas componentes se pueden expresar en términos de la longitud del nodo  $\psi_r(t)$  y la inclinación  $\varepsilon_r(t)$  del plano perpendicular al eje de rotación, es decir,

$$\begin{pmatrix} X_{\vec{e}_{\vec{\omega}}}(t) \\ Y_{\vec{e}_{\vec{\omega}}}(t) \\ Z_{\vec{e}_{\vec{\omega}}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \varepsilon_r(t) \text{ sen } \psi_r(t) \\ -\text{sen } \varepsilon_r(t) \text{ cos } \psi_r(t) \\ \text{cos } \varepsilon_r(t) \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Finalmente, con ayuda de la ecuación (1.36), las componentes del eje del momento angular  $\vec{e}_L(t)$  en el mismo sistema de referencia se pueden calcular a través de

$$\begin{pmatrix} X_{\vec{e}_L}(t) \\ Y_{\vec{e}_L}(t) \\ Z_{\vec{e}_L}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{L(t)} \mathbf{R}^t(\psi(t), \varepsilon(t), \phi(t)) \mathbf{\Pi}(t) \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

donde  $L(t)$  es el módulo de  $\vec{L}(t)$ , y  $\mathbf{\Pi}(t)$  es la matriz del tensor de inercia en la base asociada al sistema de referencia terrestre, es decir, la matriz de elementos

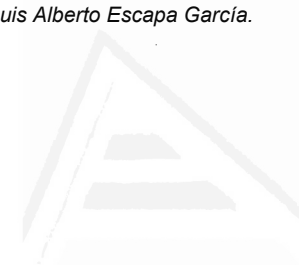
$$\mathbf{\Pi}_{ij}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} [r(t)^2 \delta_{ij} - x_i(t)x_j(t)] \rho(\vec{r}(t)) dV, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.43)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker y  $x_i$  las coordenadas de una partícula respecto al sistema de referencia terrestre. Como en los casos anteriores, estas relaciones se pueden expresar alternativamente en función de la longitud del nodo  $\psi_L(t)$  y la inclinación  $\varepsilon_L(t)$  del plano perpendicular al eje del momento angular. A saber

$$\begin{pmatrix} X_{\vec{e}_L}(t) \\ Y_{\vec{e}_L}(t) \\ Z_{\vec{e}_L}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \varepsilon_L(t) \text{ sen } \psi_L(t) \\ -\text{sen } \varepsilon_L(t) \text{ cos } \psi_L(t) \\ \text{cos } \varepsilon_L(t) \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Notemos que las igualdades (1.40) y (1.42) se pueden escribir directamente en términos de las componentes del momento angular respecto al sistema de referencia terrestre, ya que, de la ecuación (1.33) se sigue que

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi}^{-1}(t) \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$



En este sentido, el conocimiento de las funciones  $L_1(t)$ ,  $L_2(t)$  y  $L_3(t)$  es equivalente al de las componentes de la velocidad angular  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  y  $\omega_3(t)$ .

### 1.1.5 Precesión, nutación, movimiento polar y duración del día

Habitualmente, la expresión literal de las funciones anteriores en términos del tiempo se escribe de forma más conveniente empleando cuasi polinomios. Recordemos que un cuasi polinomio (véase, por ejemplo, Arnold 1994) real en la variable real  $t$  es una función de la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{m_i} t^j e^{n_i t} [a_{ij} \cos(n_i t) + b_{ij} \sin(n_i t)], \quad (1.46)$$

siendo  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $\eta_i$  y  $n_i$  números reales. Como se deriva de la igualdad anterior, los polinomios son un caso particular de cuasi polinomio en los que para cualquier valor del índice  $i$  se verifica  $n_i = \eta_i = 0$ . Análogamente, los polinomios trigonométricos son casos particulares de cuasi polinomios para los que cualquier valor del índice  $i$  se verifica  $\eta_i = 0$  y los coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  se anulan siempre que  $j$  sea distinto de cero. Así, la longitud y la oblicuidad se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \psi(t) &= P_\psi(t) + N_\psi(t) + F_\psi(t), \\ \varepsilon(t) &= P_\varepsilon(t) + N_\varepsilon(t) + F_\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (1.47)$$

En estas igualdades, las funciones  $P_l(t)$  y  $N_l(t)$ , con  $l = \psi$  ó  $\varepsilon$ , son, respectivamente, polinomios y polinomios trigonométricos de la forma

$$P_l(t) = \sum_{j=0} c_j^{(l)} t^j, \quad N_l(t) = \sum_i a_i^{(l)} \cos[\Xi_i(t)] + b_i^{(l)} \sin[\Xi_i(t)], \quad (1.48)$$

donde  $\Xi_i(t) = n_i t + \Xi_{i0}$ . La función  $F_l(t)$  es una combinación lineal de cuasi polinomios que no contiene polinomios ni polinomios trigonométricos.

Esta descomposición y las análogas para los nodos y las inclinaciones de los planos perpendiculares al eje de rotación y al eje del momento angular presentan algunas ventajas. La primera de ellas es que permite separar cualitativamente las características del movimiento de rotación, puesto que la parte  $N_l(t)$  lleva asociado un movimiento periódico<sup>7</sup> del correspondiente ángulo, mientras que la parte dada por  $P_l(t)$  describe un movimiento de naturaleza secular, es decir, un movimiento que hace que la función no permanezca acotada al aumentar el tiempo. Al movimiento debido a  $N_l(t)$ <sup>8</sup> se

<sup>7</sup>En general el movimiento será cuasi periódico.

<sup>8</sup>Las nutaciones también se suelen representar como  $\Delta\psi(t)$  y  $\Delta\varepsilon(t)$ .

le denomina *movimiento de nutación* y al debido a  $P_l(t)$  *movimiento de precesión*. Así, se habla de nutación o precesión en longitud y oblicuidad del ecuador terrestre o, equivalentemente, de la nutación y precesión del eje de figura, expresiones que se extienden al eje de rotación y del momento angular, y a sus ángulos asociados  $\psi_r(t)$ ,  $\varepsilon_r(t)$  y  $\psi_L(t)$ ,  $\varepsilon_L(t)$ . Como de costumbre, en estas expresiones conviene tener presente los sistemas de referencia que se han considerado para definir los diferentes ángulos, en particular, el sistema de referencia celeste. La función  $F_l(t)$ , o alguna de sus partes, también es de utilidad para representar otros movimientos característicos como, por ejemplo, los derivados de los términos seculares mixtos que, aunque menos importantes que la precesión y la nutación, también son de interés.

Es preciso señalar que la descomposición (1.47) es completamente convencional. Por ejemplo, se podría considerar como movimiento de precesión, además del asociado a los polinomios en  $t$ , el causado también por aquellas partes de los polinomios trigonométricos cuyas frecuencias  $n_i$  fueran menores que un umbral prefijado  $n_0$ , es decir, que verificaran que  $0 \leq n_i \leq n_0$ . De hecho los términos de  $P_l(t)$  provienen fundamentalmente de desarrollar en serie de Taylor ciertas funciones que describen la posición de los cuerpos externos respecto a la Tierra, por lo que, por ejemplo, el desarrollo en serie de MacLaurin de las funciones  $\cos[\Xi_i(t)]$  y  $\sin[\Xi_i(t)]$ , dado por

$$\cos[\Xi_i(t)] = \cos(\Xi_{i0}) - t [n_i \sin(\Xi_{i0})] - t^2 \left[ \frac{1}{2} n_i^2 \cos(\Xi_{i0}) \right] + \dots$$

$$\sin[\Xi_i(t)] = \sin(\Xi_{i0}) + t [n_i \cos(\Xi_{i0})] - t^2 \left[ \frac{1}{2} n_i^2 \sin(\Xi_{i0}) \right] + \dots, \quad (1.49)$$

conduce a términos similares a los considerados en  $P_l(t)$ . En este sentido, es posible definir de forma más general el movimiento de precesión como la parte de largo periodo en el movimiento de rotación, y el movimiento de la nutación como la parte de corto periodo, donde la distinción entre largo y corto viene determinada convencionalmente.

Otra de las ventajas de la división (1.47) es que permite establecer una relación causa-efecto entre las interacciones que experimenta la Tierra y los efectos que estas producen en el movimiento de rotación. Por ejemplo, si consideramos las interacciones externas debidas a las fuerzas gravitatorias de la Luna y el Sol encontraremos que parte de las nutaciones en longitud y oblicuidad son de la forma

$$\begin{aligned} N_\psi(t) &= \sum_i a_i^{(\psi)} \cos[\Theta_i(t)] + b_i^{(\psi)} \sin[\Theta_i(t)], \\ N_\varepsilon(t) &= \sum_i a_i^{(\varepsilon)} \cos[\Theta_i(t)] + b_i^{(\varepsilon)} \sin[\Theta_i(t)], \end{aligned} \quad (1.50)$$

donde es posible relacionar el ángulo  $\Theta_i(t)$  con ciertas características del movimiento orbital de la Luna y el Sol respecto al sistema de referencia celeste. En efecto, recordemos que en Mecánica Celeste las coordenadas del centro de masas de los planetas se obtienen a través de series de Poisson (véase, por ejemplo, Navarro 2002), que en el caso de la Luna y el Sol contienen términos de la forma

$$\sum_i A_i \cos [\Theta_i(t)] + B_i \cos [\Theta_i(t)], \quad (1.51)$$

donde  $i = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$  con  $k_5 \geq 0$  es una quintupla de números enteros,  $A_i$  y  $B_i$  son constantes reales y el ángulo  $\Theta_i(t)$  es la combinación lineal

$$\Theta_i(t) = k_1 l + k_2 l' + k_3 F + k_4 D + k_5 \bar{\Omega}, \quad (1.52)$$

siendo  $l$ ,  $g$ ,  $h$  y  $l'$ ,  $g'$ ,  $h'$  las variables de Delaunay (véase, por ejemplo, Clemence y Brower 1961) de la Luna y el Sol, respectivamente,  $F = l + g$ ,  $D = l + g + h - l' - g' - h'$  y  $\bar{\Omega} = h - \psi_L(t)$  (Kinoshita 1977)<sup>9</sup>. Aunque para simplificar la notación se ha omitido la dependencia temporal,  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$  y  $\bar{\Omega}$  son polinomios en  $t$  que para nuestros propósitos consideraremos de primer grado, por lo que podremos escribir

$$\Theta_i(t) = k_1 l + k_2 l' + k_3 F + k_4 D + k_5 \bar{\Omega} = n_i t + \Theta_{i0}. \quad (1.53)$$

La comparación de las funciones dadas en las igualdades (1.50) y (1.51) nos hace ver cómo el movimiento orbital de la Luna y el Sol afecta directamente al movimiento de rotación de la Tierra, permitiendo establecer a través de los desarrollos analíticos necesarios para obtener las ecuaciones del movimiento, un mecanismo que explique el origen y la magnitud de tales términos. Incidentalmente, señalemos que tal mecanismo es debido al momento de la fuerza gravitatoria ejercida por la Luna y el Sol sobre la Tierra, cuya magnitud está modulada a través de los coeficientes  $a_i^{(l)}$  y  $b_i^{(l)}$ , con  $l = \psi$  ó  $\varepsilon$ . Estos coeficientes dependen del modelo de Tierra considerado, esto es, de las interacciones internas, y así el valor de la contribución no es la misma, por ejemplo, para un modelo de Tierra rígido que para un modelo de Tierra elástico.

La discusión realizada en el párrafo anterior proporciona un criterio para hacer una nueva separación en el movimiento de nutación. En particular, para un problema de rotación de la Tierra dado, dividiremos el movimiento de nutación en dos partes, según que a la hora de construir y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se prescindan o no de las interacciones externas.

<sup>9</sup> $l$  es la anomalía media de la Luna,  $l'$  es la anomalía media del Sol,  $F$  es el argumento medio de la latitud de la Luna,  $D$  es la elongación media de la Luna desde el Sol y, finalmente,  $\bar{\Omega}$  es la longitud media del nodo ascendente de la Luna.



Así, si estas no son tenidas en cuenta, es decir, si sólo consideramos las interacciones internas, el movimiento de nutación originado se denominará *movimiento libre de nutación*, representado por  $N_l^{(L)}(t)$  con  $l = \psi$  ó  $\varepsilon$ . En tanto que la diferencia entre el movimiento de nutación que incorpora tanto las interacciones externas como las internas y el movimiento libre de nutación se llama *movimiento forzado de nutación*, que escribiremos como  $N_l^{(F)}(t)$ . Así, el movimiento de nutación se podrá separar como

$$N_l(t) = N_l^{(L)}(t) + N_l^{(F)}(t). \quad (1.54)$$

Por ejemplo, los términos dados por la ecuación (1.50) pertenecerían a las nutaciones forzadas, ya que, están originados por la acción de la Luna y el Sol, esto es, son debidos a interacciones externas. Aunque no siempre, a veces es posible identificar las nutaciones forzadas comparando la frecuencia  $n_i$  asociada al ángulo  $\Xi_i(t)$  de cada término con el desarrollo en serie de Fourier de alguna función relacionada con la causa que produce la interacción externa. De esta forma el movimiento de nutación queda dividido en una parte debida a las interacciones internas, las nutaciones libres, y otra debida a las interacciones externas, las nutaciones forzadas, aunque en este último caso debemos recordar que las interacciones internas influyen de forma indirecta en las nutaciones forzadas, según se ha explicado, por ejemplo, para el caso de las relaciones (1.50). A parte de otras ventajas, esta división es especialmente útil desde un punto de vista matemático para resolver las ecuaciones diferenciales que describen la evolución del sistema de partículas considerado (véanse la sección 2.1 y la sección 4.3). En el caso del movimiento de precesión esta separación carece de sentido, pues toda esta parte del movimiento de rotación se debe a las interacciones externas causadas por la Luna, el Sol y los planetas<sup>10</sup> aunque, al igual que en casos anteriores, en su magnitud influye el modelo de Tierra considerado (Ferrándiz et al. 2004).

La descomposición (1.47) también es aplicable a las funciones  $\phi(t)$ ,  $l_1(t)$ ,  $l_2(t)$ ,  $l_3(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  y  $\omega_3(t)$ , aunque en estos casos no se emplean los nombres de movimiento de precesión o de nutación descritos anteriormente. Las únicas denominaciones particulares las reciben las componentes del vector velocidad angular en el sistema de referencia terrestre. En concreto, las componentes  $\omega_1(t)$  y  $\omega_2(t)$  definen el denominado *movimiento polar*<sup>11</sup>, que a veces se representa por el movimiento en el ecuador terrestre de un punto de

<sup>10</sup>Atendiendo a los cuerpos causantes de la precesión se distingue entre precesión luni-solar y precesión planetaria, aunque esta denominación es ambigua (Fukushima 2003).

<sup>11</sup>Seguimos la nomenclatura clásica donde el movimiento polar se refiere a las coordenadas del vector velocidad angular en el sistema de referencia terrestre.



coordenadas<sup>12</sup>

$$x_p(t) = \frac{\omega_1(t)}{\omega(t)}, \quad y_p(t) = \frac{\omega_2(t)}{\omega(t)}. \quad (1.55)$$

Este punto describiría aproximadamente el movimiento respecto al sistema de referencia terrestre del vector  $\vec{e}_{\omega}(t) - \vec{e}_3$ ; la aproximación es mejor cuanto más próximo a uno sea  $\omega_3(t)/\omega(t)$ . Esta interpretación permite extender la definición de movimiento polar para cualquier otro vector distinto a  $\vec{e}_{\omega}(t)$  (véase, por ejemplo, Moritz y Mueller 1987). A veces también es conveniente distinguir entre movimiento polar libre y movimiento polar forzado, movimientos que se definen de forma análoga a la utilizada en el caso del movimiento de nutación. Por otra parte, la función  $\omega_3(t)$  está directamente relacionada con la *duración del día* sidéreo, representado por  $LOD(t)$ <sup>13</sup>. En particular, se tiene la relación

$$\omega_3(t) = \frac{2\pi}{LOD(t)}. \quad (1.56)$$

En conclusión, el movimiento de rotación de la Tierra se puede dividir en cuatro partes cualitativamente diferentes: el movimiento de precesión, el movimiento de nutación, el movimiento polar y la duración del día. Es preciso incidir en que estas cuatro partes provienen de un único movimiento de rotación dado por el conocimiento explícito de  $R(t)$ , por lo tanto, algunas de ellas están cinemáticamente interconectadas. Por ejemplo, de la relación (1.14) se deduce que necesariamente el movimiento polar debe llevar asociado un movimiento de precesión y de nutación y, recíprocamente, las igualdades (1.19) muestran que el movimiento de precesión y el de nutación producen un movimiento polar. Por otra parte, la utilización de un sistema de referencia celeste basado en la eclíptica de la época y de un sistema de referencia terrestre de Tisserand, así como la parametrización en términos de los tres ángulos de Euler considerados, es sólo una de las múltiples elecciones posibles.

Desde el punto de vista de la Dinámica Analítica nuestra elección es conveniente, ya que, permite un planteamiento geométrico y dinámico del problema de la rotación de la Tierra especialmente simple. No obstante, la resolución efectiva de las ecuaciones diferenciales del movimiento de rotación a veces requiere introducir otros ángulos, diferentes a los de Euler, y considerar sistemas de referencia intermedios que hasta cierto punto tienen un carácter auxiliar, pero que están especialmente adaptados para la aplicación específica de algún método de resolución analítica o numérica (véase, por ejemplo, Kinoshita 1977).

<sup>12</sup>Observacionalmente se considera  $-y_p(t)$ .

<sup>13</sup>Length of Day (LOD).

El tratamiento del problema de la rotación en otro contexto distinto al de esta Investigación puede motivar el uso de convenciones diferentes que, por supuesto, están relacionadas con las que hemos expuesto anteriormente. Este es el caso cuando se estudia el problema de la rotación de la Tierra con el propósito de construir unas efemérides de rotación donde el objetivo primordial es el conocimiento preciso de la rotación  $\mathbf{R}(t)$ , independientemente de que este se haya obtenido empíricamente, mediante una representación matemática del movimiento o combinando ambos procedimientos. Para estos propósitos se suele escribir la rotación como

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{R}_3(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t), \quad (1.57)$$

donde las matrices  $\mathbf{W}(t)$ ,  $\mathbf{N}(t)$  y  $\mathbf{P}(t)$  son, a su vez, producto de ciertas matrices de rotación como las dadas por las relaciones (1.7) o (1.8). Esta parametrización se define teniendo en cuenta el movimiento de un vector auxiliar intermedio definido convencionalmente, junto con un origen de ascensiones rectas, y distinto a los que hemos considerado con anterioridad, de forma que las matrices  $\mathbf{N}(t)$  y  $\mathbf{P}(t)$  describen el movimiento de este vector auxiliar respecto al sistema de referencia celeste, la matriz  $\mathbf{R}_3(t)$  es una rotación cuyo eje coincide con el vector auxiliar y la matriz  $\mathbf{W}(t)$  proporciona el movimiento del mismo vector respecto al sistema de referencia terrestre. La descomposición anterior está relacionada con las partes del movimiento de rotación que se han definido previamente; así, las matrices  $\mathbf{N}(t)$  y  $\mathbf{P}(t)$  contienen parte del movimiento de nutación y de precesión,  $\mathbf{R}_3(t)$  está relacionada con la duración del día y, por último, la matriz  $\mathbf{W}(t)$  contiene parte del movimiento polar. Es preciso advertir que la identificación no es completa y depende del convenio utilizado para definir el vector auxiliar.

Por ejemplo, este se puede definir tratando de separar el movimiento de rotación en una parte predecible y otra parte impredecible (véanse, por ejemplo, Kinoshita et al. 1979, Seidelmann 1982<sup>14</sup>), según que estas puedan ser recuperadas con la suficiente precisión o no a través de un modelo matemático del movimiento de rotación. En esta situación, las matrices  $\mathbf{N}(t)$  y  $\mathbf{P}(t)$  provienen exclusivamente de considerar la parte del movimiento debida al movimiento de precesión y el movimiento forzado de nutación originado por la Luna, el Sol y los planetas, que puede ser modelada matemáticamente y es, por lo tanto, predecible. Así, el vector auxiliar queda definido como el vector resultante de aplicar la rotación  $\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)$  al vector  $\vec{E}_3$  del sistema de referencia celeste y, abusando del lenguaje, se llama polo de efemérides celeste<sup>15</sup> (véase, por ejemplo, Moritz y Mueller 1987).

<sup>14</sup>En este trabajo se pueden encontrar las convenciones utilizadas en la Teoría de la Nutación de la Unión Astronómica Internacional (UAI) de 1980.

<sup>15</sup>Celestial Ephemeris Pole (CEP).



En la actualidad<sup>16</sup> (IERS Conventions 2003, 2004) el vector auxiliar está definido por la condición de que si se descompone su movimiento de rotación en el sistema celeste de forma análoga a la utilizada en la igualdad (1.47), los periodos que aparezcan en esta descomposición deben ser exclusivamente mayores de dos días. El resto de términos son tenidos en cuenta al considerar el movimiento del vector auxiliar respecto al sistema de referencia terrestre. A la intersección de este vector con la esfera celeste se la llama polo intermedio celeste<sup>17</sup>, quedando el vector auxiliar definido por la aplicación de la matriz  $\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)$ , cuya descomposición sólo contiene periodos mayores de dos días, al vector  $\vec{E}_3$  del sistema de referencia celeste. Esta matriz contiene el movimiento de precesión y parte del movimiento de nutación, libre y forzado, definidos en el apartado (1.1.5). En cualquiera de los casos, las distintas convenciones consideran un modelo matemático del movimiento de rotación de la Tierra que es capaz de reproducir, con diferentes grado de aproximación, alguna parte de las matrices que aparecen en la relación (1.57).

Sin embargo, una expresión precisa de  $\mathbf{R}(t)$  requiere considerar ciertas correcciones empíricas que reflejen las irregularidades del movimiento de rotación o las discrepancias con los modelos matemáticos utilizados, y que provienen de mecanismos que no se han podido modelar teóricamente con la precisión suficiente. Usualmente, estas correcciones se especifican mediante cinco parámetros que se conocen como Parámetros de Orientación Terrestre<sup>18</sup>. En esencia, dos de ellos corrigen la posición del vector auxiliar en el sistema de referencia celeste, otros dos la posición del mismo vector en el sistema de referencia terrestre y el quinto el movimiento de rotación cuyo eje es el propio vector auxiliar. Estos parámetros son conocidos como celestial pole offsets (dos parámetros), polar motion (dos parámetros) y universal time (un parámetro). Sus valores son suministrados por el International Earth Rotation Service (IERS) e incorporados al movimiento de rotación según lo que se indica en IERS Conventions 2003 (2004).

### 1.1.6 No uniformidad del movimiento de rotación de la Tierra

Más allá de la consideración de que para los propósitos de esta Investigación la Tierra puede suponerse en primera aproximación como un cuerpo rígido, el

<sup>16</sup>Las convenciones actuales son fruto de las resoluciones adoptadas por la UAI en el año 2000. Se puede encontrar una explicación detallada de las definiciones que aparecen en estos convenios en los documentos elaborados por el grupo de trabajo de la UAI "Nomenclatura para la Astronomía Fundamental" (accesible en <http://syrtte.obspm.fr/iauWGnfa/>).

<sup>17</sup>Celestial Intermediate Pole (CIP).

<sup>18</sup>Earth Orientation Parameters (EOP).

planteamiento realizado hasta el momento no ha tenido en cuenta las conclusiones que se derivan de analizar las observaciones y medidas del movimiento de rotación de la Tierra. Sin embargo, esta información es valiosísima pues, aparte de validar nuestra representación matemática del movimiento, permite realizar ciertas aproximaciones que facilitan tanto la obtención de las ecuaciones diferenciales del movimiento de rotación como su posterior resolución. De otra forma, resolver el problema de la rotación con toda generalidad sería completamente inviable.

La conclusión más importante que se extrae de las observaciones es que el movimiento de rotación de la Tierra considerado a lo largo de intervalos temporales no demasiado grandes, por ejemplo a lo largo de un siglo, es aproximadamente uniforme. Por movimiento uniforme de rotación entendemos aquel en el que el eje de rotación  $\vec{a}$  permanece fijo respecto al sistema de referencia celeste y su ángulo es una función del tiempo dada por  $\alpha(t) = \Omega t + \phi_0$ . Para esta rotación, según la ecuación (1.15), el vector velocidad angular es

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\alpha}(t) \vec{a} = \Omega \vec{a}. \quad (1.58)$$

Es decir, la velocidad angular también es un vector constante respecto al mismo sistema de referencia. Utilizando las ecuaciones diferenciales que determinan el movimiento de rotación, se deriva que esta constancia del vector velocidad angular restringe enormemente las posibles configuraciones que puede adoptar el sistema de partículas que forman la Tierra. En particular, es necesario que la distancia entre estas partículas permanezca constante, esto es, que la Tierra sea un cuerpo rígido, y que las propiedades que la caracterizan mecánicamente tengan simetría esférica respecto al origen de coordenadas. Debido a la simetría esférica el tensor de inercia es proporcional a la identidad, es decir, cualquier sistema de referencia respecto al que las partículas de la Tierra permanezcan en reposo es un sistema de ejes principales en el que los tres momentos de inercia coinciden. Si por simplicidad escogemos de entre todos ellos como sistema de referencia terrestre aquel en el que el vector  $\vec{e}_3(t)$  coincida con el eje de rotación, tendremos que

$$\omega_1(t) = 0, \omega_2(t) = 0, \omega_3(t) = \Omega, \quad (1.59)$$

y por lo tanto según las relaciones (1.14) los ángulos de Euler vendrán dados por

$$\psi(t) = \psi_0, \varepsilon(t) = \varepsilon_0, \phi(t) = \Omega t + \phi_0, \quad (1.60)$$

donde  $\psi_0$ ,  $\varepsilon_0$  y  $\phi_0$  son valores constantes que sitúan el sistema terrestre respecto al sistema celeste, a partir de los cuales es posible también determinar la posición de  $\vec{a}$  respecto a este mismo sistema (ecuación 1.39).

El valor numérico de las constantes que caracterizan este movimiento de rotación uniforme se puede obtener, por ejemplo, promediando el movimiento  $R(t)$  a lo largo del intervalo temporal considerado. De esta forma obtendríamos para el caso de la Tierra que la oblicuidad respecto a la eclíptica  $\varepsilon_0$  es aproximadamente igual a  $23^\circ 26'$  y que la velocidad angular media de la Tierra  $\Omega$  es aproximadamente igual a  $7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ , que equivale a una duración del día sidéreo de unas 23 horas y 56 minutos. Los valores numéricos de  $\psi_0$  y  $\phi_0$  dependen de la forma en que se fijen los ejes  $\vec{E}_1$  y  $\vec{e}_1(t)$  del sistema celeste y terrestre, presentando un menor interés en esta descripción. Por lo tanto, si el movimiento de rotación es uniforme no hay ningún movimiento de precesión, ni de nutación, ni movimiento polar y la duración del día es constante. Más aún, de las igualdades (1.39), (1.40), (1.42) y considerando que, debido a la simetría esférica, el tensor de inercia es proporcional a la identidad, se deduce en esta situación que los tres ejes  $\vec{e}_3(t)$ ,  $\vec{e}_\omega(t)$  y  $\vec{e}_T(t)$  coinciden y permanecen en reposo respecto al sistema de referencia celeste y terrestre.

No obstante, el movimiento de rotación uniforme es tan sólo una aproximación. Las observaciones muestran que el movimiento de rotación de la Tierra se desvía ligeramente respecto a la rotación uniforme. Estas desviaciones se han ido descubriendo a lo largo de los siglos gracias a la progresiva mejora de las técnicas observacionales, de forma que con el paso del tiempo se han determinado las diferentes partes del movimiento de rotación, es decir, los movimientos de precesión y nutación, el movimiento polar y la duración del día, al mismo tiempo que se iba aumentando la precisión en su medida. De hecho, hoy en día la combinación de los datos proporcionados por el Very Long Baseline Interferometry (VLBI), Satellite Laser Ranging (SLR) y Global Position System (GPS) permite determinar los coeficientes de las relaciones (1.50) con una precisión de unos 200 microsegundos de arco ( $\mu\text{as}$ ), estimando el International VLBI Service (IVS) que en los próximos años la precisión pueda alcanzar los 20 microsegundos de arco.

En particular, las observaciones muestran que la parte principal del movimiento de precesión viene dada por

$$P_\psi(t) \sim \psi_0 + n_\psi t, \quad P_\varepsilon(t) \sim \varepsilon_0, \quad (1.61)$$

es decir, la oblicuidad permanece aproximadamente constante, en tanto que la precesión en longitud tiene un periodo asociado,  $2\pi/|n_\psi|$ , de unos 26000 años<sup>19</sup>, de donde se sigue que el movimiento de precesión de la Tierra es

<sup>19</sup>La precesión en longitud fue la primera desviación respecto a la rotación uniforme que se descubrió. Su descubrimiento se atribuye al astrónomo griego Hiparco, en torno al segundo siglo antes de Jesucristo.

extremadamente lento. En el caso del movimiento de nutación<sup>20</sup>, los términos de mayor magnitud son (véase, por ejemplo, IERS Conventions 2003, 2004)<sup>21</sup>

$$\begin{aligned}\Delta\psi(t) \equiv N_\psi(t) &\sim +17.2'' \cos \bar{\Omega} + 1.3'' \cos (2F - 2D + 2\bar{\Omega}), \\ \Delta\varepsilon(t) \equiv N_\varepsilon(t) &\sim -9.2'' \cos \bar{\Omega} - 0.6'' \cos (2F - 2D + 2\bar{\Omega}),\end{aligned}\quad (1.62)$$

aunque en la descomposición del movimiento hay términos de muy diferentes periodos. Recordemos que los argumentos que aparecen en las relaciones anteriores son combinaciones lineales de las variables de Delaunay de la Luna y el Sol (ecuación 1.52).

En lo que se refiere al movimiento polar y a la variación de duración del día,  $\Delta LOD(t)$ , los órdenes de magnitud son (véase, por ejemplo, Moritz y Mueller 1987)

$$\frac{\omega_1(t)}{\Omega} \sim 10^{-6}, \quad \frac{\omega_2(t)}{\Omega} \sim 10^{-6}, \quad \frac{\Delta LOD(t)}{LOD_0} \sim -10^{-8},\quad (1.63)$$

siendo  $LOD_0 = 2\pi/\Omega$  la duración del día en el caso del movimiento de rotación uniforme. Como se ha dicho estos movimientos también admiten una descomposición en forma de cuasi polinomio; en el caso del movimiento polar la parte más importante está asociada con un término periódico cuyo periodo es de unos 433 días, conocido como periodo de Chandler y debido a las interacciones internas. La variación de la duración del día también se puede descomponer en términos de diversos periodos y una parte secular; respecto a esta última se estima que la duración del día se incrementa en unos dos milisegundos por siglo (véase, por ejemplo, Wahr 1988). Finalmente, de las observaciones también se deduce que aunque los tres ejes  $\vec{e}_3(t)$ ,  $\vec{e}_\omega(t)$  y  $\vec{e}_L(t)$  ya no son coincidentes, no se alejan demasiado en el movimiento, ya que si definimos los ángulos  $\gamma(t)$  y  $\sigma(t)$  mediante las relaciones

$$\vec{e}_3(t) \cdot \vec{e}_\omega(t) = \cos \gamma(t), \quad \vec{e}_3(t) \cdot \vec{e}_L(t) = \cos \sigma(t),\quad (1.64)$$

se tiene que  $\gamma(t) \sim 10^{-6} rad$  y  $\sigma(t) \sim 10^{-6} rad$  (Kinoshita 1977).

Según lo expuesto anteriormente, este alejamiento respecto al movimiento uniforme podría explicarse dinámicamente por el hecho de que ni la condición de que la Tierra sea un cuerpo rígido, ni la de que tenga simetría mecánica esférica se satisfacen exactamente, lo que causaría una modificación en las ecuaciones diferenciales del movimiento. No obstante, los efectos producidos por la falta de simetría esférica y por la no rigidez de la Tierra no contribuyen

<sup>20</sup>Este movimiento fue detectado por primera vez por el astrónomo inglés Bradley en 1748.

<sup>21</sup>Observacionalmente se determinan los ángulos  $-\psi(t)$  y  $-\varepsilon(t)$ .

equitativamente a explicar tales desviaciones respecto a la rotación uniforme. De hecho, éstas son fundamentalmente debidas a los momentos gravitatorios que la Luna y el Sol ejercen sobre la Tierra y que existen como consecuencia del abultamiento del ecuador terrestre, que causa la pérdida de la simetría esférica de la Tierra<sup>22</sup>. Así pues, un modelo de Tierra rígido pero no esférico, es decir, con un tensor de inercia de la forma (1.38), explica gran parte de las desviaciones del movimiento de rotación de la Tierra sobre la rotación uniforme. Sin embargo, un conocimiento preciso de este movimiento que se ajuste a los datos proporcionados por las observaciones y que dé cuenta de todas sus características requiere también considerar la no rigidez de la Tierra pues, además de explicar aspectos cualitativamente distintos del movimiento de rotación como, por ejemplo, el incremento en la duración del día, modifica los valores del movimiento de rotación obtenidos con el modelo rígido como se explicó en el apartado (1.1.5).

En este sentido, se debe recordar que tal precisión en el conocimiento del movimiento de rotación de la Tierra es fundamental para establecer el sistema de referencia terrestre respecto al espacio y, por lo tanto, para determinar con precisión la posición de cualquier cuerpo celeste respecto a un observador situado en la superficie de la Tierra. Así, la mejora en la capacidad de predicción del movimiento de rotación es esencial para el desarrollo, entre otras, de la Radioastronomía, la Geodesia o la Navegación Celeste. Esta mejora en la capacidad de predicción del movimiento requiere ineludiblemente una mejora en la representación matemática del movimiento de rotación, pues como se ha señalado en la sección anterior los procesos de reducción de datos utilizan un modelo teórico de referencia.

Por otra parte, puesto que en cierta medida el movimiento de rotación de la Tierra es consecuencia de su no rigidez, las observaciones de este movimiento contienen información que puede ser utilizada para estimar algunas propiedades o procesos que atañen a la estructura interna del planeta y a las interacciones que experimenta (Chao 2001).

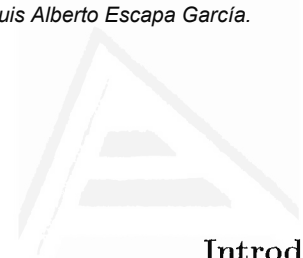
Todo ello ha motivado que a lo largo de la historia se hayan desarrollado representaciones matemáticas del movimiento de rotación de la Tierra cada vez más complejas que trataban de dar cuenta de los cada vez más precisos datos observacionales<sup>23</sup>, aunque se debe señalar que en el caso del movimiento de la rotación de la Tierra casi siempre la precisión en las observaciones ha ido por delante de los modelos teóricos del movimiento de rotación.

---

<sup>22</sup>Básicamente, esta explicación fue la dada por el astrónomo, físico y matemático inglés Sir Isaac Newton en los Principia (1687) para justificar la existencia del movimiento de precesión.

<sup>23</sup>En Ekman (1993) se puede encontrar un resumen histórico sobre la evolución de las teorías de las mareas, la precesión y la nutación y el movimiento polar hasta 1950.





## 1.2 Estudio de la rotación de la Tierra mediante el formalismo hamiltoniano

Según se ha establecido en la sección anterior, la determinación del movimiento de rotación de la Tierra pasa por la construcción y resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que describa dinámicamente el comportamiento del sistema de partículas a partir del cual se define el sistema de referencia terrestre. Existen diferentes formas de construir estas ecuaciones (véanse, por ejemplo, Kinoshita y Sasao 1989, Mathews y Shapiro 1992, Escapa et al. 2001).

Quizá la más completa es la que considera a la Tierra como un sistema mecánico continuo y calcula el campo de desplazamientos, con respecto a un estado de referencia, existente en cada punto del interior terrestre. A partir de este campo de desplazamientos se puede determinar el movimiento de rotación de la Tierra (véase la sección 1.1.3), aunque como es lógico el conocimiento del campo de desplazamientos contiene mucha más información que la que se refiere a dicho movimiento. Este es el procedimiento seguido en las teorías de los modos propios elástico-gravitacionales de la Tierra desarrollada por Smith (1977) y Wahr (1982). No obstante, este tipo de modelos del movimiento de rotación han sido abandonados en los veinte últimos años debido, entre otras causas, a la dificultad de compaginar el carácter esencialmente numérico de los mismos con las incertidumbres existentes sobre los parámetros que caracterizan el interior terrestre.

Otra forma de construir las ecuaciones diferenciales del movimiento se basa en generalizar, en cierto sentido, las ecuaciones de la dinámica de rotación del cuerpo rígido, de forma que el movimiento de rotación de la Tierra se describa considerando movimientos de rotación independientes de sus partes internas (véase la sección 1.2.2). Obviamente, estos modelos son más sencillos que los anteriores, puesto que desde un primer momento se centran únicamente en el estudio del movimiento de rotación. Este hecho permite que la evolución del sistema pueda ser descrita mediante un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias, aunque para plantear la forma final de estas ecuaciones puede ser preciso resolver de manera independiente y desacoplada del movimiento de rotación los movimientos de deformación de la Tierra (Kinoshita y Sasao 1989). Este tipo de modelos son los utilizados en la actualidad para obtener teorías precisas del movimiento de rotación de la Tierra (véanse, por ejemplo, Mathews et al. 2002, Getino y Ferrándiz 2000b, 2001) A su vez, dentro de este grupo de teorías existen distintos procedimientos para construir las ecuaciones del movimiento, según que se obtengan mediante la Mecánica Vectorial o los Principios Variacionales de

la Mecánica, aunque en nuestra opinión las teorías variacionales presentan muchas más ventajas<sup>24</sup> (véase, por ejemplo, Moritz 1982 y la sección 2.1).

Los Principios Variacionales de la Mecánica están basados en el principio de Hamilton o de la acción estacionaria (véase, por ejemplo, Whittaker 1988), según el cual el movimiento de un sistema dinámico<sup>25</sup> es tal que hace estacionario el funcional acción<sup>26</sup>

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt. \quad (1.65)$$

En esta expresión  $T$  y  $V$  son dos funciones que caracterizan el sistema dinámico, llamadas energía cinética del sistema y energía potencial del sistema. En determinadas situaciones es necesario considerar ciertas funciones adicionales además de  $T$  y  $V$ , que se denominan fuerzas generalizadas (véase la siguiente sección).

A partir del principio anterior y utilizando las técnicas estándar del Cálculo de Variaciones se obtienen las ecuaciones del movimiento que determinan la evolución del sistema. No obstante, debemos señalar que estas ecuaciones del movimiento pueden adoptar diferentes formas según las variables utilizadas para describir el sistema dinámico, dando lugar a distintas formulaciones como la de Lagrange, la de Hamilton o la de Poincaré<sup>27</sup>. Así mismo, estas formulaciones no son matemáticamente equivalentes. En concreto, la formulación hamiltoniana está especialmente adaptada para utilizar los métodos de perturbaciones (véase, por ejemplo, Hori 1966) que permiten resolver de forma efectiva las ecuaciones de movimiento.

En lo que se refiere al estudio del movimiento de rotación de la Tierra, estas tres formulaciones han sido utilizadas por distintos autores, obteniendo representaciones del movimiento de rotación tanto para modelos rígidos como no rígidos de igual precisión, o superior, que las conseguidas por otras teorías construidas con métodos no variacionales. Sin ánimo de ser exhaustivos, no podemos dejar de nombrar los trabajos de Woolard (1953) y Jeffreys y Vicente (1957a, 1957b), donde mediante un formalismo lagrangiano se determinó el movimiento de rotación para un modelo rígido y no rígido de

<sup>24</sup>En Lanczos (1986) se analizan desde una perspectiva general los beneficios de los métodos variacionales.

<sup>25</sup>Por sistema dinámico entendemos cualquier conjunto de objetos cuyo estado se pueda describir mediante ciertas funciones que varíen con el tiempo.

<sup>26</sup>Por simplicidad consideramos la acción para un sistema dinámico holónomo conservativo, aunque el principio de Hamilton puede extenderse a otros sistemas más generales (véanse, por ejemplo, Whittaker 1988, Lanczos 1986).

<sup>27</sup>Aunque la denominación no es estándar, por formulación de Poincaré nos referimos a aquella en la que la descripción del sistema dinámico se realiza mediante cuasi coordenadas (Whittaker 1988).

la Tierra, respectivamente; o las investigaciones de Kinoshita (1977), Kubo (1979, 1991), Sevilla y Romero (1987), Getino (1989, 1995b), y Getino y Ferrándiz (1995, 1997, 1999, 2000b, 2001), que utilizaron la formulación de Hamilton para modelos rígidos, en el caso de Kinoshita, y no rígidos de distinta naturaleza. La formulación de Poincaré también ha sido aplicada para estudiar la representación matemática de la rotación de diferentes modelos de Tierra no rígida, aunque con mucha menos frecuencia que las otras formulaciones. De hecho, las únicas referencias que conocemos son los trabajos de Poincaré (1910), Moritz (1982) y Escapa et al. (2002).

En esta Investigación utilizaremos el formalismo hamiltoniano para obtener un modelado matemático del movimiento de rotación de la Tierra. Este procedimiento para estudiar la rotación de una Tierra no rígida fue desarrollado por Getino y Ferrándiz a finales de los años 80, generalizando la teoría de la rotación de la Tierra rígida publicada por Kinoshita en 1977. Dicho formalismo es capaz de incorporar las diferentes características de los modelos de Tierra (estructura de capas, disipación, elasticidad, etc.) y proporciona una solución analítica aproximada, auto contenida e independiente de cualquier modelo ajeno a la propia teoría, para los movimientos de precesión y nutación, el movimiento polar y la duración del día. El grado de aproximación de las soluciones obtenidas se puede incrementar mediante la aplicación recurrente de las técnicas de perturbaciones basadas en la serie de Lie, lo cual constituye una importante ventaja de este método frente a cualquier otro.

### 1.2.1 Mecánica hamiltoniana

En esta sección presentaremos de forma somera algunos aspectos relativos a la formulación hamiltoniana de la Mecánica que son relevantes para el desarrollo de esta Investigación. Una exposición más detallada puede encontrarse, por ejemplo, en Whittaker (1988), Goldstein (1980), Arnold (1983) o Cid y Camarena (1979). Prestaremos una atención especial a la inclusión de las fuerzas generalizadas, o fuerzas canónicas, en el formalismo hamiltoniano, puesto que este aspecto rara vez se aborda en los textos de Mecánica (dos excepciones son los libros de Mecánica Celeste de Brower y Clemence 1961 y Stiefel y Scheifele 1971).

#### Ecuaciones de Hamilton

Recordemos que la descripción de la evolución temporal de un sistema dinámico holónomo de  $n$  grados de libertad puede realizarse mediante las ecuaciones de Lagrange, es decir, a través del sistema de ecuaciones diferenciales

ordinarias

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial q_i} = Q_{q_i}(\dot{q}, q, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.66)$$

con las condiciones iniciales  $q_i(t_0) = q_{i0}$  y  $\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}$ . En estas igualdades  $q_i$  es la  $i$ -ésima coordenada generalizada del sistema y  $\dot{q}_i$  la correspondiente velocidad generalizada.  $L(\dot{q}, q, t)$  es la lagrangiana o función de Lagrange del sistema, cuya expresión es

$$L(\dot{q}, q, t) = T(\dot{q}, q, t) - V(\dot{q}, q, t), \quad (1.67)$$

donde  $T$  y  $V$  son, respectivamente, la energía cinética y la energía potencial del sistema. Finalmente,  $Q_{q_i}(\dot{q}, q, t)$  es la fuerza generalizada asociada a la coordenada  $q_i$ . La inclusión de las fuerzas generalizadas en la ecuación (1.66) es necesaria si alguna de las fuerzas ejercidas sobre el sistema no se puede obtener a partir de una función potencial. Las fuerzas generalizadas se calculan evaluando el trabajo virtual realizado por las fuerzas que actúan sobre el sistema en un desplazamiento virtual<sup>28</sup> del mismo.

Es conveniente introducir la cantidad de movimiento canónica o momento canónico conjugado de la coordenada  $q_i$ , definida a través de la ecuación

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}, q, t). \quad (1.68)$$

Si la energía potencial no depende de las velocidades generalizadas en esta ecuación podremos substituir la función de Lagrange por la energía cinética del sistema. En este caso los momentos canónicos se identificarán con los momentos mecánicos del sistema.

Por distintos motivos, es conveniente describir el sistema dinámico en términos de un conjunto de  $2n$  variables que se conocen como variables canónicas. Estas están formadas por los  $n$  pares de coordenadas generalizadas junto con sus momentos canónicos asociados, considerados estos como variables independientes. A las variables  $p_i, q_i$  se las denomina variables canónicamente conjugadas. En términos de las variables canónicas el comportamiento dinámico del sistema viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (véase Cid y Camarena 1979)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_{q_i}, \\ \frac{d}{dt} q_i = \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

<sup>28</sup>Un desplazamiento virtual es un vector tangente a la variedad de configuración del sistema dinámico considerado (Arnold 1983).

con las condiciones iniciales  $p_i(t_0) = p_{i0}$  y  $q_i(t_0) = q_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En estas igualdades  $H$  es el hamiltoniano o función de Hamilton del sistema, de expresión

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}(p, q, t), q, t) = H(p, q, t). \quad (1.70)$$

Señalemos que tanto en la ecuación (1.70) como en la expresión de las fuerzas generalizadas que aparecen en (1.69) las velocidades generalizadas han de ser consideradas como funciones de los momentos, de las coordenadas y del tiempo, es decir  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t)$ . Estas funciones se obtienen invirtiendo las ecuaciones (1.68), lo cual es posible siempre que la matriz hessiana de  $L$  respecto a  $\dot{q}$  sea regular. Las ecuaciones (1.69) son las ecuaciones de Hamilton.

### Transformaciones canónicas

Una de las principales ventajas que aporta la descripción dinámica de un sistema a través de las ecuaciones de Hamilton es que permite realizar cambios de variables más generales que los permitidos con las ecuaciones de Lagrange, lo que posibilita el desarrollo de nuevos métodos teóricos, como el de Hamilton-Jacobi o los métodos de perturbaciones, que ayudan a resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento. Así, es habitual considerar cambios de variables dados por las ecuaciones

$$P_i = P_i(p, q, t), \quad Q_i = Q_i(p, q, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.71)$$

donde supondremos que las funciones que aparecen en estas relaciones son difeomorfismos de clase  $\mathcal{C}^2$  en un cierto abierto conexo de  $\mathbb{R}^{2n}$ . No obstante, de entre todos los posibles cambios de variable los más importantes son los que verifican la relación diferencial (véase, por ejemplo, Arnold 1983)

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - H dt - P_i dQ_i + K dt) = dS. \quad (1.72)$$

En esta ecuación  $K$  es el hamiltoniano en el sistema de variables  $P$ ,  $Q$ , y  $S$  es una función  $S = S(p, q, t)$ . Si  $S$  se puede escribir en función de las coordenadas iniciales y de las transformadas, como por ejemplo considerando  $S = S(q, Q, t)$ , es posible recuperar la transformación canónica a partir de  $S$ . En este caso, a  $S$  se la llama función generatriz de la transformación (véase, por ejemplo, Goldstein 1980). A una transformación (1.71) que satisfaga la condición<sup>29</sup> (1.72) se la denomina transformación canónica.

<sup>29</sup>Existen otras formas equivalentes de caracterizar las transformaciones canónicas (véanse, por ejemplo, Goldstein 1980, Arnold 1983).

En algunas situaciones es posible interpretar geoméricamente la ecuación (1.72), lo que ayuda a una mejor comprensión de la transformación, relacionando las nuevas variables  $(P, Q)$  con alguna característica física del sistema dinámico que describen. Tal es el caso de un tipo especial de transformaciones canónicas<sup>30</sup> construidas por Andoyer (1923). En esta construcción se parte de un conjunto conocido a priori de  $2n$  variables auxiliares  $\alpha_k$  que está relacionado con las coordenadas canónicas iniciales por las ecuaciones

$$q_i = q_i(\alpha_k, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.73)$$

al tiempo que se introducen unas funciones definidas por

$$J_u = \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial u}. \quad (1.74)$$

En esta relación,  $u$  denota la variable auxiliar  $\alpha_k$  o el tiempo  $t$  y  $F$  es una función arbitraria de estas mismas variables. Hagamos  $F = 0$ , si sucede que las ecuaciones (1.74) se reducen a

$$J_{\alpha_k} = 0, \quad J_{\alpha_{n+k}} = f_k(\alpha_k, t) \quad \text{con } 1 \leq k \leq n, \quad (1.75)$$

entonces es posible definir unas nuevas variables

$$P_k = f_k(\alpha_k, t), \quad Q_k = \alpha_{k+n} \quad (1.76)$$

que forman un conjunto canónico. En efecto, diferenciando las ecuaciones (1.73) se tiene que

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{j=1}^{2n} \left( \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) d\alpha_j + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} dt, \quad (1.77)$$

que con la ayuda de las ecuaciones (1.75) y (1.76) se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{k=1}^n J_{\alpha_{n+k}} d\alpha_{n+k} + J_t dt = \sum_{k=1}^n P_k dQ_k + J_t dt. \quad (1.78)$$

<sup>30</sup>Estas transformaciones están estrechamente relacionadas con las extensiones canónicas y con las transformaciones de Mathieu (Whittaker 1988). Con frecuencia en Mecánica Celeste sucede que por motivos dinámicos o geométricos es ventajoso tomar unas ciertas funciones como coordenadas o momentos de un nuevo conjunto canónico, que por lo demás es arbitrario. Así, se llama extensión canónica al procedimiento de completar las variables escogidas a priori con otras, de forma que el conjunto resultante sea un conjunto canónico.

Según la ecuación (1.72) la igualdad anterior asegura que la transformación  $(p, q) \rightarrow (P, Q)$  es canónica; baste para ello considerar

$$K = H - J_t. \quad (1.79)$$

Lo importante de este tipo particular de transformaciones es la interpretación geométrica que se le puede asignar a las funciones  $J_u$  con  $F = 0$ . Así, si una partícula se mueve respecto a un sistema de referencia inercial y describimos este movimiento en función las variables auxiliares  $\alpha_k$  y el tiempo, entonces (Andoyer 1923) se tiene que

$$J_u = \vec{p} \cdot \vec{V}_u, \quad (1.80)$$

donde  $u = \alpha_k$  ó  $t$ . En esta igualdad  $\vec{p}$  es el momento lineal de la partícula y  $\vec{V}_u$  es la velocidad asociada al movimiento en el que sólo varía la variable  $u$ , permaneciendo el resto inalteradas. En esta situación la ecuación (1.77) se escribirá como

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{k=1}^{2n} J_{\alpha_k} d\alpha_k + J_t dt = \vec{p} \cdot \left( \sum_{k=1}^{2n} \vec{V}_u d\alpha_k + \vec{V}_t dt \right) = \vec{p} \cdot d\vec{r}, \quad (1.81)$$

donde  $d\vec{r}$  es el vector desplazamiento infinitesimal asociado a la diferencial del movimiento. Es decir, la partícula lleva asociada una forma diferencial de carácter geométrico que por venir dada como un producto escalar tendrá el mismo valor en cualquier conjunto canónico. Si además las relaciones (1.80) verifican las condiciones (1.75) podremos definir un nuevo conjunto canónico a partir de esta ecuación. Este hecho nos permitirá probar la canonicidad de este tipo de transformaciones y dotar a las variables canónicas de un significado geométrico o dinámico. En el caso en el que el movimiento de la partícula sea un movimiento de rotación, y según la ecuación (1.25), podremos escribir

$$\vec{V}_u = \vec{\omega}_u \times \vec{r}, \quad d\vec{r} = d\vec{R} \times \vec{r}. \quad (1.82)$$

Con lo que la igualdad (1.81) adoptará la forma

$$\vec{p} \cdot d\vec{r} = \vec{p} \cdot (d\vec{R} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot d\vec{R} = \vec{L} \cdot d\vec{R}, \quad (1.83)$$

donde  $\vec{L}$  es el momento angular de la partícula respecto al punto  $O$ . De forma análoga se tendrá

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \left( \sum_{k=1}^{2n} \vec{V}_u d\alpha_k + \vec{V}_t dt \right) &= \vec{p} \cdot \left[ \sum_{k=1}^{2n} (\vec{\omega}_u \times \vec{r}) d\alpha_k + (\vec{\omega}_u \times \vec{r}) dt \right] = \\ &= \vec{L} \cdot \left( \sum_{k=1}^{2n} \vec{\omega}_u d\alpha_k + \vec{\omega}_t dt \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Así, en el caso de la dinámica de la rotación la relación (1.81) pasa a ser

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \vec{L} \cdot \left( \sum_{k=1}^{2n} \vec{\omega}_u d\alpha_k + \vec{\omega}_t dt \right) = \vec{L} \cdot d\vec{R}. \quad (1.85)$$

### Sistema canónico general

Al realizar un cambio de variable las ecuaciones de movimiento se deberían modificar. No obstante, si la transformación es canónica las ecuaciones del movimiento mantienen la forma de las ecuaciones de Hamilton, esto es, su forma canónica. En concreto, en las variables  $(P, Q)$  estas ecuaciones son (véase, por ejemplo, Cid y Camarena 1979)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_i \equiv \dot{P}_i &= - \frac{\partial K}{\partial Q_i} + Q_{Q_i}, \\ \frac{d}{dt} Q_i \equiv \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} - Q_{P_i}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

donde el hamiltoniano transformado se puede escribir como

$$K = H + R, \quad (1.87)$$

siendo  $R$  la función complementaria o función resto. Esta función aparece únicamente si las ecuaciones (1.71) dependen del tiempo (Cid y Camarena 1979).

Análogamente, las fuerzas generalizadas en el conjunto  $(P, Q)$  están relacionadas con las fuerzas generalizadas en el conjunto  $(p, q)$ . Escribiendo estas fuerzas en forma de matriz columna

$$\mathbf{Q}_P = \begin{pmatrix} Q_{P_1} \\ \vdots \\ Q_{P_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_Q = \begin{pmatrix} Q_{Q_1} \\ \vdots \\ Q_{Q_n} \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

se tiene la igualdad

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_P \\ \mathbf{Q}_Q \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_q \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

siendo  $\mathbf{J}$  la matriz jacobiana de la transformación y  $\mathbf{\Gamma}$  la matriz simpléctica<sup>31</sup>

<sup>31</sup>La matriz simpléctica verifica las propiedades  $\mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Gamma}^t = -\mathbf{\Gamma}$  y  $\det \mathbf{\Gamma} = 1$ .



de dimensión  $2n$ . Es decir

$$\mathbf{J} = \frac{\partial (P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)}{\partial (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{1}_{n \times n} \\ -\mathbf{1}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

Notemos que a diferencia de las ecuaciones iniciales (1.69), en las ecuaciones (1.86) aparecen fuerzas generalizadas tanto para los momentos como para las coordenadas, es decir, en general las fuerzas  $Q_P$  serán distintas de cero. Este hecho es consecuencia de que la transformación canónica mezcla las coordenadas y los momentos, de forma que  $Q$  no es una coordenada generalizada en el sentido que se le da a este término en la formulación lagrangiana.

Las ecuaciones (1.86) tienen la forma más general que pueden tomar las ecuaciones de Hamilton. Siguiendo a Stiefel y Scheifele (1971), a un sistema canónico descrito por las variables  $P, Q$  y que responda estas ecuaciones (1.86) se le denomina sistema canónico general, siendo  $K$  el hamiltoniano del sistema y  $Q_{Q_i}, Q_{P_i}$  las fuerzas canónicas.

Incidentalmente señalemos que la matriz simpléctica introducida en la ecuación (1.89) permite caracterizar de forma alternativa las transformaciones canónicas. En concreto, se tiene (véase, por ejemplo, Goldstein 1980) que una transformación es canónica si, y sólo si, su jacobiano  $\mathbf{J}$  verifica para todo valor del tiempo que

$$\mathbf{J}\Gamma\mathbf{J}^t = \Gamma. \quad (1.91)$$

Esta es una forma sencilla de comprobar la canonicidad de una transformación cuando se conocen explícitamente las funciones (1.71). Este es el caso de las transformaciones consideradas en las secciones (2.3.2) y (3.4.1).

### Corchete de Poisson

Otra de las ventajas de las ecuaciones de Hamilton es que utilizando estas es posible calcular fácilmente la evolución temporal de una función  $f$  dependiente de un conjunto canónico de variables y del tiempo. Para ello es

conveniente introducir el llamado paréntesis de Poisson. El paréntesis de Poisson de dos funciones viene definido por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (1.92)$$

formando  $(p, q)$  un conjunto canónico de variables. El paréntesis de Poisson satisface muchas propiedades interesantes (véase, por ejemplo, Goldstein 1980) y tiene una gran importancia en lo que se refiere a la estructura conceptual de la Mecánica. Para nuestros propósitos será útil recordar que

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{(p, q)} &= \{f, g\}_{(P, Q)} \\ \{p_i, q_j\} &= \delta_{i,j}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \end{aligned} \quad (1.93)$$

siendo  $\delta_{i,j}$  la delta de Kronecker. La primera propiedad afirma que el corchete de Poisson es invariante ante una transformación canónica. La segunda se refiere a la condición que deben verificar las variables  $p$  y  $q$  para que formen un conjunto canónico y se deriva de la definición del corchete de Poisson, así como de la primera propiedad. Estas propiedades también sirven para caracterizar una transformación canónica (véase, por ejemplo, Goldstein 1980).

Con estas notaciones, la evolución temporal de una función  $f = f(P, Q, t)$  se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.94)$$

que teniendo en cuenta la expresión de  $\dot{P}_i$  y  $\dot{Q}_i$  dada por las ecuaciones (1.86) se transforma en

$$\frac{d}{dt}f = \{f, K\} + \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial Q_i} Q_{P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} Q_{Q_i} \right), \quad (1.95)$$

Si en esta expresión se substituye  $f$  por  $P_i$  ó  $Q_i$  recuperamos las ecuaciones de un sistema canónico general, ecuaciones (1.86).

### Fuerzas canónicas

En resumen, la descripción de la evolución temporal de un sistema dinámico mediante el formalismo hamiltoniano se puede realizar planteando un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que depende del conjunto canónico utilizado (ecuaciones 1.86). Sin embargo, la forma explícita que tienen tanto el hamiltoniano como las fuerzas canónicas del sistema en función

de las variables canónicas es, en principio, desconocida. La expresión de estas funciones se puede obtener considerando inicialmente unas variables canónicas de forma que sus coordenadas  $q_i$  sean verdaderas coordenadas generalizadas y construir el hamiltoniano y las fuerzas generalizadas partiendo de la formulación lagrangiana. Posteriormente, utilizando una transformación canónica que relacione este conjunto auxiliar con el conjunto canónico será posible encontrar el hamiltoniano y las fuerzas canónicas mediante las ecuaciones (1.87) y (1.89). Es claro que este método requiere de un trabajo adicional, puesto que se necesita formular el problema en términos de un conjunto intermedio de variables.

No obstante, el procedimiento se puede abreviar con las siguientes consideraciones. En la mayoría de los casos (Goldstein 1980) el hamiltoniano del sistema coincide con la suma de las energías cinética y potencial del mismo, por lo que si es posible escribir estas funciones en términos de las variables canónicas, se conocerá la forma explícita del hamiltoniano. Esto sucederá, por ejemplo, si es posible obtener relaciones entre el conjunto canónico y las cantidades geométricas, cinemáticas o dinámicas, en términos de las cuales siempre se pueden expresar las energías cinéticas y potencial del sistema. Por otro lado, la construcción de las fuerzas canónicas se simplifica si tenemos en cuenta el siguiente razonamiento. Como se ha mencionado, en la formulación lagrangiana las fuerzas generalizadas se calculan a través del trabajo virtual realizado por las fuerzas  $\vec{F}$  que actúan sobre el sistema en un desplazamiento virtual  $\delta\vec{r}$  del mismo, es decir, mediante la igualdad

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \sum_{i=1}^n Q_{q_i}(\dot{q}, q, t) \delta q_i. \quad (1.96)$$

Si expresamos esta igualdad en términos de las variables canónicas  $p$  y  $q$  utilizando las relaciones (1.68), tendremos que

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \sum_{i=1}^n Q_{q_i}(\dot{q}(p, q, t), q, t) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_{q_i}(p, q, t) \delta q_i. \quad (1.97)$$

Consideremos ahora una transformación canónica dada por las ecuaciones (1.71). De estas ecuaciones se deduce que

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) \delta P_j + \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \delta Q_j, \quad (1.98)$$

y, por lo tanto, el trabajo virtual se podrá reescribir como

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n Q_{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right) \delta P_j + \left( \sum_{i=1}^n Q_{q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right) \delta Q_j. \quad (1.99)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la igualdad (1.71), se observa que las cantidades que aparecen multiplicando a  $\delta P_j$  y a  $\delta Q_j$  son las fuerzas canónicas  $Q_{P_j}$  y  $Q_{Q_j}$ , respectivamente. Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^n Q_{P_i} \delta P_i + Q_{Q_i} \delta Q_i. \quad (1.100)$$

Es decir, las fuerzas canónicas de un sistema canónico general pueden obtenerse expresando el trabajo virtual en términos del conjunto canónico (véase la sección 3.3.2). Esto será posible si las fuerzas y los desplazamientos del sistema se pueden escribir directamente en términos de las variables canónicas, tarea que se facilita si este conjunto posee algún significado geométrico o dinámico. Si este no es el caso, habrá que construir las fuerzas generalizadas a través de un conjunto canónico intermedio y aplicar las relaciones (1.89). Si el desplazamiento virtual del sistema dinámico se deriva de una rotación del sistema (ecuación 1.25), tendremos que

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{R} \times \vec{r}, \quad (1.101)$$

siendo  $\delta \vec{R}$  el vector asociado a una rotación virtual del sistema. Así, el trabajo virtual se puede calcular como

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \delta W = \vec{F} \cdot (\delta \vec{R} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \delta \vec{R} = \vec{N} \cdot \delta \vec{R}, \quad (1.102)$$

donde  $\vec{N}$  es el denominado momento o torque de la fuerza  $\vec{F}$  respecto al punto  $O$ . En este caso a las fuerzas generalizadas también se las llama momentos o torques generalizados.

### 1.2.2 Energía cinética, potencial y momentos generalizados

Como se ha visto en la sección anterior, la determinación del movimiento de rotación de la Tierra mediante un formalismo hamiltoniano, y en general mediante cualquier formalismo basado en los Principios Variacionales de la Mecánica, precisa del conocimiento de las siguientes funciones: la energía cinética del sistema, la energía potencial del sistema y los momentos generalizados. A su vez, estas funciones dependen de las interacciones externas e internas a las que estén sometidas las partículas que componen la Tierra. La descripción dinámica de estas interacciones variará según las características del modelo de Tierra considerado.

En este sentido cabe señalar que el análisis de diferentes datos sismológicos ha permitido construir distintos modelos del interior de la Tierra (véase, por ejemplo, Ahrens 1995). De estos estudios se deduce que las propiedades que caracterizan físicamente a la Tierra, como la densidad o los parámetros de Lamé, poseen una simetría cuasi esférica, es decir, son de la forma

$$\mathcal{P}(\vec{r}) = \mathcal{P}_0(r) + \delta\mathcal{P}(\vec{r}), \quad (1.103)$$

donde  $\mathcal{P}$  denota una propiedad cualquiera del interior terrestre dependiente del vector de posición  $\vec{r}$  con origen en el geocentro. El hecho de que los modelos sean cuasi esféricos implica que  $\delta\mathcal{P}(\vec{r})$  es pequeña frente a la parte esférica de la propiedad,  $\mathcal{P}_0(r)$ . De forma abreviada, esta característica se puede representar empleando una notación asintótica como  $\delta\mathcal{P}(\vec{r}) \sim O(1)$ , entendiéndose que si nuestro modelo se aproximara a uno con simetría esférica, el cociente entre  $\delta\mathcal{P}(\vec{r})$  y  $\mathcal{P}_0(r)$  tendería a cero<sup>32</sup>.

Los modelos terrestres muestran que, a grandes rasgos, el interior de la Tierra se puede dividir en tres zonas: el manto, el núcleo externo líquido y el núcleo interno sólido. Cada una de estas zonas viene determinada espacialmente por las discontinuidades que presenta la función densidad y que para esta descripción global puede considerarse como únicamente dependiente de  $r$ . De esta forma cada una de las zonas queda caracterizada por un valor mínimo y máximo de  $r$  formando así una capa. En particular el núcleo interno sólido se extiende desde el geocentro hasta un valor del radio terrestre de unos 1220 km, el núcleo externo fluido desde los 1220 km hasta unos 3483 km y, finalmente, el manto<sup>33</sup> desde los 3485 km hasta la superficie terrestre que se alcanza para un valor del radio de unos 6371 km (Ahrens 1995). Las regiones de transición entre cada una de estas capas son conocidas como la frontera interna del núcleo y frontera núcleo-manto, respectivamente<sup>34</sup>. Como se deduce de los datos anteriores, las capas más extensas son el manto y el núcleo externo líquido, de hecho la masa de estas dos capas supone aproximadamente el 98% de la masa total de la Tierra, por ello una visión aún a mayor escala del interior terrestre permitiría considerar únicamente dos capas: el manto y el núcleo.

Recordemos que el movimiento de rotación de la Tierra ha sido definido como el movimiento de rotación del sistema de referencia terrestre respecto

<sup>32</sup>Abusando de la notación escribiremos también que  $\delta\mathcal{P}(\vec{r})/\mathcal{P}_0(r) \sim O(1)$ .

<sup>33</sup>En el manto aparecen más discontinuidades de la función densidad, siendo la más importante la discontinuidad de Mohorovičić que permite definir la corteza terrestre, es decir, la parte sólida más externa de la Tierra. No obstante, en esta Investigación consideraremos el manto como una única capa.

<sup>34</sup>Inner-Core Boundary (ICB) y Core-Mantle Boundary (CMB).

al celeste. A su vez, el sistema de referencia terrestre se definió considerando de forma promediada el movimiento de rotación de un cierto sistema de partículas pertenecientes a la Tierra (véase el apartado 1.1.3). Según la estructura del interior terrestre que acabamos de describir, este sistema de partículas debería de estar formado por las partículas que componen el manto, puesto que esta es la parte de la Tierra desde donde se realizan las observaciones astronómicas<sup>35</sup>. La evolución temporal de estas partículas dependerá de sus interacciones mutuas, de las interacciones de todas ellas con el resto de las capas, así como de las interacciones externas debidas, por ejemplo, al momento gravitatorio ejercido por la Luna y el Sol. Análogamente, en la evolución de cada una de las capas restantes también influirán las interacciones que las demás capas de la Tierra, incluido el manto, ejercen sobre ella, además de las interacciones externas y las debidas a las partículas de la propia capa. De aquí se sigue que el movimiento de las capas está acoplado a través de sus interacciones mutuas por lo que es necesario realizar el estudio dinámico conjunto de todas ellas, es decir, plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento para cada una de las capas del modelo de Tierra considerado. Por lo tanto, la energía cinética, la energía potencial y los momentos generalizados deben calcularse considerando el sistema dinámico formado por todas las capas del modelo de Tierra y así como las interacciones que experimentan.

A continuación determinaremos la forma que adoptan estas funciones con precisión  $O(1)$  teniendo presente que el objetivo de esta Investigación es evaluar la influencia del núcleo interno sólido y de la triaxialidad en las nutaciones. Por ello y dada la enorme complejidad del problema de la rotación de la Tierra, únicamente se considerarán las características relevantes para modelar matemáticamente estos efectos, dejando para estudios posteriores la representación matemática conjunta del movimiento de rotación de un modelo de Tierra que incorpore simultáneamente todas las propiedades interiores e interacciones conocidas hasta la fecha. No obstante, el procedimiento descrito dará una idea de cómo incorporar estas contribuciones dentro del marco hamiltoniano. En este sentido, señalemos que inicialmente hemos preferido expresar todas estas funciones en términos de cantidades dinámicas, geométricas y cinemáticas de forma que puedan ser utilizadas en cualquier formulación basada en los Principios Variacionales y no únicamente en la hamiltoniana.

---

<sup>35</sup>Para ser más precisos deberíamos considerar la superficie de la Tierra, es decir, la parte externa de la corteza terrestre.

### Caracterización geométrica y dinámica del modelo de Tierra

En lo que sigue consideraremos modelos de Tierra formados por una, dos o tres capas. Sin embargo, para unificar en la medida de lo posible la exposición consideraremos un modelo abstracto de Tierra formado por  $k$  capas<sup>36</sup>. Cada capa estará limitada por dos superficies cuasi esféricas, o esferoides, que contendrán alternativamente, bien un sólido rígido bien un fluido, de forma que tanto sus baricentros como los centros de los esferoides que las limitan coincidan en todo instante en un mismo punto  $O$  que es el geocentro de la Tierra. Asimismo, asociaremos a cada una de las capas un sistema de referencia mediante el mismo criterio que empleamos para definir el sistema de referencia terrestre. Es decir, consideraremos sistemas de referencia de Tisserand que estarán definidos a través del conjunto de partículas que componen cada una de las capas. Al ser las capas sólidas rígidas, el sistema de referencia de Tisserand asociado a cada una de ellas coincidirá con su sistema de ejes principales, definido en las mismas condiciones que en la sección (1.1.3). Por último, recordemos que el sistema de Tisserand del manto coincide con el sistema de referencia terrestre anteriormente introducido, por lo que, en este sentido, el movimiento de rotación de la Tierra es representado por el movimiento de rotación del manto.

Como se señaló en la sección (1.1.6), las observaciones muestran que la diferencia del movimiento de rotación respecto a un movimiento de rotación uniforme es pequeña, por ello supondremos que en su evolución nuestro sistema dinámico siempre permanece próximo a este movimiento de rotación uniforme, también denominado estado de movimiento estacionario, en el que el movimiento de rotación de todas las capas viene caracterizado por un único vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$  constante en el espacio. Por otra parte, recordemos que esta condición implica que las propiedades mecánicas y geométricas que caracterizan a cada capa poseen simetría cuasi esférica, es decir, su desviación respecto a la simetría esférica es pequeña, condición que se refleja en los modelos geofísicos actuales (véase la ecuación 1.103).

En la situación estacionaria las fronteras de todas las capas son elipsoides de ecuación reducida

$$\left(\frac{x}{a_{(k)}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_{(k)}}\right)^2 + \left(\frac{z}{c_{(k)}}\right)^2 = 1, \quad (1.104)$$

siendo  $c_{(k)} < b_{(k)} \leq a_{(k)}$  los semiejes del  $k$ -ésimo elipsoide, con  $a_{(k)}$ ,  $b_{(k)}$  y  $c_{(k)}$  dirigidos según los ejes  $\vec{e}_{1(k)}(t)$ ,  $\vec{e}_{2(k)}(t)$  y  $\vec{e}_{3(k)}(t)$  respectivamente, que en la situación de movimiento estacionario son coincidentes para todas las capas.

<sup>36</sup>Utilizaremos el subíndice  $(k)$  para designar cualquier propiedad que se refiera a la  $k$ -ésima capa.

Puesto que los elipsoides son cuasi esféricos, es conveniente introducir unos parámetros que midan la desviación de estas superficies respecto a la esfera. Estos parámetros se denominan elipticidades geométricas o achatamientos y están definidos como

$$c_{(k)} = a_{(k)} (1 - f_{a(k)}), \quad c_{(k)} = b_{(k)} (1 - f_{b(k)}). \quad (1.105)$$

Debido a la hipótesis de cuasi esfericidad se tiene que tanto  $a_{(k)}f_{a(k)}$  como  $b_{(k)}f_{b(k)}$  son cantidades de orden  $O(1)$ . Por ejemplo, para el manto terrestre se tiene que las elipticidades  $f_{a(k)}$  y  $f_{b(k)}$  son del orden de  $10^{-3}$ . Es más, en este caso los valores de los semiejes  $a_{(k)}$  y  $b_{(k)}$  son muy similares hasta el punto de que el cociente  $(a_{(k)} - b_{(k)})/a_{(k)}$  es del orden de  $10^{-5}$ , es decir, los elipsoides son prácticamente superficies de revolución respecto al eje de figura  $\vec{e}_{3(k)}(t)$ . Por ello, en la mayoría de los estudios del movimiento de rotación terrestre se considera únicamente el caso de modelos simétricos o con simetría axial, es decir, aquellos en los que  $a_{(k)} = b_{(k)}$ , despreciando así los efectos de la triaxialidad. No obstante, nosotros no realizaremos tal aproximación, puesto que uno de los objetivos de esta Investigación es evaluar la influencia que tiene la triaxialidad en el movimiento de rotación de la Tierra (véanse los capítulos 3, 4 y 5).

### Capas sólidas

Desde el punto de vista dinámico, la evolución de cada capa está caracterizada por su tensor de inercia. En el caso de que la capa sea un cuerpo rígido su tensor de inercia obedece a la expresión (1.38)

$$\Pi_{(k)}(t) = A_{(k)} \vec{e}_{1(k)}(t) \otimes \vec{e}_{1(k)}(t) + B_{(k)} \vec{e}_{2(k)}(t) \otimes \vec{e}_{2(k)}(t) + C_{(k)} \vec{e}_{3(k)}(t) \otimes \vec{e}_{3(k)}(t) \quad (1.106)$$

donde  $A_{(k)} \leq B_{(k)} < C_{(k)}$  son los momentos principales de inercia de la capa con respecto a los ejes del sistema de Tisserand asociado a la misma<sup>37</sup>. Recordemos que en esta situación los momentos de inercia son independientes del tiempo. Al igual que en el caso de las elipticidades geométricas, es conveniente introducir unos parámetros que midan la desviación respecto al caso en el que los tres momentos de inercia sean iguales, esto es, respecto a una esfera mecánica. Se ha de recordar que en esta situación el movimiento de rotación sería uniforme, por lo que el valor de estos parámetros da una idea de la desviación del movimiento de rotación respecto al movimiento de rotación uniforme. En particular, definiremos las elipticidades dinámicas mediante las igualdades

$$C_{(k)} = A_{(k)}(1 + e_{A(k)}), \quad C_{(k)} = B_{(k)}(1 + e_{B(k)}). \quad (1.107)$$

<sup>37</sup>Para aligerar la notación, a partir de este momento se omitirá la dependencia temporal en los vectores del sistema de Tisserand y en los tensores de inercia de las distintas capas.



Debido a la hipótesis de cuasi esfericidad mecánica las cantidades  $A_{(k)}e_{A(k)}$  y  $B_{(k)}e_{B(k)}$  son del orden  $O(1)$ . En particular, para el manto terrestre las elipticidades dinámicas tienen un valor aproximado de  $10^{-3}$ , similar al de las elipticidades geométricas. Por otra parte, en el caso terrestre ambas elipticidades dinámicas tienen un valor muy parecido, lo que significa que los momentos de inercia ecuatoriales son similares. A modo de ejemplo, en el caso del núcleo se tiene que  $(B_{(k)} - A_{(k)}) / A_{(k)} \sim 10^{-5}$ . En este sentido, cabe realizar el mismo comentario que el reseñado en el caso de las elipticidades geométricas.

En algunas investigaciones (véase, por ejemplo, Kinoshita 1977) en vez de definir las elipticidades dinámicas según la ecuación (1.107) se consideran los parámetros equivalentes

$$H_{d(k)} = \frac{2C_{(k)} - A_{(k)} - B_{(k)}}{2C_{(k)}}, \quad \eta_{(k)} = \frac{B_{(k)} - A_{(k)}}{2C_{(k)} - A_{(k)} - B_{(k)}}. \quad (1.108)$$

Al parámetro  $H_{d(k)}$  también se le conoce con el nombre de elipticidad dinámica, por lo que es preciso prestar atención sobre la definición utilizada en cada investigación. Notemos que con estas definiciones la simetría axial está caracterizada porque el valor del parámetro  $\eta_{(k)}$  es cero. Sin embargo, este parámetro queda sin definir si el cuerpo presenta simetría mecánica esférica.

### Capas fluidas

La construcción del tensor de inercia para la  $k$ -ésima capa fluida es más complicada, ya que el volumen ocupado por una capa fluida viene determinado por la evolución de cada una de las fronteras de las capas sólidas adyacentes. Al evolucionar el sistema, estas fronteras experimentarán un movimiento de rotación, de forma que las posiciones de los ejes de simetría de los elipsoides que las definen no serán coincidentes, sino que vendrán determinadas por los vectores del sistema de Tisserand de cada capa, es decir, por los vectores  $\vec{e}_{1(k+1)}$ ,  $\vec{e}_{2(k+1)}$  y  $\vec{e}_{3(k+1)}$  y por los vectores  $\vec{e}_{1(k-1)}$ ,  $\vec{e}_{2(k-1)}$  y  $\vec{e}_{3(k-1)}$ . Por este motivo, es conveniente escribir el tensor de inercia de la capa fluida utilizando los vectores asociados a los sistemas de Tisserand de las citadas capas sólidas. Para realizar esta construcción, consideremos en primer lugar la situación de movimiento de rotación uniforme en la que los sistemas de referencia de todas las capas son coincidentes. En este caso podemos escribir el tensor de inercia de la capa fluida utilizando los vectores del sistema de Tisserand de la capa sólida exterior, es decir, la que encierra a la capa fluida

$$\Pi_{0(k)} = A_{0(k)} \vec{e}_{1(k+1)} \otimes \vec{e}_{1(k+1)} + B_{0(k)} \vec{e}_{2(k+1)} \otimes \vec{e}_{2(k+1)} + C_{0(k)} \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)}, \quad (1.109)$$

donde hemos empleado el subíndice 0 para recordar que estos son los momentos de inercia de la capa fluida en el estado de movimiento estacionario. De igual forma, en esta misma situación también podemos definir los momentos de inercia totales de la Tierra, que serán la suma de los momentos de inercia de cada capa en el movimiento de rotación uniforme. Se tendrá que

$$\Pi_0 = \sum_k \Pi_{0(k)} = A_0 \vec{e}_{1(j)} \otimes \vec{e}_{1(j)} + B_0 \vec{e}_{2(j)} \otimes \vec{e}_{2(j)} + C_0 \vec{e}_{3(j)} \otimes \vec{e}_{3(j)}, \quad (1.110)$$

donde  $\vec{e}_{1(j)}$ ,  $\vec{e}_{2(j)}$  y  $\vec{e}_{3(j)}$  son los vectores asociados al sistema de Tisserand de cualquier capa. Como consecuencia de que los sistemas de Tisserand de las capas adyacentes evolucionan independientemente, el volumen ocupado por la capa fluida  $\mathcal{V}_{(k)}$  cambiará de forma en el curso de la evolución, ya que el movimiento de la frontera interior de la capa fluida viene determinado por el movimiento de rotación de la capa sólida interior y el movimiento de la frontera exterior de la capa fluida viene determinado por el movimiento de rotación de la capa sólida exterior. Así, la frontera interior de la capa fluida aparece ligeramente rotada respecto a la exterior. Por lo tanto, en su evolución la capa fluida, al igual que toda la Tierra, ya no tendrá el tensor de inercia de la ecuación (1.109), sino que se habrá de considerar

$$\Pi_{(k)} = \Pi_{0(k)} + \Delta_c \Pi_{(k)}, \quad (1.111)$$

donde  $\Delta_c \Pi_{(k)}$  es la contribución adicional al tensor de inercia debida al efecto señalado anteriormente, y a la que nos referiremos como deformación cinemática. No obstante, debemos tener presente que, puesto que la desviación respecto al movimiento uniforme es pequeña, el ángulo que forman los ejes de figura entre sí y con el vector velocidad angular  $\vec{\Omega}$  también será pequeño, lo que unido a las hipótesis de cuasi esfericidad geométrica y dinámica hace que esta contribución adicional al tensor de inercia sea del orden  $O(1)$ . Así tendremos que

$$\|\Delta_c \Pi_{(k)}\| \|\Pi_{0(k)}\|^{-1} \sim O(1), \quad (1.112)$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma del tensor. Es claro que las capas sólidas no experimentan este tipo de deformación cinemática puesto que sus dos fronteras evolucionan simultáneamente.

Para obtener la forma explícita de la contribución de la deformación cinemática es preciso hacer la siguiente construcción geométrica (véase también la sección 2.2). Consideremos la capa fluida limitada exteriormente por la frontera interna de la capa sólida exterior que denotaremos por  $\partial_{(k+1)}^{int}$ , e interiormente por la frontera externa de la capa sólida interior que escribiremos como  $\partial_{(k-1)}^{ext}$ . Visualicemos la capa fluida como la unión de dos cuerpos disjuntos (véase la figura 2.1): uno cuya frontera exterior es  $\partial_{(k+1)}^{int}$  y está limitado

interiormente por una esfera de radio  $a_{(k-1)}$ . El otro, que llamaremos capa auxiliar (AS)<sup>38</sup>, tendrá como frontera exterior la esfera de radio  $a_{(k-1)}$  y como frontera interior a  $\partial_{(k-1)}^{ext}$ . La ventaja de esta descomposición de la capa fluida es que las fronteras de cada uno de los dos cuerpos resultantes comparten los mismos ejes de simetría. Este hecho permite escribir el tensor de inercia de la capa fluida en términos de los vectores asociados a los sistemas de Tisserand de la  $k + 1$  capa sólida exterior y de la  $k - 1$  capa sólida interior. En efecto, de la figura (2.1) se desprende que

$$\begin{aligned} \Pi_{(k)} = & A_{0(k)} \vec{e}_{1(k+1)} \otimes \vec{e}_{1(k+1)} + B_{0(k)} \vec{e}_{2(k+1)} \otimes \vec{e}_{2(k+1)} + C_{0(k)} \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)} + \\ & + A_{as(k)} \vec{e}_{1(k-1)} \otimes \vec{e}_{1(k-1)} + B_{as(k)} \vec{e}_{2(k-1)} \otimes \vec{e}_{2(k-1)} + C_{as(k)} \vec{e}_{3(k-1)} \otimes \vec{e}_{3(k-1)} - \\ & - A_{as(k)} \vec{e}_{1(k+1)} \otimes \vec{e}_{1(k+1)} - B_{as(k)} \vec{e}_{2(k+1)} \otimes \vec{e}_{2(k+1)} - C_{as(k)} \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)}. \end{aligned} \quad (1.113)$$

En esta ecuación,  $A_{as(k)}$ ,  $B_{as(k)}$  y  $C_{as(k)}$  son los momentos de inercia asociados a la capa auxiliar de la capa fluida. Notemos que, puesto que la frontera  $\partial_{(k-1)}^{ext}$  es cuasi esférica, la región espacial comprendida por la cavidad auxiliar es lo suficientemente pequeña como para suponer que la densidad es constante en toda ella, e igual a la densidad de la capa fluida asociada en la frontera  $\partial_{(k-1)}^{ext}$ . Por este motivo, en la descomposición (1.113) los momentos de inercia de la capa auxiliar se han considerado como constantes en toda la evolución del sistema.

Por otra parte, según la ecuación (1.109), la primera línea del miembro derecho de esta ecuación es  $\Pi_{0(k)}$ . Por lo tanto, la deformación cinemática para una capa fluida viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta_c \Pi_{(k)} = & A_{as(k)} \left( \vec{e}_{1(k-1)} \otimes \vec{e}_{1(k-1)} - \vec{e}_{1(k+1)} \otimes \vec{e}_{1(k+1)} \right) + \\ & + B_{as(k)} \left( \vec{e}_{2(k-1)} \otimes \vec{e}_{2(k-1)} - \vec{e}_{2(k+1)} \otimes \vec{e}_{2(k+1)} \right) + \\ & + C_{as(k)} \left( \vec{e}_{3(k-1)} \otimes \vec{e}_{3(k-1)} - \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)} \right). \end{aligned} \quad (1.114)$$

Como se ha mencionado la deformación cinemática produce una contribución adicional del orden  $O(1)$ . Por otra parte también se ha señalado que los momentos de inercia ecuatoriales de las capas que forman la Tierra tienen valores muy próximos. Por todo ello, en una primera aproximación es suficiente considerar que la capa auxiliar tiene simetría axial, es decir, suponer que  $B_{as(k)} = A_{as(k)}$ . Teniendo en cuenta esta simplificación y recordando que la identidad se puede escribir como

$$\mathbf{1} = \vec{e}_{1(j)} \otimes \vec{e}_{1(j)} + \vec{e}_{2(j)} \otimes \vec{e}_{2(j)} + \vec{e}_{3(j)} \otimes \vec{e}_{3(j)}, \quad (1.115)$$

<sup>38</sup>Auxiliary Shell (AS).

obtenemos la forma final de la deformación cinemática para una capa fluida

$$\Delta_c \Pi_{(k)} = (C_{as(k)} - A_{as(k)}) (\vec{e}_{3(k-1)} \otimes \vec{e}_{3(k-1)} - \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)}) + A_{as(k)} \mathbf{1}. \quad (1.116)$$

Esta expresión desempeña un papel fundamental en el estudio del movimiento libre de rotación de un modelo de Tierra compuesto por tres capas (véase el capítulo 3).

### Momentos de inercia de la cavidad auxiliar

A continuación obtendremos las expresiones de los momentos de inercia de la cavidad auxiliar en función de las características del cuerpo no rígido. Estos vendrán dados por (véase la ecuación 1.43)

$$A_{as(k)} = \int_{V_{as(k)}} (x_2^2 + x_3^2) \rho_{as(k)}(\vec{r}) dV, \quad C_{as(k)} = \int_{V_{as(k)}} (x_1^2 + x_2^2) \rho_{as(k)}(\vec{r}) dV, \quad (1.117)$$

donde  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  son las coordenadas de una partícula respecto al sistema de Tisserand de la capa sólida interior. Estas integrales se pueden calcular fácilmente. Para ello consideremos la capa auxiliar como un cuerpo compuesto por una esfera homogénea de densidad  $\rho_{as(k)}$  y radio  $a_{(k-1)}$  junto con un elipsoide también homogéneo de densidad  $-\rho_{as(k)}$  y elipticidad geométrica  $f_{a(k-1)}$  (véase la figura 2.4). Es decir, tendremos que

$$A_{as(k)} = A_{sh(k)} - A_{l(k)}, \quad C_{as(k)} = C_{sh(k)} - C_{l(k)}, \quad (1.118)$$

siendo  $A_{sh(k)}$  y  $C_{sh(k)}$  los momentos de inercia de la esfera homogénea, por lo que se tendrá que  $A_{sh(k)} = C_{sh(k)}$ . En esta misma ecuación, los momentos de inercia del elipsoide homogéneo se han denotado como  $A_{l(k)}$  y  $C_{l(k)}$ . Por otra parte, debido al hecho de que tanto la capa sólida interior como el elipsoide homogéneo son cuerpos dinámicos y geoméricamente cuasi esféricos, podremos aproximar a primer orden sus elipticidades dinámicas por sus elipticidades geométricas, es decir

$$e_{A(k-1)} = \frac{C_{(k)} - A_{(k)}}{A_{(k)}} = f_{a(k-1)} + O(2), \quad e_{l(k)} = \frac{C_{l(k)} - A_{l(k)}}{A_{l(k)}} = f_{a(k-1)} + O(2). \quad (1.119)$$

Así, combinando las ecuaciones (1.118) y (1.119), la diferencia de los momentos de inercia de la capa auxiliar se puede escribir como

$$C_{as(k)} - A_{as(k)} = -(C_{l(k)} - A_{l(k)}) = -A_{l(k)} e_{A(k-1)}, \quad (1.120)$$

con lo que esta queda completamente caracterizada a partir de las propiedades mecánicas de la capa sólida interior y del valor de la densidad del fluido en la frontera  $\partial_{(k-1)}^{ext}$ .

Finalmente, es preciso señalar que si la capa fluida constituye la primera capa que compone la Tierra desde el geocentro, carecerá de frontera interna, por lo que, en este caso, su deformación cinemática se anulará y el tensor de inercia vendrá dado directamente por

$$\Pi_{(k)} = A_{0(k)} \vec{e}_{1(k+1)} \otimes \vec{e}_{1(k+1)} + B_{0(k)} \vec{e}_{2(k+1)} \otimes \vec{e}_{2(k+1)} + C_{0(k)} \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)}, \quad (1.121)$$

coincidiendo con su expresión para el estado de movimiento estacionario. Este es el caso del modelo de Tierra compuesto por un núcleo y un manto rígido, habitualmente denominado modelo de Poincaré (Moritz y Mueller 1987), modelo que es estudiado en los capítulos 3 y 4. Además, para este tipo de modelos el tensor de inercia total de la Tierra también coincide formalmente con su expresión en el caso del movimiento estacionario, es decir

$$\Pi = A_0 \vec{e}_{1(k+1)} \otimes \vec{e}_{1(k+1)} + B_0 \vec{e}_{2(k+1)} \otimes \vec{e}_{2(k+1)} + C_0 \vec{e}_{3(k+1)} \otimes \vec{e}_{3(k+1)}. \quad (1.122)$$

### Energía cinética

Para determinar la energía cinética de nuestro sistema dinámico es preciso describir, en primer lugar, la velocidad de las partículas que componen la Tierra. Esto se logra sin más que considerar que en el sistema de Tisserand asociado a cada capa, la velocidad de una partícula perteneciente a la misma capa viene dada por (1.27)

$$\vec{V}_{(k)} = \vec{\omega}_{(k)} \times \vec{r} + \vec{v}_{d(k)} = \left( \vec{\Omega} + \delta\vec{\omega}_{(k)} \right) \times \vec{r} + \vec{v}_{d(k)}, \quad (1.123)$$

donde  $\vec{v}_{d(k)}$  es la velocidad de la partícula respecto al sistema de Tisserand, es decir, la velocidad asociada al movimiento de deformación.

En el caso de que la capa sea un cuerpo rígido se verifica que  $\vec{v}_{d(k)} = \vec{0}$ , pues el sistema de Tisserand coincide con el de ejes principales, mientras que en el caso de las capas fluidas, la velocidad de deformación  $\vec{v}_{d(k)}$  es un término corrector debido, entre otras causas, a la no esfericidad de las fronteras, y que necesariamente debe aparecer para que el campo de velocidades del fluido satisfaga las diferentes condiciones de contorno (véase, por ejemplo, Lamb 1932). Sin embargo, debido a la hipótesis de cuasi esfericidad de las fronteras se tiene que  $\|\vec{v}_{d(k)}\| \sim O(1)$ . También debemos señalar que, puesto que el movimiento de rotación es próximo al movimiento de rotación uniforme, se verifica la desigualdad  $\|\delta\vec{\omega}_{(k)}\| \ll \|\vec{\Omega}\|$ .

La descomposición del campo de velocidades según la ecuación (1.123) es la habitual en muchos estudios de las nutaciones terrestres (véanse, por

ejemplo, Sasao et al. 1980, Mathews et al. 1991a, Escapa et al. 2001). Básicamente, esta descomposición está adaptada a la situación en la que el campo de velocidades de cada capa está formado por un término dominante proveniente de un movimiento de rotación, más un campo de velocidades residuales, pequeño en comparación con el primero. Como se señala en Moritz y Mueller (1987), esta descomposición es suficientemente general, puesto que es equivalente a desarrollar el campo de velocidades en términos de una base de vectores toroidales y esferoidales, conservando únicamente la parte correspondiente al modo toroidal de grado 1, y es válida siempre y cuando el resto de componentes del desarrollo, que dan lugar a  $\vec{v}_{d(k)}$ , sean del orden  $O(1)$ . Como se verá más adelante, estos términos provenientes del movimiento de deformación no tienen influencia sobre el comportamiento dinámico del sistema dentro de nuestro orden de aproximación.

Una vez que se dispone de la velocidad de las partículas, es posible calcular la energía cinética asociada al movimiento de rotación del sistema, a la que nos referiremos simplemente como energía cinética. En particular, la energía cinética del cuerpo no rígido será la suma de la energía cinética de cada una de sus capas que tiene la forma

$$T_{(k)} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_{(k)}} \left( \vec{V}_{(k)} \cdot \vec{V}_{(k)} \right) \rho_{(k)}(\vec{r}) dV. \quad (1.124)$$

Sustituyendo  $\vec{V}_{(k)}$  por su expresión según la ecuación (1.123), podemos descomponer la energía cinética como suma de tres términos

$$T_{(k)} = T_{R(k)} + T_{rel(k)} + T_{res(k)} \quad (1.125)$$

con

$$\begin{aligned} T_{R(k)} &= \frac{1}{2} \vec{\omega}_{(k)} \cdot \Pi_{(k)} \vec{\omega}_{(k)}, \\ T_{rel(k)} &= \frac{1}{2} \vec{\omega}_{(k)} \cdot \vec{h}_{(k)}, \\ T_{res(k)} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_{(k)}} \left( \vec{v}_{d(k)} \cdot \vec{v}_{d(k)} \right) \rho_{(k)}(\vec{r}) dv. \end{aligned} \quad (1.126)$$

De estas igualdades se deduce que  $T_{R(k)}$  es formalmente análoga a la expresión de la energía cinética para un cuerpo rígido. Sin embargo, recordemos que la diferencia fundamental con este caso es que para una capa arbitraria el tensor de inercia  $\Pi_{(k)}$  no será independiente del tiempo con respecto a su sistema de Tisserand asociado. El término  $T_{rel(k)}$  es el producto escalar de la velocidad angular y el vector momento angular relativo (véase la ecuación

1.35). Ahora bien, puesto que el sistema de referencia respecto al que se describe el movimiento de las partículas de la capa es de Tisserand, se tendrá que  $\vec{h}_{(k)} = \vec{0}$  y, por lo tanto,  $T_{rel(k)} = 0$ . Por último,  $T_{res(k)}$  es la energía cinética asociada con el campo de velocidades residual, esto es, asociada con el movimiento de deformación. Como se señaló en el apartado (1.1.3), la elección del sistema de Tisserand hace que  $T_{res(k)}$  esté minimizada. Además, puesto que las condiciones de cuasi esfericidad imponen que  $\|\vec{v}_{d(k)}\| \sim O(1)$ , se tendrá que  $T_{res(k)} \sim O(2)$ . Así, dentro de nuestro orden de aproximación se podrá escribir

$$T_{(k)} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{(k)} \cdot \Pi_{(k)} \vec{\omega}_{(k)} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{(k)} \cdot \vec{L}_{(k)}, \quad (1.127)$$

siendo  $\vec{L}_{(k)}$  el momento angular de la  $k$ -ésima capa (1.36). No obstante, en el caso de que la capa considerada sea rígida la expresión anterior es exacta, pues en esta situación también se verifica exactamente que  $T_{res(k)} = 0$ .

En definitiva, la energía cinética de rotación de nuestro sistema dinámico vendrá dada por

$$T = \sum_{k=1}^n T_{(k)}, \quad (1.128)$$

donde  $2T_{(k)} = \vec{\omega}_{(k)} \cdot (\Pi_{0(k)} + \Delta_c \Pi_{(k)}) \vec{\omega}_{(k)}$ . Las expresiones explícitas de los tensores de inercia aparecen en las ecuaciones (1.106), (1.109) y (1.116), respectivamente.

### Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria se debe a las interacciones de origen gravitatorio que experimenta nuestro sistema dinámico. De todas ellas la más importante es la que proviene del momento gravitatorio ejercido por la Luna y el Sol sobre la Tierra, aunque debemos señalar que también existe una energía potencial de origen interno producida por la interacción gravitatoria entre las distintas capas de la Tierra (véase, por ejemplo, Xu y Szeto 1994), aunque su contribución es mucho menor.

Para evaluar la energía potencial gravitatoria debida a las interacciones Tierra-Luna y Tierra-Sol, supondremos que la Luna y el Sol pueden ser asimilados a dos partículas materiales cuyo movimiento es conocido respecto a un cierto sistema de referencia. Recordemos que la energía potencial gravitatoria entre un sistema de partículas que ocupa un volumen  $\mathcal{V}_{(k)}$ , que coincidirá con una de las capas de la Tierra, y una partícula exterior de masa  $M$ , obedece

a la expresión

$$V_{(k)}(\vec{R}) = -GM \int_{V_{(k)}} \frac{\rho_{(k)}(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{R}\|} dV, \quad (1.129)$$

siendo  $G$  la constante universal de la gravitación y  $\vec{R}$  el vector de posición de la partícula exterior con origen en el punto  $O$ , que como es habitual coincidirá con el geocentro.

El cálculo de la integral anterior es inviable, puesto que en el integrando aparece una función que depende tanto de  $\vec{r}$  y como de  $\vec{R}$ . No obstante, el valor del cociente  $r/R$  para la Luna y para el Sol es pequeño, puesto que la distancia a la que ambos están situados respecto al geocentro es grande en comparación con las dimensiones de la Tierra que, por ejemplo, podemos caracterizar a través de su radio medio. Así, teniendo en cuenta estas consideraciones se realiza un desarrollo multipolar de la energía potencial mediante los armónicos esféricos reales, lo que permite un tratamiento más simplificado de la misma (véase, por ejemplo, Escapa 1997). No obstante, es posible obtener un desarrollo de  $V_{(k)}(\vec{R})$  con precisión  $O(r^2/R^2)$  de forma sencilla, utilizando la siguiente construcción. Para ello, a partir del desarrollo en serie de MacLaurin de la función  $(1+x)^{-1/2}$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{R}\|} &= \frac{1}{R} \left[ \left( 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -2\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{3}{8} \left( -2\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^2 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R} + \frac{1}{2} \left[ 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{R})^2}{R^4} - \frac{r^2}{R^2} \right] \right\} + O\left[\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Llevando este desarrollo a la ecuación (1.129), la energía potencial se descompone como una suma de tres términos

$$V_{(k)}(\vec{R}) = V_{(k)}^0(\vec{R}) + V_{(k)}^1(\vec{R}) + V_{(k)}^2(\vec{R}). \quad (1.131)$$

Los dos primeros términos vienen dados por

$$\begin{aligned} V_{(k)}^0(\vec{R}) &= -GM \int_{V_{(k)}} \frac{\rho_{(k)}(\vec{r})}{R} dV = -G \frac{M m_{(k)}}{R}, \\ V_{(k)}^1(\vec{R}) &= -\frac{GM}{R^2} \vec{R} \cdot \int_{V_{(k)}} \vec{r} \rho_{(k)}(\vec{r}) dV. \end{aligned} \quad (1.132)$$



Teniendo en cuenta que el origen del sistema de referencia coincide con el geocentro, esta última integral se anulará obteniéndose que  $V_{(k)}^1(\vec{R}) = 0$ . Por otra parte, considerando que

$$(\vec{r} \cdot \vec{R})^2 = \vec{R} \cdot (\vec{r} \otimes \vec{r}) \vec{R}, \quad R^2 = \vec{R} \cdot 1\vec{R}, \quad (1.133)$$

se tiene

$$3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{R})^2}{R^4} - \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{R^4} \left[ \vec{R} \cdot \left( \vec{r} \otimes \vec{r} - \frac{1}{3} r^2 \right) \right] \vec{R}. \quad (1.134)$$

Por lo que el término  $V_{(k)}^2(\vec{R})$  viene dado por

$$\begin{aligned} V_{(k)}^2(\vec{R}) &= -GM \int_{V_{(k)}} \frac{1}{2R} \left[ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{R})^2}{R^4} - \frac{r^2}{R^2} \right] \rho_{(k)}(\vec{r}) dV = \\ &= -\frac{3GM}{2R^5} \left\{ \vec{R} \cdot \left[ \int_{V_{(k)}} \left( \vec{r} \otimes \vec{r} - \frac{1}{3} r^2 \right) \rho_{(k)}(\vec{r}) dV \right] \vec{R} \right\} = \\ &= -\frac{3GM}{2R^5} \left\{ \vec{R} \cdot \left[ \int_{V_{(k)}} (\vec{r} \otimes \vec{r} - r^2) \rho_{(k)}(\vec{r}) dV \right] \vec{R} \right\} - \\ &\quad - \frac{3GM}{2R^5} \left[ \vec{R} \cdot \left( \int_{V_{(k)}} \frac{2}{3} r^2 \rho_{(k)}(\vec{r}) dV \right) \vec{R} \right]. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Considerando la definición del tensor de inercia de un sistema de partículas (véase la ecuación 1.31),  $V_{(k)}^2(\vec{R})$  adopta la forma

$$V_{(k)}^2(\vec{R}) = \frac{3GM}{2R^5} (\vec{R} \cdot \Pi_{(k)} \vec{R}) - \frac{1GM}{2R^5} \text{tr}(\Pi_{(k)}), \quad (1.136)$$

donde la traza del tensor de inercia, independiente del sistema de referencia, se define como

$$\text{tr}(\Pi_{(k)}) = A_{(k)} + B_{(k)} + C_{(k)}. \quad (1.137)$$

Considerando las ecuaciones (1.132) y (1.136), la expresión de la energía potencial con precisión  $O(r^2/R^2)$  será

$$V_{(k)}(\vec{R}) = -G \frac{Mm_{(k)}}{R} + \frac{3GM}{2R^5} (\vec{R} \cdot \Pi_{(k)} \vec{R}) - \frac{1GM}{2R^5} \text{tr}(\Pi_{(k)}). \quad (1.138)$$

Dado que nuestro interés se centra en el estudio del movimiento de rotación, en esta ecuación podemos prescindir de los términos que no se vean afectados por este movimiento. En particular, el primer sumando del lado derecho de la ecuación sólo depende de la distancia de la partícula de masa  $M$  al geocentro, distancia que es una función conocida del tiempo; de igual forma la traza del tensor de inercia también es constante a orden  $O(1)$  para el tipo de movimientos de deformación que consideramos en esta Investigación. Así, dentro de nuestro orden de aproximación se tiene que la energía potencial de cada capa es

$$V_{(k)}(\vec{R}) = \frac{3GM}{2R^5} (\vec{R} \cdot \Pi_{(k)} \vec{R}) = \frac{3GM}{2R^5} (\vec{R} \cdot \Pi_{0(k)} \vec{R}) + \frac{3GM}{2R^5} (\vec{R} \cdot \Delta_c \Pi_{(k)} \vec{R}), \quad (1.139)$$

expresión que se conoce como la fórmula de MacCullagh.

En el caso de una capa rígida, escribiendo su tensor de inercia en su sistema principal, la expresión anterior adopta la forma (Kinoshita 1977)

$$V_{(k)}(\vec{R}) = \frac{GM}{R^3} \left[ \frac{2C_{(k)} - A_{(k)} - B_{(k)}}{2} C_{20}(\eta, \alpha) + \frac{A_{(k)} - B_{(k)}}{4} C_{22}(\eta, \alpha) \right]. \quad (1.140)$$

donde  $\eta$  y  $\alpha$  son la colatitud y la longitud del cuerpo exterior respecto al sistema principal. En esta relación se han introducido los armónicos esféricos sólidos de grado  $n$  y orden  $m$ , de expresión general

$$C_{nm}(\theta, \phi) = P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\phi), \quad S_{nm}(\theta, \phi) = P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\phi), \quad (1.141)$$

siendo  $P_{nm}(\cos \theta)$  la función asociada de Legendre. Estos armónicos esféricos están relacionados con las coordenadas de la partícula  $M$ . En particular si  $\vec{R} = (X, Y, Z)$  los armónicos  $C_{20}$  y  $C_{22}$  se pueden escribir como

$$C_{20}(\eta, \alpha) = \frac{3Z^2 - R^2}{2R^2}, \quad C_{22}(\eta, \alpha) = 3 \frac{X^2 - Y^2}{R^2}. \quad (1.142)$$

Por lo tanto, la energía potencial gravitatoria de nuestro sistema dinámico vendrá dada por

$$V = \sum_p \sum_{k=1}^n V_{(k)}^p(\vec{R}_p), \quad (1.143)$$

donde la suma en  $p$  se extiende a todos los cuerpos externos a la Tierra que, para nuestros propósitos, se limitarán a la Luna y el Sol. Finalmente, teniendo en cuenta la descomposición del tensor de inercia efectuada en el apartado anterior, cada uno de estos términos vendrá dado por

$$V_{(k)}^p(\vec{R}_p) = \frac{3GM_p}{2R_p^5} (\vec{R}_p \cdot \Pi_{(k)}^0 \vec{R}_p) + \frac{3GM_p}{2R_p^5} (\vec{R}_p \cdot \Delta_c \Pi_{(k)} \vec{R}_p). \quad (1.144)$$

Es preciso recordar que en esta expresión la posición de la Luna o el Sol, determinada por el vector de posición  $\vec{R}_p$ , es una función conocida del tiempo respecto a un cierto sistema de referencia. En particular, lo más frecuente es referir estos movimientos a la eclíptica de la fecha o eclíptica móvil (Kinoshita 1977).

### Momentos generalizados

Los momentos disipativos dan cuenta de la viscosidad de las capas fluidas y de su interacción electromagnética. La interacción electromagnética es debida a una posible conductividad eléctrica del fluido. En estas circunstancias, la rotación de la capa fluida genera un campo magnético que interacciona con el sólido, siempre y cuando la zona del sólido que está en contacto con el fluido sea un conductor eléctrico. El que estos efectos, viscosidad y campo magnético, puedan ser representados adecuadamente por momentos de fuerzas depende de que únicamente sean importantes en la capa límite del fluido, y que además ésta sea pequeña con respecto a las dimensiones de toda la capa fluida (véase Rochester 1976). La obtención de la expresión explícita de estos torques está basada en la teoría de la capa límite hidromagnética (Eckman-Hartman), y ha sido proporcionada por Rochester (1976).

Desde una perspectiva mecánica la interacción viscosa puede ser asimilada como un momento de fricción entre las dos capas, proporcional a la diferencia de velocidad angular entre ellas. Esta constante puede no ser isotrópica y así su valor se supondrá distinto según que sea paralelo o perpendicular a la dirección determinada por la diferencia de velocidades angulares (véase, por ejemplo, Kubo 1979). Respecto al momento electromagnético, éste es consecuencia de la fuerza de Lorentz que actúa sobre las corrientes, aunque el fenómeno es complejo ya que, además del campo magnético asociado al fluido, aparece otro campo magnético inducido como consecuencia de la velocidad relativa entre el sólido y el fluido (véase Rochester 1970).

En definitiva, adaptando las expresiones de Rochester (1976) o Sasao et al. (1980) a nuestra notación, el momento ejercido sobre la  $k$ -ésima capa fluida debido a la interacción con la capa sólida adyacente  $k + 1$  es

$$\begin{aligned} \vec{t}_{(k)(k+1)} = & -R_{(k)(k+1)} (\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)}) - R'_{(k)(k+1)} [\vec{e}_{3(k)} \times (\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)})] + \\ & + (R_{(k)(k+1)} - R^*_{(k)(k+1)}) [(\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)}) \cdot \vec{e}_{3(k)}] \vec{e}_{3(k)}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

En esta relación los coeficientes numéricos  $R_{(k)(k+1)}$ ,  $R'_{(k)(k+1)}$  y  $R^*_{(k)(k+1)}$  caracterizan la disipación. El coeficiente  $R^*_{(k)(k+1)}$  está asociado con la fricción, y el cociente  $R'_{(k)(k+1)}/R_{(k)(k+1)}$  es próximo a 0 si la interacción es mayoritaria-

mente viscosa y próximo a 1 en el caso de que sea fundamentalmente electromagnética. Así, si la capa considerada no presenta interacciones magnéticas bastará con hacer  $R'_{(k)(k+1)} = 0$ . Para dotar a esta expresión de una mayor generalidad matemática podemos considerar la situación en la que los coeficientes que caracterizan el momento de disipación en las direcciones  $\vec{e}_{1(k)}$  y  $\vec{e}_{2(k)}$  sean, en valor absoluto, diferentes, eliminando de esta forma la simetría axial que presenta la ecuación (1.145), esto es, considerando una hipotética triaxialidad en el momento de disipación. En este caso la interacción vendría descrita en la forma

$$\begin{aligned} \vec{t}_{(k)(k+1)} = & -R_{A(k)(k+1)} (\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)}) - R'_{A(k)(k+1)} [\vec{e}_{3(k)} \times (\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)})] + \\ & + (R'_{A(k)(k+1)} - R'_{B(k)(k+1)}) [(\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)}) \cdot \vec{e}_{1(k)}] \vec{e}_{2(k)} + \\ & + (R_{A(k)(k+1)} - R_{B(k)(k+1)}) [(\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)}) \cdot \vec{e}_{2(k)}] \vec{e}_{2(k)} + \\ & + (R_{A(k)(k+1)} - R^*_{(k)(k+1)}) [(\vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(k+1)}) \cdot \vec{e}_{3(k)}] \vec{e}_{3(k)}. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Esta es la expresión utilizada en el capítulo 3, donde se evalúan los efectos de la disipación en el movimiento libre de rotación de un modelo de Tierra compuesto por un núcleo y un manto rígido, ambos triaxiales. Sin embargo y como allí se muestra, la influencia de una posible triaxialidad en los momentos disipativos es completamente despreciable.

El momento total ejercido sobre la capa fluida debido a la interacción con sus dos capas sólidas adyacentes será la suma del momento con cada una de estas capas, es decir

$$\vec{t}_{(k)} = \vec{t}_{(k)(k+1)} + \vec{t}_{(k)(k-1)}, \quad (1.147)$$

de donde se sigue que el momento debido a las fuerza disipativas que se ejerce sobre la  $i$ -ésima capa sólida vendrá dado por

$$\vec{t}_{(i)} = -\vec{t}_{(i-1)(i)} - \vec{t}_{(i+1)(i)}, \quad (1.148)$$

donde los momentos  $\vec{t}_{(i-1)(i)}$  y  $\vec{t}_{(i+1)(i)}$  tienen la forma de la ecuación (1.146).

### Ventajas de los formalismos basados en los Principios Variacionales

La exposición realizada nos puede dar una idea de cómo afecta la estructura interna de la Tierra y sus interacciones al movimiento de rotación, y la forma en la que estas características se pueden incorporar a un formalismo basado en los Principios Variacionales de la Mecánica. Así, cualquier variación  $\Delta\Pi_{(k)}$  en el tensor de inercia de una capa se traducirá automáticamente en

una contribución adicional a la energía cinética del sistema (ecuación 1.143), así como en una nueva contribución a la energía potencial gravitatoria del sistema (ecuación 1.139).

Por ejemplo, este es el caso que se produce al considerar que las capas sólidas pueden sufrir pequeñas deformaciones, esto es, cuando se suponen elásticas en vez de rígidas. En esta situación es necesario calcular la variación  $\Delta\Pi_{(k)}$  producida por el movimiento de deformación elástico. Dichos cálculos se obtienen a partir del vector desplazamiento asociado con el movimiento de deformación, cuya expresión se supone conocida a través de un desarrollo en modos esferoidales y toroidales (véanse, por ejemplo, Getino y Ferrándiz 1995, Getino et al. 2003). Este es uno de los procedimientos con los que es posible incorporar los efectos de la elasticidad en este tipo de formalismos<sup>39</sup> (véanse, por ejemplo, Getino y Ferrándiz 1995, Getino y Ferrándiz 1999, Escapa et al. 2005). Otro procedimiento para evaluar los efectos de la elasticidad es tratar de resolver simultáneamente el movimiento de rotación junto con el movimiento de deformación debido a la elasticidad. Este método requiere, además de considerar las contribuciones de la elasticidad a la energía cinética y potencial del sistema, construir la energía potencial elástica de deformación del sistema (véanse Jeffreys y Vicente 1957a, 1957b, Moritz 1982, Moritz y Mueller 1987).

Puede resultar sorprendente el que, aparentemente, en las funciones anteriores no quede reflejada la interacción debida al momento ejercido por la presión del fluido en la frontera con cada capa sólida<sup>40</sup>. De hecho, en otros estudios del movimiento de la rotación de la Tierra no basados en los Principios Variacionales (véanse, por ejemplo, Sasao et al. 1980, Mathews et al. 1991a), el cálculo de este momento es una de las partes más complicadas de esas investigaciones. Sin embargo, en cualquiera de los formalismos basados en los Principios Variacionales de la Mecánica esta interacción está incorporada automáticamente a través de la energía cinética del sistema.

Esta es una de las grandes ventajas de este tipo de formalismos, ya que todos ellos comparten la característica fundamental de que a la hora de estudiar el movimiento de rotación de los modelos no rígidos de Tierra, las partes sólidas, rígidas o elásticas, y fluidas de la Tierra, son tratadas como un único sistema dinámico, evitando así el cálculo explícito de los efectos de la presión del fluido sobre las fronteras de las partes sólidas<sup>41</sup> (Lamb 1932, Moritz 1982).

<sup>39</sup> Aun así, el tratamiento de la elasticidad requiere alguna consideración especial en cuanto al comportamiento de las variables dinámicas (Kubo 1991).

<sup>40</sup> Este momento a veces se denomina inertial coupling torque (Kinoshita y Sasao 1989).

<sup>41</sup> Este tipo de métodos fueron aplicados por primera vez por Kirchoff y por Thomson y Tait en el año 1869.

Por último, es preciso señalar que las propiedades que describen la estructura interna de nuestro sistema están representadas por un conjunto de parámetros numéricos  $A_{(k)}$ ,  $f_{A(k)}$ ,  $R_{A(k)(k+1)}$ , ... que reflejan de forma promediada las características del cuerpo no rígido. Asimismo, aunque la Tierra sea un sistema continuo debido, por ejemplo, a que alguna de sus capas sea fluida, su movimiento de rotación ha sido representado a partir de un número finito de funciones dependientes únicamente del tiempo (los vectores velocidad angular, los ejes de figura, etc.). Estos dos hechos son particularmente importantes, pues permiten desarrollar el estudio teórico del movimiento de rotación sin necesidad de especificar la dependencia funcional de los parámetros que caracterizan la estructura interna del modelo de Tierra, y utilizando únicamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, el sistema dinámico tiene un número finito de grados de libertad. En este sentido, nuestra Investigación es similar a la que se realiza al estudiar la dinámica de rotación de varios cuerpos rígidos acoplados, aunque más compleja.

### 1.2.3 Formulación hamiltoniana de la rotación de la Tierra

En los apartados anteriores se han expuesto los elementos necesarios para obtener un modelado matemático del movimiento de rotación de la Tierra mediante la aplicación del formalismo hamiltoniano. Este estudio pasa por establecer y resolver las ecuaciones canónicas del modelo de Tierra considerado, teniendo en cuenta las expresiones de la energía cinética, la energía potencial y los momentos generalizados que actúan sobre ella. Con este propósito, en primer lugar es necesario elegir un conjunto canónico con el que caracterizar dinámicamente el movimiento de rotación de la Tierra. Esta elección es uno de los puntos clave en el desarrollo de cualquier problema mecánico, ya que una elección acertada de las variables canónicas permitirá que las ecuaciones del movimiento adopten una forma sencilla, lo que facilitará su integración posterior<sup>42</sup>. Por lo tanto, el conjunto canónico en el que formulemos el problema de la rotación debería adaptarse a todas las simetrías del sistema y características particulares del movimiento, teniendo en cuenta, por ejemplo, que en el movimiento de rotación de la Tierra los tres ejes  $\vec{e}_3$ ,  $\vec{e}_\omega$  y  $\vec{e}_I$  permanecen próximos entre sí (véase la ecuación 1.64).

Una vez que se ha determinado el conjunto canónico es posible construir explícitamente las ecuaciones de Hamilton. La solución de este sistema de

<sup>42</sup>Recuérdese en este sentido la teoría de Hamilton-Jacobi (véase, por ejemplo, Goldstein 1980).

ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden permitirá determinar el movimiento de rotación de la Tierra. Sin embargo, salvo para algún caso de interés académico, la resolución analítica exacta de estas ecuaciones es un problema intratable, ya que, por lo general, forman un sistema de ecuaciones no lineales fuertemente acopladas con un elevado número de variables. Tengamos en cuenta, por ejemplo, que para un modelo de Tierra de dos capas el sistema dinámico tendría seis grados de libertad, tres asociados con la rotación del manto y otros tres con la rotación del núcleo, conduciendo a un sistema de doce ecuaciones diferenciales.

Afortunadamente, la estructura particular del movimiento de rotación de la Tierra (véase la sección 1.1.6) muestra que el movimiento real puede visualizarse como una pequeña desviación con respecto a un movimiento de rotación uniforme. Este hecho posibilita la aplicación de alguna teoría de la perturbación para determinar la solución. Recordemos que los métodos de perturbaciones permiten obtener una solución aproximada del problema perturbado siempre que este problema esté lo suficientemente próximo al problema no perturbado o libre cuya solución debe ser conocida. En nuestra situación el problema perturbado se corresponde con el movimiento real de rotación de la Tierra, en tanto que existen distintas posibilidades para elegir el problema libre. Una posibilidad es considerar como problema libre aquel que resulta de eliminar del hamiltoniano todas las contribuciones provenientes de las interacciones externas<sup>43</sup>, esto garantiza que el problema perturbado permanezca lo suficientemente próximo al problema libre mejorando de este modo la convergencia del método de perturbaciones. En este sentido, el estudio del problema de la rotación de la Tierra mediante el formalismo canónico es francamente acertado, pues, como se ha señalado anteriormente, este dispone de potentes técnicas de perturbaciones basadas en las series de Lie (véase, por ejemplo, Hori 1966) que permiten la construcción explícita de soluciones analíticas aproximadas hasta el orden deseado. Por otra parte, la aplicación de estas técnicas conduce directamente a la separación de los movimientos de precesión y nutación de la Tierra (Kinoshita 1977).

### Variables canónicas de Andoyer

Aunque los modelos de Tierra que consideraremos en esta Investigación están, en general, formados por varias capas, es conveniente considerar inicialmente el de un modelo de Tierra compuesto por una sola capa para dar una idea

---

<sup>43</sup>A veces sólo se elimina la parte periódica de las interacciones externas (Kinoshita 1977). De igual forma, en ciertas ocasiones el problema libre se refiere a un modelo simétrico sin interacciones externas, considerando a triaxialidad como una perturbación (véase, por ejemplo, Getino y Ferrándiz 1995).

simplificada de cómo obtener los conjuntos canónicos más convenientes para realizar el estudio del movimiento de rotación de la Tierra.

### Conjunto canónico de Euler

Recordemos que en el caso de un modelo con una sola capa el movimiento de rotación se puede describir mediante los ángulos de Euler definidos en la sección (1.1.2). Con esta parametrización de la rotación, los sistemas de referencia celeste y terrestre están relacionados mediante (ecuación 1.6)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\varepsilon)\mathbf{R}_3(\psi) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad (1.149)$$

donde  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  son las coordenadas de un cierto vector en el sistema celeste y  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  sus coordenadas en el sistema terrestre. Por lo tanto, estos ángulos forman un conjunto de coordenadas generalizadas en el sentido que se le da a este término en la Mecánica de Lagrange. Teniendo en cuenta la ecuación (1.126), la energía cinética para este modelo de Tierra es

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \Pi\vec{\omega}, \quad (1.150)$$

siendo  $\Pi$  su tensor de inercia (1.38). La velocidad angular se puede escribir en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas como (ecuación 1.18)

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{E}_3 + \dot{\varepsilon}\vec{e}_n + \dot{\phi}\vec{e}_3. \quad (1.151)$$

A partir de estas expresiones y considerando la situación en la que ni la energía potencial del sistema ni su tensor de inercia dependan de las velocidades generalizadas, podemos obtener los momentos canónicos conjugados de  $\psi$ ,  $\varepsilon$  y  $\phi$ . En efecto, de la definición de los momentos canónicos (1.68) y de las igualdades (1.150) y (1.151), podemos escribir

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\psi}} = \Pi\vec{\omega} \cdot \vec{E}_3 = \vec{L} \cdot \vec{E}_3, \\ p_\varepsilon &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\varepsilon}} = \Pi\vec{\omega} \cdot \vec{e}_n = \vec{L} \cdot \vec{e}_n, \\ p_\phi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{\phi}} = \Pi\vec{\omega} \cdot \vec{E}_3 = \vec{L} \cdot \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (1.152)$$

donde  $\vec{L}$  es el momento angular del sistema y  $\vec{e}_n$  el vector unitario resultante de normalizar el vector  $\vec{E}_3 \times \vec{e}_3$ . De esta forma hemos construido el conjunto



canónico de Euler  $(p_\psi, p_\varepsilon, p_\phi, \psi, \varepsilon, \phi)$ . Además, tanto los momentos como las coordenadas de este conjunto tienen un significado dinámico o geométrico claro, ya que de las ecuaciones (1.152) se sigue que los momentos canónicos son las proyecciones del vector momento angular sobre cada uno de los ejes  $\vec{E}_3$ ,  $\vec{e}_n$  y  $\vec{e}_3$ ; en tanto que las coordenadas son los ángulos definidos por la igualdad (1.149).

Señalemos que debido a esta interpretación es fácil construir las ecuaciones de Hamilton en este conjunto puesto que es posible expresar de forma inmediata la velocidad angular, y en virtud de las ecuaciones (1.19) las velocidades generalizadas, y las coordenadas de los vectores  $\vec{E}_3$  y  $\vec{e}_n$  en el sistema celeste o terrestre en términos del conjunto canónico. Por ejemplo, las coordenadas de estos tres vectores en el sistema terrestre serán

$$\begin{pmatrix} x_{\vec{E}_3} \\ y_{\vec{E}_3} \\ z_{\vec{E}_3} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\varepsilon)\mathbf{R}_3(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{\vec{e}_n} \\ y_{\vec{e}_n} \\ z_{\vec{e}_n} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.153)$$

De forma análoga, podemos obtener las coordenadas del vector momento angular en el sistema terrestre sin más que proyectar la igualdad

$$\vec{L} = L_1\vec{e}_1 + L_2\vec{e}_2 + L_3\vec{e}_3, \quad (1.154)$$

en cada uno de los ejes  $\vec{E}_3$ ,  $\vec{e}_n$  y  $\vec{e}_3$ . Es decir, mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_\psi &= \vec{E}_3 \cdot \vec{L} = L_1(\vec{E}_3 \cdot \vec{e}_1) + L_2(\vec{E}_3 \cdot \vec{e}_2) + L_3(\vec{E}_3 \cdot \vec{e}_3), \\ p_\varepsilon &= \vec{e}_n \cdot \vec{L} = L_1(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_1) + L_2(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_2) + L_3(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_3), \\ p_\phi &= \vec{e}_3 \cdot \vec{L} = L_1(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) + L_2(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) + L_3(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3). \end{aligned} \quad (1.155)$$

Los productos escalares que aparecen a la derecha de las ecuaciones se pueden calcular mediante las relaciones (1.153). Así, despejando las componentes de  $\vec{L}$  en el sistema terrestre se llega a

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \phi}{\sin \varepsilon} & \cos \phi & -\frac{\cos \varepsilon \sin \phi}{\sin \varepsilon} \\ \frac{\cos \phi}{\sin \varepsilon} & -\sin \phi & -\frac{\cos \varepsilon \cos \phi}{\sin \varepsilon} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\psi \\ p_\varepsilon \\ p_\phi \end{pmatrix}. \quad (1.156)$$

A partir de estas ecuaciones podemos determinar las componentes de la velocidad angular mediante la ecuación (1.45)

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \mathbf{\Pi}^{-1} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}. \quad (1.157)$$

Con todas estas relaciones sería posible escribir el hamiltoniano del sistema en términos del conjunto canónico. Para hacernos una idea de si este conjunto se adapta adecuadamente a las particularidades del movimiento de rotación, consideremos la expresión de la energía cinética en el caso en el que la matriz de inercia sea diagonal con momentos principales de inercia  $A$ ,  $B$  y  $C$ . En esta situación, y considerando las ecuaciones (1.156) y (1.157) obtenemos que

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2A} \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \varepsilon} (p_\phi \cos \varepsilon - p_\psi) - p_\varepsilon \cos \phi \right]^2 + \frac{1}{2C} p_\phi^2 + \\ & + \frac{1}{2B} \left[ \frac{\cos \phi}{\text{sen } \varepsilon} (p_\phi \cos \varepsilon - p_\psi) + p_\varepsilon \text{sen } \phi \right]^2. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Como es fácil de deducir a partir de esta expresión el conjunto canónico de Euler no conduce a una forma especialmente simplificada de la energía cinética. Tampoco aparece reflejado de forma clara ninguna relación entre los momentos  $p_\psi$ ,  $p_\varepsilon$ ,  $p_\phi$  o las variables  $\psi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\phi$  que permita beneficiarse del hecho de que en su movimiento los ejes  $\vec{e}_3$  y  $\vec{e}_L$  permanecen próximos. No obstante, a pesar de estos inconvenientes el conjunto canónico de Euler es muy útil en los estudios de la rotación de la Tierra. Primero, porque sus coordenadas  $\psi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\phi$  son las que, una vez expresadas en función del tiempo, nos servirán para caracterizar el movimiento de rotación y segundo, porque el conjunto de Euler es el punto de partida para construir otros conjuntos canónicos como veremos a continuación.

### Construcción de nuevos conjuntos canónicos

Recordemos que desde un punto de vista dinámico la cantidad más representativa del cuerpo sólido es su momento angular  $\vec{L}$ . Este hecho nos permitirá construir nuevos conjuntos canónicos. Para ello vamos a calcular el corchete de Poisson de las distintas componentes del vector momento angular en los sistemas celeste y terrestre. Teniendo en cuenta que, como se señaló en la sección (1.2.1), el valor del corchete de Poisson es independiente del conjunto canónico utilizado, calcularemos estos corchetes utilizando el conjunto canónico de Euler. Particularizando la ecuación (1.92) al conjunto

canónico de Euler, el corchete de dos funciones de las coordenadas canónicas vendrá dado por

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial g}{\partial p_\psi} - \frac{\partial g}{\partial \psi} \frac{\partial f}{\partial p_\psi} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{\partial g}{\partial p_\varepsilon} - \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial p_\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial p_\phi} - \frac{\partial g}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p_\phi}. \quad (1.159)$$

Así, si consideramos las componentes de  $\vec{L}$  en el sistema terrestre dadas por las ecuaciones (1.156) y sus componentes en el sistema celeste dadas por

$$\begin{pmatrix} X_{1\vec{L}} \\ X_{2\vec{L}} \\ X_{3\vec{L}} \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\varepsilon)\mathbf{R}_3(\psi)]^t \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad (1.160)$$

obtenemos mediante un cálculo directo que

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{X_{i\vec{L}}, X_{j\vec{L}}\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} X_{k\vec{L}}, \quad \{L_i, X_{j\vec{L}}\} = 0, \quad (1.161)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita. Por otra parte, si consideramos también el módulo del momento angular como función del conjunto canónico de Euler

$$L = \sum_{i=1}^3 L_i^2 = \sqrt{p_\varepsilon^2 + p_\phi^2 + \frac{(p_\psi - p_\phi \cos \varepsilon)^2}{\sin^2 \varepsilon}}, \quad (1.162)$$

deducimos el valor de los corchetes

$$\{L_i, L\} = 0, \quad \{X_{i\vec{L}}, L\} = 0. \quad (1.163)$$

A partir de estos resultados es posible elegir nuevos momentos canónicos para el movimiento de rotación. Para ello, baste recordar las propiedades (1.93), que establecían la invariancia del corchete de Poisson bajo una transformación canónica. Así, sabemos que si dos funciones son momentos canónicos de un conjunto de variables canónicas, su corchete se debe anular necesariamente en cualquier otro conjunto canónico. Teniendo esto presente, junto con las ecuaciones (1.161) y (1.163), podremos afirmar que:

1. Dos o más componentes del vector momento angular en un mismo sistema de referencia no pueden ser momentos canónicos de un conjunto simultáneamente, puesto que su corchete de Poisson es distinto de cero.
2. El corchete de Poisson de las componentes del vector momento angular en dos sistemas de referencia es cero, luego pueden ser momentos canónicos al mismo tiempo.

3. El corchete de Poisson de las componentes del vector momento angular en cualquier sistema de referencia con su módulo es cero. Por lo tanto también son compatibles como momentos del mismo conjunto canónico.

Así, podríamos tomar como momentos de un conjunto canónico para el movimiento de rotación las tres funciones

$$\begin{aligned} P_1 &= f_1(X_{1\vec{L}}) + f_2(X_{2\vec{L}}) + f_3(X_{3\vec{L}}), \\ P_2 &= f_4(L), \\ P_3 &= f_5(L_1) + f_6(L_2) + f_7(L_3), \end{aligned} \quad (1.164)$$

donde las  $f_i$  son funciones arbitrarias, suficientemente regulares. A partir de la definición de los corchetes de Poisson, mediante el uso de la regla de la cadena y considerando las igualdades (1.161) y (1.163) resulta que

$$\{P_1, P_2\} = \{P_1, P_3\} = \{P_2, P_3\} = 0. \quad (1.165)$$

Luego,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  podrán ser los momentos de un conjunto canónico, siempre y cuando estas tres funciones sean funcionalmente independientes.

### Conjunto canónico de Andoyer

La opción más sencilla y más parecida al conjunto canónico de Euler será considerar

$$P_1 = X_{3\vec{L}}, P_2 = L, P_3 = L_3. \quad (1.166)$$

Notemos que estos tres momentos canónicos están directamente relacionados con las proyecciones del vector momento angular sobre cada uno de los ejes  $\vec{E}_3$ ,  $\vec{e}_{\vec{L}}$  y  $\vec{e}_3$ , ya que tenemos

$$P_1 = \vec{L} \cdot \vec{E}_3, P_2 = \vec{L} \cdot \vec{e}_{\vec{L}}, P_3 = \vec{L} \cdot \vec{e}_3. \quad (1.167)$$

Operando por analogía con el caso del conjunto canónico de Euler podemos determinar las variables canónicas conjugadas de los momentos canónicos. Allí, las coordenadas eran ángulos medidos en cada uno de los planos perpendiculares a los vectores  $\vec{E}_3$ ,  $\vec{e}_n$  y  $\vec{e}_3$ . De igual forma, en este caso podemos introducir los vectores unitarios  $\vec{e}_I$  y  $\vec{e}_\sigma$  resultantes de normalizar los vectores  $\vec{E}_3 \times \vec{e}_{\vec{L}}$  y  $\vec{e}_{\vec{L}} \times \vec{e}_3$ , respectivamente. Con ayuda de estos vectores la coordenada  $Q_1$  se define cómo el ángulo que forman los vectores  $\vec{E}_3$  y  $\vec{e}_I$  en el plano de la eclíptica; la coordenada  $Q_2$  como el ángulo que forman los vectores  $\vec{e}_I$  y  $\vec{e}_\sigma$  en el plano perpendicular al momento angular y, por último, la coordenada  $Q_3$  como el ángulo que forman los vectores  $\vec{e}_\sigma$  y  $\vec{e}_3$  en el ecuador. Es claro que, según la definición utilizada, estas variables no estarán definidas si  $\vec{L}$  está dirigido en la misma dirección que  $\vec{E}_3$  o  $\vec{e}_3$ .

Las variables canónicas que acabamos de introducir se conocen como variables de Andoyer (Andoyer 1923)<sup>44</sup>, aunque a veces se denominan de Serret-Andoyer. Este conjunto canónico tienen una gran importancia en el estudio de la rotación de los cuerpos celestes, ya que permite el desarrollo de teorías puramente analíticas de forma más sencilla y potente que las que se lograrían utilizando el conjunto de Euler, como puede verse, por ejemplo, comparando los trabajos de Woolard (1953) y Kinoshita (1977). Habitualmente escribiremos el conjunto de Andoyer con la notación

$$P_1 = \Lambda, P_2 = M, P_3 = N, Q_1 = \lambda, Q_2 = \mu, Q_3 = \nu. \quad (1.168)$$

También es conveniente introducir dos variables auxiliares  $I$  y  $\sigma$  mediante las relaciones

$$\cos I = \frac{\Lambda}{M}, \quad \text{sen } I = \frac{\sqrt{M^2 - \Lambda^2}}{M}, \quad \cos \sigma = \frac{N}{M}, \quad \text{sen } \sigma = \frac{\sqrt{M^2 - N^2}}{M}, \quad (1.169)$$

es decir,  $0 < I < \pi$  es el ángulo que forman los vectores  $\vec{E}_3$  y  $\vec{e}_L$ , mientras que  $0 < \sigma < \pi$  es el ángulo formado por  $\vec{e}_L$  y  $\vec{e}_3$ . Estas variables permiten simplificar algunos cálculos y pueden ser utilizadas al mismo tiempo que los momentos canónicos. Cuando esto ocurra es importante recordar que la variable auxiliar  $I$  es una función de  $M$  y  $\Lambda$ , y la variable auxiliar  $\sigma$  de  $M$  y  $N$ . Por ello, a menudo es útil considerar que la diferencial de estas funciones que vendrá dada por

$$dI = \frac{\cos I}{M \text{ sen } I} dM - \frac{1}{M \text{ sen } I} d\Lambda, \quad d\sigma = \frac{\cos \sigma}{M \text{ sen } \sigma} dM - \frac{1}{M \text{ sen } \sigma} dN. \quad (1.170)$$

Teniendo estas consideraciones presentes las variables de Andoyer podrán tomar los valores

$$\begin{aligned} -M \leq \Lambda = M \cos I \leq M, \quad -M \leq N = M \cos \sigma \leq M, \\ 0 \leq \lambda < 2\pi, \quad 0 \leq \mu < 2\pi, \quad 0 \leq \nu < 2\pi, \end{aligned} \quad (1.171)$$

donde recordemos que  $M$  siempre es una cantidad no negativa, al ser el módulo del vector momento angular.

Las anteriores relaciones permiten dar un significado geométrico y cinemático claro a las variables de Andoyer. En primer lugar, según la definición de las coordenadas  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ , así como de las variable auxiliares  $I$  y

<sup>44</sup>Hemos introducido estas variables siguiendo un procedimiento ad hoc, aunque posteriormente se comprobará que el conjunto definido es verdaderamente canónico. Una definición constructiva de estas variables se logra al resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi para un cuerpo rígido simétrico y libre de interacciones.

$\sigma$ , tenemos que los sistemas de referencia celeste y terrestre (véase la figura 2.2) están relacionados mediante la rotación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\nu)\mathbf{R}_1(\sigma)\mathbf{R}_3(\mu)\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\lambda) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad (1.172)$$

es decir, en el caso de las variables de Andoyer es necesario realizar una secuencia de cinco rotaciones para pasar del sistema celeste al sistema terrestre. Al igual que en el caso del conjunto canónico de Euler con ayuda de esta ecuación será posible, por ejemplo, expresar las coordenadas de los vectores  $\vec{E}_3$ ,  $\vec{e}_I$ ,  $\vec{e}_{\vec{L}}$  y  $\vec{e}_\sigma$  en el sistema de referencia terrestre. A modo de ejemplo y recordando que  $\vec{L} = M\vec{e}_{\vec{L}}$ , podemos encontrar las componentes del vector momento angular en el sistema terrestre

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\nu)\mathbf{R}_1(\sigma) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \nu \\ M \operatorname{sen} \sigma \cos \nu \\ N \end{pmatrix}, \quad (1.173)$$

mientras que en el sistema celeste se tendrá

$$\begin{pmatrix} X_{1\vec{L}} \\ X_{2\vec{L}} \\ X_{3\vec{L}} \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\lambda)]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \operatorname{sen} I \operatorname{sen} \lambda \\ -M \operatorname{sen} I \cos \lambda \\ \Lambda \end{pmatrix}. \quad (1.174)$$

Fijémonos que esta última relación es similar a la ecuación (1.44) sin más que identificar los ángulos  $I = \varepsilon_L$  y  $\lambda = \psi_L$ , es decir,  $I$  y  $\lambda$  son la longitud del nodo y la inclinación del plano perpendicular al momento angular, de ahí que a este plano a veces se le llame plano de Andoyer.

Igual que en el caso del conjunto canónico de Euler podemos evaluar la expresión de la energía cinética en función de las variables de Andoyer al considerar el caso en el que la matriz de inercia sea diagonal con momentos principales de inercia  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Teniendo en cuenta las relaciones anteriores y las ecuaciones (1.150) y (1.157) obtenemos que

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \nu}{A} + \frac{\cos^2 \nu}{B} \right) (M^2 - N^2) + \frac{1}{2} \frac{N^2}{C}. \quad (1.175)$$

Como puede verse esta expresión es mucho más simple que la obtenida en términos del conjunto de Euler (ecuación 1.158). De hecho, en ella únicamente interviene la variable canónica  $\nu$ . Es más si el cuerpo sólido fuera simétrico,  $A = B$ , la ecuación anterior se reduciría a

$$T_S = \frac{1}{2} \frac{(M^2 - N^2)}{A} + \frac{1}{2} \frac{N^2}{C}, \quad (1.176)$$

y no aparecería ninguna variable en la energía cinética. Es decir, en este caso las variables de Andoyer coinciden con las variables acción-ángulo del problema (véase, por ejemplo, Goldstein 1980) lo cual facilita enormemente la integración del problema. Por otra parte es importante resaltar el hecho de que el conjunto canónico de Andoyer hace intervenir explícitamente el ángulo que forman los vectores  $\vec{e}_L$  y  $\vec{e}_3$ , ya que  $N = M \cos \sigma$ . Como se señaló en la sección (1.1.6) este ángulo es extremadamente pequeño, lo cual va a permitir que muchas funciones del conjunto canónico de Andoyer puedan escribirse como desarrollos en serie de MacLaurin de este ángulo, que podrán ser truncados en el orden conveniente<sup>45</sup>.

### Expresión de los ángulos de Euler en el conjunto de Andoyer

Una aplicación del procedimiento que acabamos de describir se lleva a cabo para encontrar la relación de estas con los ángulos de Euler, puesto que es con ellos con los que se determina el movimiento de rotación de la Tierra. Con este propósito basta comparar las ecuaciones (1.149) y (1.172) de donde

$$\mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\varepsilon)\mathbf{R}_3(\psi) = \mathbf{R}_3(\nu)\mathbf{R}_1(\sigma)\mathbf{R}_3(\mu)\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\lambda). \quad (1.177)$$

Estas relaciones son poco manejables, sin embargo, como se acaba de mencionar, la expresión de los ángulos de Euler puede ser dada como un desarrollo en serie de la variable auxiliar  $\sigma$ . Para ello, fijémonos en que al tender  $\sigma$  a 0 los ángulos restantes de (1.177) experimentan los siguientes cambios

$$\varepsilon \rightarrow I, \mu \rightarrow (\phi - \nu), (\psi - \lambda) \rightarrow 0. \quad (1.178)$$

Así pues, supondremos que las variables de Euler se pueden expresar mediante los desarrollos

$$\lambda = \psi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma^k, \quad \varepsilon = I + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sigma^k, \quad \phi = \mu + \nu + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma^k. \quad (1.179)$$

Para determinar los coeficientes  $a_k$ ,  $b_k$  y  $c_k$  será suficiente con substituir las identidades (1.179) en algunas de las relaciones derivadas de la igualdad (1.177), y aplicar una técnica de coeficientes indeterminados. Por ejemplo, seleccionemos las tres relaciones

$$\begin{aligned} \cos(\phi - \nu) &= \cos \mu \cos(\lambda - \psi) - \cos I \sin \mu \sin(\lambda - \psi), \\ \cos \varepsilon &= \cos I \cos \sigma - \sin I \sin \sigma \cos \mu, \\ \sin \varepsilon \sin(\lambda - \psi) &= -\sin \sigma \sin \mu, \end{aligned} \quad (1.180)$$

<sup>45</sup>El movimiento en el que  $\sigma$  permanece pequeño se denomina short-axis mode. En este movimiento las rotaciones son ordinaria y secularmente estables (Kinoshita 1992).

si ahora sustituimos las igualdades (1.179) en estas relaciones y desarrollamos hasta primer orden en sigma, tendremos las tres ecuaciones

$$c_1 + a_1 \cos I = 0, \quad \cos \mu - b_1 = 0, \quad a_1 \sin I - \sin \mu = 0, \quad (1.181)$$

de donde se sigue que

$$a_1 = \frac{\sin \mu}{\sin I}, \quad b_1 = \cos \mu, \quad c_1 = -\frac{\cos I \sin \mu}{\sin I}. \quad (1.182)$$

Estas relaciones son las mismas que obtiene Kinoshita (1977), aunque allí no se especifica el procedimiento empleado para deducirlas. Teniendo presente las relaciones (1.182) podemos repetir el proceso para determinar los coeficientes  $a_2$ ,  $b_2$  y  $c_2$  resultando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2a_2 \cos I + 2c_2 - \cos \mu \sin \mu &= 0, \\ 2b_2 \sin I - \cos I \sin^2 \mu &= 0, \\ a_2 \sin^2 I + \cos I \cos \mu \sin \mu &= 0. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$a_2 = -\frac{\cos I \cos \mu \sin \mu}{\sin^2 I}, \quad b_2 = \frac{\cos I \sin^2 \mu}{2 \sin I}, \quad c_2 = \frac{(1 + \cos^2 I) \cos \mu \sin \mu}{2 \sin^2 I}. \quad (1.184)$$

Podríamos realizar de nuevo el algoritmo para encontrar los coeficientes de orden superior pero en la práctica es más que suficiente mantener el primer orden en sigma. Así pues, los ángulos de Euler se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda + \sigma \frac{\sin \mu}{\sin I} - \sigma^2 \frac{\cos I \cos \mu \sin \mu}{\sin^2 I} + O(\sigma^3), \\ \varepsilon &= I + \sigma \cos \mu + \sigma^2 \frac{\cos I \sin^2 \mu}{2 \sin I} + O(\sigma^3), \\ \phi &= \mu + \nu - \sigma \frac{\cos I \sin \mu}{\sin I} + \sigma^2 \frac{(1 + \cos^2 I) \cos \mu \sin \mu}{2 \sin^2 I} + O(\sigma^3). \end{aligned} \quad (1.185)$$

Conviene destacar que estas relaciones son independientes de la naturaleza del cuerpo, ya que como se puede apreciar no interviene ningún elemento del tensor de inercia.

En determinadas circunstancias puede resultar ventajoso expresar las igualdades anteriores, a primer orden en  $\sigma$ , de la siguiente forma. Cuando  $\sigma$  es pequeño las componentes del momento angular en el sistema de referencia



terrestre, ecuaciones (1.173), vendrán dadas por

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\sigma \operatorname{sen} \nu \\ M\sigma \operatorname{cos} \nu \\ M \end{pmatrix} + O(\sigma^2), \quad (1.186)$$

Así si tenemos en cuenta estas igualdades y que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \mu &= \operatorname{sen}(\mu + \nu - \nu) = \operatorname{sen}(\mu + \nu) \operatorname{cos} \nu - \operatorname{cos}(\mu + \nu) \operatorname{sen} \nu, \\ \operatorname{cos} \mu &= \operatorname{cos}(\mu + \nu - \nu) = \operatorname{sen}(\mu + \nu) \operatorname{sen} \nu + \operatorname{cos}(\mu + \nu) \operatorname{cos} \nu, \end{aligned} \quad (1.187)$$

los ángulos  $\psi$  y  $\varepsilon$  dados por las ecuaciones (1.185) se pueden poner en la forma

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda - \frac{\operatorname{cos}(\mu + \nu)}{M \operatorname{sen} I} L_1 + \frac{\operatorname{sen}(\mu + \nu)}{M \operatorname{sen} I} L_2 + O(\sigma^2), \\ \varepsilon &= I + \frac{\operatorname{sen}(\mu + \nu)}{M} L_1 + \frac{\operatorname{cos}(\mu + \nu)}{M} L_2 + O(\sigma^2). \end{aligned} \quad (1.188)$$

### Canonicidad del conjunto de Andoyer

Incidentalmente, señalemos que mediante las ecuaciones (1.167) y (1.172) es posible probar de una forma rigurosa que el paso del conjunto de Euler al conjunto de Andoyer constituye una transformación canónica. Para ello, aplicaremos el procedimiento explicado en la sección (1.2.1) y que pasa por evaluar la forma diferencial  $\vec{L} \cdot d\vec{R}$  en ambos conjuntos canónicos. Respecto al conjunto canónico de Euler, la ecuación (1.24) nos permitía escribir la rotación infinitesimal como

$$d\vec{R} = \vec{E}_3 d\psi + \vec{e}_n d\varepsilon + \vec{e}_3 d\phi. \quad (1.189)$$

Por lo que, considerando el significado de los momentos canónicos del conjunto de Euler se tiene

$$\vec{L} \cdot d\vec{R} = (\vec{L} \cdot \vec{E}_3) d\psi + (\vec{L} \cdot \vec{e}_n) d\varepsilon + (\vec{L} \cdot \vec{e}_3) d\phi = p_\psi d\psi + p_\varepsilon d\varepsilon + p_\phi d\phi. \quad (1.190)$$

Por otra parte, considerando que las variables de Andoyer permiten relacionar el sistema de referencia celeste con el terrestre mediante la secuencia de Euler dada por la ecuación (1.172), podremos escribir la rotación infinitesimal asociada a la diferencial de esta rotación (véase la sección 1.1.2) como

$$d\vec{R} = \vec{E}_3 d\lambda + \vec{e}_I dI + \vec{e}_I d\mu + \vec{e}_\sigma d\sigma + \vec{e}_3 d\nu. \quad (1.191)$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por  $\vec{L}$  tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{L} \cdot d\vec{R} &= (\vec{L} \cdot \vec{E}_3) d\lambda + (\vec{L} \cdot \vec{e}_I) dI + (\vec{L} \cdot \vec{e}_L) d\mu + (\vec{L} \cdot \vec{e}_\sigma) d\sigma + (\vec{L} \cdot \vec{e}_3) d\nu \\ &= \Lambda d\lambda + M d\mu + N d\nu,\end{aligned}\quad (1.192)$$

donde hemos tenido en cuenta el significado de los momentos del conjunto de Andoyer y el hecho de que los vectores  $\vec{e}_I$  y  $\vec{e}_\sigma$  son perpendiculares a  $\vec{L}$ . Comparando las ecuaciones (1.190) y (1.192) llegamos a

$$p_\psi d\psi + p_\varepsilon d\varepsilon + p_\phi d\phi = \Lambda d\lambda + M d\mu + N d\nu, \quad (1.193)$$

lo cual en virtud de la ecuación (1.72) demuestra que la transformación es canónica. Además en este caso, al ser la transformación independiente del tiempo se tiene también

$$K = H. \quad (1.194)$$

### Variables canónicas no singulares

A pesar de que las variables canónicas de Andoyer son las más adecuadas para estudiar analíticamente el movimiento de rotación de la Tierra, el hecho de que los vectores  $\vec{e}_L$  y  $\vec{e}_3$  permanezcan próximos, es decir, que  $\sigma$  sea pequeño, puede conducir a la aparición de ciertas dificultades que para determinadas aplicaciones es conveniente evitar. Por una parte debido a este hecho aparecen pequeños divisores, también llamados singularidades virtuales, que pueden perjudicar la solución del problema. Esto queda patente si consideramos la diferenciación con respecto a los momentos canónicos de Andoyer. Esta operación es necesaria para construir las ecuaciones de movimiento. Así, teniendo en cuenta las ecuaciones (1.170) estas relaciones se escriben como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial M} &= \left( \frac{\partial}{\partial M} \right) + \frac{\cos I}{M \operatorname{sen} I} \frac{\partial}{\partial I} + \frac{\cos \sigma}{M \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial N} &= \left( \frac{\partial}{\partial N} \right) - \frac{1}{M \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial \Lambda} &= \left( \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) - \frac{1}{M \operatorname{sen} I} \frac{\partial}{\partial I},\end{aligned}\quad (1.195)$$

donde las derivadas parciales entre paréntesis denotan la derivación respecto a las variables que aparezcan de forma explícita en la función que se derive.

Como se desprende de estas expresiones, se producen pequeños divisores<sup>46</sup> para un valor de la variable auxiliar  $\sigma$  cercano a 0.

Otra dificultad adicional radica en que en las posiciones singulares del momento angular, esto es, cuando  $\vec{e}_L$  y  $\vec{e}_3$  son coincidentes, las variables de Andoyer no están definidas. Sin embargo, puede ser útil el considerar la situación singular como problema libre o sin perturbar para la aplicación de algunos métodos analíticos o numéricos ( véase, por ejemplo, Fukushima 1994) que faciliten el estudio del movimiento forzado de rotación. Esto permitiría, por ejemplo, escribir el hamiltoniano del sistema como una serie de potencias en términos de las variables canónicas en torno a la posición singular. Con vistas a evitar las dificultades anteriormente señaladas es posible definir a partir del conjunto canónico de Andoyer nuevos conjuntos canónicos que denominaremos conjuntos canónicos no singulares. Este tipo de conjuntos han sido utilizados en los Capítulos 2 y 3 de esta Investigación. En su definición consideraremos la forma de introducir las nuevas variables canónicas en los casos en los que  $\sigma$  es próximo a 0, o bien cuando los dos ángulos  $I$  ó  $\sigma$  son próximos a 0, situación que será tenida en cuenta al considerar un modelo de Tierra de varias capas. No obstante, es preciso insistir en que este tipo de singularidades son de carácter matemático, debido al conjunto canónico utilizado, y no se corresponden con ninguna situación excepcional del sistema dinámico bajo consideración.

El conjunto canónico no singular es formalmente similar a los conjuntos de Poincaré o Poncaré modificado (Brower y Clemence 1961), utilizados para evitar las singularidades en inclinación y/o excentricidad de las variables de Delaunay. Como apunta Fukushima (Fukushima 1994) el mayor inconveniente que presentan los conjuntos no singulares de este tipo es que carecen de un significado geométrico y cinemático claro. Este es el motivo por el que la construcción de las características dinámicas del sistema (hamiltoniano, momentos angulares,...) deba realizarse con la ayuda de un conjunto auxiliar, el de Andoyer en nuestro caso, y no pueda formularse directamente en función de las variables no singulares, al menos en una etapa inicial.

A continuación definiremos dos conjuntos no singulares partiendo del conjunto canónico de Andoyer. Según que el vector momento angular esté próximo al eje  $\vec{e}_3$ , o que los tres ejes  $\vec{E}_3$ ,  $\vec{e}_L$  y  $\vec{e}_3$  permanezcan próximos, construiremos dos conjuntos no singulares diferentes que se corresponden con las situaciones  $\sigma \sim 0$  y  $\sigma \sim 0$  e  $I \sim 0$ .

El procedimiento para construir los conjuntos no singulares se basa en realizar una secuencia de dos transformaciones canónicas que parten del conjunto de Andoyer, de forma similar a la llevada a cabo por Henrard y Moons

<sup>46</sup>También tenemos pequeños divisores si  $\sigma$  es cercano a  $\pi$ , o si  $I$  es cercano a 0 ó a  $\pi$ .

(1978). En particular para el conjunto no singular I ( $\sigma \sim 0$ ), el vector momento angular se encuentra próximo al eje  $\vec{e}_3$ . En esta situación  $M \sim N$ , además la suma de los ángulos  $\mu + \nu$  permanece perfectamente definida aun cuando  $\mu$  y  $\nu$  aisladamente se determinen con dificultad, o incluso no estén definidos si  $\sigma = 0$ . Así en principio, construiremos una transformación canónica en la que  $\mu + \nu$  sea una variable, también será conveniente introducir como momento canónico la diferencia  $M - N$ , que en esta situación permanecerá próxima a 0. El par restante de variables canónicas  $\Lambda$  y  $\lambda$  no intervienen en esta discusión por lo que permanecerán inalteradas. Para completar el conjunto canónico deberemos encontrar la variable conjugada de  $r_1 = \mu + \nu$ ,  $R_1$ , y la conjugada de  $R_2 = M - N$ ,  $r_2$ . Imponiendo que la transformación sea canónica (ecuación 1.72) tendremos que

$$M d\mu + N d\nu = R_1 d\mu + (M - N) dr_2 + R_1 d\nu. \quad (1.196)$$

Así, haciendo  $R_1 = M$  y  $r_2 = -\nu$  el conjunto

$$\begin{aligned} R_1 &= M, & r_1 &= \mu + \nu, \\ R_2 &= M - N, & r_2 &= -\nu, \end{aligned} \quad (1.197)$$

será canónico. Notemos que cuando  $\sigma = 0$  todas las variables de este conjunto permanecen definidas salvo  $r_2$ , por no estarlo el vector  $\vec{e}_\sigma$ . Para solventar este problema asociaremos al par  $R_2, r_2$  unas variables de Poincaré (Brower y Clemence 1961) dadas por

$$Y_2 = \sqrt{2R_2} \cos r_2, \quad y_2 = \sqrt{2R_2} \sin r_2. \quad (1.198)$$

Esta transformación está bien definida puesto que como  $-M \leq N \leq M$ , ecuación (1.171), se tiene que  $R_2 \geq 0$ . Por otra parte es canónica ya que

$$Y_2 dy_2 = \sqrt{2R_2} \cos r_2 \left( \frac{\sin r_2}{\sqrt{2R_2}} dR_2 + \sqrt{2R_2} \cos r_2 dr_2 \right), \quad (1.199)$$

y escribiendo  $2R_2 \cos^2 r_2 = R_2 + R_2 \cos 2r_2$  resulta que

$$Y_2 dy_2 = R_2 dr_2 + \frac{1}{2} d(R_2 \sin 2r_2). \quad (1.200)$$

Lo cual según la ecuación (1.72) prueba la canonicidad de la transformación. Por lo tanto, si definimos el conjunto no singular I mediante las relaciones<sup>47</sup>

$$\begin{aligned} Y_1^I &= M, & y_1^I &= \mu + \nu, \\ Y_2^I &= \sqrt{2(M - N)} \cos \nu, & y_2^I &= -\sqrt{2(M - N)} \sin \nu, \\ Y_3^I &= \Lambda, & y_3^I &= \lambda, \end{aligned} \quad (1.201)$$

<sup>47</sup>Estas relaciones también permiten probar de forma fácil la canonicidad de la transformación verificando la igualdad  $\mathbf{J}\Gamma\mathbf{J}^t = \Gamma$ .

en la posición singular  $\sigma = 0$  todas las variables permanecen bien definidas, además se tiene que  $Y_2^I = y_2^I = 0$ . Por otra parte, como las relaciones (1.201) no contienen el tiempo de forma explícita el hamiltoniano transformado es  $K = H$ .

Cabe destacar que, como se ha mencionado anteriormente, las variables  $Y_2^I$  e  $y_2^I$  carecen de una interpretación geométrica o cinemática sencilla. Así, para obtener el hamiltoniano del sistema en términos de estas variables es necesario (véanse las secciones 2.3.2 y 3.4) escribir las variables de Andoyer en función del conjunto no singular I y sustituir estas relaciones en las expresiones de la energía cinética, la energía potencial y las fuerzas canónicas. Esto se simplifica considerando las siguientes relaciones que han sido obtenidas a partir de las ecuaciones (1.201)

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{Y_2^I \cos y_1^I - y_2^I \sin y_1^I}{\sqrt{(Y_2^I)^2 + (y_2^I)^2}}, & \sin \mu &= \frac{y_2^I \cos y_1^I + Y_2^I \sin y_1^I}{\sqrt{(Y_2^I)^2 + (y_2^I)^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{Y_2^I}{\sqrt{(Y_2^I)^2 + (y_2^I)^2}}, & \sin \nu &= -\frac{Y_2^I}{\sqrt{(Y_2^I)^2 + (y_2^I)^2}}, \\ \cos \lambda &= \cos y_3^I, & \sin \lambda &= \sin y_3^I, \\ \cos I &= \frac{Y_3^I}{Y_1^I}, & \sin I &= \frac{\sqrt{(Y_1^I)^2 - (Y_3^I)^2}}{Y_1^I}. \end{aligned} \quad (1.202)$$

junto con

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= 1 - \frac{1}{2} \frac{(Y_2^I)^2 + (y_2^I)^2}{Y_1^I}, \\ \sin \sigma &= \sqrt{\frac{(Y_2^I)^2 + (y_2^I)^2}{Y_1^I}} \sqrt{1 - \left(\frac{Y_2^I + y_2^I}{2Y_1^I}\right)^2}, \end{aligned} \quad (1.203)$$

De forma completamente análoga podemos definir el conjunto no singular II ( $\sigma \sim 0$ ,  $I \sim 0$ ). En este caso pretendemos evitar las singularidades virtuales que se producen cuando el momento angular permanece simultáneamente cercano a los ejes  $\vec{E}_3$  y  $\vec{e}_3$ , situación en la que  $M \sim \Lambda$  y  $M \sim N$ . La suma de ángulos que permanece siempre bien definida es  $\lambda + \mu + \nu$ . Por lo tanto, procediendo al igual que se hizo al establecer las ecuaciones (1.201), el conjunto

no singular II se define mediante las relaciones<sup>48</sup>

$$\begin{aligned} Y_1^{II} &= M, & y_1^{II} &= \lambda + \mu + \nu, \\ Y_2^{II} &= \sqrt{2(M-N)} \cos \nu, & y_2^{II} &= -\sqrt{2(M-N)} \sin \nu, \\ Y_3^{II} &= \sqrt{2(M-\Lambda)} \cos \lambda, & y_3^{II} &= -\sqrt{2(M-\Lambda)} \sin \lambda. \end{aligned} \quad (1.204)$$

Como puede comprobarse en la posición singular  $I = 0$  y  $\sigma = 0$  todas las variables permanecen bien definidas. Así se tiene que  $Y_2^{II} = Y_3^{II} = y_2^{II} = y_3^{II} = 0$ . Para este conjunto todas las variables, a excepción de  $Y_1^{II}$  e  $y_1^{II}$ , carecen de significado físico directo. Por otra parte, al ser la transformación canónica independiente del tiempo tenemos que  $K = H$ .

Igual que en el caso del conjunto no singular I, la descripción del sistema dinámico en términos de estas variables requiere escribir las variables de Andoyer en función del conjunto no singular II, lo cual se simplifica teniendo en cuenta las igualdades

$$\begin{aligned} \cos \nu &= \frac{Y_2^{II}}{\sqrt{(Y_2^{II})^2 + (y_2^{II})^2}}, & \sin \nu &= -\frac{Y_2^{II}}{\sqrt{(Y_2^{II})^2 + (y_2^{II})^2}}, \\ \cos \lambda &= \frac{Y_3^{II}}{\sqrt{(Y_3^{II})^2 + (y_3^{II})^2}}, & \sin \lambda &= -\frac{Y_3^{II}}{\sqrt{(Y_3^{II})^2 + (y_3^{II})^2}}, \\ \cos \sigma &= 1 - \frac{(Y_2^{II})^2 + (y_2^{II})^2}{2Y_1^{II}}, & \cos I &= 1 - \frac{(Y_3^{II})^2 + (y_3^{II})^2}{2Y_1^{II}}, \end{aligned} \quad (1.205)$$

junto con

$$\begin{aligned} \sin \sigma &= \sqrt{\frac{(Y_2^{II})^2 + (y_2^{II})^2}{Y_1^{II}}} \sqrt{1 - \left(\frac{Y_2^{II} + y_2^{II}}{2Y_1^{II}}\right)^2}, \\ \sin I &= \sqrt{\frac{(Y_3^{II})^2 + (y_3^{II})^2}{Y_1^{II}}} \sqrt{1 - \left(\frac{Y_3^{II} + y_3^{II}}{2Y_1^{II}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (1.206)$$

### Variables canónicas de Andoyer para modelos con varias capas

En el apartado anterior hemos introducido distintos conjuntos canónicos que pueden ser convenientes para estudiar mediante el formalismo hamiltoniano el movimiento de rotación de una Tierra compuesta por una sola capa. Al considerar modelos más generales de Tierra, compuestos por varias capas, será

<sup>48</sup>La canonicidad de la transformación también se sigue de la igualdad  $\mathbf{J}\Gamma\mathbf{J}^t = \Gamma$ .

necesario asignar a cada una de las capas alguno de los conjuntos canónicos anteriores, puesto que recordemos que desde una perspectiva de los Principios Variacionales el movimiento de rotación de la Tierra puede ser asimilado dinámicamente al movimiento de varios cuerpos rígidos que interactúan entre sí. Por lo tanto, una elección natural para escoger las variables canónicas que determinen el movimiento de rotación de este sistema es tomar  $k$  conjuntos de Andoyer independientes y definidos según la sección anterior. Esta estrategia se sigue, por ejemplo, en el estudio del movimiento roto-traslatorio bajo interacción newtoniana de dos cuerpos rígidos y extensos (Ferrándiz 1979). Sin embargo, esta elección de variables no es la más adecuada para abordar el estudio del movimiento de rotación de un modelo de Tierra formado por varias capas como se puede comprobar, en particular, comparando los trabajos de Getino (1995a) y Kubo (1979) para el estudio del movimiento de rotación de una Tierra de dos capas.

En estos casos en los que el cuerpo no rígido está compuesto por varias capas conforme a lo señalado en el apartado (1.2.2) es necesario realizar una cierta discriminación según que la capa considerada sea el manto o no. Recordemos a este respecto que el manto es una capa privilegiada, puesto que su movimiento de rotación determina el movimiento de rotación de la Tierra. Por ello consideraremos para el manto un conjunto de variables formalmente análogo al descrito en el apartado anterior y que relacione los sistemas de referencia celeste y terrestre. Sin embargo, para el resto de las capas introduciremos un conjunto canónico distinto y definido a partir del sistema de referencia terrestre y del sistema de referencia de Tisserand asociado a cada una de las capas. Por lo demás, la construcción es similar a la realizada en la sección anterior aunque, como es lógico, el significado geométrico y dinámico de las variables canónicas cambiará. Por lo tanto, podríamos introducir conjuntos canónicos del tipo de Euler, Andoyer o no singular, aunque al igual que en el caso del modelo de una capa los más adecuados son los del tipo de Andoyer y no singular.

La utilización de estas variables ha sido especialmente fructífera en el estudio de la rotación terrestre, de hecho, la introducción de este tipo de conjuntos de Andoyer, para el caso de dos cuerpos, fue realizada ad hoc por Sevilla y Romero (1987) al abordar el estudio hamiltoniano del movimiento polar de una tierra de dos capas. Posteriormente, estos conjuntos han sido utilizados para desarrollar estudios más completos del movimiento de rotación de una tierra de dos y tres capas (véanse, por ejemplo, Getino1995b, Escapa et al. 2001) incorporando también el uso de conjuntos no singulares de variables (véanse los capítulos 2 y 3).

A continuación explicaremos brevemente como se pueden introducir los conjuntos de Andoyer en el caso de un modelo de Tierra de varias capas. Para

evitar confusiones nos referiremos a este conjunto como conjunto modificado de Andoyer. Inicialmente, consideremos para cada una de las  $k$  capas que forman la Tierra un conjunto de Andoyer como los descritos por las ecuaciones (1.167), (1.171) y (1.172). Es decir, los momentos canónicos para cada capa estarán relacionados con las proyecciones del momento angular de la capa mediante las relaciones

$$\Lambda_{(k)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{E}_3, M_{(k)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{\vec{L}_{(k)}}, N_{(k)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{3(k)}, \quad (1.207)$$

en tanto que las variables  $\lambda_{(k)}$ ,  $\mu_{(k)}$ ,  $\nu_{(k)}$  y las variables auxiliares  $I_{(k)}$ ,  $\sigma_{(k)}$  permiten describir la rotación que lleva el sistema de referencia celeste al sistema de referencia de Tisserand asociado como

$$\begin{pmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \\ x_{3(k)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\nu_{(k)})\mathbf{R}_1(\sigma_{(k)})\mathbf{R}_3(\mu_{(k)})\mathbf{R}_1(I_{(k)})\mathbf{R}_3(\lambda_{(k)}) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (1.208)$$

Introduzcamos un nuevo conjunto de variables  $\lambda_{(km)}$ ,  $\mu_{(km)}$ ,  $\nu_{(km)}$  y las variables auxiliares  $I_{(km)}$ ,  $\sigma_{(km)}$ , definidas por la condición de que determinen la posición del sistema de referencia de Tisserand de cada capa respecto al sistema de referencia terrestre, esto es, el sistema de Tisserand asociado al manto<sup>49</sup>. Tendremos la relación

$$\begin{pmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \\ x_{3(k)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\lambda_{(km)})\mathbf{R}_1(I_{(km)})\mathbf{R}_3(\mu_{(km)})\mathbf{R}_1(\sigma_{(km)})\mathbf{R}_3(\nu_{(km)}) \begin{pmatrix} x_{1(m)} \\ x_{2(m)} \\ x_{3(m)} \end{pmatrix}. \quad (1.209)$$

De forma similar, consideremos para el manto un nuevo conjunto de variables  $\lambda_{(mc)}$ ,  $\mu_{(mc)}$ ,  $\nu_{(mc)}$  y variables auxiliares  $I_{(mc)}$ ,  $\sigma_{(mc)}$  definidas por la condición de que determinen la posición del sistema de referencia de Tisserand del manto con respecto al sistema de referencia celeste. O sea

$$\begin{pmatrix} x_{1(m)} \\ x_{2(m)} \\ x_{3(m)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\nu_{(mc)})\mathbf{R}_1(\sigma_{(mc)})\mathbf{R}_3(\mu_{(mc)})\mathbf{R}_1(I_{(mc)})\mathbf{R}_3(\lambda_{(mc)}) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (1.210)$$

Con las variables introducidas, la rotación que lleva el sistema celeste al sistema de Tisserand asociado a cada capa se realiza en dos etapas. En una primera se pasa del sistema celeste al sistema del manto, ecuación (1.210), para posteriormente pasar del sistema del manto al sistema de Tisserand

<sup>49</sup>En lo que sigue el subíndice  $m$  sólo se referirá al manto, en tanto que como es habitual el subíndice  $k$  se refiere a una cualquiera de las capas restantes de la Tierra.



de cada capa. De esta forma, comparando las ecuaciones (1.208) y (1.209), obtenemos la relación

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\nu_{(k)}, \sigma_{(k)}, \mu_{(k)}, I_{(k)}, \lambda_{(k)}) &= \mathbf{R}(\lambda_{(km)}, I_{(km)}, \mu_{(km)}, \sigma_{(km)}, \nu_{(km)}) \times \\ &\times \mathbf{R}(\nu_{(mc)}, \sigma_{(mc)}, \mu_{(mc)}, I_{(mc)}, \lambda_{(mc)}), \end{aligned} \quad (1.211)$$

donde se ha abreviado la escritura de las matrices de rotación. Teniendo en cuenta la forma de estas rotaciones podremos construir el vector rotación infinitesimal asociado a la diferencial de cada una de ellas. Así, de forma similar a la ecuación (1.191), para el caso del manto tenemos

$$d\vec{R}_{(mc)} = \vec{E}_3 d\lambda_{(mc)} + \vec{e}_{I_{(mc)}} dI_{(mc)} + \vec{e}_{\vec{L}_{(mc)}} d\mu_{(mc)} + \vec{e}_{\sigma_{(mc)}} d\sigma_{(mc)} + \vec{e}_{3(m)} d\nu_{(mc)}, \quad (1.212)$$

donde  $\vec{e}_{I_{(mc)}}$ ,  $\vec{e}_{\vec{L}_{(mc)}}$  y  $\vec{e}_{\sigma_{(mc)}}$  son ciertos vectores, cuyo significado exacto es desconocido por el momento. Análogamente, la rotación infinitesimal asociado a la rotación de una capa respecto al sistema celeste se podrá escribir como

$$d\vec{R}_{(kc)} = d\vec{R}_{(mc)} + d\vec{R}_{(km)}, \quad (1.213)$$

donde

$$d\vec{R}_{(km)} = \vec{e}_{3(m)} d\nu_{(km)} + \vec{e}_{\sigma_{(km)}} d\sigma_{(km)} + \vec{e}_{\vec{L}_{(km)}} d\mu_{(km)} + \vec{e}_{I_{(km)}} dI_{(km)} + \vec{e}_{3(k)} d\lambda_{(km)}.$$

Al igual que en la ecuación anterior el significado de los vectores  $\vec{e}_{\sigma_{(km)}}$ ,  $\vec{e}_{\vec{L}_{(km)}}$  y  $\vec{e}_{I_{(km)}}$  es desconocido.

Si ahora queremos construir un conjunto canónico a partir de los conjuntos de Andoyer independientes (ecuaciones 1.207 y 1.208) de forma que las nuevas variables satisfagan las relaciones (1.209) y (1.210) deberemos exigir que la suma de las formas diferenciales  $\vec{L} \cdot d\vec{R}$  para todas las capas sea invariante en esta construcción. Esto, además de asegurar la canonicidad de la transformación, permitirá determinar los momentos canónicos del nuevo conjunto. En particular deberemos imponer que

$$\vec{L}_{(m)} \cdot d\vec{R}_{(m)} + \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \cdot d\vec{R}_{(k)} = \vec{L}_{(m)} \cdot d\vec{R}_{(mc)} + \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \cdot d\vec{R}_{(kc)}, \quad (1.214)$$

donde el lado izquierdo de la igualdad deberá evaluarse para los conjuntos de variables independientes, en tanto que las rotaciones infinitesimales del lado derecho obedecen a las ecuaciones (1.212) y (1.213). Teniendo en cuenta

estas igualdades podemos escribir que

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_{(m)} \cdot d\vec{R}_{(mc)} + \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \cdot d\vec{R}_{(kc)} &= \left( \vec{L}_{(m)} + \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \right) \cdot d\vec{R}_{(mc)} + \\
 &+ \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \cdot d\vec{R}_{(km)} = \\
 &= \vec{L} \cdot d\vec{R}_{(mc)} + \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \cdot d\vec{R}_{(km)},
 \end{aligned} \tag{1.215}$$

donde  $\vec{L}$  es el momento angular total de la Tierra. Por lo tanto, considerando la forma de la rotación infinitesimal  $d\vec{R}_{(mc)}$  para que la transformación sea canónica bastará con tomar como nuevos momentos para el manto

$$\Lambda_{(mc)} = \vec{L} \cdot \vec{E}_3, \quad M_{(mc)} = \vec{L} \cdot \vec{e}_{\vec{L}_{(mc)}}, \quad N = \vec{L} \cdot \vec{e}_{3(m)}, \tag{1.216}$$

donde el vector  $\vec{e}_{\vec{L}_{(mc)}}$  irá dirigido en la dirección y sentido del vector momento angular total  $\vec{L}$ , por lo que escribiremos simplemente como  $\vec{e}_{\vec{L}}$ . Los vectores  $\vec{e}_{I_{(mc)}}$ ,  $\vec{e}_{\sigma_{(mc)}}$  serán los vectores resultantes de normalizar  $\vec{E}_3 \times \vec{e}_{\vec{L}}$  y  $\vec{e}_{\vec{L}} \times \vec{e}_{3(m)}$ , respectivamente. De este modo se garantiza que  $\vec{L} \cdot \vec{e}_{I_{(mc)}} = \vec{L} \cdot \vec{e}_{\sigma_{(mc)}} = 0$ . Análogamente, a partir de la expresión de la rotación infinitesimal  $d\vec{R}_{(km)}$  podemos definir como nuevos momentos canónicos para la  $k$ -ésima capa

$$N_{(km)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{3(m)}, \quad M_{(km)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{\vec{L}_{(km)}}, \quad \Lambda_{(km)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{3(k)}, \tag{1.217}$$

siendo  $\vec{e}_{\vec{L}_{(km)}}$  el vector unitario en la dirección y sentido del vector momento angular de la capa  $\vec{L}_{(k)}$ , que escribiremos simplemente como  $\vec{e}_{\vec{L}_{(k)}}$ . Los vectores  $\vec{e}_{\sigma_{(km)}}$ ,  $\vec{e}_{I_{(km)}}$  son los vectores resultantes de normalizar  $\vec{e}_{3(m)} \times \vec{e}_{\vec{L}_{(k)}}$  y  $\vec{e}_{\vec{L}_{(k)}} \times \vec{e}_{3(k)}$ , respectivamente, lo que asegura que  $\vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{\sigma_{(km)}} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{I_{(km)}} = 0$ .

Estas elecciones prueban que el conjunto modificado de Andoyer es un conjunto de variables canónicas. Además, como las ecuaciones (1.211) no contienen el tiempo, el hamiltoniano en el conjunto modificado de Andoyer será

$$K = H_{(m)} + \sum_{k \neq m} H_{(k)} = \sum_k H_{(k)}. \tag{1.218}$$

Una vez que hemos construido el conjunto modificado de Andoyer es conveniente aligerar la notación para los propósitos de esta Investigación.

Puesto que todos los conjuntos que se utilizan siguen el esquema anteriormente desarrollado no hay posibilidad de confusión en denotar a las variables canónicas asociadas al manto como  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  siendo el significado de los momentos

$$\Lambda = \vec{L} \cdot \vec{E}_3 = M \cos I, \quad M = \vec{L} \cdot \vec{e}_{\vec{L}}, \quad N = \vec{L} \cdot \vec{e}_{3(m)} = M \cos \sigma, \quad (1.219)$$

mientras que las variables

$$\begin{pmatrix} x_{1(m)} \\ x_{2(m)} \\ x_{3(m)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\nu) \mathbf{R}_1(\sigma) \mathbf{R}_3(\mu) \mathbf{R}_1(I) \mathbf{R}_3(\lambda) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (1.220)$$

Igualmente, las variables canónicas asociadas a cada capa se escribirán como  $\Lambda_{(k)}$ ,  $M_{(k)}$ ,  $N_{(k)}$ ,  $\lambda_{(k)}$ ,  $\mu_{(k)}$  y  $\nu_{(k)}$ . Los momentos están relacionados con las proyecciones de  $\vec{L}_{(k)}$  mediante las relaciones

$$N_{(k)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{3(m)}, \quad M_{(k)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{\vec{L}_{(k)}}, \quad \Lambda_{(k)} = \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{e}_{3(k)}, \quad (1.221)$$

y las variables

$$\begin{pmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \\ x_{3(k)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\lambda_{(k)}) \mathbf{R}_1(I_{(k)}) \mathbf{R}_3(\mu_{(k)}) \mathbf{R}_1(\sigma_{(k)}) \mathbf{R}_3(\nu_{(k)}) \begin{pmatrix} x_{1(m)} \\ x_{2(m)} \\ x_{3(m)} \end{pmatrix}, \quad (1.222)$$

con  $\cos \sigma_{(k)} = N_{(k)}/M_{(k)}$  y  $\cos I_{(k)} = \Lambda_{(k)}/M_{(k)}$ .

Señalemos que puesto que el movimiento de rotación de todas las capas permanece próximo al movimiento uniforme de rotación, los vectores  $\vec{e}_{3(m)}$  y  $\vec{e}_{\vec{L}_{(k)}}$  son casi coincidentes es decir  $\sigma_{(k)}$  será muy pequeño, al igual que  $\sigma$ . Es más, por el mismo motivo en el caso de las capas sólidas también tendremos que los vectores  $\vec{e}_{3(k)}$  y  $\vec{e}_{\vec{L}_{(k)}}$  estarán próximos, por lo que en esta situación se verifica simultáneamente que la variable auxiliar  $I_{(k)}$  es pequeña.

Al igual que hicimos en el caso de una capa, con la ayuda de las ecuaciones anteriores es posible expresar en términos del conjunto modificado de Andoyer los distintos vectores que intervienen en la construcción del hamiltoniano. En lo que se refiere al momento angular del sistema y a la relación de los ángulos de Euler con el conjunto modificado de Andoyer, debemos señalar que las ecuaciones (1.173), (1.185) y (1.188) adoptan exáctamente la misma forma, aunque se debe recordar que las variables de Andoyer que intervienen se refieren al momento angular total de la Tierra.

Respecto al resto de relaciones, el significado geométrico y cinemático del conjunto de Andoyer modificado permite obtener las componentes de

los distintos vectores en cada sistema de referencia. A modo de ejemplo, las componentes del vector momento angular de cada capa en el sistema de Tisserand del manto se pueden obtener utilizando las relaciones (1.222). Así resulta

$$\begin{pmatrix} L_{1(k)} \\ L_{2(k)} \\ L_{3(k)} \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_1(\sigma_{(k)})\mathbf{R}_3(\nu_{(k)})]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{(k)} \operatorname{sen} \sigma_{(k)} \operatorname{sen} \nu_{(k)} \\ -M_{(k)} \operatorname{sen} \sigma_{(k)} \operatorname{cos} \nu_{(k)} \\ N_{(k)} \end{pmatrix}. \quad (1.223)$$

La única diferencia importante que debemos hacer notar respecto al caso de una capa se refiere al cálculo de la velocidad angular. Para calcular la velocidad angular de cada capa debemos relacionar ésta con el respectivo momento angular, o en el caso de la velocidad angular del manto con el momento angular total. Así, utilizaremos las igualdades

$$\vec{\omega}_{(k)} = \mathbf{\Pi}_{(k)}^{-1} \cdot \vec{L}_{(k)}, \quad \vec{\omega}_{(m)} = \mathbf{\Pi}_{(m)}^{-1} \cdot (\vec{L} - \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)}) \quad (1.224)$$

A veces resulta conveniente emplear la velocidad angular relativa de la capa  $k$ -ésima con respecto al manto. Teniendo en cuenta la ecuación (1.224) se sigue que

$$\delta\vec{\omega}_{(km)} = \vec{\omega}_{(k)} - \vec{\omega}_{(m)} = \mathbf{\Pi}_{(k)}^{-1} \cdot \vec{L}_{(k)} - \mathbf{\Pi}_{(m)}^{-1} \cdot (\vec{L} - \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)}). \quad (1.225)$$

Las componentes de estas ecuaciones en un determinado sistema de referencia se obtienen de forma inmediata a través de ecuaciones del tipo de (1.173) y (1.223) que proporcionan las componentes de los vectores momento angular en función de las variables modificadas de Andoyer, y una vez conocida la representación matricial de los tensores de inercia de cada capa en el respectivo sistema de referencia.

### Conjuntos canónicos no singulares para modelos con varias capas

Al igual que sucedía en el caso de una capa, el hecho de que las variables auxiliares  $\sigma$ ,  $\sigma_{(k)}$ , e incluso  $I_{(k)}$ , sean pequeñas pueden conducir al mismo tipo de dificultades que las que aparecían en aquel caso. Por ello, para describir el movimiento de rotación de un modelo de Tierra compuesto por varias capas, a veces también es conveniente utilizar conjuntos no singulares. En particular, dichos conjuntos pueden ser construidos a partir del conjunto modificado de Andoyer introducido anteriormente, de forma análoga a como se definieron en el caso de una capa.

De este modo, construiremos un conjunto no singular I ( $\sigma \sim 0$ ) a partir de las variables canónicas del manto  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ , mientras que

para el resto de las capas consideraremos, en general, un conjunto no singular II ( $\sigma_{(k)} \sim 0$ ,  $I_{(k)} \sim 0$ ) definido a partir de las variables asociadas a cada capa  $\Lambda_{(k)}$ ,  $M_{(k)}$ ,  $N_{(k)}$ ,  $\lambda_{(k)}$ ,  $\mu_{(k)}$  y  $\nu_{(k)}$ . Al ser el conjunto modificado de Andoyer un conjunto canónico similar, en cierto sentido, al conjunto de Andoyer, el proceso de construcción de los conjuntos no singulares anteriores es formalmente análogo al dado por las ecuaciones (1.201) y (1.204), sin más que considerar las variables de Andoyer modificadas en vez de las variables de Andoyer que aparecen en esas expresiones. Por lo tanto, no es necesario repetir el procedimiento allí descrito.

Así, si tomamos como nuevas variables canónicas

$$\begin{aligned} Y_1 &= M, & y_1 &= \mu + \nu, \\ Y_2 &= \sqrt{2(M - N)} \cos \nu, & y_2 &= -\sqrt{2(M - N)} \sin \nu, \\ Y_3 &= \Lambda, & y_3 &= \lambda, \end{aligned} \quad (1.226)$$

junto con

$$\begin{aligned} Y_{1(k)} &= M_{(k)}, & y_{1(k)} &= \lambda_{(k)} + \mu_{(k)} + \nu_{(k)}, \\ Y_{2(k)} &= \sqrt{2(M_{(k)} - N_{(k)})} \cos \nu, & y_{2(k)} &= -\sqrt{2(M_{(k)} - N_{(k)})} \sin \nu_{(k)}, \\ Y_{3(k)} &= \sqrt{2(M_{(k)} - \Lambda_{(k)})} \cos \lambda, & y_{3(k)} &= -\sqrt{2(M_{(k)} - \Lambda_{(k)})} \sin \lambda_{(k)}, \end{aligned} \quad (1.227)$$

todas las variables permanecen bien definidas en la posición singular  $\sigma = 0$ ,  $\sigma_{(k)} = 0$  e  $I_{(k)} = 0$ . Por supuesto, la transformación dada por las ecuaciones (1.226) y (1.227) es canónica. De forma similar al caso de una capa, la descripción del sistema dinámico en términos de estas variables requiere escribir las variables de Andoyer modificadas en función de este conjunto no singular, lo cual se facilita si consideramos relaciones análogas a las igualdades (1.202) y (1.205).

### Planteamiento del hamiltoniano

Una vez que hemos determinado el conjunto canónico en términos del que se va a caracterizar el comportamiento dinámico de nuestro sistema, es posible plantear explícitamente las ecuaciones de Hamilton (1.86). Si denotamos simbólicamente como  $(p, q)$  al conjunto canónico, por ejemplo el de Andoyer modificado, estas ecuaciones serán

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_{q_i}, \\ \frac{d}{dt} q_i = \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} - Q_{p_i}, \end{aligned} \quad (1.228)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano del sistema y  $Q_{q_i}$ ,  $Q_{p_i}$  las fuerzas canónicas. Según se ha señalado en las secciones (1.2.1) y (1.2.2), el hamiltoniano del sistema será la suma de las energías cinética y potencial de nuestro modelo de Tierra. Es decir

$$H(p, q, t) = \sum_k T_{(k)} + \sum_p \sum_k V_{(k)}^p, \quad (1.229)$$

donde

$$T_{(k)} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{(k)} \cdot (\Pi_{0(k)} + \Delta_c \Pi_{(k)}) \vec{\omega}_{(k)}, \quad (1.230)$$

y

$$V_{(k)}^p = \frac{3}{2} \frac{GM_p}{R_p^5} \left( \vec{R}_p \cdot \Pi_{(k)}^0 \vec{R}_p \right) + \frac{3}{2} \frac{GM_p}{R_p^5} \left( \vec{R}_p \cdot \Delta_c \Pi_{(k)} \vec{R}_p \right). \quad (1.231)$$

Estas funciones deben expresarse en términos de las variables canónicas, es decir, en función del conjunto canónico modificado de Andoyer<sup>50</sup>.

### Energía cinética

En primer lugar, señalemos que la energía cinética de cada capa distinta del manto puede reescribirse como

$$T_{(k)} = \frac{1}{2} (\Pi_{0(k)} + \Delta_c \Pi_{(k)})^{-1} \vec{L}_{(k)} \cdot \vec{L}_{(k)}, \quad (1.232)$$

en tanto que la energía cinética del manto, que es un cuerpo rígido, viene dada por

$$T_{(m)} = \frac{1}{2} \Pi_{0(m)}^{-1} \left( \vec{L} - \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \right) \cdot \left( \vec{L} - \sum_{k \neq m} \vec{L}_{(k)} \right), \quad (1.233)$$

Por otra parte, recordando que  $\Delta_c \Pi_{(k)} \sim O(1)$ , véase la ecuación (1.112), es suficiente aproximar el inverso del tensor de inercia por el tensor

$$(\Pi_{0(k)} + \Delta_c \Pi_{(k)})^{-1} = \Pi_{0(k)}^{-1} - \Pi_{0(k)}^{-1} \Delta_c \Pi_{(k)} \Pi_{0(k)}^{-1} + O(2). \quad (1.234)$$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema se puede escribir como función de las variables canónicas sin más que considerar la expresión de las componentes del vector momento angular total  $\vec{L}$ , del momento angular de cada capa  $\vec{L}_{(k)}$  y del tensor de inercia en un cierto sistema de referencia. Por ejemplo, en el caso de las capas fluidas lo más práctico es utilizar el sistema de

<sup>50</sup>Recordemos que este paso es necesario aunque, finalmente, utilicemos un conjunto canónico no singular, debido a la falta de significado geométrico y dinámico de este.

referencia terrestre. En este sistema el cálculo es automático haciendo uso de las igualdades (1.173) y (1.223). Por otra parte, teniendo en cuenta la forma del tensor de inercia (ecuaciones 1.109 y 1.116) en esta situación, sus componentes se obtienen a través de las componentes de los vectores  $\vec{e}_{3(k+1)}$  y  $\vec{e}_{3(k-1)}$  en el sistema terrestre, que son fácilmente calculables a partir de las ecuaciones (1.222). En el caso de capas sólidas lo más conveniente es calcular directamente la energía cinética en su sistema de Tisserand asociado, pues en él el tensor de inercia es diagonal. Este procedimiento permite, finalmente, obtener

$$T = T(p, q). \quad (1.235)$$

### Energía potencial gravitatoria

En lo que se refiere a la energía potencial gravitatoria, conviene tener presente que, como se señaló en la sección (1.2.2), la posición de los cuerpos externos, la Luna y el Sol, dada por el vector de posición  $\vec{R}_p$ , es una función conocida del tiempo en un cierto sistema de referencia. En particular, las teorías orbitales determinan la posición de la Luna y el Sol respecto a la eclíptica móvil o de la fecha como funciones conocidas del tiempo. La eclíptica móvil es un sistema de referencia no inercial que tiene un movimiento conocido con respecto a la eclíptica de la época, que es el sistema celeste que hemos venido utilizando. Debido a este hecho es necesario realizar una modificación en las variables canónicas utilizadas, puesto que en su definición se utilizaba el sistema de referencia celeste (inercial).

### Conjunto de Andoyer referido a la eclíptica móvil

Afortunadamente, esta modificación únicamente afecta a las variables canónicas asociadas al manto  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ , y se puede obtener mediante una transformación canónica. Nosotros utilizaremos un procedimiento diferente al desarrollado por Kinoshita (1977). Con este propósito realizaremos la transformación canónica en dos etapas. En primer lugar, consideraremos un sistema de referencia no inercial, que denominaremos eclíptica móvil o de la fecha, de movimiento conocido respecto a la eclíptica fija y caracterizado por dos funciones del tiempo  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$ , de forma que se tenga

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1(\beta(t))\mathbf{R}_3(\alpha(t)) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad (1.236)$$

donde  $X'_i$  denotan las componentes en el sistema de referencia no inercial. Introduzcamos un nuevo conjunto de variables  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\nu}$  y de variables auxiliares  $\tilde{I}$ ,  $\tilde{\sigma}$ , definidas por la condición de que determinen la posición del sistema de

referencia terrestre respecto al sistema de referencia no inercial, es decir, por la condición.

$$\begin{pmatrix} x_{1(m)} \\ x_{2(m)} \\ x_{3(m)} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\tilde{\nu})\mathbf{R}_1(\tilde{\sigma})\mathbf{R}_3(\tilde{\mu})\mathbf{R}_1(\tilde{I})\mathbf{R}_3(\tilde{\lambda}) \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix}. \quad (1.237)$$

Comparando las ecuaciones (1.236) y (1.237) con la relación (1.220), podemos establecer una ecuación que relacione las variables canónicas iniciales con el nuevo conjunto que pretendemos definir, esto es, con las variables con tilde. En concreto, se tiene

$$\mathbf{R}(\nu, \sigma, \mu, I, \lambda) = \mathbf{R}(\tilde{\nu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mu}, \tilde{I}, \tilde{\lambda}, \beta(t), \alpha(t)). \quad (1.238)$$

Esta ecuación permite obtener el vector rotación infinitesimal asociado a la diferencial de la rotación que lleva el sistema de referencia celeste al sistema de referencia terrestre mediante las variables  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\nu}$ , las variables auxiliares  $\tilde{I}$ ,  $\tilde{\sigma}$  y las funciones del tiempo  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$ . Así, de forma similar a la ecuación (1.191), podemos escribir

$$d\vec{R}_{(mc)} = \left( \vec{E}_3 \frac{d\alpha(t)}{dt} + \vec{e}_1 \frac{d\beta(t)}{dt} \right) dt + \vec{e}_3 d\tilde{\lambda} + \vec{e}_{\tilde{I}} d\tilde{I} + \vec{e}_{\tilde{\mu}} d\tilde{\mu} + \vec{e}_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \vec{e}_{3(m)} d\tilde{\nu}, \quad (1.239)$$

donde  $\vec{e}_{\tilde{I}}$ ,  $\vec{e}_{\tilde{\mu}}$  y  $\vec{e}_{\tilde{\sigma}}$  son ciertos vectores, cuyo significado exacto es desconocido. Por otra parte, los vectores  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_3$  son los vectores asociados al sistema de referencia no inercial, que se obtienen aplicando la rotación  $\mathbf{R}_1(\beta(t))\mathbf{R}_3(\alpha(t))$  sobre los vectores  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_3$  del sistema celeste. Igual que en ocasiones anteriores, para obtener un conjunto canónico podemos utilizar la invarianza de la suma de las formas diferenciales  $\vec{L} \cdot d\vec{R}$  para todas las capas. No obstante, como las únicas variables que estamos modificando se refieren al manto esto es equivalente a asegurar la invarianza de  $\vec{L} \cdot d\vec{R}_{(mc)}$ , donde  $\vec{L}$  es el momento angular total de la Tierra. Así, bastará con tomar como nuevos momentos

$$\tilde{\Lambda} = \vec{L} \cdot \vec{e}_3, \quad \tilde{M} = \vec{L} \cdot \vec{e}_{\tilde{I}}, \quad \tilde{N} = \vec{L} \cdot \vec{e}_{3(m)}. \quad (1.240)$$

De esta forma queda asegurada la canonicidad de la transformación, considerando también que el vector  $\vec{e}_{\tilde{I}}$  esté dirigido en la dirección y sentido del vector momento angular total  $\vec{L}$ , por lo que lo escribiremos como  $\vec{e}_{\tilde{I}}$ , y que los vectores  $\vec{e}_{\tilde{I}}$ ,  $\vec{e}_{\tilde{\sigma}}$  coincidan con los vectores resultantes de normalizar  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_{\tilde{I}}$  y  $\vec{e}_{\tilde{I}} \times \vec{e}_{3(m)}$ , respectivamente. Por lo tanto, la forma diferencial  $\vec{L} \cdot d\vec{R}_{(mc)}$  es

$$\vec{L} \cdot d\vec{R}_{(mc)} = \left( \vec{L} \cdot \vec{E}_3 \frac{d\alpha(t)}{dt} + \vec{L} \cdot \vec{e}_1 \frac{d\beta(t)}{dt} \right) dt + \tilde{\Lambda} d\tilde{\lambda} + \tilde{M} d\tilde{\mu} + \tilde{N} d\tilde{\nu}. \quad (1.241)$$



Fijémonos en que como las relaciones entre el conjunto inicial y el conjunto final dependen del tiempo, el hamiltoniano en el nuevo conjunto no coincidirá con el hamiltoniano inicial sino que habrá que añadirle un cierto término proveniente de la dependencia temporal. En particular, como se señaló en la sección (1.2.1), este término es la parte que acompaña a  $dt$  en la ecuación (1.241). Por lo tanto tendremos que

$$K = H - \left( \vec{L} \cdot \vec{E}_3 \frac{d\alpha(t)}{dt} + \vec{L} \cdot \vec{e}_1 \frac{d\beta(t)}{dt} \right), \quad (1.242)$$

para expresar  $\vec{L} \cdot \vec{E}_3$  y  $\vec{L} \cdot \vec{e}_1$  en función del nuevo conjunto canónico, sólo es preciso considerar las ecuaciones (1.236) y (1.237). Así, finalmente se obtiene

$$K = H - \left[ \left( \tilde{\Lambda} \cos \beta(t) - \tilde{M} \sin \tilde{I} \cos \tilde{\lambda} \sin \beta(t) \right) \frac{d\alpha(t)}{dt} + \left( \tilde{M} \sin \tilde{I} \sin \tilde{\lambda} \right) \frac{d\beta(t)}{dt} \right]. \quad (1.243)$$

Esto prueba que la transformación es canónica, aunque, a diferencia de los casos anteriores, por depender la transformación del tiempo el hamiltoniano contiene un término adicional.

La segunda etapa de la transformación se refiere al hecho de que habitualmente el origen de longitudes se sitúa en el eje  $\vec{E}_1$  de la eclíptica fija y no en el eje  $\vec{e}_1$  de la eclíptica móvil (Kinoshita 1977). Para incorporar esta nueva situación sólo es necesario modificar la variable  $\tilde{\lambda}$ , de forma que en lugar de las definiciones anteriores consideraremos unas nuevas variables canónicas definidas por

$$\lambda' = \alpha(t) + \tilde{\lambda}, \quad \mu' = \tilde{\mu}, \quad \nu' = \tilde{\nu}. \quad (1.244)$$

Operando en la forma habitual, se pueden obtener los momentos canónicos asociados a estas nuevas variables que resultan ser

$$\Lambda' = \tilde{\Lambda}, \quad M' = \tilde{M}, \quad N' = \tilde{N}. \quad (1.245)$$

La única modificación que se produce aparece en el hamiltoniano transformado y es debida a la dependencia con el tiempo de las ecuaciones (1.244), resultando

$$K' = K - \Lambda' \frac{d\alpha(t)}{dt}. \quad (1.246)$$

Agrupando todos estos resultados, y manteniendo la notación inicial por simplicidad, concluimos que las variables de Andoyer que fijan la posición del sistema de terrestre se pueden referir a un sistema de referencia no inercial, llamado eclíptica de la fecha. Formalmente, el significado de las variables  $M$ ,  $N$ ,  $\mu$  y  $\nu$  es el mismo que el dado en las ecuaciones (1.221). La única

diferencia se refiere al momento  $\Lambda$  y a la variable  $\lambda$ . La primera no es más que la proyección del vector momento angular sobre el eje  $\vec{e}_3$  de la eclíptica móvil. La segunda mide el ángulo entre los vectores  $\vec{E}_1$  y el vector  $\vec{e}_3 \times \vec{L}$  sobre la eclíptica fija y, después, sobre la eclíptica móvil. Por otra parte, debido a la no inercialidad del sistema es necesario considerar un término adicional en el hamiltoniano que pasa a ser

$$K = H - \left[ \Lambda (\cos \beta(t) - 1) \frac{d\alpha(t)}{dt} + M \operatorname{sen} I \left( \frac{d\beta(t)}{dt} \operatorname{sen} (\lambda - \alpha(t)) - \frac{d\alpha(t)}{dt} \operatorname{sen} \beta(t) \cos (\lambda - \alpha(t)) \right) \right]. \quad (1.247)$$

El término añadido a  $H$  en la ecuación (1.252) coincide con el deducido por Kinoshita (1977), quien nota  $\alpha(t)$  por  $\Pi_1(t)$  y  $\beta(t)$  por  $\pi_1(t)$ .

### Transformación de los armónicos esféricos

Una vez que hemos introducido el sistema de referencia de la eclíptica móvil o de la fecha en la estructura canónica, es posible expresar la energía potencial en términos de estas nuevas variables canónicas. Señalemos que, al igual que en las ecuaciones (1.140), la energía potencial dentro de nuestro orden de aproximación se puede escribir como una cierta combinación lineal en la que aparecen los armónicos esféricos de grado dos referidos al ecuador terrestre. Para que aparezca de forma explícita la posición de los cuerpos externos como una función del tiempo, es necesario referir estos armónicos esféricos de grado dos a la eclíptica de la fecha. De esta forma, el problema de expresar la energía potencial en términos de las variables canónicas se reduce a estudiar cómo se transforman los armónicos esféricos bajo una secuencia de rotaciones. Puede demostrarse (Wigner 1959) que esta clase de transformaciones es lineal, en el sentido de que cada armónico esférico de grado  $n$  en el ecuador terrestre se puede escribir como una combinación lineal de todos los armónicos de grado  $n$  en la eclíptica móvil. Estas expresiones se pueden llevar a cabo con la ayuda de los polinomios modificados de Jacobi (Kinoshita 1977) o por medio de otros procedimientos (Escapa 1997).

Para realizar esta transformación es necesario considerar la expresión de los armónicos de grado dos en la eclíptica de la fecha como funciones del

tiempo de la forma (Kinoshita 1977)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}\right)^3 C_{20}(\eta', \alpha') &= -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i; & (1.248) \\ \left(\frac{a}{R}\right)^3 C_{21}(\eta', \alpha') &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \sin \Theta_i; \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{21}(\eta', \alpha') = 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a}{R}\right)^3 C_{22}(\eta', \alpha') &= 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i; \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{22}(\eta', \alpha') = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \sin \Theta_i, \end{aligned}$$

donde  $R$ ,  $\alpha'$  y  $\eta'$  son la distancia al geocentro, la longitud y la colatitud del cuerpo externo respecto a la eclíptica de la fecha. En estas ecuaciones  $i = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$  es una quintupla de enteros con  $k_5 \geq 0$  y  $\Theta_i$  es una cierta combinación de las variables de Delaunay (véase la ecuación 1.52) y  $A_i^{(j)}$  una serie de coeficientes que se obtienen de las teorías orbitales utilizadas para obtener el movimiento de traslación de la Luna y el Sol. Para aligerar los desarrollos posteriores es conveniente introducir las siguientes funciones (Kinoshita 1977)

$$\begin{aligned} B_i(I) &= -\frac{1}{6} (3 \cos^2 I - 1) A_i^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2I A_i^{(1)} - \frac{1}{4} \sin^2 I A_i^{(2)}, \\ C_i(I, \tau) &= -\frac{1}{4} \sin 2I A_i^{(0)} + \frac{1}{2} (1 + \tau \cos I) (-1 + 2\tau \cos I) A_i^{(1)} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \tau \sin I (1 + \tau \cos I) A_i^{(2)}, \\ D_i(I, \tau) &= -\frac{1}{2} \sin^2 I A_i^{(0)} + \tau \sin I (1 + \tau \cos I) A_i^{(1)} - \frac{1}{4} (1 + \tau \cos I)^2 A_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.249)$$

donde el índice  $\tau$  toma los valores  $+1$  ó  $-1$ .

Teniendo en cuenta estas expresiones, los armónicos esféricos de grado dos en el ecuador terrestre se escriben como funciones del tiempo, a través de las variables de Delaunay de la Luna y el Sol, y como funciones del conjunto de Andoyer. Así, se obtiene que (véanse, por ejemplo, Getino y Ferrándiz 1995, Escapa 1997)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}\right)^3 C_{20}(\eta, \alpha) &= \frac{3}{2} (3 \cos^2 \sigma - 1) \sum_i B_i(I) \cos \Theta_i - \frac{3}{2} \sin 2\sigma \sum_{i, \tau} C_i(I, \tau) \times \\ &\quad \times \cos(\mu - \tau \Theta_i) + \frac{3}{4} \sin^2 \sigma \sum_{i, \tau} D_i(I, \tau) \cos(2\mu - \tau \Theta_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}\right)^3 C_{21}(\eta, \alpha) &= \frac{9}{4} \operatorname{sen} 2\sigma \sum_{i, \tau} B_i(I) \operatorname{sen}(\nu - \tau\Theta_i) + \frac{3}{2} \sum_{\rho} \rho (1 + \rho \cos \sigma) \times \\ &\times (-1 + 2\rho \cos \sigma) \sum_{i, \tau} C_i(I, \tau) \operatorname{sen}(\mu + \rho\nu - \tau\Theta_i) - \\ &- \frac{3}{4} \sum_{\rho} \operatorname{sen} \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i, \tau} D_i(I, \tau) \operatorname{sen}(2\mu + \rho\nu - \tau\Theta_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}\right)^3 S_{21}(\eta, \alpha) &= \frac{9}{4} \operatorname{sen} 2\sigma \sum_{i, \tau} B_i(I) \cos(\nu - \tau\Theta_i) + \frac{3}{2} \sum_{\rho} (1 + \rho \cos \sigma) \times \\ &\times (-1 + 2\rho \cos \sigma) \sum_{i, \tau} C_i(I, \tau) \cos(\mu + \rho\nu - \tau\Theta_i) - \\ &- \frac{3}{4} \sum_{\rho} \rho \operatorname{sen} \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i, \tau} D_i(I, \tau) \cos(2\mu + \rho\nu - \tau\Theta_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}\right)^3 C_{22}(\eta, \alpha) &= -\frac{9}{2} \operatorname{sen}^2 \sigma \sum_{i, \tau} B_i(I) \cos(2\nu - \tau\Theta_i) - \\ &- 3 \sum_{\rho} \rho \operatorname{sen} \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i, \tau} C_i(I, \tau) \cos(\mu + 2\rho\nu - \tau\Theta_i) - \\ &- \frac{3}{4} \sum_{\rho} (1 + \rho \cos \sigma)^2 \sum_{i, \tau} D_i(I, \tau) \cos(2\mu + 2\rho\nu - \tau\Theta_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}\right)^3 S_{22}(\eta, \alpha) &= \frac{9}{2} \operatorname{sen}^2 \sigma \sum_{i, \tau} B_i(I) \operatorname{sen}(2\nu - \tau\Theta_i) + \\ &+ 3 \sum_{\rho} \operatorname{sen} \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i, \tau} C_i(I, \tau) \operatorname{sen}(\mu + 2\rho\nu - \tau\Theta_i) + \\ &+ \frac{3}{4} \sum_{\rho} \rho (1 + \rho \cos \sigma)^2 \sum_{i, \tau} D_i(I, \tau) \operatorname{sen}(2\mu + 2\rho\nu - \tau\Theta_i), \end{aligned} \tag{1.250}$$

donde el índice  $\rho$  también toma los valores  $+1$  ó  $-1$ .

Siguiendo este procedimiento descrito es posible expresar la energía potencial gravitatoria de nuestro modelo de Tierra en función del conjunto canónico modificado de Andoyer. No obstante, como consecuencia de haber introducido un sistema de referencia no inercial ha sido necesario añadir un término adicional al hamiltoniano. De esta forma, la forma final del hamiltoniano de nuestro sistema es

$$H = T(p, q) + V(p, q, t) + E(p, q, t), \quad (1.251)$$

donde

$$E = \left[ \Lambda (\cos \beta(t) - 1) \frac{d\alpha(t)}{dt} + M \operatorname{sen} I \left( \frac{d\beta(t)}{dt} \operatorname{sen} (\lambda - \alpha(t)) - \frac{d\alpha(t)}{dt} \operatorname{sen} \beta(t) \cos (\lambda - \alpha(t)) \right) \right]. \quad (1.252)$$

### Fuerzas canónicas

Por último, nos queda por describir la forma en la que se obtienen las fuerzas canónicas. Como se señaló en la sección (1.2.1) estas se pueden calcular expresando trabajo virtual en función del conjunto canónico y considerando

$$\delta W = \vec{N} \cdot \delta \vec{R} = \sum_{i=1}^n Q_{p_i} \delta p_i + Q_{q_i} \delta q_i. \quad (1.253)$$

Al utilizar el conjunto modificado de Andoyer, este cálculo se simplifica ligeramente puesto que recordemos que somos capaces de expresar la forma de una rotación virtual en términos del conjunto canónico (ecuaciones 1.212 y 1.213). Por otra parte, los momentos disipativos (ecuaciones 1.146) estaban descritos en términos de la velocidad angular de cada capa y de los vectores asociados al sistema de Tisserand que, también, se pueden escribir en términos del conjunto canónico utilizando las relaciones (1.224) y (1.222).

No obstante, es posible realizar alguna simplificación adicional si consideramos que la disipación se debe a los desplazamientos relativos entre las capas y no a un movimiento global de todas ellas. Así, por ejemplo, en el caso de un modelo de Tierra con dos únicas capas  $k$  y  $m$  tendríamos que el trabajo virtual es de la forma (véase el capítulo 3)

$$\delta W = \vec{t}_{(k)} \cdot \delta \vec{R}_{(kc)} + \vec{t}_{(m)} \cdot \delta \vec{R}_{(mc)}, \quad (1.254)$$

ahora bien considerando que (ecuaciones 1.213 y 1.148)

$$\delta \vec{R}_{(kc)} = \delta \vec{R}_{(mc)} + \delta \vec{R}_{(km)}, \quad \vec{t}_{(m)} = -\vec{t}_{(k)}, \quad (1.255)$$

el trabajo virtual se reduce a calcular la expresión más simplificada

$$\delta W = \vec{t}_{(k)} \cdot \delta \vec{R}_{(km)} = \sum_{i=1}^6 Q_{p_i} \delta p_i + Q_{q_i} \delta q_i. \quad (1.256)$$

### Resolución aproximada del problema

Como es fácil comprender la resolución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales (1.228) es inviable. Por ello es necesario utilizar un método de perturbaciones que nos permita encontrar una solución analítica aproximada de dichas ecuaciones. En particular, estas soluciones aproximadas se obtendrán con ayuda del método de Hori(1966).

Para simplificar la exposición, consideraremos únicamente la situación en la que las ecuaciones canónicas no contienen fuerzas canónicas<sup>51</sup>, es decir, supondremos que las ecuaciones de Hamilton son de la forma

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.257)$$

donde el hamiltoniano del sistema viene dado por (1.251)

$$H = T + V + E. \quad (1.258)$$

El hecho de que para resolver este sistema sea posible aplicar una teoría de perturbaciones, radica en la posibilidad de descomponer este hamiltoniano en dos partes

$$H = H_0 + \chi H_1, \quad (1.259)$$

de forma que se tenga  $0 \leq \chi \ll 1$ , es decir, el término  $\chi H_1$  es una perturbación frente a  $H_0$ . Esto permite aproximar las soluciones de  $H$  con la ayuda de las soluciones del problema de hamiltoniano  $H_0$ , que se conoce como problema libre o sin perturbar y que, además de verificar la condición de que  $\chi |H_1| \ll H_0$ , debe ser elegido de forma que las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad (1.260)$$

<sup>51</sup>En el caso que aparezcan fuerzas canónicas es preciso utilizar, en principio, la versión no conservativa del método de Hori (Hori 1971), o bien "hamiltonizar" el problema duplicando el número de variables canónicas (Choi y Tapley 1973).

posean una solución explícita o implícita<sup>52</sup>. A este sistema de ecuaciones diferenciales también se le conoce como sistema auxiliar de Hori. En el caso de la Tierra el término dominante en  $H$  se debe a la energía cinética del modelo; de hecho, los términos  $V$  y  $E$  son como poco siete órdenes de magnitud más pequeños que  $T$  (véase, por ejemplo, Getino y Ferrándiz 1995). Esto está relacionado con que la desviación del movimiento de rotación de la Tierra respecto a la rotación uniforme es pequeña.

Por ello, una posibilidad para definir el problema libre es considerar  $H_0 = T$ . No obstante, esta no es la única opción posible, y en determinadas circunstancias puede ser conveniente considerar otras partes del hamiltoniano del sistema, siempre y cuando  $H_0$  cumpla los requisitos anteriormente señalados. Por ejemplo, puesto que la triaxialidad de la Tierra es pequeña, podríamos considerar sólo la parte de  $T$  asociada con un modelo simétrico, tratando las contribuciones de la triaxialidad como una perturbación. O incluir en el problema libre algún término proveniente de las interacciones externas. En cualquiera de los casos no debemos olvidar que la elección debe ser tal que permita obtener una solución del sistema auxiliar de Hori asociado, por ello en muchas de las investigaciones del movimiento de la rotación de la Tierra, en especial en el caso no rígido, el hamiltoniano del problema libre proviene de la parte de la energía cinética con la que se consigue que las ecuaciones diferenciales (1.260) formen un sistema lineal.

Una vez que hemos realizado la descomposición (1.259) es posible aplicar el método de Hori. Este método consiste en realizar una transformación canónica  $(p, q) \rightarrow (p^*, q^*)$ , de modo que el hamiltoniano inicial se transforme en un nuevo hamiltoniano  $K$  más fácilmente integrable. Esto se logra utilizando una transformación de Lie, junto con un método de promedios, y a diferencia de otros procedimientos como el de von Zeipel, se da en forma explícita (véase Hori 1973). En ausencia de resonancias, este método proporciona una solución asintótica válida en intervalos de tiempo del orden del inverso de la perturbación, es decir, del orden de  $\chi^{-1}$ . Tanto el nuevo hamiltoniano  $K$  como la función generatriz  $W$ , a partir de la cual se obtiene la transformación canónica, vienen expresadas como series en el pequeño parámetro  $\chi$  de la forma

$$K(p^*, q^*) = K_0 + \chi K_1 + \chi^2 K_2 + \dots, \quad W(p^*, q^*) = \chi W_1 + \chi^2 W_2 + \dots, \quad (1.261)$$

lo que permite aproximar la solución hasta el orden deseado. No obstante, nos limitaremos únicamente a considerar la aproximación a primer orden, además para simplificar la notación consideraremos que el parámetro  $\chi$  está

<sup>52</sup>La solución del problema sin perturbar debe verificar alguna condición técnica adicional (véase, por ejemplo, Arnold et al. 1991).

incluido en la función a la que multiplica. En este caso el hamiltoniano transformado, a primer orden, es de la forma (Hori 1973)

$$K(p^*, q^*) = K_0 + K_1 = H_0 + H_{1\text{sec}}, \quad (1.262)$$

siendo  $H_{1\text{sec}}$  la parte secular de  $H_1$ , es decir

$$H_{1\text{sec}} = H_1 - \langle H_1 \rangle. \quad (1.263)$$

En esta expresión,  $\langle \rangle$  denota el promedio de una función de las variables canónicas con respecto a las variables del sistema cuyo movimiento es rápido comparado con alguna característica propia del sistema dinámico. En la ecuación (1.262) tanto  $H_0$  como  $H_{1\text{sec}}$  están expresados en función de las variables canónicas  $(p^*, q^*)$ . Por otra parte, la transformación canónica  $(p, q) \rightarrow (p^*, q^*)$  se obtiene, a primer orden, con la función generatriz (Hori 1973)

$$W(p^*, q^*) = W_1(p^*, q^*) = \int_{\text{UP}} H_{1\text{per}} dt, \quad (1.264)$$

donde  $H_{1\text{per}}$  es la parte periódica de  $H_1$ , esto es,  $\langle H_1 \rangle$ . Esta integral se calcula a lo largo de las soluciones del problema sin perturbar, es decir, sobre las soluciones del sistema auxiliar de Hori (ecuaciones 1.260)

$$p_i = p_i(t + C_1, \dots, C_{2n}), \quad q_i = q_i(t + C_1, \dots, C_{2n}), \quad (1.265)$$

donde  $C_i$  son las constantes de integración del problema libre. Una vez calculada esta integral es necesario expresar  $t + C_1, \dots, C_{2n}$  en función de las variables canónicas  $(p, q)$ , lo que se logra invirtiendo las relaciones (1.265)<sup>53</sup>. Finalmente, la integral se escribe en términos de las variables  $(p^*, q^*)$  sustituyendo literalmente estas por las variables  $(p, q)$ . De esta forma, cualquier función de las variables canónicas  $(p, q)$  se puede escribir a primer orden como (Hori 1973)

$$f(p, q) = f(p^*, q^*) + \{f, W\}, \quad (1.266)$$

siendo  $\{\cdot, \cdot\}$  el corchete de Poisson en las variables  $(p^*, q^*)$ . Así, una vez resueltas las ecuaciones canónicas de hamiltoniano  $K$

$$\frac{dp^*}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q^*}, \quad \frac{dq^*}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p^*}, \quad (1.267)$$

que permiten expresar  $q^*$  y  $p^*$  en función del tiempo, podríamos encontrar la solución a primer orden del sistema canónico original. Más aún, como el corchete de Poisson ya contiene términos de primer orden debidos a  $W$ , en

<sup>53</sup>Este paso no siempre es necesario (véanse Hori 1973 y el siguiente apartado).



él es suficiente con sustituir  $q^*$  y  $p^*$  por sus soluciones a orden cero, es decir, por las soluciones derivadas del hamiltoniano  $K_0$ .

En el caso de los estudios del movimiento de rotación de la Tierra el procedimiento descrito presenta una ventaja adicional, y es que como apunta Kinoshita (1977), la ecuación (1.266) permite separar en la función  $f(p, q)$  los efectos seculares, que se concentran en la parte  $f(p^*, q^*)$ , de los efectos periódicos que provienen del término  $\{f, W\}$  y que habitualmente se denota por  $\Delta f$ . En particular, las distintas partes del movimiento de rotación de la Tierra descritas en la sección (1.1.1) se relacionan claramente con este esquema de perturbaciones, al menos a primer orden. Así, las nutaciones libres están asociadas con las soluciones del problema sin perturbar, por supuesto, en esta situación, el hamiltoniano  $H_0$  sólo deberá contener parte de la energía cinética del modelo. De forma similar, las nutaciones forzadas vendrán dadas por el corchete de Poisson  $\{f, W\}$ , y, finalmente, el movimiento de precesión será una parte de las soluciones del hamiltoniano transformado  $K$ .

Por ejemplo, si consideramos los ángulos de Euler  $\psi$  y  $\varepsilon$  como función del conjunto canónico modificado de Andoyer (ecuaciones 1.185) tendríamos que

$$\begin{aligned}\psi &= \lambda^* + \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} + \left\{ \lambda^* + \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*}, W \right\} + O(\sigma^{*2}), \\ \varepsilon &= I^* + \sigma^* \cos \mu^* + \{I^* + \sigma^* \cos \mu^*, W\} + O(\sigma^{*2}).\end{aligned}\quad (1.268)$$

No obstante, puesto que  $\sigma^*$  es del orden de  $\sigma \sim 10^{-6} \text{ rad}$  (Kinoshita 1977) habitualmente en las relaciones anteriores sólo se consideran los términos que producen una contribución a orden cero en  $\sigma^*$ . Esto significa que, en principio, hay que mantener los términos a primer orden en  $\sigma^*$  dentro de los corchetes de Poisson, ya que, estos corchetes se calculan derivando sus argumentos una vez respecto a  $\sigma^*$ . Según estas consideraciones las ecuaciones (1.269) son sustituidas por las aproximaciones

$$\begin{aligned}\psi &= \lambda^* + \left\{ \lambda^* + \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*}, W \right\} + O(\sigma^*), \\ \varepsilon &= I^* + \{I^* + \sigma^* \cos \mu^*, W\} + O(\sigma^*).\end{aligned}\quad (1.269)$$

Como vemos el movimiento de precesión de los ángulos  $\psi$  y  $\varepsilon$  es el mismo que el de las variables  $\lambda$  y  $I$ , que fijaban la posición del vector momento angular total de la Tierra respecto a la eclíptica móvil. Sin embargo, el movimiento de nutación de los ángulos  $\psi$  y  $\varepsilon$  es distinto del de las variables  $\lambda$  y  $I$ , ya que

este viene dado por

$$\Delta\psi = \Delta\lambda + \Delta(\psi - \lambda) = \{\lambda^*, W\} + \left\{ \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*}, W \right\} + O(\sigma^*).$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta I + \Delta(\varepsilon - I) = \{I^*, W\} + \{\sigma^* \cos \mu^*, W\} + O(\sigma^*). \quad (1.270)$$

A los términos periódicos debidos a  $\Delta\lambda$  y  $\Delta I$  se les denomina términos de Poisson, y determinan el movimiento de nutación del eje del momento angular total de la Tierra. Las contribuciones periódicas  $\Delta(\psi - \lambda)$  y  $\Delta(\varepsilon - I)$  se conocen como términos de Oppolzer (Kinoshita 1977) y miden la desviación del movimiento periódico del eje de figura respecto al eje del momento angular. Es importante señalar que las igualdades (1.270) son válidas para cualquier modelo de Tierra. Este no es el caso al considerar el movimiento de rotación del eje de rotación  $\vec{e}_{\vec{\omega}}$ , puesto que la expresión de las componentes de este vector en el sistema celeste o terrestre en función de las variables canónicas depende del modelo de Tierra considerado (véanse las ecuaciones 1.224).

### Movimiento libre de nutación

Como se deduce de las expresiones anteriores, la resolución del problema libre dado por el sistema de ecuaciones (1.260) es fundamental para aplicar el método de Hori, puesto que esta solución es la que permite obtener la función generatriz de la transformación, de la que se deriva el movimiento de nutación. Por otra parte, si el hamiltoniano sin perturbar coincide con parte de la energía cinética del sistema esta solución está relacionada con el movimiento libre de nutación y también con el movimiento polar libre, lo que incrementa su interés, puesto que las nutaciones libres aportan información sobre la estructura interior terrestre mediante las denominadas frecuencias libres o modos normales de nutación (véanse la sección 2.1 y Moritz y Mueller 1987). Sin embargo, en el caso de modelos no rígidos de Tierra<sup>54</sup>, la obtención de esta solución en forma explícita es muy complicada. En su lugar, se considera un sistema de ecuaciones diferenciales equivalente que, por una parte, permite el cálculo de  $W$  y por otra proporciona en forma analítica las expresiones de las frecuencias libres.

A continuación daremos una idea del procedimiento que se sigue para resolver el problema libre y calcular la función generatriz. Supondremos que el hamiltoniano del problema libre  $H_0$  coincide con alguna parte de la energía cinética del modelo de Tierra considerado. La estructura global de la solución del sistema auxiliar de Hori se conserva si se elige como problema sin

<sup>54</sup>El caso de un modelo rígido se puede resolver con la ayuda del método de Hamilton-Jacobi (Kinoshita 1972).

perturbar la parte de la energía cinética resultante de considerar únicamente un modelo simétrico en el que las capas sólidas son rígidas. El resto de características del modelo, como pueden ser las contribuciones de la triaxialidad o la elasticidad de las capas, pueden incorporarse al problema libre, o bien tratarse como perturbaciones; en cualquier caso, su inclusión no modifica el número de modos normales aunque, lógicamente, sí que modifica su forma funcional. Por otra parte, si existen fuerzas canónicas estas se incluyen como parte del problema libre, manteniendo de esta forma el esquema de perturbaciones anteriormente descrito aunque con alguna pequeña modificación.

En estas condiciones las ecuaciones del problema sin perturbar son

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H_0}{\partial q_i} + Q_{q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - Q_{p_i}. \quad (1.271)$$

Debido a la elección realizada, la dependencia funcional del hamiltoniano del problema libre hace que parte de estas ecuaciones conduzcan a una solución inmediata para alguna de las variables canónicas. Este es el caso, por ejemplo, de las variables  $M$ ,  $\Lambda$  o  $\lambda$ , cuyo valor debe ser necesariamente invariable. Esto es claro si consideramos que el sistema dinámico representado por las ecuaciones (1.271) se corresponde con un cuerpo aislado en el espacio, lo que implica la conservación de las componentes del vector momento angular total en un sistema de referencia inercial, lo que justifica que  $M$ ,  $\Lambda$  o  $\lambda$  sean constantes. Como se ha señalado, en general, no es posible encontrar explícitamente la solución del resto de variables. Por ello se realiza un cambio de variable a unas nuevas funciones  $f_j$ , de forma que el sistema de ecuaciones diferenciales transformado resulte ser un sistema de ecuaciones diferenciales lineales cerrado en estas funciones. Estas nuevas funciones coinciden, básicamente, con las componentes  $x$  e  $y$  del momento angular total  $\vec{L}$  y del momento angular de cada capa  $\vec{L}_{(k)}$  en el ecuador del sistema de referencia terrestre. No obstante, a veces también es preciso considerar las componentes  $x$  e  $y$  del eje de figura  $\vec{e}_{3(k)}$  de cada capa en el mismo sistema. En vista de la simetría del modelo, suele ser ventajoso (véase, por ejemplo, Getino 1995b) considerar las funciones  $f_j$  como funciones complejas de variable real, lo que permite reducir el número de ecuaciones a la mitad. Por ejemplo, podemos construir  $f_1$  a partir de las componentes de momento angular total a primer orden en  $\sigma$  (ecuación 1.186), combinándolas en la forma (Getino 1995b)

$$f_1 = M\sigma \sin \nu + iM\sigma \cos \nu = iM\sigma e^{-i\nu}. \quad (1.272)$$

De igual modo, considerando las componentes  $x$  e  $y$  de  $\vec{L}_{(k)}$  (ecuaciones 1.223) a primer orden en  $\sigma_{(k)}$ , introduciríamos las funciones

$$f_k = M_{(k)}\sigma_{(k)} \sin \nu_{(k)} - iM_{(k)}\sigma_{(k)} \cos \nu_{(k)} = -iM_{(k)}\sigma_{(k)} e^{i\nu_{(k)}}. \quad (1.273)$$

Y, finalmente, si fuera preciso, se incorporarían las componentes de  $\vec{e}_{3(k)}$  a primer orden en  $\sigma_{(k)}$  e  $I_{(k)}$ , deducidas a partir de (1.222), mediante las variables

$$g_k = M_{(k)}I_{(k)} \sin(\mu_{(k)} + \nu_{(k)}) + M_{(k)}\sigma_{(k)} \sin \nu_{(k)} - \\ - i [M_{(k)}I_{(k)} \cos(\mu_{(k)} + \nu_{(k)}) + M_{(k)}\sigma_{(k)} \cos \nu_{(k)}]. \quad (1.274)$$

A la vista de la ecuación (1.273), en este caso, es suficiente con tomar como nueva variable únicamente la función

$$g_k = M_{(k)}I_{(k)} \sin(\mu_{(k)} + \nu_{(k)}) - iM_{(k)}I_{(k)} \cos(\mu_{(k)} + \nu_{(k)}) = \\ = iM_{(k)}I_{(k)} e^{i(\mu_{(k)} + \nu_{(k)})}. \quad (1.275)$$

La evolución de todas estas nuevas variables se obtiene de forma sencilla aplicando la ecuación (1.95) al sistema de ecuaciones (1.271), es decir, mediante la igualdad

$$\frac{d}{dt}f_j = \{f_j, H_0\} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial q_i} Q_{p_i} - \frac{\partial f_j}{\partial p_i} Q_{q_i} \right). \quad (1.276)$$

Al expresar el lado derecho de estas ecuaciones como una combinación lineal de las funciones  $f_j$  y  $g_k$ , despreciando si fuera necesario los términos de orden superior al primero en  $\sigma$ ,  $\sigma_{(k)}$  e  $I_{(k)}$ , se consigue construir un sistema diferencial lineal cerrado de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix}, \quad (1.277)$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  es una matriz constante compleja que depende de los parámetros que caracterizan el interior de la estructura terrestre. Este sistema es equivalente a parte de las ecuaciones (1.271)

La resolución del sistema lineal anterior es inmediata una vez que se conoce la descomposición espectral de la matriz  $\mathbf{A}$ . Esto requiere el cálculo analítico de sus autovalores que son precisamente las frecuencias libres de nutación. Como es fácil de comprender, el cálculo directo de los autovalores es, además de poco manejable, únicamente posible en un número muy limitado de casos. Sin embargo, podemos utilizar el hecho de que muchos de los parámetros, que denotaremos como  $\zeta_i$ , que describen el interior terrestre son

de primer orden, como por ejemplo las elipticidades dinámicas. Por ello, la matriz  $\mathbf{A}$  puede considerarse como una matriz compleja dependiente de estos parámetros, es decir,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\zeta_1, \dots, \zeta_p) = \mathbf{A}(\zeta)$  donde cada  $\zeta_i$  es del orden de  $O(1)$ . Teniendo presente esta consideración, así como el grado de aproximación con el que estamos desarrollando nuestra teoría, en vez de calcular explícitamente los autovalores de  $\mathbf{A}$  nos limitaremos a obtener un desarrollo asintótico de los mismos en función de  $\zeta_i$ .

A pesar de la simplicidad en su formulación, la resolución de este problema dista mucho de ser trivial debido, entre otras causas, al hecho de que la matriz  $\mathbf{A}$  depende de varias variables<sup>55</sup>. En una primera etapa, este problema fue resuelto por González et al. (1999) realizando una modificación del algoritmo de Newton-Puiseux computacionalmente optimizada que permitía la obtención de la solución aproximada. Sin embargo, para algunos modelos de Tierra particulares, el cálculo de los autovalores pasa por resolver los denominados problemas no cuasi ordinarios (González et al. 1999), en estos casos el método anterior conducía a desarrollos de los autovalores en los que los parámetros  $\zeta_i$  aparecían elevados a exponentes negativos, lo que complicaba enormemente la obtención de la solución (González et al. 1999).

Para solventar estas dificultades se ha desarrollado un nuevo procedimiento que, combinado con las técnicas computacionales anteriores, permite obtener una representación asintótica de los autovalores tanto para los problemas cuasi ordinarios como para los no cuasi ordinarios. Este procedimiento se basa en el siguiente resultado: consideremos una matriz diagonalizable  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ , tal que  $\mathbf{A}$  es de la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^p \zeta_i \mathbf{A}_i, \quad (1.278)$$

donde los  $\zeta_i$  son un cierto número de parámetros complejos. Entonces, los autovalores de  $\mathbf{A}$ ,  $x_j$ , admiten un desarrollo asintótico de precisión  $k$  de la forma

$$x_j = h_0^{(j)}(\zeta) + h_1^{(j)}(\zeta) + \dots + h_k^{(j)}(\zeta), \quad (1.279)$$

donde  $h_i^{(j)}(\zeta)$  es una función homogénea<sup>56</sup> de grado  $i$  en  $\zeta$ . Este resultado permite construir un algoritmo con el que determinar las funciones  $h_i^{(j)}(\zeta)$ . Para ello, partamos de la ecuación secular

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{1}) = s(\zeta, x) = 0. \quad (1.280)$$

<sup>55</sup>La complejidad del problema está relacionada con que aunque la dependencia de la matriz sea diferenciable respecto a las variables  $\zeta$  en un entorno del origen, en general, no se puede asegurar que los autovalores también sean funciones diferenciables de estas variables (Kato 1995).

<sup>56</sup>Una función es homogénea de grado  $i$  si  $h_i^{(j)}(p\zeta_1, \dots, p\zeta_p) = p^i h_i^{(j)}(\zeta)$ .

Podremos escribir el desarrollo asintótico de  $x_j$  de precisión 0 como

$$x_j = h_0^j(\zeta) + O(1), \quad (1.281)$$

donde  $O(1)$  denota los términos de grado mayor que 0 en el orden de homogeneidad. Llevando esta solución a (1.280) y agrupando por grados de homogeneidad en  $\zeta$  obtenemos

$$s(\zeta, x_j) = s(\zeta, h_0^j(\zeta) + O(1)) = s_0(h_0^j(\zeta)) + O(1) = 0, \quad (1.282)$$

de donde

$$s_0(h_0^j(\zeta)) = 0 = s(0, x_j), \quad (1.283)$$

ecuación a partir de la que se obtiene la parte de grado 0 de los autovalores, es decir  $h_0^j(\zeta)$ , que coinciden con los autovalores de  $\mathbf{A}_0$ . Denotemos por  $m_j$  la multiplicidad algebraica de cada autovalor de  $\mathbf{A}_0$ . Para encontrar el siguiente término en el desarrollo asintótico, consideremos

$$s(\zeta, x_j) = s(\zeta, h_0^j(\zeta) + h_1^j(\zeta) + O(2)) = s_1(\zeta, h_1^j(\zeta)) + O(1 + m_j) = 0, \quad (1.284)$$

de donde se obtiene la ecuación

$$s_1(\zeta, h_1^j(\zeta)) = 0, \quad (1.285)$$

que es una ecuación algebraica en  $h_1^j(\zeta)$  de grado  $m_j$ . Por ello, esta ecuación podrá tener varias soluciones y, así, el autovalor  $h_0^j(\zeta)$  podría desdoblarse a lo sumo en  $m_j$  autovalores distintos. Iterando el algoritmo se pueden obtener desarrollos asintóticos de la precisión deseada, aunque para nuestros propósitos es suficiente con obtener los desarrollos con precisión  $O(1)$ . Una vez que se conoce una expresión aproximada de los autovalores, y considerando que en nuestros problemas la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable, podemos obtener la forma explícita aproximada de la solución del sistema de ecuaciones (1.277) calculando, por ejemplo, la matriz exponencial de  $\mathbf{A}$   $t$  mediante su polinomio interpolador de Lagrange-Sylvester (véase, por ejemplo, Gantmacher 1990).

La resolución aproximada del problema libre permite calcular las nutaciones libres de forma inmediata. En efecto, considerando las ecuaciones (1.188) y la igualdad (1.272) tenemos que

$$\begin{aligned} \psi &= \lambda - \frac{\cos(\mu + \nu)}{M \operatorname{sen} I} \operatorname{Re} f_1 + \frac{\operatorname{sen}(\mu + \nu)}{M \operatorname{sen} I} \operatorname{Im} f_1 + O(\sigma^2), \\ \varepsilon &= I + \frac{\operatorname{sen}(\mu + \nu)}{M} \operatorname{Re} f_1 + \frac{\cos(\mu + \nu)}{M} \operatorname{Im} f_1 + O(\sigma^2). \end{aligned} \quad (1.286)$$

Ahora bien, según se ha señalado en nuestro problema libre, tanto  $M$ , como  $I$  y  $\lambda$  permanecen constantes. Por otra parte, considerando las ecuaciones (1.195) puede demostrarse (véase también Getino 1995b) que se verifica

$$\frac{d}{dt}(\mu + \nu) = \Omega + O(\sigma), \quad (1.287)$$

siendo  $\Omega$  la velocidad media de rotación de la Tierra, es decir, en el problema libre la duración del día está desacoplada del movimiento de nutación. Así, si denotamos por  $\Delta^{(L)}$  la parte de los ángulos  $\psi$  y  $\varepsilon$  debida al problema libre, que depende del tiempo podremos escribir

$$\begin{aligned} \Delta^{(L)}\psi &= -\frac{\cos(\Omega t + \Omega_0)}{M \operatorname{sen} I} \operatorname{Re} f_1 + \frac{\operatorname{sen}(\Omega t + \Omega_0)}{M \operatorname{sen} I} \operatorname{Im} f_1 + O(\sigma^2), \\ \Delta^{(L)}\varepsilon &= \frac{\operatorname{sen}(\Omega t + \Omega_0)}{M} \operatorname{Re} f_1 + \frac{\cos(\Omega t + \Omega_0)}{M} \operatorname{Im} f_1 + O(\sigma^2), \end{aligned} \quad (1.288)$$

siendo  $\Omega_0$  una constante de integración. De este modo, vemos que las nutaciones libres quedan determinadas una vez que se conocen las soluciones de sistema (1.277). Es más, teniendo en cuenta que la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable, la dependencia temporal de estas funciones será de la forma

$$e^{t \operatorname{Re} x_j} \{ \operatorname{sen} [t(\Omega + \operatorname{Im} x_j)] + \cos [t(\Omega + \operatorname{Im} x_j)] \}. \quad (1.289)$$

Esto demuestra, una vez más, la importancia de obtener expresiones analíticas para los autovalores de  $\mathbf{A}$ .

### Movimiento forzado de nutación

Seguidamente expondremos las líneas generales con las que se pueden obtener las expresiones analíticas para las nutaciones forzadas, considerando únicamente la parte de estas nutaciones que proviene de la energía potencial gravitatoria debida a la Luna y el Sol. Como se ha mencionado anteriormente, al ser el movimiento de nutación un movimiento periódico, su expresión analítica aproximada a primer orden se obtiene a partir de la función generatriz (ecuación 1.270). Por lo tanto, será necesario estudiar cómo se calcula la integral<sup>57</sup> que aparece en la ecuación (1.291).

Con este propósito consideremos la parte periódica del hamiltoniano  $H_{1\text{per}}$  que, según lo dicho, coincidirá con la parte periódica de la energía gravitatoria. Como ya es habitual, en vista de la pequeña magnitud de los ángulos

<sup>57</sup>En el caso de modelos rígidos este cálculo se simplifica notablemente (véase Kinoshita 1977).

$\sigma$ ,  $\sigma_{(k)}$  e  $I_{(k)}$  consideraremos que, dentro de nuestro orden de aproximación, la parte periódica de la energía potencial se puede escribir como

$$H_{1\text{per}} = V_0 + \sum_j f_j V_j, \quad (1.290)$$

donde  $f_j$  son las variables que hemos introducidas para resolver el problema libre, es decir,  $f_j$  se refiere a  $f_1$ ,  $f_{(k)}$  ó  $g_{(k)}$  (ecuaciones 1.272, 1.273 y 1.281). Las funciones  $V_0$  y  $V_j$  no tienen una dependencia arbitraria de las variables canónicas y del tiempo, si no que verifican unas relaciones particulares (Kinoshita 1977) que permiten evaluar la función generatriz. En particular, se tiene que estas funciones dependen<sup>58</sup>, por una parte, de las variables  $M$ ,  $I$  y  $\lambda$ ; además se verifica que si dependen de las variables  $\mu$  y de  $\nu$  siempre lo hacen a través de factores de la forma  $\exp[\pm ik(\mu + \nu)]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Finalmente, puesto al expresar la energía potencial en términos del conjunto canónico se introducen las variables de Delaunay de la Luna y el Sol como funciones conocidas del tiempo,  $V_0$  y  $V_j$  también dependen de  $t$  mediante factores del tipo  $\exp[i(nt + n_0)]$ , puesto que sólo se está considerando la parte periódica de la perturbación.

Todas estas condiciones, junto con las particularidades señaladas anteriormente sobre la solución del problema libre, permiten calcular la función generatriz. Es decir, evaluar la integral

$$W_1 = \int_{\text{UP}} H_{1\text{per}} dt. \quad (1.291)$$

Considerando la descomposición (1.290), y omitiendo el superíndice de las variables transformadas, podremos escribir

$$W_1 = \int_{\text{UP}} \left( V_0 + \sum_j f_j V_j \right) dt = W_1^{(0)} + W_1^{(1)}. \quad (1.292)$$

El cálculo de  $W_1^{(0)}$  es inmediato, ya que las variables que intervienen en  $V_0$ , o son constantes<sup>59</sup>, como en el caso de  $M$ ,  $I$  y  $\lambda$ , o funciones lineales del tiempo, puesto que en el problema libre se tiene que  $\mu + \nu = \Omega t + \Omega_0$ . Por lo tanto,  $V_0$  se puede escribir como una combinación lineal de funciones periódicas del tiempo de la forma  $\exp\{i[(k\Omega + n)t + \alpha_0]\}$  con  $\alpha \neq 0$ . La integración de estas funciones es inmediata. Recordemos, no obstante, que una vez efectuada

<sup>58</sup>Para simplificar la notación utilizaremos la exponencial compleja en el caso de las variables  $\mu$ ,  $\nu$  y del tiempo.

<sup>59</sup>El procedimiento que vamos a describir se pueden adaptar al caso en el que el problema libre conduzca a soluciones de  $\lambda$  e  $I$  de la forma  $\lambda = n_\lambda t + \lambda_0$  e  $I = n_I t + I_0$ .



la integral es preciso escribir las constantes de integración del problema libre en términos del conjunto canónico. Por ejemplo, los términos  $\Omega t + \Omega_0$  deberán ser sustituidos por  $\mu + \nu$ .

El procedimiento para calcular  $W_1^{(1)}$  es ligeramente diferente. En primer lugar, de forma análoga al caso de  $V_0$ , notemos que cada sumando  $f_j V_j$  puede escribirse como una combinación lineal de términos del tipo  $f_j \exp \{i [(k\Omega + n)t + \alpha_0]\}$ . A este respecto recordemos que, en el problema libre,  $f_j$  es una función del tiempo que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales (1.277). Debemos, pues, calcular una integral del tipo

$$\int f_j \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt, \quad \alpha \neq 0. \quad (1.293)$$

Para ello, y siguiendo a Getino y Ferrándiz (2001), consideremos simultáneamente las integrales

$$\int \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt, \quad (1.294)$$

donde  $\bar{f}$  es la matriz columna que representa las funciones incógnitas de las ecuaciones (1.277). Realizando una integración por partes obtenemos que

$$\int \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt = \frac{1}{i\alpha} \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] - \frac{1}{i\alpha} \int \frac{d\bar{f}}{dt} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt.$$

Ahora bien, considerando que en el problema libre  $\bar{f}$  verifica el sistema de ecuaciones diferenciales (1.277), podremos escribir

$$\int \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt = \frac{1}{i\alpha} \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] - \frac{1}{i\alpha} \mathbf{A} \int \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt, \quad (1.295)$$

de donde, resulta

$$\int \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)] dt = (\mathbf{A} + i\alpha \mathbf{1})^{-1} \bar{f} \exp [i (\alpha t + \alpha_0)]. \quad (1.296)$$

Finalmente, expresando las constantes de integración del problema libre en función del conjunto canónico, podemos obtener el valor de  $W_1^{(1)}$ . Señalemos que con este procedimiento ni siquiera es necesario resolver explícitamente el sistema de ecuaciones diferenciales (1.277).

A partir de las expresiones anteriores se obtienen las nutaciones forzadas mediante la aplicación de las ecuaciones (1.277). En concreto, los términos de Poisson vienen dados por

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \left\{ \lambda, W_1^{(0)} + W_1^{(1)} \right\} = \left\{ \lambda, W_1^{(0)} \right\}, \\ \Delta I &= \left\{ I, W_1^{(0)} + W_1^{(1)} \right\} = \left\{ I, W_1^{(0)} \right\}, \end{aligned} \quad (1.297)$$

puesto que los términos que se derivan de  $W_1^{(1)}$  siempre van a ser proporcionales a  $f_j$ , es decir, del orden  $O(1)$ , ya que ninguna de las funciones  $f_j$  depende de  $I$  o de  $\lambda$ . De estas expresiones, y de la propia forma de  $W_1^{(0)}$ , se deduce que los términos de Poisson que se derivan del término  $V_0$  de la energía potencial gravitatoria son independientes de las características internas del modelo de Tierra. No obstante, al considerar diferentes modelos pueden aparecer nuevas contribuciones a la energía potencial gravitatoria diferentes de  $V_0$  y  $V_j$ , que den lugar a nuevas contribuciones en los términos de Poisson (véase, por ejemplo, Escapa et al. 2005).

Por otra parte, los términos de Oppolzer vendrán dados por

$$\begin{aligned}\Delta(\psi - \lambda) &= \left\{ \sigma \frac{\text{sen } \mu}{\text{sen } I}, W_1^{(0)} + W_1^{(1)} \right\} = \left\{ \sigma \frac{\text{sen } \mu}{\text{sen } I}, W_1^{(1)} \right\}, \\ \Delta(\varepsilon - I) &= \left\{ \sigma \cos \mu, W_1^{(0)} + W_1^{(1)} \right\} = \left\{ \sigma \cos \mu, W_1^{(1)} \right\},\end{aligned}\quad (1.298)$$

puesto que los corchetes en los que interviene  $W_1^{(0)}$  son de orden  $O(1)$ . En efecto, si consideramos, por ejemplo, el corchete

$$\left\{ \sigma \cos \mu, W_1^{(0)} \right\} = \cos \mu \left\{ \sigma, W_1^{(0)} \right\} + \sigma \left\{ \cos \mu, W_1^{(0)} \right\},\quad (1.299)$$

se tiene que el único término que, en principio, podría contribuir es el debido a  $\left\{ \sigma, W_1^{(0)} \right\}$ , ya que el segundo sumando es proporcional a  $\sigma$ . Sin embargo, teniendo en cuenta la definición del corchete de Poisson, y el hecho de que  $W_1^{(0)}$  depende de  $\mu + \nu$ , se deduce que

$$\begin{aligned}\left\{ \sigma, W_1^{(0)} \right\} &= \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\text{sen } \sigma} \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \nu} - \cot \sigma \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial \mu} \right) = \\ &= \frac{1}{M} \frac{\partial W_1^{(0)}}{\partial (\mu + \nu)} \left( \frac{1}{\text{sen } \sigma} - \frac{\cos \sigma}{\text{sen } \sigma} \right) = O(\sigma^2).\end{aligned}\quad (1.300)$$

lo que confirma el resultado obtenido. Por lo tanto, los términos de Oppolzer dependen del modelo de Tierra considerado, ya que también sucede lo mismo con la parte de la función generatriz  $W_1^{(1)}$  que depende de este a través de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Combinando estos resultados tendremos, finalmente, que a primer orden las nutaciones forzadas en longitud y oblicuidad vienen dadas por

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \left\{ \lambda, W_1^{(0)} \right\} + \left\{ \sigma \frac{\text{sen } \mu}{\text{sen } I}, W_1^{(1)} \right\}, \\ \Delta\varepsilon &= \left\{ I, W_1^{(0)} \right\} + \left\{ \sigma \cos \mu, W_1^{(1)} \right\}.\end{aligned}\quad (1.301)$$

Estas fórmulas muestran claramente la influencia de la estructura interna de la Tierra en el movimiento de rotación. Recordemos que no es posible establecer relaciones de este tipo para calcular las nutaciones del eje de rotación, ya que, a diferencia del eje de figura, la expresión de los ángulos que sitúan este eje en el sistema celeste en función de las variables canónicas depende del modelo terrestre particular que se haya considerado.

Para concluir, debemos señalar que los procedimientos expuestos para calcular tanto las nutaciones libres como las nutaciones forzadas, se han desarrollado bajo la condición de que la solución buscada era una aproximación de primer orden. La obtención de aproximaciones de segundo orden requerirá modificar ligeramente los métodos expuestos.

### 1.3 Contribuciones de esta Investigación

En los apartados anteriores se ha descrito de forma general el problema de la rotación de la Tierra y cómo abordar su estudio mediante la utilización del formalismo hamiltoniano de la Mecánica. Como es fácil de comprender a partir de la exposición realizada, se trata de un problema de una complejidad extraordinaria que, además, cíclicamente se ve intensificada debido al imparable progreso de las técnicas de observación. En este sentido, es pertinente recordar cómo presentaba en 1953 E. W. Woolard (Woolard 1953) su nueva teoría de la nutación para un modelo de Tierra rígida y simétrica, donde se señalaba:

Astronomical observations have reached a precision where effects that formerly were negligible have in some cases become observable and of practical importance.

De igual forma, y por las mismas causas, en 1980 la teoría de Woolard fue sustituida por la teoría de la nutación de la Unión Astronómica Internacional de 1980 (Seidelmann 1982), construida a partir de los trabajos de Kinoshita (1977) y Wahr (1981b), y donde, por primera vez, se incorporaban directamente en el modelado de las series de nutación forzada los efectos derivados de la estructura no rígida de la Tierra. La Historia volvía a repetirse en el año 2000, cuando la XXIV Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional recomendó que a partir del año 2003 se utilizara como modelo oficial del movimiento de nutación-precisión de la Tierra la teoría seminanalítica desarrollada por Mathews, Herring y Buffet (MHB2000), reemplazando el modelo vigente desde 1980<sup>60</sup>. Sin embargo, esto no significó que el problema

---

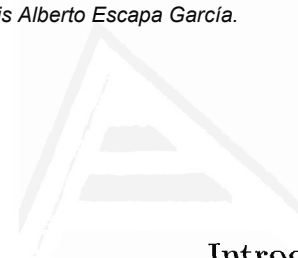
<sup>60</sup>Esta recomendación se hizo a propuesta de una resolución (Dehant et al. 1999) elaborada por un grupo internacional establecido a tal efecto.

de la rotación terrestre se diera por cerrado. De hecho, la propia XXIV Asamblea General en su resolución B1.6 instaba a continuar con los estudios teóricos para el modelado preciso de las series de nutación y precesión de la Tierra, circunstancia que fue reiterada en la XXV Asamblea General de 2003.

Ello es debido a la dificultad intrínseca que presenta el modelado del movimiento de rotación, causada principalmente por la variedad de fenómenos astronómicos y geofísicos que se ven involucrados simultáneamente en el mismo. Como se ha mostrado en las secciones anteriores, esta complejidad obliga a realizar diferentes hipótesis simplificadoras que faciliten la construcción y resolución de los modelos, a costa de limitar la exactitud de las predicciones que proporcionan. Por esto, la progresiva mejora en la precisión de los datos observacionales obliga a retroalimentar el modelo, eliminando alguna de las simplificaciones adoptadas inicialmente, o incluso cambiando por completo el marco teórico en el que se desarrolla, con el propósito de obtener unas predicciones más próximas a las observaciones disponibles en cada momento.

Así pues, en la actualidad la mejora en la predicción del movimiento de rotación de la Tierra pasa por incorporar características de la estructura de la Tierra no consideradas en el modelo MHB2000, como algunas de las detalladas en la sección 1.2, y/o por eliminar las simplificaciones matemáticas adoptadas en el desarrollo del mismo. Por otra parte, el marco teórico en el que se construye el modelo MHB2000 constituye en sí mismo una limitación para aumentar la exactitud de sus predicciones.

Esto es debido a que el movimiento de nutación se obtiene de la convolución de una función de transferencia, que depende del modelo de Tierra, con las series de nutación obtenidas para algún modelo rígido de Tierra. Esto significa que los efectos de segundo orden derivados en las teorías rígidas e incorporados en el modelo MHB2000 carecen de sentido, en tanto que la convolución es un procedimiento lineal que no puede ser aplicado para obtener dichos términos, que contribuyen al movimiento de rotación en una cantidad que está por encima del umbral del microsegundo de arco. Además, el marco del modelo MHB2000 no permite un tratamiento global del movimiento de rotación, en el sentido de que está únicamente concebido para estudiar las nutaciones terrestres. Como se ha señalado, las deficiencias que presenta el modelo MHB2000 se pueden resolver de forma satisfactoria utilizando el marco teórico que proporciona la Mecánica Hamiltoniana, desarrollado en la sección (1.2).



### 1.3.1 Objetivos

Los objetivos de esta Investigación consisten fundamentalmente en determinar la influencia del núcleo interno sólido y de la triaxialidad en las nutaciones libres y/o forzadas de la Tierra, es decir, en mejorar los modelos hamiltonianos de rotación existentes, suprimiendo algunas de las hipótesis simplificadoras, realizando extensiones teóricas que faciliten el tratamiento matemático, y formalizando rigurosamente algunos resultados que se habían obtenido de forma preliminar. Así mismo, para llevar a cabo estos objetivos ha sido necesario desarrollar nuevas herramientas y técnicas matemáticas dentro del marco hamiltoniano, que también son aplicables a otros modelos terrestres diferentes de los aquí considerados.

En particular, se pretende evaluar la influencia que sobre el movimiento libre de nutación tiene el considerar la Tierra como un cuerpo formado por tres capas simétricas (manto, núcleo externo fluido, núcleo interno sólido), que pueden rotar de forma independiente en torno a su baricentro común. Igualmente, se investigará el movimiento libre de nutación de un modelo de dos capas triaxiales, el manto y el núcleo, en el que se supondrá la existencia de una interacción en la frontera manto-núcleo debida a los momentos disipativos también de carácter triaxial. En este sentido recordemos que, como se ha señalado en el apartado (1.2.3), el estudio del movimiento libre de rotación tiene una gran importancia: por un lado, desempeña un papel fundamental al construir el movimiento forzado de rotación, que es el movimiento real, puesto que el problema libre se toma como solución de orden cero al aplicar los métodos de perturbaciones. Por otra parte, proporciona información sobre el interior de la Tierra mediante las expresiones analíticas de las frecuencias libres o modos normales de nutación.

Además, se considerará la contribución de la triaxialidad de la Tierra a las nutaciones forzadas zonales y no zonales de segundo grado. La triaxialidad de la Tierra produce una contribución adicional a la energía potencial gravitatoria, que se traduce en la aparición de armónicos esféricos no zonales, es decir, de orden distinto de cero (véase la ecuación 1.141). Como consecuencia de estos términos, en el movimiento forzado de nutación aparecen nuevas contribuciones de periodos diurnos y subdiurnos, cuya amplitud es observable con las técnicas actuales. Como se ha explicado, estas amplitudes dependen de la estructura interna del modelo de Tierra considerado. Así, se calcularán por primera vez las nutaciones forzadas debidas a los armónicos no zonales de segundo grado para un modelo de Tierra dos capas. Junto a este efecto directo, también se estudiarán las nutaciones forzadas debidas al denominado efecto indirecto de la triaxialidad. Este efecto es consecuencia del cambio producido por la triaxialidad en la dependencia funcional de la

energía cinética del modelo, y que afecta a la solución de orden cero, esto es, al movimiento libre de nutación. Dicha variación se propaga en el problema perturbado debido a su influencia en el cálculo de la función generatriz, ocasionando la aparición de nuevos términos cuasi diurnos en las nutaciones forzadas.

De forma más concreta, mediante las técnicas hamiltonianas expuestas en la sección (1.2), abordaremos las siguientes cuestiones:

1. Estudio del movimiento libre de nutación de un modelo terrestre formado por tres capas: se considerará un modelo de Tierra formado por un manto rígido, un núcleo externo fluido y un núcleo interno rígido, suponiendo que estas tres capas poseen simetría axial. Se obtendrá la energía cinética del sistema, derivando las ecuaciones diferenciales del movimiento y las frecuencias libres de nutación. Se compararán las expresiones obtenidas con las que proporcionaban tratamientos hamiltonianos preliminares del problema y otras derivadas mediante modelos no basados en los Principios Variacionales de la Mecánica.
2. Estudio de las nutaciones libres de un modelo terrestre formado por dos capas triaxiales: se supondrá una estructura terrestre consistente en un manto rígido y un núcleo líquido triaxiales, es decir, considerando que sus momentos de inercia ecuatoriales son distintos. Así mismo, se incorporará también un momento disipativo no simétrico en la frontera manto-núcleo. Una vez establecidas las ecuaciones de movimiento, se obtendrán las frecuencias libres de nutación, discutiendo la influencia de la estructura triaxial en los modos normales de nutación.
3. Estudio del movimiento forzado de nutación de periodo semidiurno de un modelo terrestre triaxial formado por dos capas: se considerará un modelo de Tierra formado por un manto rígido y un núcleo líquido triaxiales perturbado por la acción gravitatoria de la Luna y el Sol. Se evaluará el movimiento forzado de nutación debido a la parte de la energía potencial gravitatoria inducida por la triaxialidad del modelo, es decir, a los armónicos no zonales de grado dos. Se obtendrán las expresiones analíticas de las nutaciones en longitud y oblicuidad para el eje del momento angular y el eje de figura, calculando su contribución numérica y comparando los resultados con los obtenidos por otros autores para un modelo de Tierra rígido.
4. Estudio del efecto indirecto de la triaxialidad en el movimiento forzado de nutación: se supondrá un modelo terrestre rígido triaxial. Se calculará la función generatriz proveniente del armónico zonal de grado 2,

evaluando la variación de esta función como consecuencia de expresar la solución del problema libre en términos de las correspondientes variables de acción-ángulo. Se obtendrán las expresiones analíticas derivadas de esta variación para las nutaciones del eje del momento angular, del eje de figura y del eje de rotación, comparando su valor con el de otros efectos estudiados en los modelos rígidos.

### 1.3.2 Conclusiones

En el capítulo 1, sección (1.2), se han desarrollado técnicas específicas y originales que permiten el estudio del movimiento de rotación para diferentes modelos de la Tierra dentro del formalismo hamiltoniano. Estos métodos han sido aplicados en el desarrollo de los capítulos posteriores. En los artículos presentados (capítulos 2, 3, 4 y 5) se estudian efectos muy complejos, cuya contribución está por encima del umbral de precisión de las actuales técnicas de observación, que en el momento de su publicación no habían sido abordados por otros autores. Seguidamente, damos una idea de los resultados más relevantes obtenidos en cada una de estas partes:

- Capítulo 1.- Se ha obtenido de forma rigurosa el procedimiento necesario para calcular las fuerzas canónicas a través del trabajo virtual del sistema. Así mismo, se han dado expresiones generales de la energía cinética, la energía potencial y los momentos generalizados para un modelo terrestre de  $k$ -capas, obteniendo la forma de la deformación cinemática de las capas fluidas. Se ha dado una interpretación geométrica para un tipo particular de transformaciones canónicas definidas por Andoyer (1923). A partir de este método se ha probado la canonicidad de los conjuntos de Andoyer de una capa, de Andoyer de varias capas y de Andoyer referido a la eclíptica móvil. Se ha desarrollado un nuevo algoritmo que permite la obtención de las frecuencias libres de nutación como aproximaciones asintóticas con la precisión deseada. Finalmente, se ha extendido el método desarrollado por Getino y Ferrándiz (2001) para obtener las nutaciones forzadas.
- Capítulo 2.- Se ha construido la energía cinética de un modelo de terrestre formado por tres capas, expresando ésta en función del conjunto modificado de Andoyer. Para obtener la solución del problema libre se ha realizado una transformación canónica a un conjunto de variables no singulares que permiten un tratamiento matemático más simple del problema. Aplicando los algoritmos desarrollados se han obtenido las expresiones de los modos normales de nutación, observando que como

consecuencia de la consideración del núcleo interno aparecen dos nuevos modos normales: uno de ellos está situado en la banda diurna y el otro es similar a la frecuencia de Chandler. Finalmente, las expresiones analíticas deducidas han sido comparadas con otras derivadas numéricamente y con las obtenidas por otros autores, mostrando una equivalencia completa a primer orden.

- Capítulo 3.- Se ha calculado la energía cinética de un modelo terrestre formado por dos capas triaxiales, así como la expresión de las fuerzas canónicas de un momento disipativo también triaxial, debido a las interacciones viscosas y electromagnéticas. Para resolver el problema libre asociado, se ha formulado este en términos de un conjunto no singular de variables canónicas. Posteriormente, se han deducido las expresiones analíticas de las frecuencias libres, discutiendo el efecto que la no-simetría tiene en dichas frecuencias, concluyendo que la triaxialidad en las fuerzas canónicas no afecta de forma significativa a los modos normales. Este no es el caso de la triaxialidad de las capas, que afecta de forma significativa al modo normal denominado nutación libre del núcleo (FCN)<sup>61</sup>, produciendo variaciones en su valor que pueden alcanzar varios días.
- Capítulo 4.- Se ha expresado la energía cinética, la energía potencial y las fuerzas canónicas de un modelo de dos capas triaxial en función del conjunto canónico de Andoyer. A partir de la solución del problema libre, se ha desarrollado un método para calcular la función generatriz proveniente de los armónicos no zonales de grado dos  $C_{22}$  y  $S_{22}$ , debidos a la triaxialidad del modelo. Con esta función generatriz se han obtenido las expresiones analíticas para las nutaciones forzadas del eje del momento angular y del eje de figura, comparándolas con las del caso rígido obtenidas por Kinoshita (1977) y comprobando que todas ellas son de periodo semidiurno. De estas expresiones se deduce que el efecto del momento disipativo en estos términos es completamente despreciable. Por otra parte, se ha concluido que los términos de Poisson son los mismos que en el caso rígido. Sin embargo, la presencia del núcleo líquido afecta a la amplitud de los términos de Oppolzer obtenidos, derivándose una diferencia total respecto al caso rígido en las nutaciones del eje de figura del orden del 12%.
- Capítulo 5.- Se calcula una nueva contribución (efecto indirecto de la triaxialidad) en el movimiento de nutación de un modelo de Tierra

---

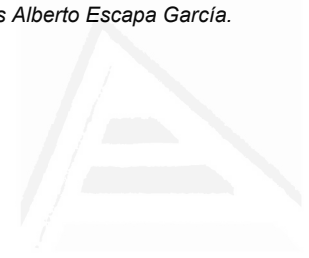
<sup>61</sup>Free Core Nutation (FCN).



rígida triaxial. Para ello, se expresa la energía potencial del sistema en términos de las variables acción-ángulo del problema libre, que, debido a la triaxialidad del cuerpo, no coinciden con las variables canónicas de Andoyer. La función generatriz proveniente del armónico zonal de grado dos contiene un nuevo término que surge de la diferencia entre las variables-acción ángulo del problema libre y el conjunto de Andoyer. Esta contribución da lugar a nuevas series de nutación de periodo semidiurno, cuya expresión analítica se ha calculado para el eje del momento angular, el eje de figura y el eje de rotación. Finalmente, se evalúan numéricamente dichas series mostrando que algunas de ellas están por encima del nivel de truncación establecido en el modelo oficial de rotación de una Tierra rígida REN-2000 (Souchay et al. 1999).

### Agradecimientos

El trabajo desarrollado en este capítulo ha sido parcialmente financiado por los proyectos I+D del *Ministerio de Educación y Ciencia* AYA2005-08109, AYA2004-07970, y el proyecto de la *Junta de Castilla y León* VA015/04.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 2

# Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model <sup>1</sup>

The Hamiltonian formalism is applied to a three-layer Earth model composed of a rigid mantle, a fluid outer core and a rigid inner core, with no dissipation of frictional or electromagnetic origin. Analytical expressions for the free nutations are derived in a set of nonsingular canonical variables that allow a much simpler mathematical treatment. They are checked versus numerical solutions and compared with previous results by Mathews et al. (1991a) and Getino and Ferrándiz (1996, 1998a) with complete agreement up to the first order in the ellipticities.

### 2.1 Introduction

The study of the nutations of the Earth is interesting for obtaining accurate information about Earth orientation in space and also as a means of gaining information about the Earth's interior properties. This issue has been comprehensively studied throughout the 20th century, especially in the last two decades. Nevertheless, the great development of the current geodetic techniques makes the nutation terms known very accurately but not always well predicted by current Earth rotation models. So, it is necessary to include additional, unmodeled physical mechanisms in order to fit more precisely the observational data. This is an important challenge in improving the theoretical Earth rotation theories.

---

<sup>1</sup>Escapa, A., J. Getino y J. M. Ferrándiz *Journal of Geophysical Research*, 106, 11387-11397, 2001.

## 112 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

---

The nutations of the Earth have been approached by a great variety of works. With respect to the nonrigid Earth models, these studies can be divided into different types according to the general guidelines followed by the theories (e.g., Smith 1977, Kinoshita and Sasao 1989, Mathews and Shapiro 1992, Moritz and Mueller 1987). For our purposes it will suffice to sketch two main features of the theories, namely, the way in which the equations of the theories are obtained and the treatment of the forced nutations of the Earth.

An important division is achieved when paying attention to the perspective from which the fundamental equations of the theories are constructed. One group of the theories are based on applying the equations of the continuum mechanics in computing the displacement field in the whole Earth (e.g., Smith 1977, Wahr 1981a, 1981b). This approach is probably the most complete of all because it considers all the normal modes of the rotating, elliptical Earth, not only the nutational ones. However, these theories are essentially numerical that provide only moderate physical insight into the problem. In addition, to perform the numerical integration it is necessary to have the explicit knowledge of the functional dependence of the rheological parameters (density, elastic properties, etc.) This fact complicates enormously the adjustment to the observational data, which is necessary to test the geophysical models as well as to obtain precise nutation series.

The second group of theories builds the equations of the system by means of classical mechanics (e.g., Molodensky 1961, Sasao et al. 1980, Mathews et al. 1991a, 1991b). In this way the general equations of the angular momentum conservations are stated for the whole Earth and its layers. The equations of hydrodynamics are needed in order to compute the evolution of the fluid layer and the torque which exerts on the Earth. The main advantage of this approach over the first group is that it provides simple analytical expressions for the nutational normal modes. In these expressions the internal structure of the Earth only enters through a set of parameters, which could be computed from geophysical Earth models or properly fitted to the observations.

Finally, another method is to approach the problem using the variational theories of classical mechanics (e.g., Poincaré 1910, Jeffreys and Vicente 1957a, 1957b, Kubo 1979, Moritz 1982, Getino and Ferrándiz 1998c) as in this investigation. As it is well known, the variational methods and the vectorial methods are almost equivalent because they are based on almost overlapping physical principles. Nevertheless, the variational approach presents some advantages: On one hand, it shares the benefits of the angular momentum theory over the displacement field approach. On the other hand, the variational treatment is simpler, avoiding the calculations of some inner

torques of the system. For instance, and as it will be shown in this paper, the fluid torques are obtained by constructing the kinetic energy of the system, without the need to employ the equations of hydrodynamics. In this way, as pointed out by Moritz (1982), the treatment of the problem is very elegant and symmetric and to some extent independent of the nature of the layer. It should be noted that by using the variational methods some physical intuition may be lost with respect to the classical mechanics. This fact is due to the numerous mathematical details employed by the variational methods. On the other hand, some insight can be gained on the internal structure of the system (see, for instance, section 4.6 of Moritz and Mueller (1987) where a detailed discussion of Poincaré variables for nonrigid Earth is made, including the relationships with the symmetries of the system.

Let us remark that Hamiltonian variational equations and Mathews et al. (1991a) equations are not equivalent, but only partially equivalent. Of course, there is a close link between angular momentum equations and canonical equations, since the momenta in the Hamiltonian approach have just the physical meaning of angular momenta. But whereas the latter approach provides equations for both coordinates and momenta, the Mathews et al. approach (as all their precedents based on the angular momentum equations) only provides equations for half of the dynamical variables, the momenta (equivalently, angular velocities), and not for the angular coordinates. As nutation angles are angular coordinates, Mathews et al. equations alone can not provide a whole solution for the nutations but need the help of complementary formulations or solutions. According to the tradition in the last decades, those auxiliary developments consist of relying on a previous rigid Earth solution capable to provide angles, as we will refer in the next paragraph. Let us remark that most of the variational approaches share this limitation, even Poincaré's (1910), where the ratio today named "transfer function" was already used for the sake of comparison and testing geophysical hypothesis. The reason is that unlike the Getino and Ferrándiz (2000b) theory, Lagrangian approaches have used nonholonomic coordinates besides actual angles that increases the conceptual difficulty as well as prevents the obtaining of solutions to the nutation angles in a simple, direct way.

As pointed out, a second kind of division of the nutation theories is based on the treatment of the forced nutations of the Earth. There is one group of theories (e.g., Jeffreys and Vicente 1957a, 1957b, Sasao et al. 1980, Wahr 1981b, Mathews et al. 1991a, 1991b) which constructs the forced nutations by means of the so-called transfer function or normalized amplitude. The forced nutations of the nonrigid Earth are computed by multiplying the corresponding numerical forced nutations of a rigid Earth model, provided by an existing theory (such as Kinoshita 1977), by a transfer function which

## 114 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

describes the nonrigid Earth model. This procedure, though very direct and easy to apply because it offers the advantage of not treating the perturbing potential, leads to some difficulties. First, by using a numerical rigid Earth theory we are fixing the value of the overriding dynamical ellipticity of the Earth, which also appears in the transfer function. So, in this scheme it is impossible to fit consistently the value of the dynamical ellipticity because it enters partly in the numerical nutation series of the rigid Earth, and partly in the analytical expression of the transfer function, which could cause some inconsistency and forces the use of additional parameters in the fitting. Second, the transfer function approach is a linear procedure, difficult to extend to nonrigid effects arising from second-order terms in the gravitational perturbations or from cross interactions between rigid/nonrigid, nonrigid/nonrigid parts. These effects have a non-negligible contribution to the nutation series according to preliminary computations of their magnitude by Getino and Ferrándiz (2000b) reported at the IAU Colloquium 180, held in Washington, D.C., in March 2000.

In contrast, there is a second group of theories, the Hamiltonian variational approach (e.g., Kubo 1979, Getino and Ferrándiz 1998c) as this investigation, pioneered by Kinoshita (1977) for the rotation of the rigid Earth, which treats the forced nutations as a direct consequence of possessing a powerful perturbation theory. The latter, based on the Lie transformation, provides analytical expressions for the forced motion of the figure, rotation and angular momentum axes without the need to use any existing rigid Earth nutation series, therefore avoiding the inconsistency in the adjustment of the set of parameters. Besides, using the perturbation technique, it is possible to compute typical nonrigid second-order effects on the nutations as well as the other cross effects mentioned above, which cannot be calculated by the transfer function methods.

To summarize, the Hamiltonian approach establishes a general framework in which the motions of the Earth (nutation, precession, and even orbital motion) can be treated in a unified way. With respect to the nutation motion, the Hamiltonian approach shares the benefits of the angular momentum theories (e.g., Sasao et al. 1980, Mathews et al. 1991a, 1991b) as opposed to the displacement field theories, the advantages of the variational approaches when concerning the free nutations, and the additional capability to provide analytical expressions for the forced nutations to the desired order of perturbation beyond the linear or "first order". Moreover, it is able to provide equations and solutions for both angles and momenta or angular velocities without the concurrence of any other formulations capable of producing equations and solutions for the angular variables.

The development of the Hamiltonian approach in computing the nuta-

tions of different nonrigid Earth models has been carried out by Getino and Ferrándiz. The effect of the mantle elasticity was extensively treated by Getino and Ferrándiz (1995). Free and forced nutations of a Poincaré model were given by Getino (1995a, 1995b) and extended by Getino and Ferrándiz (2000a) to include dissipations on the core-mantle boundary (CMB). A complete two-layer model composed of an anelastic mantle and a liquid core plus dissipative effects at CMB has been worked out providing accurate values for the forced nutations (Getino and Ferrándiz 1998b, 1999). In fact, the resulting nutations series are the first analytical solution with deviation less than 1 millisecond of arc (mas) in Celestial Ephemerides Pole (CEP) offsets with respect to International Earth Rotation Service (IERS) conventions 1996 (McCarthy 1996).

As for the Hamiltonian approach to the three-layer model of the Earth, only partial results have been published by the authors. Using an auxiliary set of noncanonical variables, and introducing a new set of canonical Andoyer-like variables reported by Getino and Ferrándiz (1996, 1998a) assuming the mantle and the inner core to be rigid, the four free frequencies were obtained, although very few details were provided. Forced nutations were partially computed for a three-layer model including mantle anelasticity and presented by Getino and Ferrándiz (1998c). Nutations series including some atmospheric and Shastock (1997) oceanic corrections were presented at the 1999 American Geophysical Union fall meeting (Ferrándiz and Getino 1999) and then at the International Astronomical Union (IAU) Colloquium 180 (Getino and Ferrándiz 2000b). More accurate series, including oceanic corrections computed by Huang et al. (2000), were presented in the IAU 24th General Assembly in August 2000 (J. M. Ferrándiz and J. Getino, personal communication, 2000). They provide a weighted root mean square (wmrs) of 0.180 mas in CEP offsets, as low as any other theoretical series, using either MBH2000 amplitudes for the retrograde free core nutation (RFCN) or a model for the RFCN adapted from Shirai and Fukushima (2000) with recomputed amplitudes.

Here we develop a comprehensive investigation of this problem within the Hamiltonian framework. We have divided this work into a set of three papers in order to clarify the exposition with technical mathematical details. The organization can be sketched as follows; the present paper deals with the first item, leaving the other two items for a future work.

1.- The general Hamiltonian framework of the model is established for the free motion of a three-layer Earth model composed of a rigid mantle, a fluid outer core and a rigid inner core. In spite of the simplicity of the problem, it has been possible to describe properly the qualitative behavior of this Earth model: the four known nutational normal modes are obtained.

## 116 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

2.- The remaining effects concerning the free motion of the Earth will be taken into account by including in our model a dissipation of electromagnetic and viscous origin in the fluid outer core boundaries, the relevant gravitational interactions between the layers of the Earth, as well as the elastic/anelastic properties of the layers. Analytical expressions of the four nutational normal modes are obtained.

3.- The forced nutations will be computed by considering the external gravitational potential acting on the Earth. We construct the total Hamiltonian of the system and the analytical expressions of the forced nutations are found by means of Hori's perturbation method. Finally, an adjustment of the set of the parameters are made, so obtaining the numerical nutation series.

Let us point out, that, of course, much work must be done concerning the effect of outer Earth fluids, ocean, and atmosphere. This is true for any approach, since currently the geophysical fluids have an observable effect on the Earth rotation not wholly understood. Due to its relevance for the Earth rotation, in 1998 IERS established a Center for Global Geophysical Fluid Monitoring. Monitoring and modeling those fluids is a very active research area. In the last years several new ocean models have been constructed assimilating satellite data, especially TOPEX/ Poseidon altimetric measurements and accurate estimations of the angular momentum time series have been worked out. Nowadays accurate ocean models providing both mass (or height) and current components of the angular momentum for the main tides are available, as given by Chao et al. (1996). However, these kinds of effects are out of the scope of this paper, since the amplitude of the response of the ocean to a periodic external forcing is noticeably frequency dependent, and we are concerned with free motion.

Specifically, in this paper we review the issue of free nutations of a three-layer Earth under the Hamiltonian approach. The aim is twofold: First, it plays a fundamental role in constructing the forced nutations of the Earth. In the theories which compute the forced nutations through the transfer function, this function is constructed by considering the free nutations of the Earth (see Mathews et al. 1991a, 1991b). In the Hamiltonian approach the solution of the free nutations of the Earth, viewed as an unperturbed problem, is the base for applying the perturbation method which states the forced nutations (see Getino 1995b). Second, by solving the associated differential linear system, we obtain the analytical expressions of the nutational normal modes which provide some geophysical knowledge of the Earth's properties and whose values are critical in determining the amplitudes and phases of the forced nutations. In addition, we will state the fundamentals of the Hamiltonian treatment of the problem, stressing one of its advantages: the

interaction among the fluid and the solids (mantle and inner core) arises in a natural way by considering the kinetic energy of the system without the need to employ the equations of hydrodynamics. With our model lacking several effects, at this stage our main goal is not to provide accurate numerical values for the free frequencies but to obtain a canonical formulation in which this Earth model can be developed and to give an explanation of the qualitative behavior of the system consisting of four normal modes. We hope that this procedure facilitates and clarifies the exposition of the Hamiltonian approach.

Sections 2 and 3.1 define the fundamental framework in which the Hamiltonian treatment of the problem will be developed. It does not differ essentially from the former results quoted, although the derivations have been simplified and noticeably shortened with respect to the (partially unpublished) original versions by J. Getino and J. M. Ferrándiz (unpublished manuscript, 1999). In section 3.2 a nonsingular set of canonical variables is introduced. It allows to simplify the algebra leading to the obtainment of the frequencies of the free nutations that coincides with the former results using noncanonical variables. Explicit expressions for polar motion are presented in section 5.

Finally, section 6 provides numerical values computed from 1066A model of Gilbert and Dziewonski (1975) as well as a detailed comparison with the results by Mathews et al. (1991a) for a more general Earth model. Recall that Mathews et al. (1991a, 1991b) theory follows a different line from ours, approaching the problem by generalizing the treatment of Sasao et al. (1980) to a three-layer Earth model. Both theories are shown to be in good agreement, in spite of the great difference in the mathematical treatment.

## 2.2 Basic Assumptions and Preliminary Relations

Let us consider a three-layer Earth model composed of an axial-symmetric rigid mantle, an stratified fluid outer core (FOC) and an axial-symmetric solid inner core (SIC). These three regions share the same center of mass. From now on we will refer to these ones by means of the subscripts  $m$  (mantle),  $f$  (FOC), and  $s$  (SIC).

Let  $OXYZ$  be an inertial reference frame,  $Ox_my_mz_m$ ,  $Ox_fy_fz_f$  and  $Ox_sy_sz_s$  the body fixed frames corresponding to the mantle, FOC and SIC, respectively, with rectangular triads  $\{\mathbf{e}_1^m, \mathbf{e}_2^m, \mathbf{e}_3^m\}$ ,  $\{\mathbf{e}_1^f, \mathbf{e}_2^f, \mathbf{e}_3^f\}$ , and  $\{\mathbf{e}_1^s, \mathbf{e}_2^s, \mathbf{e}_3^s\}$ . The mantle and SIC systems have been chosen in such a way that they are also the systems of principal axes of their own bodies, so that  $\mathbf{e}_3^m$  and  $\mathbf{e}_3^s$  are the corresponding symmetry axes. The mantle frame rotates with an



## 118 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

angular velocity  $\omega_m$  with respect to the inertial frame, and the FOC and the SIC frames are rotating with angular velocities  $\delta\omega_f$  and  $\delta\omega_s$  with respect to the mantle system. We also assume that  $\omega_{m1}$ ,  $\omega_{m2}$ ,  $\delta\omega_f$ ,  $\delta\omega_s$  and  $\widehat{\mathbf{e}_3^m \mathbf{e}_3^s}$  (tilt angle) are small quantities, so we will restrict ourselves to the consideration of the first-order terms with respect to these variables if necessary.

### 2.2.1 Tensors of Inertia

The tensors of inertia of the mantle and the SIC are

$$\mathbf{\Pi}_m = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix}; \mathbf{\Pi}_s = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

in the  $Ox_my_mz_m$  and  $Ox_sy_sz_s$  frames, respectively.

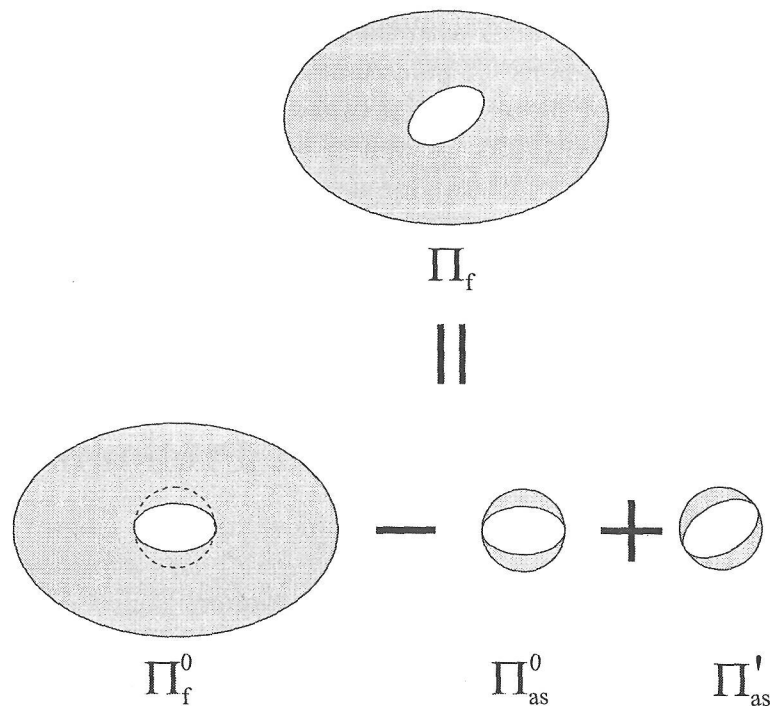


Figure 2.1: Decomposition of FOC. By introducing the auxiliary shell the instantaneous tensor of inertia of FOC,  $\mathbf{\Pi}_f$ , can be decomposed into a part independent of the tilt angle,  $\mathbf{\Pi}_f^0 - \mathbf{\Pi}_{as}^0$ , and a part which evolves kinematically as SIC,  $\mathbf{\Pi}'_{as}$ .

As for the tensor of inertia of the FOC, we must note that the mantle and the SIC will evolve independently, so in general the SIC will be tilted with

respect to the mantle. To obtain the expression of the tensor of inertia of the FOC in the  $Ox_my_mz_m$  frame, we can visualize its instantaneous configuration by introducing an auxiliary body, which will be named AS (auxiliary shell) and referred by the subscript  $as$ , limited by two boundaries: the outer one being a spherical surface of radius equal to the mayor semiaxis of the SIC, and the inner one being the ellipsoidal surface which encloses the SIC. The AS is filled with a fluid with the same density distribution as the analogous part of the FOC. Let us denote its tensor of inertia in its principal axes by

$$\mathbf{\Pi}_{as} = \begin{pmatrix} A_{as} & 0 & 0 \\ 0 & A_{as} & 0 \\ 0 & 0 & C_{as} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Then, according to Figure 2.1, the tensor of the FOC in the mantle frame can be broken down into

$$\mathbf{\Pi}_f = \mathbf{\Pi}_f^0 + \mathbf{\Pi}'_{as} - \mathbf{\Pi}_{as}^0, \quad (2.3)$$

where  $\mathbf{\Pi}_f^0$  and  $\mathbf{\Pi}_{as}^0$  stand for the tensors of the FOC and the AS when the tilt angle is zero, that is to say when the mantle and SIC systems coincide, and  $\mathbf{\Pi}'_{as}$  is the tensor of the AS when the tilt is different from zero.

It is clear that for the first case (tilt = 0) we have

$$\mathbf{\Pi}_f^0 = \begin{pmatrix} A_f & 0 & 0 \\ 0 & A_f & 0 \\ 0 & 0 & C_f \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi}_{as}^0 = \mathbf{\Pi}_{as} = \begin{pmatrix} A_{as} & 0 & 0 \\ 0 & A_{as} & 0 \\ 0 & 0 & C_{as} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

When the tilt is different from zero, the principal axes of the AS are coincident with those of the SIC; thereby, to obtain its expression in the  $Ox_my_mz_m$  frame, we must transform this tensor with a suitable rotation, that is to say

$$\mathbf{\Pi}'_{as} = \mathbf{R}_s^t \mathbf{\Pi}_{as} \mathbf{R}_s, \quad (2.5)$$

where  $\mathbf{R}_s$  is the rotation which brings the  $Ox_my_mz_m$  frame to the  $Ox_sy_sz_s$  frame, superscript  $t$  denoting transposition. To provide an explicit form to  $\mathbf{\Pi}'_{as}$ , it is convenient to introduce the components of the symmetry axis of the SIC  $\mathbf{e}_3^s$  in the mantle frame

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}_s^t \mathbf{e}_3^s = \mathbf{R}_s^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

## 120 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

It is straightforward to verify that  $k_1$  and  $k_2$  are of the same order of magnitude as the tilt angle, whereas  $k_3$  is the unity plus terms of second order in the tilt angle, which can be neglected. On the other hand, let us point out that  $\mathbf{k}$  is a basic dynamical quantity in this theory, playing a role of the same importance as  $\omega_m$ ,  $\delta\omega_f$  and  $\delta\omega_s$  as will be explained below. With these considerations, from (2.5) and (2.6) we can express the tensor of inertia of the cavity in the mantle frame as

$$\mathbf{\Pi}'_{as} = A_{as} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (C_{as} - A_{as}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 \\ k_1 & k_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Then from (2.3), (2.4), and (2.7) we can write the tensor of inertia of the FOC in the mantle frame as

$$\mathbf{\Pi}_f = \begin{pmatrix} A_f & 0 & 0 \\ 0 & A_f & 0 \\ 0 & 0 & C_f \end{pmatrix} + (C_{as} - A_{as}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

This decomposition of the tensor of inertia of the FOC is equivalent to that performed by Mathews et al. (1991a) in their treatment of a three-layered Earth model. Finally, let us remark a fact that will be used later. Due to the smallness of  $k_1$  and  $k_2$ , the principal moments  $C_{as}$  and  $A_{as}$  with respect to  $C_f$  and  $A_f$  we have

$$\|\mathbf{\Pi}'_{as} - \mathbf{\Pi}_{as}^0\| \ll \|\mathbf{\Pi}_f^0\|, \quad (2.9)$$

so we can perform a expansion in order to obtain the inverse of  $\mathbf{\Pi}_f$ . Namely,

$$(\mathbf{\Pi}_f)^{-1} = (\mathbf{\Pi}_f^0)^{-1} - (\mathbf{\Pi}_f^0)^{-1} \mathbf{S} \dots, \quad (2.10)$$

with  $\mathbf{S} = (\mathbf{\Pi}'_{as} - \mathbf{\Pi}_{as}^0) (\mathbf{\Pi}_f^0)^{-1}$ .

### 2.2.2 Angular Momenta

Now we can state the angular momenta for each layer. The mantle and the SIC are rigid bodies, therefore their momenta are

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{\Pi}_m \omega_m; \quad \mathbf{L}_s = \mathbf{\Pi}_s (\omega_m + \delta\omega_s). \quad (2.11)$$

The field of velocities of the FOC is assumed to be composed of a dominant uniform rotation and a small residual velocity, due to the nonsphericity of the boundaries of the FOC with the mantle and the SIC, in a similar way as

Sasao et al. (1980) for a two-layered Earth. This hypothesis is also followed by Mathews et al. (1991a). Thereby the motion in the FOC can be described as

$$\mathbf{v}_f = (\omega_m + \delta\omega_f) \wedge \mathbf{r} + \mathbf{v}_r. \quad (2.12)$$

On the other hand, with an appropriate definition of the FOC rotation, that is, by taking Tisserand axes as the FOC-fixed frame (Moritz and Mueller 1987), the contribution of the small residual velocity  $\mathbf{v}_r$  to the angular momentum of the FOC vanishes. Therefore the angular momentum of the FOC reduces to

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{\Pi}_f (\omega_m + \delta\omega_f). \quad (2.13)$$

The angular momentum of the total Earth is the sum of the angular momentum of each layer, that is to say,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_m + \mathbf{L}_f + \mathbf{L}_s. \quad (2.14)$$

Taking into account (2.11), (2.13), and (2.14), the kinetic energy of this Earth model is written as

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_s)^t \mathbf{\Pi}_m^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_s) \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{L}_f^t \mathbf{\Pi}_f^{-1} \mathbf{L}_f + \frac{1}{2} \mathbf{L}_s^t \mathbf{\Pi}_s^{-1} \mathbf{L}_s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.3 Canonical Expression of the Kinetic Energy

### 2.3.1 Formulation in Andoyer Variables

To formulate the kinetic energy in a Hamiltonian approach, we follow the same guidelines as given by Getino (1995a, 1995b) for the two-layer Earth model. Thus we consider the Andoyer canonical variables  $\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M,$  and  $N$  for the total Earth,  $\lambda_f, \mu_f, \nu_f, \Lambda_f, M_f,$  and  $N_f$  for the FOC, and  $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \Lambda_s, M_s,$  and  $N_s$  for the SIC. The meaning of these variables is shown in Figure 2.2 and Figure 2.3. Likewise, it will be expedient to introduce auxiliary angles  $\sigma, I, \sigma_f, I_f, \sigma_s,$  and  $I_s$  through the relationships

$$\begin{aligned} M &= |\mathbf{L}|, & M_f &= |\mathbf{L}_f|, \\ N &= M \cos \sigma, & N_f &= M_f \cos \sigma_f, \\ \Lambda &= M \cos I, & \Lambda_f &= M_f \cos I_f, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} M_s &= |\mathbf{L}_s|, \\ N_s &= M_s \cos \sigma_s, \\ \Lambda_s &= M_s \cos I_s. \end{aligned}$$

## 122 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

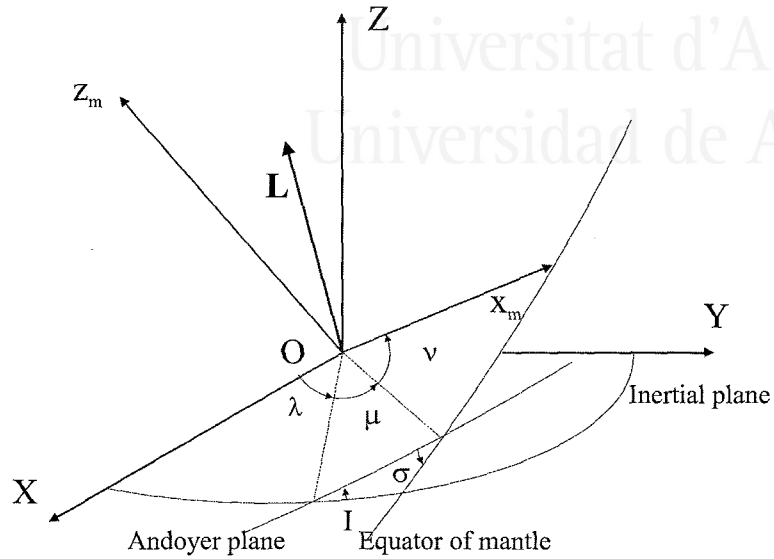


Figure 2.2: Andoyer variables I. The the Andoyer variables for the total Earth relate an inertial frame,  $OXYZ$ , a plane defined by the total angular momentum of the Earth, the Andoyer plane, and a fixed frame of the mantle,  $Ox_my_mz_m$ .

These variables were introduced by Getino and Ferrándiz (1996) with the same notation. We must note that  $\sigma$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_s$ , and  $I_s$  are small quantities, about  $10^{-6}$  rad, so expansions up to the first order in these variables will be made if it is needed.

From (2.16) it is clear the relationship between the canonical set and the angular momenta  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_f$ , and  $\mathbf{L}_s$ . Furthermore, we can write the components of  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_f$ , and  $\mathbf{L}_s$  in the  $Ox_my_mz_m$  frame in terms of the canonical variables as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} K \sin \nu \\ K \cos \nu \\ N \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_f = \begin{pmatrix} K_f \sin \nu_f \\ -K_f \cos \nu_f \\ N_f \end{pmatrix}; \\ \mathbf{L}_s &= \begin{pmatrix} K_s \sin \nu_s \\ -K_s \cos \nu_s \\ N_s \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

where

$$\begin{aligned} K &= (M^2 - N^2)^{\frac{1}{2}} = M \sin \sigma, \\ K_f &= (M_f^2 - N_f^2)^{\frac{1}{2}} = M_f \sin \sigma_f, \\ K_s &= (M_s^2 - N_s^2)^{\frac{1}{2}} = M_s \sin \sigma_s. \end{aligned} \quad (2.18)$$

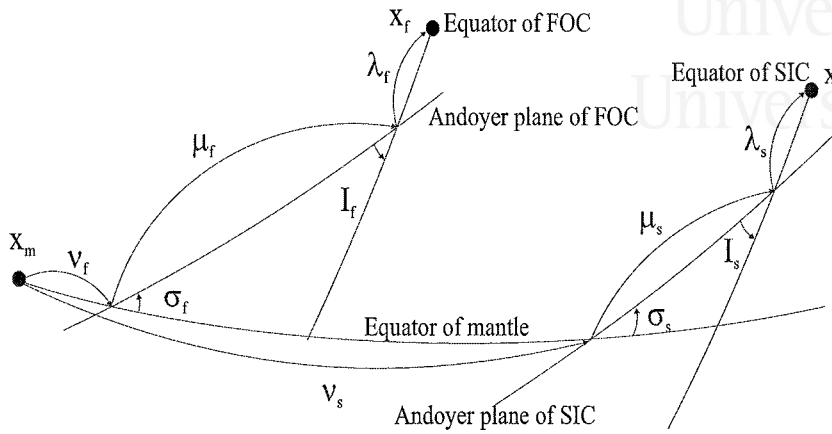


Figure 2.3: Andoyer variables II. The Andoyer variables for FOC and SIC relate a fixed frame of mantle,  $Ox_my_mz_m$ , the plane defined by the angular momentum of FOC or SIC, Andoyer plane of FOC and SIC, and a fixed frame of FOC or SIC,  $Ox_fy_fz_f$  or  $Ox_sy_sz_s$ .

In a similar way the expression of  $\mathbf{L}_s$  in the  $Ox_sy_sz_s$  frame will be

$$\mathbf{L}_s = \begin{pmatrix} M_s \sin I_s \sin \lambda_s \\ M_s \sin I_s \cos \lambda_s \\ \Lambda_s \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

On the other hand, the rotation which brings the  $Ox_my_mz_m$  frame into the  $Ox_sy_sz_s$  frame is given in terms of the canonical set by

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_3(\lambda_s) \mathbf{R}_1(I_s) \mathbf{R}_3(\mu_s) \mathbf{R}_1(\sigma_s) \mathbf{R}_3(\nu_s), \quad (2.20)$$

where  $\mathbf{R}_1$  and  $\mathbf{R}_3$  denote the usual rotation matrices about the first ( $x$ ) and third ( $z$ ) axes, respectively. Explicit expressions of matrices  $\mathbf{R}_1$  and  $\mathbf{R}_3$  can be found in Appendix A.

Finally, substituting (2.10), (2.17), (2.19), and (2.20) into (2.15), we obtain the expression of the kinetic energy in the set of canonical variables

## 124 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

as

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2A_m} \left( K^2 + \frac{A_m + A_f}{A_f} K_f^2 + K_s^2 \right) + \frac{1}{2C_m} \left( N^2 \right. \\
 & \left. + \frac{C_m + C_f}{C_f} N_f^2 + N_s^2 - 2NN_f - 2NN_s + 2N_fN_s \right) \\
 & + \frac{KK_f}{A_m} \cos(\nu + \nu_f) + \frac{KK_s}{A_m} \cos(\nu + \nu_s) \\
 & + \frac{K_fK_s}{A_m} \cos(\nu_f - \nu_s) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_s} - \frac{1}{A_s} \right) \Lambda_s^2 \\
 & + \frac{1}{2A_s} M_s^2 + T_{as}, \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

where  $T_{as}$  is the term arising from

$$T_{as} = -\frac{1}{2} \mathbf{L}_f^t (\mathbf{\Pi}_f^0)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{L}_f. \tag{2.22}$$

The term  $T_{as}$  is a cumbersome function of  $M_f$ ,  $N_f$ ,  $\nu_f$ ,  $M_s$ ,  $N_s$ ,  $\Lambda_s$ ,  $\mu_s$ , and  $\nu_s$ . It is responsible for the interaction between the FOC and the SIC. We must notice that if the SIC were spherical,  $T_{as}$  would vanish, and the FOC and the SIC would evolve without any interaction. Moreover, in the absence of the SIC we recover the expression of the kinetic energy corresponding to a two-layer Earth model (Getino 1995b). Complete expression of term  $T_{as}$  is given in Appendix A.

### 2.3.2 A Nonsingular Canonical Set of Variables

The equations of motion can be derived from (2.21), which expresses the Hamiltonian for the free motion in Andoyer variables. Nevertheless, as in the case of the two-layers model, the resolution of that system of equations is rather involved because of the presence of small divisors due to the smallness of the angles  $\sigma$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_s$ , and  $I_s$ . To avoid this problem, Getino (1995b) performed a first transformation to a new set of variables. With these new variables the small divisors disappear, then it is easy to linearize the equations and solve the system. However, these variables are not canonical. A suitable set of canonical variables can be obtained by straightforward generalization of the ones used by Ferrándiz (1979) for the two-rigid bodies problem or by Henrard and Moons (1978) for the Moon librations and is presented by Getino et al. (2000) for a nonrigid Earth. Besides their canonical character, these variables allow us to remove virtual singularities, that is small divisors,



### 2.3 Canonical Expression of the Kinetic Energy

125

as can be proved following similar arguments as given by Ferrándiz et al. (1993).

This set of nonsingular canonical variables for the three-layers model is composed of three groups of six variables:

$$\begin{aligned}
 Y_1, Y_2, \Lambda, y_1, y_2, \lambda &\rightarrow \text{for the total Earth,} \\
 Y_{1f}, Y_{2f}, Y_{3f}, y_{1f}, y_{2f}, y_{3f} &\rightarrow \text{for the FOC,} \\
 Y_{1s}, Y_{2s}, Y_{3s}, y_{1s}, y_{2s}, y_{3s} &\rightarrow \text{for the SIC,}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

related to the Andoyer ones by means of the following relationships

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= M, \quad Y_2 = \sqrt{2(M - N)} \cos \nu, \\
 y_1 &= \mu + \nu, \quad y_2 = -\sqrt{2(M - N)} \sin \nu,
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

for the total Earth ( $\Lambda$  and  $\lambda$  are not changed), and

$$\begin{aligned}
 Y_{1f,s} &= M_{f,s}, \\
 Y_{2f,s} &= \sqrt{2(M_{f,s} - N_{f,s})} \cos \nu_{f,s}, \\
 Y_{3f,s} &= \sqrt{2(M_{f,s} - \Lambda_{f,s})} \cos \lambda_{f,s}, \\
 y_{1f,s} &= \mu_{f,s} + \nu_{f,s} + \lambda_{f,s}, \\
 y_{2f,s} &= -\sqrt{2(M_{f,s} - N_{f,s})} \sin \nu_{f,s}, \\
 y_{3f,s} &= -\sqrt{2(M_{f,s} - \Lambda_{f,s})} \sin \lambda_{f,s},
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

for the FOC and the SIC.

The inverse relationships for the total Earth are

$$\begin{aligned}
 M &= Y_1, & \mu &= y_1 + \arctan \frac{y_2}{Y_2}, \\
 N &= Y_1 - \frac{Y_2^2 + y_2^2}{2}, & \nu &= -\arctan \frac{y_2}{Y_2},
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 N_f &= Y_{1f} - \frac{Y_{2f}^2 + y_{2f}^2}{2}, & \nu_f &= -\arctan \frac{y_{2f}}{Y_{2f}}, \\
 \Lambda_f &= Y_{1f} - \frac{Y_{3f}^2 + y_{3f}^2}{2}, & \lambda_f &= -\arctan \frac{y_{3f}}{Y_{3f}}, \\
 M_f &= Y_{1f}, \\
 \mu_f &= y_{1f} + \arctan \frac{y_{2f}}{Y_{2f}} + \arctan \frac{y_{3f}}{Y_{3f}},
 \end{aligned} \tag{2.27}$$



## 126 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

for the FOC, and similar for the variables of the SIC. Other interesting relationships can be deduced from (2.26) and (2.27). For instance,

$$\begin{aligned} K \sin \nu &= -\frac{y_2}{2} \sqrt{Y_1 - (Y_2^2 + y_2^2)}, \\ K \cos \nu &= \frac{Y_2}{2} \sqrt{Y_1 - (Y_2^2 + y_2^2)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

On the other hand taking into account that

$$\begin{aligned} \sqrt{2(M - N)} &= 2\sqrt{M} \sin \frac{\sigma}{2}, \\ \sqrt{2(M_f - N_f)} &= 2\sqrt{M_f} \sin \frac{\sigma_f}{2}, \\ \sqrt{2(M_s - N_s)} &= 2\sqrt{M_s} \sin \frac{\sigma_s}{2}, \\ \sqrt{2(M_s - \Lambda_s)} &= 2\sqrt{M_s} \sin \frac{I_s}{2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

it is clear that the magnitudes of  $Y_2$ ,  $y_2$ ,  $Y_{2f}$ ,  $y_{2f}$ ,  $Y_{2s}$ ,  $y_{2s}$ ,  $Y_{3s}$ , and  $y_{3s}$  can be considered as small quantities of the first order. This fact will make easier to solve the equations of motion in these nonsingular variables.

## 2.4 Solution in Nonsingular Variables

The Hamiltonian in the nonsingular canonical variables (2.23) is obtained by substituting relations (2.26) and (2.27) into the expression of the kinetic energy of the system, equation (2.21). The corresponding equations of motion are of the form

$$\dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad (2.30)$$

and can be linearized by neglecting second-order terms in the variables  $Y_2$ ,  $y_2$ ,  $Y_{2f}$ ,  $y_{2f}$ ,  $Y_{2s}$ ,  $y_{2s}$ ,  $Y_{3s}$ , and  $y_{3s}$ .



### 2.4.1 First Solutions

At first, let us consider the following linearized equations:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_1 &= 0, \quad \dot{y}_1 = \frac{Y_1 - Y_{1f} - Y_{1s}}{C_m}, \\
 \dot{Y}_{1f} &= 0, \quad \dot{y}_{1f} = \frac{C_f Y_{1s} + (C_m + C_f) Y_{1f} - C_f Y_1}{C_m C_f}, \\
 \dot{Y}_{1s} &= 0, \quad \dot{y}_{1s} = \frac{C_s Y_{1f} + (C_m + C_s) Y_{1s} - C_s Y_1}{C_m C_s}, \\
 \dot{Y}_{3f} &= 0, \quad \dot{y}_{3f} = 0, \quad \dot{\Lambda} = 0, \quad \dot{\lambda} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

From these it is clear that

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= Y_1^0, \quad Y_{1f} = Y_{1f}^0, \quad Y_{1s} = Y_{1s}^0, \quad Y_{3f} = Y_{3f}^0, \quad \Lambda = \Lambda^0, \\
 y_{3f} &= y_{3f}^0, \quad \lambda = \lambda_0,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

where the superscript 0 denotes initial conditions.

Let us focus our attention in determining the initial values  $Y_1^0$ ,  $Y_{1f}^0$ , and  $Y_{1s}^0$ . To state these values, we will proceed as follows. From expressions (2.11), (2.13), and (2.14) for the angular momenta we obtain

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{L}| &= C\omega_{m3}, \quad |\mathbf{L}_f| = C_f(\omega_{m3} + \delta\omega_{f3}), \\
 |\mathbf{L}_s| &= C_s(\omega_{m3} + \delta\omega_{s3}),
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

up to the first order in  $\omega_{m1}$ ,  $\omega_{m2}$ ,  $\delta\omega_f$ ,  $\delta\omega_s$  and  $\widehat{\mathbf{e}}_3^m \mathbf{e}_3^s$ . So, by means of relations (2.16), (2.24), (2.25), and considering (2.32), we state that  $\omega_{m3}$ ,  $\delta\omega_{f3}$  and  $\delta\omega_{s3}$  are constants. As given by the Poincaré (1910) original derivation for the two-layers Earth (see Moritz and Mueller 1987), we can take

$$\omega_{m3} = \Omega, \quad \delta\omega_{f3} = 0, \quad \delta\omega_{s3} = 0. \tag{2.34}$$

Therefore the explicit solutions for these variables are given by

$$Y_1 = C\Omega, \quad Y_{1f} = C_f\Omega, \quad Y_{1s} = C_s\Omega. \tag{2.35}$$

Considering these relations, from (2.31) it is straightforward to obtain

$$y_1 = \Omega t + y_1^0, \quad y_{1f} = y_{1f}^0, \quad y_{1s} = y_{1s}^0, \tag{2.36}$$

## 128 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

### 2.4.2 Solution for $Y$

The time evolution of the remaining variables is given by the equation

$$\dot{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{J}}(Y_1, Y_{1f}, Y_{1s}, y_{1s}) \mathbf{Y}, \quad (2.37)$$

where  $\mathbf{Y}$  is the column vector  $\mathbf{Y} = (Y_2, Y_{2f}, Y_{2s}, Y_{3s}, y_2, y_{2f}, y_{2s}, y_{3s})$  and  $\hat{\mathbf{J}}(Y_1, Y_{1f}, Y_{1s}, y_{1s})$  is an  $8 \times 8$  real matrix whose elements are functions of  $Y_1, Y_{1f}, Y_{1s}$ , and  $y_{1s}$ . As a result of (2.35) and (2.36), the differential system is transformed into another with constant coefficients, given by the elements of the matrix  $\hat{\mathbf{J}}(Y_1, Y_{1f}, Y_{1s}, y_{1s}) = \hat{\mathbf{J}}(C\Omega, C_f\Omega, C_s\Omega, y_{1s}^0)$ . Besides, it can be shown that the solution of  $\mathbf{Y}$  is independent of the particular value of  $y_{1s}^0$ , so we will take  $y_{1s}^0 = 0$  for the sake of simplicity.

A further reduction is achieved if we take into account the axial symmetry of the bodies. Namely, if the complex variables

$$\begin{aligned} U &= Y_2 + i y_2, & V &= Y_{2f} - i y_{2f}, \\ W &= Y_{2s} - i y_{2s}, & Z &= Y_{3s} + i y_{3s}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

are introduced, the system is reduced to

$$\dot{\mathbf{U}} = i\Omega \mathbf{J} \mathbf{U}, \quad (2.39)$$

that is to say,

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = i\Omega \mathbf{J} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ Z \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

with the matrix  $\mathbf{J}$  given by

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_2 & 0 \\ -j_2 & -j_3 & -j_4(j_5 + j_6) & j_4 j_5 \\ -j_2 & -j_4(j_5 + j_6) & j_5 - j_7 & j_5 \\ 0 & j_4 j_5 & -j_5 & j_8 - j_5 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

and where the coefficients  $j_i$  in this matrix are

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{C}{A_m} - 1, & j_2 &= \frac{\sqrt{CC_f}}{A_m}, & j_3 &= C_c \left( \frac{1}{A_m} + \frac{1}{A_f} \right), & j_4 &= \frac{\sqrt{C_f C_s}}{A_f}, \\ j_5 &= \frac{A_{as} - C_{as}}{C_s}, & j_6 &= \frac{C_f A_s}{C_s A_m}, & j_7 &= 1 + C_s, & j_8 &= \frac{C_s}{A_s} - 1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

In order to solve the system (2.40) we must find the analytical expression of the eigenvalues of the matrix  $\mathbf{J}$ . However, this task is not a trivial matter as it is described by Getino et al. (1998). To write down the expressions for the eigenvalues we will apply the mathematical algorithm developed by González et al. (1999) to the characteristic polynomial of  $\mathbf{J}$ . As usual, the expansions for the eigenvalues, will be made in terms of the ellipticities, which are defined by

$$\begin{aligned} e &\doteq \frac{C - A}{A}, & e_f &\doteq \frac{C_f - A_f}{A_f}, \\ e_s &\doteq \frac{C_s - A_s}{A_s}, & e_{as} &\doteq \frac{C_{as} - A_{as}}{A_{as}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Instead of considering  $e_{as}$  it is better to introduce the related parameter  $\delta \doteq -A_{as}/A_s e_{as}$ . The minus sign is due to the fact that, as it will be shown in section 6,  $e_{as}$  is a negative quantity, so in this way  $\delta$  is a positive parameter, as well as  $e$ ,  $e_f$ , and  $e_s$ . In addition, it will be useful to take into account that the quotient  $A_s/A_m$  is also small, about  $10^{-3}$  as it is deduced from the Earth models 1066A and preliminary reference Earth model (PREM) ( see Mathews et al. 1991b, Table I). Therefore we will obtain the eigenvalues up to the first order in  $e$ ,  $e_f$ ,  $e_s$ ,  $\delta$  and  $A_s/A_m$ .

By doing this we get the following expressions for the eigenvalues

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{A}{A_m} e, & m_2 &= -1 - \frac{A_f + A_m}{A_m} e_f, \\ m_3 &= -1 + \delta, & m_4 &= e_s - \delta. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Consequently, the time evolution of  $\mathbf{Y}$  is of oscillatory type being its characteristic frequencies  $\Omega m_1$ ,  $\Omega m_2$ ,  $\Omega m_3$ , and  $\Omega m_4$ . These frequencies are the same as those previously obtained by Getino and Ferrándiz (1996, 1998a) using a noncanonical transformation.

## 2.5 Polar Motion

Our next task will be to connect the time evolution of the system (2.40) with the more intuitive polar motion. Polar motion is defined as the motion of the angular velocities of the different layer with respect to the figure axis of the mantle. In this model, it is given by the components  $\omega_{m1}$ ,  $\omega_{m2}$  of the angular

### 130 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

velocity of the mantle, the components  $\delta\omega_{f1}$ ,  $\delta\omega_{f2}$  of the angular velocity of the FOC and the components  $\delta\omega_{s1}$ ,  $\delta\omega_{s2}$  of the angular velocity of the SIC. In addition, we will also consider the components  $k_1$ ,  $k_2$ , of the symmetry axis of the SIC. It is more convenient to describe the polar motion by using the complex variables

$$\begin{aligned} u &= \omega_{m1} + i\omega_{m2}, & v &= \delta\omega_{f1} + i\delta\omega_{f2}, \\ w &= \delta\omega_{s1} + i\delta\omega_{s2}, & z &= k_1 + ik_2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

These variables are basically the same as the variables  $\tilde{m}$ ,  $\tilde{m}_f$ ,  $\tilde{m}_s$ , and  $\tilde{n}_s$  employed by Mathews et al. (1991a).

To relate the variables  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $z$  to  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $Z$ , let us consider the expressions in the mantle frame of the angular momenta of the total Earth, the FOC, the SIC as well as the expression of symmetry axis of the SIC. By means of (2.11), (2.13), and (2.14) we arrive at

$$\begin{aligned} \omega_m &= \mathbf{\Pi}_m^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_s). \\ \delta\omega_f &= \mathbf{\Pi}_f^{-1}\mathbf{L}_f - \mathbf{\Pi}_m^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_s). \\ \delta\omega_s &= \mathbf{R}_s\mathbf{\Pi}_s^{-1}\mathbf{R}_s\mathbf{L}_s - \mathbf{\Pi}_m^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_s). \end{aligned} \quad (2.46)$$

So the  $xy$  components of these vectors can be immediately written in terms of the nonsingular variables by substituting relationships alike (2.28) in (2.17), and considering that  $\mathbf{k}$ , in the linear approximation, is given by

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_s^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Y_{3s} \sin y_{1s} + y_{3s} \cos y_{1s} - y_{2s}) / \sqrt{Y_{1s}} \\ (-Y_{3s} \cos y_{1s} + y_{3s} \sin y_{1s} - Y_{2s}) / \sqrt{Y_{1s}} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Finally, as a result of (2.35), substituting  $\omega_{m3} = \Omega$ ,  $Y_1 = C\Omega$ ,  $Y_{1f} = C_f\Omega$ ,  $Y_{1s} = C_s\Omega$ , and  $y_{1s} = 0$ , the relationship between the polar motion and the non-singular variables turns to be

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = i\sqrt{\Omega}\mathbf{K} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ Z \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$



with the elements  $K_{ij}$  of the matrix  $\mathbf{K}$  given by

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\sqrt{C}}{A_m}, K_{12} = \frac{\sqrt{C_f}}{A_m}, K_{13} = \frac{\sqrt{C_s}}{A_m}, K_{14} = 0, \\
K_{21} &= -\frac{\sqrt{C}}{A_m}, K_{22} = -\frac{(A_m + A_f)\sqrt{C_f}}{A_m A_c}, \\
K_{23} &= \left( \frac{C_{as} - A_{as}}{C_s A_f} - \frac{1}{A_m} \right) \sqrt{C_s}, \\
K_{24} &= \frac{(C_{as} - A_{as})\sqrt{C_s}}{C_s A_s}, K_{31} = -\frac{\sqrt{C}}{A_m}, K_{32} = -\frac{\sqrt{C_f}}{A_m}, \\
K_{33} &= -\frac{(C_s + A_m)\sqrt{C_s}}{C_s A_m}, K_{34} = \frac{(C_s - A_s)\sqrt{C_s}}{C_s A_s}, \\
K_{41} &= 0, K_{42} = 0, K_{43} = -\frac{\sqrt{C_s}}{C_s}, K_{44} = -\frac{\sqrt{C_s}}{C_s}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Therefore the time evolution of the polar motion is described as

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = i\Omega(\mathbf{K}\mathbf{J}\mathbf{K}^{-1}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

Thereby the polar motion has the same eigenvalues as  $\mathbf{J}$ , that is to say,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , and  $m_4$ . These ones are given by (2.44) and can be identified as the well-known Chandler wobble (CW), retrograde free core nutation (RFCN), prograde free core nutation (PFCN), and inner core wobble (ICW) nutational normal modes, respectively. Namely, the frequencies in cycle per sidereal day (cpsd) are

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{A}{A_m} e && \rightarrow \text{CW}, \\
m_2 &= -1 - \frac{A_f + A_m}{A_m} e_f && \rightarrow \text{RFCN}, \\
m_3 &= -1 + \delta && \rightarrow \text{PFCN}, \\
m_4 &= e_s - \delta && \rightarrow \text{ICW}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

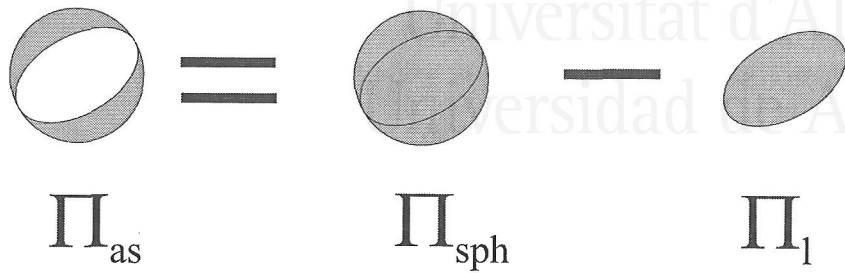


Figure 2.4: Moments of inertia of the auxiliary shell. The auxiliary shell can be visualized as the union of a sphere filled with a fluid of density  $\rho_{fb}$  minus a ellipsoid geometrically identical to the SIC but composed of a fluid of density  $\rho_{fb}$ .

## 2.6 Discussion

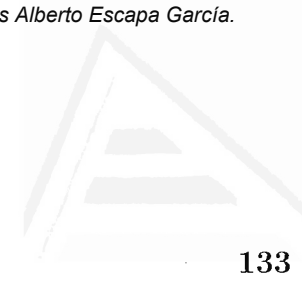
### 2.6.1 Comparison With Numerical Solutions

First of all, we think it should be interesting to solve numerically the characteristic polynomial of the matrix  $\mathbf{J}$  (2.40), which characterizes the system of equations corresponding to the free motion, in order to compare these solutions with the analytically ones given by (2.44). To do this we must assume numerical values for the parameters appearing in matrix  $\mathbf{J}$ . Taking into account (2.42) and (2.43), the required parameters are the moments of inertia  $A$ ,  $A_m$ ,  $A_f$ , and  $A_s$ , and the ellipticities  $e$ ,  $e_f$ ,  $e_s$ , and  $e_{as}$  (or better  $\delta = -e_{as} A_{as} / A_s$ ). From Mathews et al. (1991b, Table I, 1066A model) we have  $A = 8.0177 \times 10^{37}$  kg m<sup>2</sup>,  $A_m = 7.1006 \times 10^{37}$  kg m<sup>2</sup>,  $A_f = 9.1100 \times 10^{36}$  kg m<sup>2</sup>,  $A_s = 6.1589 \times 10^{34}$  kg m<sup>2</sup>,  $e = 3.250 \times 10^{-3}$ ,  $e_f = 2.547 \times 10^{-3}$ , and  $e_s = 2.405 \times 10^{-3}$ .

To compute the remainder parameter  $\delta$  we have to relate the moments of inertia of the auxiliary shell with some known geophysical parameters. With this aim we must notice that the auxiliary shell can be decomposed as the difference between two bodies (see Figure 2.4), the first one being a sphere in which the ellipsoidal cavity has been filled with a fluid of uniform density  $\rho_{fb}$ , equal to the density of the FOC just in the border with the SIC. The second body is a similar ellipsoid to that of the SIC composed by the fluid of constant density  $\rho_{fb}$ . From these considerations we have

$$A_{as} = A_{sph} - A_l, \quad C_{as} = A_{sph} - C_l, \quad (2.52)$$

where the subscript  $l$  denotes the properties relative to the ellipsoid of density  $\rho_{fb}$ . Note that these  $A_l$ ,  $C_l$  correspond to the  $A'$ ,  $C'$  given by Mathews et



al. (1991a) who provide the value  $A' = 5.7165 \times 10^{34} \text{ kg m}^2$  (Mathews et al. 1991b). In addition, assuming as usual a stratified density distribution for the SIC, we would have, up to the first order in the ellipticities,

$$e_s = \frac{C_s - A_s}{A_s} = \frac{C_l - A_l}{A_l} = e_l. \quad (2.53)$$

Hence from (2.52) and (2.53) we obtain

$$e_{as} = -\frac{C_l - A_l}{A_{as}} = -\frac{A_l}{A_{as}} e_s, \quad (2.54)$$

which, due to the fact that moments of inertia are positive magnitudes, states that  $e_{as}$  is negative. From (2.54) we also have

$$\delta = -\frac{A_{as}}{A_s} e_{as} = \frac{A_l}{A_s} e_s > 0. \quad (2.55)$$

Thus we can deduce the value  $\delta = 2.232 \times 10^{-3}$ , close to that given by Getino and Ferrándiz (1998a).

Once the values for the different parameters are known, we can perform a numerical integration of the system given by matrix **J**. The comparison with the corresponding analytical solutions is given in Table 2.1.

Table 2.1: Numerical Versus Analytical Modes

| Modes | Numerical |         | Analytical |         | Error                |        |
|-------|-----------|---------|------------|---------|----------------------|--------|
|       | Frequency | Period  | Frequency  | Period  | Frequency            | Period |
| CW    | 0.003670  | 271.85  | 0.003670   | 271.75  | $-1.4 \cdot 10^{-6}$ | -0.10  |
| RFCN  | -0.002882 | -346.03 | -0.002874  | -347.02 | $-8.3 \cdot 10^{-6}$ | 0.99   |
| PFCN  | 0.002239  | 445.38  | 0.002232   | 446.81  | $7.14 \cdot 10^{-6}$ | -1.42  |
| ICW   | 0.000173  | 5751.70 | 0.000173   | 5764.56 | $3.9 \cdot 10^{-6}$  | -12.86 |

In Table 2.1 the frequencies are given in cpsd and the periods are computed in solar days (1 sidereal day = 365.24/366.24 solar day). The values provided are relative to a space-fixed frame for RFCN and PFCN and relative to a frame rotating with the mantle for CW and ICW. The error columns show that the differences between the numerical and the analytical solutions are of the order of the square of the ellipticities, thereby the analytical frequencies given by (2.44) are very good first approximations for the roots of the characteristic polynomial.



### 2.6.2 Estimation of the Effect of the SIC

From a quantitative point of view the inclusion of the SIC in the dynamical behavior of the free Earth rotation has not appreciable effects in the well-known Chandler Wobble and Retrograde Fluid Core Nutation modes. These free frequencies are, in our first approximation, the same as those obtained for a two-layered Earth model (see, e.g., Getino 1995b). However, the main difference lies in the fact that two new modes appear due to the presence of the SIC, the prograde fluid core nutation (PFCN), with a frequency  $m_3 = -1 - e_{as} A_{as}/A_s$ , and the inner core wobble (ICW), with a frequency  $m_4 = e_s(1 - A_l/A_s)$ , both of them in cpsd.

As for the ICW, it leads to a period of about 5780 solar days, whereas the estimated one by Mathews et al. (1991b) is about of 1815 solar days. The PFCN mode has an associated period of about  $(1 + m_3)^{-1} \sim 448$  solar days, while Mathews et al. (1991b) provides a value of 512.2 solar days. These differences could be caused by effects modeled by Mathews et al. (1991a) (e.g., elasticity, gravitational coupling, etc.) which, at this stage, our model does not take into account. It is also interesting to note that, if the densities of the FOC and the SIC are assumed to be constant, the corresponding frequency is  $e_s(1 - \rho_l/\rho_s)$ , which is the classical result obtained by Busse (1970) and Kakuta et al. (1975).

Next, let us compare the RFCN and the PFCN modes. With this aim, if we rewrite  $m_3$  in terms of  $e_{as}$  by means of (2.55), the frequencies  $m_2$  and  $m_3$  were given by

$$m_2 = -1 - \frac{A_f + A_m}{A_m} e_f, \quad m_3 = -1 - \frac{A_{as}}{A_s} e_{as}. \quad (2.56)$$

These equations show that the PFCN mode is of the same nature as the RFCN mode since both of them lie in the diurnal band. But there is an important difference between these modes and this is that although the RFCN mode is retrograde the PFCN one is prograde. This fact can be explained by realizing that the PFCN is associated with the motion of the auxiliary shell which, as it has been seen in (2.54), has a negative value of the ellipticity  $e_{as}$ , whereas the ellipticity of the FOC,  $e_f$ , is positive, as already remarked by Getino and Ferrándiz (1996, 1998a). Therefore they give rise to opposite rotations of the angular velocity around the figure axis in the inertial frame. In the authors understanding this is the simplest dynamical explanation for the prograde free nutations.

### 2.6.3 Comparisons with Mathews et al. (1991a) Approach

First of all, let us point out that to compute the eigenvalues of the matrix  $\mathbf{J}$  we have considered as small parameters  $e$ ,  $e_f$ ,  $e_s$ ,  $\delta$ , and  $A_s/A_m$ . If we do not consider  $A_s/A_m$  as a small parameter, we obtain two different quadratic equations. The first one is associated with the wobble modes (CW and ICW), and it is given by

$$x^2 + x \left( \frac{A}{A_m} e - \frac{A_m - A_s}{A_m} e_s + \frac{A_m - A_s}{A_m} \delta \right) + \frac{A}{A_m} (e_s - \delta) - \frac{A_s}{A_m} (e_s - \delta)^2 = 0, \quad (2.57)$$

from which

$$m_1 = \frac{A}{A_m} e + \frac{A_s}{A_m} (\delta - e_s), \quad m_4 = e_s - \delta. \quad (2.58)$$

The second equation is associated with the fluid core nutation modes (RFCN and PFCN), and it is

$$x^2 + x \left( \left(1 + \frac{A_f}{A_m}\right) e_f - \left(1 - \frac{A_s}{A_m}\right) \delta \right) - \frac{A}{A_m} \delta \left( e_f + \frac{A_s}{A_f} \delta \right) = 0. \quad (2.59)$$

Unfortunately, in this case it is impossible to express  $m_2$ ,  $m_3$  as a power expansion in  $e$ ,  $e_f$ ,  $e_s$ , and  $\delta$  due to the presence of a square root. Anyway, as we have mentioned in the above paragraph, the arising differences are slight as a result of the small magnitude of  $A_s/A_m \sim 10^{-3}$ . This fact can be checked in Table 2.2, in which the Analytical (a) column represents the numerical values of the first solutions (2.51), whereas the Analytical (b) column represents the solutions deduced from (2.58) and (2.59). The same remarks as in Table 2.1 must be understood for the frequencies, periods, and modes.

Next, let us perform a comparison with the theory developed by Mathews et al. (1991a), which also provides analytical expressions for the free frequencies. Due to the fact that our theory considers neither the effects

## 136 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

Table 2.2: Analytical (a) Versus Analytical (b) Modes

| Modes | Analytical (a) |         | Analytical (b) |         | Relative Difference  |        |
|-------|----------------|---------|----------------|---------|----------------------|--------|
|       | Frequency      | Period  | Frequency      | Period  | Frequency            | Period |
| CW    | 0.003670       | 271.75  | 0.003670       | 271.76  | $1.5 \cdot 10^{-6}$  | -0.01  |
| RFCN  | -0.002874      | -347.02 | -0.002883      | -345.88 | $9.5 \cdot 10^{-6}$  | -1.14  |
| PFCN  | 0.002232       | 446.81  | 0.002240       | 445.30  | $-7.6 \cdot 10^{-6}$ | 1.51   |
| ICW   | 0.000173       | 5764.56 | 0.000173       | 5764.56 | 0                    | 0      |

of the elasticity nor the gravitational coupling exerted on the SIC, the results provided by Mathews are reduced to this situation. Hence we take the following values for the parameters given by Mathews et al. (1991a):

$$\begin{aligned}
 \kappa^M &= \xi^M = \zeta^M = \gamma^M = \beta^M = 0, \\
 \delta^M &= \theta^M = \chi^M = \nu^M = 0, \\
 \alpha_9^M &= 0, \\
 \alpha_1^M &= \alpha_2^M = \delta/e_s, \\
 \alpha_3^M &= 1 - \delta/e_s.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

In order to avoid confusion, we have noted with the superscript  $M$  the solutions deduced from Mathews. With these simplifications we obtain

$$\begin{aligned}
 m_1^M &= \frac{A}{A_m} e, & m_2^M &= -1 - \left(1 + \frac{A_{fm}}{A_m}\right) e_f, \\
 m_4^M &= e_s - \delta, & m_3^M &= -1 + \left(1 + \frac{A_s}{A_m}\right) \delta.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

These solutions are the same as ours given by (2.51) except for  $m_3^M$ , and we have that  $m_3^M - m_3 = \delta A_s / A_m \sim 10^{-6}$ . Therefore the difference is of second order and then negligible, and the results coincide up to the first order.

Finally, with respect to the main hypothesis of both theories, let us point out that they are basically the same, although the formalisms are different: Mathews et al. (1991a) use a classical approach, solving the angular momentum equations for the system. Therefore they have to compute explicitly all the torques acting on each layer, in particular the pressure torque, what, as it can be seen, is not a trivial matter. In our theory, by means of a Hamiltonian formalism, we only need to compute the kinetic energy in a canonical set, without requiring the expression of the internal torques, which arises in a natural manner. That is the advantage expected from a variational method, as pointed out by Moritz (1982).

## Acknowledgments

We are deeply grateful to the Associate Editor, B. Chao, and the referees, B. Bills and V. Dehant, for their valuable suggestions. A. Escapa has been fully supported by a F.P.I. grant of the *Junta de Castilla y León*. This work has been partially supported by Spanish Projects VA11/99 of the *Junta de Castilla y León*, and CICYT, Project ESP97-1816-C04-02, and Spanish Projects I+D+I, Project AYA2000-1787.

This paper is a part of the Ph.D. thesis written by A. Escapa under the supervision of J. Getino at the University of Valladolid (Spain).

## Appendix A

In Appendix A we include the adopted definition for the matrices  $\mathbf{R}_1$  and  $\mathbf{R}_3$  as well as the explicit expression of  $T_{as}$ . A positive (counterclockwise) rotation about the first ( $x$ ) axis or the third ( $z$ ) axis through an angle  $\vartheta$  are given respectively by

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Once we have adopted the formula for the rotation matrices we can immediately compute the form of  $\mathbf{R}_s$  through its definition, equation (2.20), and therefore we can calculate  $\Pi'_{as}$ , equation (2.5). Finally,  $T_{as}$  is determined by (2.22). Due to the fact that we are only considering a first-order theory in the ellipticities, it is very expedient to introduce these quantities in the definition of  $T_{as}$  through the identities  $C_f = A_f(1 + e_f)$  and  $C_{as} = A_{as} - \delta A_s$  derived from (2.43) and (2.55). In this way it is only necessary to retain the first-order terms in  $e_f$  and  $\delta$  in the expression of  $T_{as}$ . Bearing these considerations in mind, and after a little algebra, we obtain

### 138 Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

$$\begin{aligned}
T_{as} = & \frac{\delta A_s}{A_f^2} \left[ \frac{1}{4} M_f^2 \sin \sigma_f^2 \sin \sigma_s \cos I_s \sin I_s (1 + \cos \sigma_s) \cos(\mu_s - 2\nu_f + 2\nu_s) + \right. \\
& + \frac{1}{4} M_f^2 \sin \sigma_f^2 \sin \sigma_s \cos I_s \sin I_s (\cos \sigma_s - 1) \cos(\mu_s + 2\nu_f - 2\nu_s) - \\
& - \frac{1}{4} M_f N_f \sin I_s^2 \sin \sigma_s \sin \sigma_f (1 + \cos \sigma_s) \cos(2\mu_s - \nu_f + \nu_s) - \\
& - \frac{1}{4} M_f N_f \sin I_s^2 \sin \sigma_s \sin \sigma_f (\cos \sigma_s - 1) \cos(2\mu_s + \nu_f - \nu_s) - \\
& - \frac{1}{2} M_f N_f \sin I_s \cos I_s \sin \sigma_f (\cos \sigma_s - 1 + 2 \sin \sigma_s^2) \cos(\mu_s + \nu_f - \nu_s) + \\
& + \frac{1}{2} M_f N_f \sin I_s \cos I_s \sin \sigma_f (\cos \sigma_s + 1 - 2 \sin \sigma_s^2) \cos(\mu_s - \nu_f + \nu_s) - \\
& - \frac{1}{2} M_f N_f \sin \sigma_s \cos \sigma_s \sin \sigma_f (-2 + 3 \sin I_s^2) \cos(\nu_s - \nu_f) - \\
& - \frac{1}{8} M_f^2 \sin \sigma_f^2 \sin \sigma_s^2 (-2 + 3 \sin I_s^2) \cos(2\nu_s - 2\nu_f) - \\
& - \frac{1}{16} M_f^2 \sin \sigma_f^2 \sin I_s^2 (2 \cos \sigma_s - 2 + \sin \sigma_s^2) \cos(2\mu_s + 2\nu_f - 2\nu_s) + \\
& + \frac{1}{16} M_f^2 \sin \sigma_f^2 \sin I_s^2 (2 \cos \sigma_s + 2 - \sin \sigma_s^2) \cos(2\mu_s - 2\nu_f + 2\nu_s) - \\
& - \frac{1}{8} \sin \sigma_s^2 \sin I_s^2 (M_f^2 \sin \sigma_f^2 - 2 N_f^2) \cos(2\mu_s) + \\
& + \frac{1}{2} \sin I_s \cos I_s \sin \sigma_s \cos \sigma_s (M_f^2 \sin \sigma_f^2 - 2 N_f^2) \cos \mu_s - \\
& \left. - \frac{1}{8} (M_f^2 \sin \sigma_f^2 - 2 N_f^2) (-2 \sin I_s^2 + 3 \sin I_s^2 \sin \sigma_s^2 - 2 \sin \sigma_s^2) \right].
\end{aligned}$$



## Capítulo 3

# The rotation of a non-rigid, non-symmetrical Earth II: Free nutations and dissipative effects<sup>1</sup>

The study of the rotation of a non-rigid, non-symmetrical Earth with a heterogeneous and stratified liquid core was recently accomplished by González and Getino (1997) through the Hamiltonian formalism. In this work that model is extended by including the effect of the dissipation arising from the mantle-core interaction due to the viscous and electromagnetic coupling. A canonical transformation to a new set of non-singular variables is performed, in order to avoid small divisors in the system of equations. Numerical estimations of the effect of the dissipation are given in form of tables and graphics, and the significance of this effect is discussed.

### 3.1 Introduction

The Hamiltonian theory of Kinoshita (1977) of the rigid Earth is being extended by Getino (1995a, 1995b) and Getino and Ferrándiz (1995, 1997) for non-rigid Earth models, considering the elasticity of the mantle, the presence of fluid and solid core, and dissipation in the boundaries, following the same guidelines as Kinoshita, with a canonical formulation by means of adequate sets of Andoyer-like variables for the different layers. These works,

---

<sup>1</sup>Getino, J., A. B. González y A. Escapa, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 76, 1-21, 2000.

as well as most of theories of rigid and non-rigid Earth consider a simplified symmetrical model, with  $A = B$  (principal moments of inertia).

Nevertheless, the accuracy of the present observational data reached by modern techniques such as VLBI (Very Long Baseline Interferometry) and LLR (Lunar Laser Ranging) requires to elaborate more precise rotation theories considering more realistic Earth models, adding effects which were disregarded in the past. For instance, we can refer to the work by Kinoshita and Souchay (1990), which consider the triaxiality of the Earth among other effects.

For this reason, González and Getino have recently begun the study of the triaxiality of the Earth by extending the previous models of Getino and Getino and Ferrándiz to the case  $A \neq B$ . Always under the Hamiltonian formalism, the first paper (González and Getino 1997) was devoted to the formulation of the free motion of a non-symmetrical Earth composed of a rigid mantle and a liquid core, obtaining the corresponding free frequencies, CW (Chandler Wobble) and FCN (Free Core Nutation).

In this work the previous model is extended by considering the dissipative effects in the CMB due to viscous and electromagnetic coupling. The effect of the dissipation is canonically formulated by means of the corresponding generalized forces, using the canonical Andoyer variables. But these variables present a serious problem, due to the presence of small divisors in the generalized forces as well as in the equations of motion themselves, which make the resolution of the problem very complicated.

## 3.2 Hamiltonian for Free Motion in Andoyer variables

This section is just a brief review of the canonical formulation developed in González and Getino (1997), and it has been included here to make the paper easier to the readers.

### 3.2.1 Preliminary assumptions

Let us consider an Earth model composed of a triaxial rigid mantle and a stratified liquid core. Let  $OXYZ$  be a non-rotating inertial frame,  $Oxyz$  the frame of the principal axes of the mantle rotating with an angular velocity  $\omega$  with respect to the initial frame, and  $Ox_c y_c z_c$  a core-fixed frame rotating with angular velocity  $\delta\omega$  with respect to the mantle. Considering the Earth as a non-symmetrical ellipsoid, the tensors of inertia of the total Earth,  $\mathbf{\Pi}$ ,

the mantle,  $\mathbf{\Pi}_m$ , and the core  $\mathbf{\Pi}_c$  in the  $Oxyz$  frame are respectively:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \mathbf{\Pi}_m = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & B_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix}, \mathbf{\Pi}_c = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

where  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_m + \mathbf{\Pi}_c$ , and the angular momentum vectors of the total Earth, mantle and core,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}_m$  and  $\mathbf{L}_c$  satisfy:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_m + \mathbf{L}_c = \mathbf{\Pi}_m \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Pi}_c \boldsymbol{\omega}_c = \mathbf{\Pi}_m \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Pi}_c (\boldsymbol{\omega} + \delta \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Pi}_c \delta \boldsymbol{\omega} \quad (3.2)$$

According to this, the components of the total angular momentum and the angular momentum of the core in the  $Oxyz$  frame are

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A \omega_1 + A_c \delta \omega_1 \\ B \omega_2 + B_c \delta \omega_2 \\ C \omega_3 + C_c \delta \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} A_c \omega_1 + A_c \delta \omega_1 \\ B_c \omega_2 + B_c \delta \omega_2 \\ C_c \omega_3 + C_c \delta \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Thus, the kinetic energy can be written as

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \mathbf{L}_m^t \mathbf{\Pi}_m^{-1} \mathbf{L}_m + \frac{1}{2} \mathbf{L}_c^t \mathbf{\Pi}_c^{-1} \mathbf{L}_c \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_c)^t \mathbf{\Pi}_m^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_c) + \frac{1}{2} \mathbf{L}_c^t \mathbf{\Pi}_c^{-1} \mathbf{L}_c. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Formulation in Andoyer variables

To formulate canonically the kinetic energy, let us consider the set of Andoyer-like variables described in Getino (1995a, 1995b)

$$\begin{aligned} \lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N &\rightarrow \text{for the total Earth,} \\ \lambda_c, \mu_c, \nu_c, \Lambda_c, M_c, N_c &\rightarrow \text{for the core,} \end{aligned}$$

and the auxiliary angles  $\sigma, I, \sigma_c, I_c$  (see Figure 3.1). According to this figure, we can write the components of  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{L}_c$  in the  $Oxyz$  frame in terms of the canonical variables as follows:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} K \sin \nu \\ K \cos \nu \\ N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} K_c \sin \nu_c \\ -K_c \cos \nu_c \\ N_c \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

with

$$K = (M^2 - N^2)^{1/2} = M \sin \sigma, \quad K_c = (M_c^2 - N_c^2)^{1/2} = M_c \sin \sigma_c. \quad (3.6)$$



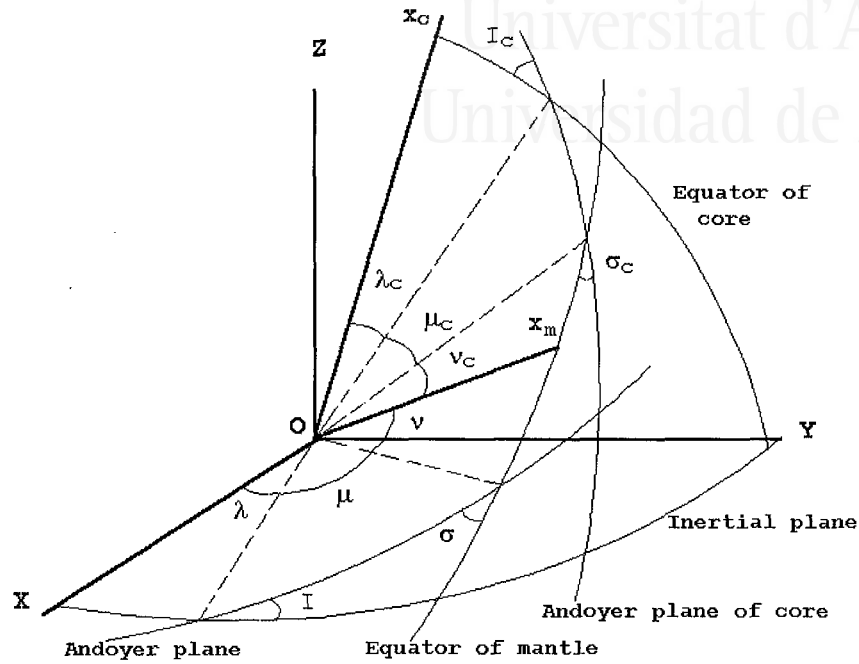


Figure 3.1: Andoyer variables

Then, by means of Equations (3.4) and (3.5) the canonical expression of the kinetic energy is written as

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{K^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \nu}{A_m} + \frac{\cos^2 \nu}{B_m} \right) + \frac{K_c^2}{2} \left( \frac{A}{A_m A_c} \sin^2 \nu + \frac{B}{B_m B_c} \cos^2 \nu \right) \\
 & + \frac{1}{2C_m} \left( N^2 - 2NN_c + \frac{C}{C_c} N_c^2 \right) + KK_c \left( \frac{\cos \nu \cos \nu_c}{B_m} - \frac{\sin \nu \sin \nu_c}{A_m} \right), \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

It is important to point out that the order of magnitude of the angles  $\sigma$ ,  $\sigma_c$  is  $\sim 10^{-6}$ , then  $K$  and  $K_c$  are small quantities. This fact complicates the resolution of the problem due to the presence of small divisors in the equations of motion. See for instance the equation for the variable  $\nu$

$$\begin{aligned}
 \dot{\nu} = \frac{\partial T}{\partial N} = & -N \left( \frac{\sin^2 \nu}{A_m} + \frac{\cos^2 \nu}{B_m} \right) + \frac{N - N_c}{C_m} \\
 & - \frac{N K_c}{K} \left( \frac{\cos \nu \cos \nu_c}{B_m} - \frac{\sin \nu \sin \nu_c}{A_m} \right).
 \end{aligned}$$

### 3.3 Canonical Formulation of Dissipative Forces

#### 3.3.1 Dissipative coupling torque

We introduce the effect of dissipative forces in the CMB (core–mantle boundary), including electromagnetic coupling and effects of the viscosity, following the same assumptions as in Sasao et al.(1980), but taking into account that the Earth is considered here as a triaxial ellipsoid. Thus, as a general expression we can write

$$\mathbf{t}_c = -\mathbf{t}_m = \begin{pmatrix} -R_1\delta\omega_1 + R'_1\delta\omega_2 \\ -R_2\delta\omega_2 - R'_2\delta\omega_1 \\ -R_3^*\delta\omega_3 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

where  $R_1$  and  $R_2$  are the coefficients of the viscous torque in the  $x$  and  $y$  axes,  $R'_1$  and  $R'_2$  correspond to the electromagnetic torque, and  $R_3^*$  is the sum of the coefficients in the  $z$  axis of both effects. Although in the present stage of our knowledge on the physical properties inside the Earth we cannot distinguish between  $x$  and  $y$  components, we have preferred to include both components, in order to guarantee the correctness and the coherence of the theoretical developments, in spite of some additional complication in the formulae. In this way, we will be able to evaluate the contribution of the differences  $R_1 - R_2$ ,  $R'_1 - R'_2$ , as explained in the last section of this work.

#### 3.3.2 Generalized Forces

The dissipative torque is formulated by means of the generalized forces as in Getino and Ferrándiz (1997). The generalized force corresponding to a rotation coordinate is the component of the applied torque about the axis of rotation (Goldstein 1980). Let  $d\Phi$  be the total infinitesimal rotation of the mantle and core with respect to the inertial system, that is

$$d\Phi = d\Phi_m + d\Phi_c, \quad (3.9)$$

where  $d\Phi_m$  and  $d\Phi_c$  are respectively the infinitesimal rotations of the mantle and core, which, according to Figure 3.1 have the expressions

$$\begin{aligned} d\Phi_m &= \mathbf{E}_3 d\lambda + \mathbf{m} d\mu + \mathbf{e}_3 d\nu + \mathbf{n} dI + \mathbf{p} d\sigma, \\ d\Phi_c &= d\Phi_m + \mathbf{e}_3 d\nu_c + \mathbf{n}_c d\sigma_c + \mathbf{m}_c d\mu_c + \mathbf{p}_c dI_c + \mathbf{e}_3^c d\lambda_c, \end{aligned} \quad (3.10)$$

where  $\mathbf{E}_3$ ,  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ , and  $\mathbf{p}$  are respectively the unitary vectors along the  $OZ$ ,  $Oz$ ,  $OM$ ,  $ON$  and  $OP$  axes (see Figure 3.2), while  $\mathbf{n}_c$ ,  $\mathbf{m}_c$ ,  $\mathbf{p}_c$  and  $\mathbf{e}_3^c$  are respectively the unitary vectors along the  $ON_c$ ,  $OM_c$ ,  $OP_c$  and  $Oz_c$

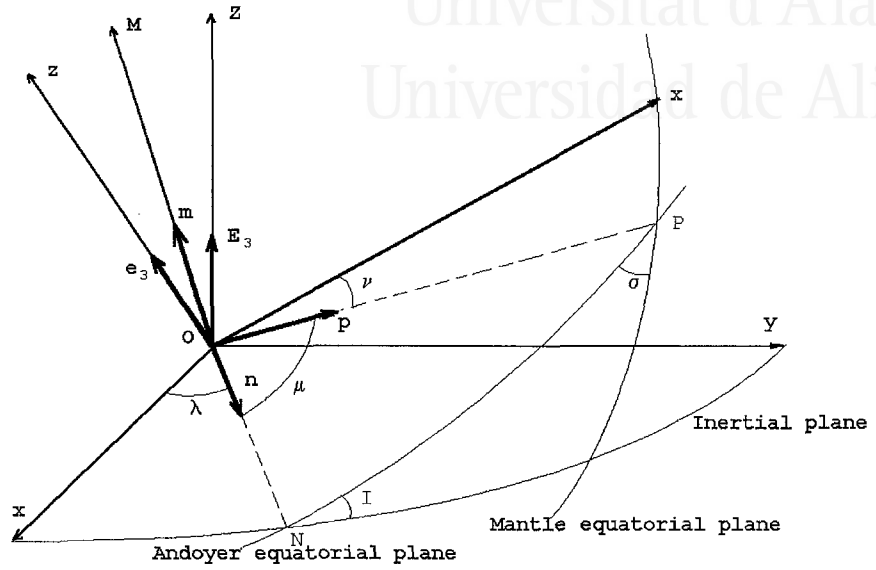


Figure 3.2: Unitary vectors of the mantle

axes (see Figure 3.3),  $L$  and  $L_c$  being the total angular momentum and the angular momentum of the core.

We need to perform the dot product  $\mathbf{t} \cdot d\Phi$ , where  $\mathbf{t}$  is the acting torque. Upon the mantle the dissipative torque is  $\mathbf{t}_m$  and upon the core is  $\mathbf{t}_c$ , and taking into account that according to (3.8)  $\mathbf{t}_m = -\mathbf{t}_c$  we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot d\Phi &= (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_3^c) d\lambda_c + (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{m}_c) d\mu_c + (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_3) d\nu_c + (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}_c) d\sigma_c \\ &+ (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{p}_c) dI_c. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Taking into account the relationships of the auxiliary angles  $\sigma_c$  and  $I_c$  with the canonical momenta (Getino and Ferrándiz 1997)

$$\left. \begin{aligned} \cos \sigma_c &= \frac{N_c}{M_c} \\ \cos I_c &= \frac{\Lambda_c}{M_c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} d\sigma_c &= -\frac{dN_c}{K_c} + \cos \sigma_c \frac{dM_c}{K_c} \\ dI_c &= -\frac{d\Lambda_c}{M_c \sin I_c} + \cos I_c \frac{dM_c}{M_c \sin I_c} \end{aligned} \right., \quad (3.12)$$

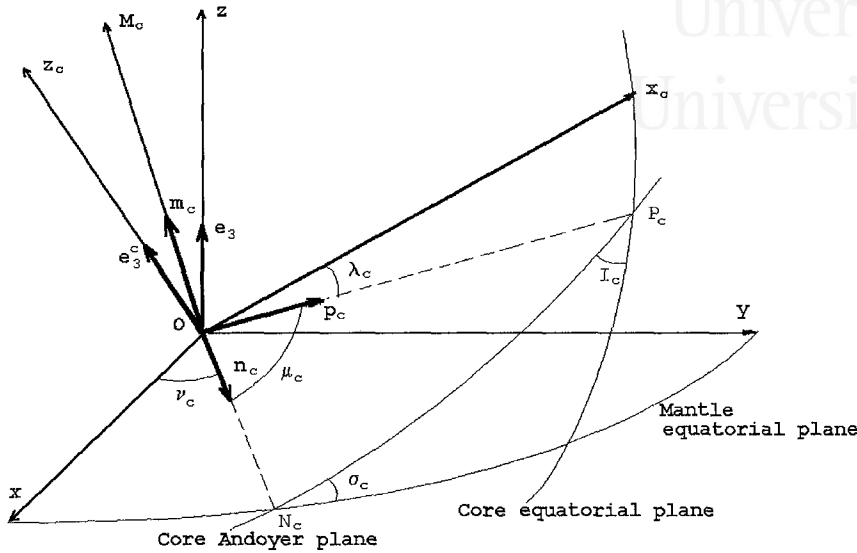


Figure 3.3: Unitary vectors for the core

we get the expression

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot d\Phi = & (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_3^c) d\lambda_c + (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{m}_c) d\mu_c + (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_3) d\nu_c - \frac{(\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{p}_c)}{M_c \sin I_c} d\Lambda_c + \\ & + \left( \frac{\cos I_c}{M_c \sin I_c} (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{p}_c) + \frac{\cos \sigma_c}{K_c} (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}_c) \right) dM_c - \frac{(\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}_c)}{K_c} dN_c, \end{aligned} \quad (3.13)$$

and then, the generalized forces will be

$$\begin{aligned} Q_{\lambda_c} &= \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_3^c, & Q_{\Lambda_c} &= -\frac{(\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{p}_c)}{M_c \sin I_c}, \\ Q_{\nu_c} &= \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_3, & Q_{N_c} &= -\frac{(\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}_c)}{K_c}, \\ Q_{\mu_c} &= \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{m}_c, & Q_{M_c} &= \frac{\cos I_c}{M_c \sin I_c} (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{p}_c) + \frac{\cos \sigma_c}{K_c} (\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{n}_c). \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.3.3 Canonical Formulation

Finally we need to express the dissipative torque  $\mathbf{t}_c$  and the unitary vectors in the  $Oxyz$  reference system by means of the set of Andoyer canonical

variables. First of all, from (3.3), (3.5) and (3.8) the dissipative torque has the expression

$$\mathbf{t}_c = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{A_m} \left( K \sin \nu - \frac{A}{A_c} K_c \sin \nu_c \right) - \frac{R'_1}{B_m} \left( K \cos \nu + \frac{B}{B_c} K_c \cos \nu_c \right) \\ \frac{R_2}{B_m} \left( K \cos \nu + \frac{B}{B_c} K_c \cos \nu_c \right) + \frac{R'_2}{A_m} \left( K \sin \nu - \frac{A}{A_c} K_c \sin \nu_c \right) \\ \frac{R_3^*}{C_m} \left( N - \frac{C}{C_c} N_c \right) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

As for the unitary vectors, they are obtained by means of the rotation matrices in the form (Figure 3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= (0 \ 0 \ 1)^t, \\ \mathbf{n}_c &= \mathbf{R}_3(-\nu_c) (1 \ 0 \ 0)^t, \\ \mathbf{m}_c &= \mathbf{R}_3(-\nu_c) \mathbf{R}_1(-\sigma_c) (0 \ 0 \ 1)^t, \\ \mathbf{p}_c &= \mathbf{R}_3(-\nu_c) \mathbf{R}_1(-\sigma_c) \mathbf{R}_3(-\mu_c) (1 \ 0 \ 0)^t, \\ \mathbf{e}_3^c &= \mathbf{R}_3(-\nu_c) \mathbf{R}_1(-\sigma_c) \mathbf{R}_3(-\mu_c) \mathbf{R}_1(-I_c) (0 \ 0 \ 1)^t. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finally, with the help of (3.16) and (3.15) we can express the generalized forces given by (3.14) as functions of the canonical variables. As described below, the necessary forces for the description of the free motion problem are  $Q_{\mu_c}$ ,  $Q_{\nu_c}$  and  $Q_{N_c}$ , whose expressions are

$$\begin{aligned} Q_{\mu_c} &= \frac{R_3^*}{C_m} \left( N - \frac{C}{C_c} N_c \right) \\ &+ \frac{\sin \sigma_c}{A_m} (R_1 \sin \nu_c - R'_2 \cos \nu_c) \left( K \sin \nu - \frac{A}{A_c} K_c \sin \nu_c \right) \\ &- \frac{\sin \sigma_c}{B_m} (R_2 \cos \nu_c + R'_1 \sin \nu_c) \left( K \cos \nu + \frac{B}{B_c} K_c \cos \nu_c \right), \\ Q_{\nu_c} &= \frac{R_3^*}{C_m} \left( N - \frac{C}{C_c} N_c \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Q_{N_c} &= \frac{1}{K_c A_m} (R_1 \cos \nu_c + R'_2 \sin \nu_c) \left( K \sin \nu - \frac{A}{A_c} K_c \sin \nu_c \right) \\ &- \frac{1}{K_c B_m} (R_2 \sin \nu_c - R'_1 \cos \nu_c) \left( K \cos \nu + \frac{B}{B_c} K_c \cos \nu_c \right). \end{aligned}$$

Notice the presence of the small divisor  $K_c$  in the generalized force  $Q_{N_c}$ .



### 3.3.4 Generalized Equations of Motion

The Hamiltonian equations of motion in the presence of generalized forces are of the form

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} - Q_p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + Q_q. \quad (3.18)$$

But as we have pointed out, in these equations small divisors appear arising from the partial derivatives of the kinetic energy as well as for the generalized forces themselves. To avoid this problem we perform a canonical transformation to a new set of canonical, non-singular variables, as described in the next section.

## 3.4 Canonical Transformation

In this section we perform a canonical transformation from the Andoyer variables to a new set of canonical variables which allow us to avoid the small divisors. Then, this new set will be called "non-singular" variables.

### 3.4.1 The Set of Non-Singular Variables

For our problem, it is enough to choose the new set in the form

$$\begin{aligned} \lambda, y_1, y_2, \Lambda, Y_1, Y_2 &\rightarrow \text{for the total Earth,} \\ \lambda_c, y_{c1}, y_{c2}, \Lambda_c, Y_{c1}, Y_{c2} &\rightarrow \text{for the core,} \end{aligned}$$

where  $\lambda, \lambda_c, \Lambda, \Lambda_c$  are the old Andoyer variables, and the new ones are related with the Andoyer variables by the expressions

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu + \nu, & y_{c1} &= \mu_c + \nu_c, \\ y_2 &= -\sqrt{2(M-N)} \sin \nu, & y_{c2} &= -\sqrt{2(M_c - N_c)} \sin \nu_c, \\ Y_1 &= M, & Y_{c1} &= M_c, \\ Y_2 &= \sqrt{2(M-N)} \cos \nu, & Y_{c2} &= \sqrt{2(M_c - N_c)} \cos \nu_c. \end{aligned} \quad (3.19)$$

The inverse relationships are

$$\begin{aligned} \mu &= y_1 + \arctan \frac{y_2}{Y_2}, & N &= Y_1 - \frac{y_2^2 + Y_2^2}{2}, \\ \nu &= -\arctan \frac{y_2}{Y_2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

and similar for the variables of the core. Other interesting relationships are

$$\begin{aligned}\sin \nu &= -\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + Y_2^2}}, & \sin \sigma &= \left[ \frac{y_2^2 + Y_2^2}{Y_1} \left( 1 - \frac{y_2^2 + Y_2^2}{4Y_1} \right) \right]^{1/2}, \\ \cos \nu &= \frac{Y_2}{\sqrt{y_2^2 + Y_2^2}},\end{aligned}\tag{3.21}$$

and similar for the core. This new set is well-known in the literature, and it is easy to verify that the transformation is canonical (see for instance Brouwer and Clemence 1961).

It is interesting to point out that, due to the smallness of the angles  $\sigma$ ,  $\sigma_c$ , and taking into account the relationship

$$M - N = M (1 - \cos \sigma) = \frac{M}{2} \sin^2 \sigma,$$

(and similarly for the core), the order of magnitude of the new variables  $y_2$ ,  $Y_2$ ,  $y_{c2}$ ,  $Y_{c2}$  is very small.

### 3.4.2 Hamiltonian in Non-Singular Variables

With the help of the equations (3.19), (3.20) and (3.21), the kinetic energy in Andoyer variables given by (3.7) is expressed in the non-singular variables as follows

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \left( Y_1 - \frac{\rho}{4} \right) \left( \frac{y_2^2}{A_m} + \frac{Y_2^2}{B_m} \right) + \frac{1}{2} \left( Y_{c1} - \frac{\rho_c}{4} \right) \left( \frac{A}{A_c} \frac{y_{c2}^2}{A_m} + \frac{B}{B_c} \frac{Y_{c2}^2}{B_m} \right) \\ &+ \left( Y_1 - \frac{\rho}{4} \right)^{1/2} \left( Y_{c1} - \frac{\rho_c}{4} \right)^{1/2} \left( \frac{Y_2 Y_{c2}}{B_m} - \frac{y_2 y_{c2}}{A_m} \right) \\ &+ \frac{1}{2C_m} \left[ \left( Y_1 - \frac{\rho}{2} \right)^2 - 2 \left( Y_1 - \frac{\rho}{2} \right) \left( Y_{c1} - \frac{\rho_c}{2} \right) + \frac{C}{C_c} \left( Y_{c1} - \frac{\rho_c}{2} \right)^2 \right],\end{aligned}\tag{3.22}$$

where we have introduced the notation

$$\rho = y_2^2 + Y_2^2, \quad \rho_c = y_{c2}^2 + Y_{c2}^2.\tag{3.23}$$

### 3.4.3 Transformation of the Generalized Forces

The generalized forces in the new variables are obtained by means of the relationship (Brouwer and Clemence 1961)

$$\begin{pmatrix} Q_{y_{c1}} \\ Q_{y_{c2}} \\ Q_{\lambda_c} \\ -Q_{Y_{c1}} \\ -Q_{Y_{c2}} \\ -Q_{\Lambda_c} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} Q_{M_c} \\ Q_{N_c} \\ Q_{\Lambda_c} \\ Q_{\mu_c} \\ Q_{\nu_c} \\ Q_{\lambda_c} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

where  $\mathbf{J}$  is the Jacobian of the transformation

$$\mathbf{J} = \frac{\partial (Y_{c1}, Y_{c2}, \Lambda_c, y_{c1}, y_{c2}, \lambda_c)}{\partial (M_c, N_c, \Lambda_c, \mu_c, \nu_c, \lambda_c)}, \quad (3.25)$$

and the matrix  $\mathbf{\Gamma}$  is defined by blocks in the form

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

By means of equations (3.19) the matrix product  $\mathbf{J} \mathbf{\Gamma}$  is obtained straightforward

$$\mathbf{J} \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q \sin \nu_c & 0 & \cos \nu_c / q & -\cos \nu_c / q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q \cos \nu_c & 0 & -\sin \nu_c / q & \sin \nu_c / q & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

with

$$q = 2 \sqrt{M_c} \sin \frac{\sigma_c}{2}. \quad (3.28)$$

After some algebra, we can obtain the new generalized forces expressed in the non-singular variables and, neglecting second order terms in  $y_2$ ,  $Y_2$ ,  $y_{c2}$ ,  $Y_{c2}$ , the necessary forces to describe the free motion are finally

$$\begin{aligned} Q_{y_{c1}} &= \frac{R_3^*}{C_m} \left( Y_1 - \frac{C}{C_c} Y_{c1} \right), \\ Q_{y_{c2}} &= \frac{1}{\sqrt{Y_{c1}}} \left[ \frac{R_2'}{A_m} \left( \sqrt{Y_1} y_2 - \frac{A}{A_c} \sqrt{Y_{c1}} y_{c2} \right) - \frac{R_2}{B_m} \left( \sqrt{Y_1} Y_2 + \frac{B}{B_c} \sqrt{Y_{c1}} Y_{c2} \right) \right], \\ Q_{Y_{c2}} &= \frac{-1}{\sqrt{Y_{c1}}} \left[ \frac{R_1}{A_m} \left( \sqrt{Y_1} y_2 - \frac{A}{A_c} \sqrt{Y_{c1}} y_{c2} \right) + \frac{R_1'}{B_m} \left( \sqrt{Y_1} Y_2 + \frac{B}{B_c} \sqrt{Y_{c1}} Y_{c2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$



We can see that now there are not small divisors in the expression of the generalized forces.

### 3.4.4 Generalized Equations of Motion

The equations of motion in the new variables can be written in the form

$$\begin{aligned} (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{\lambda}) &= \partial H / \partial (Y_1, Y_2, \Lambda), \\ (\dot{Y}_1, \dot{Y}_2, \dot{\Lambda}) &= -\partial H / \partial (y_1, y_2, \lambda), \\ (\dot{y}_{c1}, \dot{y}_{c2}, \dot{\lambda}_c) &= \partial H / \partial (Y_{c1}, Y_{c2}, \Lambda_c) - Q_{(Y_{c1}, Y_{c2}, \Lambda_c)}, \\ (\dot{Y}_{c1}, \dot{Y}_{c2}, \dot{\Lambda}_c) &= -\partial H / \partial (y_{c1}, y_{c2}, \lambda_c) + Q_{(y_{c1}, y_{c2}, \lambda_c)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.4.5 First Results

First of all, let us pay attention to the equations corresponding to the variables  $Y_1$  and  $Y_{c1}$ . For  $Y_1$  we have

$$\dot{Y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow Y_1 = \text{constant}. \quad (3.31)$$

But we have that  $Y_1 = M \simeq C \omega_3$ , so we can get the first important result

$$\omega_3 = \text{constant} = \Omega \Rightarrow Y_1 = C \Omega. \quad (3.32)$$

As for the variable  $Y_{c1}$ , the corresponding equation is

$$\dot{Y}_{c1} = -\frac{\partial H}{\partial y_{c1}} + Q_{y_{c1}} = \frac{R_3^*}{C_m} \left( Y_1 - \frac{C}{C_c} Y_{c1} \right) = \frac{R_3^*}{C_m} \left( C \Omega - \frac{C}{C_c} Y_{c1} \right), \quad (3.33)$$

whose solution can be written as

$$Y_{c1} = C_c \Omega + c_1 \exp \left( -\frac{R_3^* C}{C_c C_m} t \right), \quad (3.34)$$

where  $c_1$  is the arbitrary constant of integration. Taking into account that  $Y_{c1} = M_c \simeq C_c (\omega_3 + \delta\omega_3)$ , equation (3.34) shows that the third component of the angular velocity of the core with respect to the mantle is damped by the friction in the CMB (core-mantle boundary) by the factor  $-(R_3^* C)/(C_c C_m)$ . Then we have that

$$\delta\omega_3 \rightarrow 0 \Rightarrow Y_{c1} = C_c \Omega. \quad (3.35)$$

### 3.4.6 System of Equations

As we will see below, the necessary equations for describing the polar motion correspond to the variables  $y_2, Y_2, y_{c2}, Y_{c2}$ . Neglecting second order terms, these equations are as follows

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_{c2} \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_{c2} \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{M} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_{c2} \\ y_2 \\ y_{c2} \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{M} \mathbf{Y}, \quad (3.36)$$

where the matrix  $\mathbf{M}$  written as

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 & a_2 \\ -b_2 S_2 & -b_3 S_2 & a_2 (1 + S'_2) & -a_3 (1 + S'_2) \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ b_2 (1 + S'_1) & -b_3 (1 + S'_1) & a_2 S_1 & -a_3 S_1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

with the help of the coefficients

$$\begin{aligned} a_1 &= (C - A_m)/A_m, & b_1 &= (C - B_m)/B_m, \\ a_2 &= \sqrt{C C_c}/A_m, & b_2 &= \sqrt{C C_c}/B_m, \\ a_3 &= (A C_c)/(A_m A_c), & b_3 &= (B C_c)/(B_m B_c), \end{aligned} \quad (3.38)$$

and the dimensionless magnitudes concerning the dissipation

$$\begin{aligned} S_1 &= R_1/(\Omega C_c), & S'_1 &= R'_1/(\Omega C_c), \\ S_2 &= R_2/(\Omega C_c), & S'_2 &= R'_2/(\Omega C_c). \end{aligned} \quad (3.39)$$

## 3.5 Polar Motion

The polar motion represents the motion around the body-fixed figure axis  $Oz$ . It is given by the components  $\omega_1, \omega_2$  of the angular velocity of the mantle and the components  $\delta\omega_1, \delta\omega_2$  of the angular velocity of the core with respect to the mantle. It is more appropriate to describe this motion using the complex notation

$$u = \omega_1 + i\omega_2, \quad v = \delta\omega_1 + i\delta\omega_2. \quad (3.40)$$

### 3.5.1 Non-Singular Variables

Now we proceed to express  $u, v$ , as functions of non-singular variables. First of all, by means of Eq. (3.3) and (3.5) we have the following expressions in

Andoyer variables

$$\begin{aligned} u &= K \left( \frac{\sin \nu}{A_m} + i \frac{\cos \nu}{B_m} \right) - K_c \left( \frac{\sin \nu_c}{A_m} - i \frac{\cos \nu_c}{B_m} \right), \\ v &= -K \left( \frac{\sin \nu}{A_m} + i \frac{\cos \nu}{B_m} \right) + K_c \left( \frac{A}{A_c} \frac{\sin \nu_c}{A_m} - i \frac{B}{B_c} \frac{\cos \nu_c}{B_m} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Finally, with the help of Eq. (3.19) and (3.21), and taking into account Eq. (3.32) and (3.35) we get the linearized expressions (neglecting second order terms in  $y_2, y_{c2}, Y_2, Y_{c2}$ ),

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{C} \Omega \left( \frac{y_2}{A_m} + i \frac{Y_2}{B_m} \right) - \sqrt{C_c} \Omega \left( \frac{y_{c2}}{A_m} - i \frac{Y_{c2}}{B_m} \right), \\ v &= -\sqrt{C} \Omega \left( \frac{y_2}{A_m} + i \frac{Y_2}{B_m} \right) + \sqrt{C_c} \Omega \left( \frac{A}{A_c} \frac{y_{c2}}{A_m} - i \frac{B}{B_c} \frac{Y_{c2}}{B_m} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.5.2 System of Equations

To form a complete system of linear equations we define the matrix

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + i\omega_2 \\ \delta\omega_1 + i\delta\omega_2 \\ \omega_1 - i\omega_2 \\ \delta\omega_1 - i\delta\omega_2 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

According to Eq. (3.42) we can write

$$U = \sqrt{\Omega} K Y, \quad (3.44)$$

the matrix  $K$  being

$$K = \begin{pmatrix} i \frac{\sqrt{C}}{B_m} & i \frac{\sqrt{C_c}}{B_m} & \frac{\sqrt{C}}{A_m} & - \frac{\sqrt{C_c}}{A_m} \\ -i \frac{\sqrt{C}}{B_m} & -i \frac{B \sqrt{C_c}}{B_m B_c} & - \frac{\sqrt{C}}{A_m} & \frac{A \sqrt{C_c}}{A_m A_c} \\ -i \frac{\sqrt{C}}{B_m} & -i \frac{\sqrt{C_c}}{B_m} & \frac{\sqrt{C}}{A_m} & - \frac{\sqrt{C_c}}{A_m} \\ i \frac{\sqrt{C}}{B_m} & i \frac{B \sqrt{C_c}}{B_m B_c} & - \frac{\sqrt{C}}{A_m} & \frac{A \sqrt{C_c}}{A_m A_c} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Finally, taking into account Eq. (3.36), the system of differential equations describing the polar motion is written as

$$\dot{\mathbf{U}} = \Omega \mathbf{J} \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1}. \quad (3.46)$$

### 3.5.3 Free Frequencies of Polar Motion

The system of equations given by Eq. (3.46) is solved by applying the mathematical algorithm described in Getino et al. (1998) and González et al. (1999). Neglecting second order terms in ellipticities and coefficients of the dissipation the following free frequencies corresponding to the Chandler Wobble (CW) and Fluid Core Nutation (FCN) are obtained

$$\begin{aligned} CW \quad \rightarrow \quad \sigma_1 &= \Omega \frac{A}{A_m} \sqrt{e\varepsilon}, \\ FCN \quad \rightarrow \quad \sigma_2 &= -\Omega \left[ 1 + \frac{A}{2A_m} (e_c + \varepsilon_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{A_m} \frac{R'_1}{\Omega A_c} + \frac{B}{B_m} \frac{R'_2}{\Omega B_c} \right) \right] \\ &\quad + i \left( \frac{A}{2A_m} \frac{R_1}{A_c} + \frac{B}{2B_m} \frac{R_2}{B_c} \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

as functions of the ellipticities

$$\begin{aligned} e &= \frac{C - A}{A}, & \varepsilon &= \frac{C - B}{B}, \\ e_c &= \frac{C_c - A_c}{A_c}, & \varepsilon_c &= \frac{C_c - B_c}{B_c}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

It is interesting to particularize our solution to the symmetrical case. By taking  $A = B$ ,  $A_c = B_c$ ,  $e = \varepsilon$ ,  $e_c = \varepsilon_c$ ,  $R_1 = R_2 = R$  and  $R'_1 = R'_2 = R'$  the frequencies become

$$\sigma_1 = \Omega \frac{A}{A_m} e, \quad \sigma_2 = -\Omega \left[ 1 + \frac{A}{A_m} \left( e_c + \frac{R'}{\Omega A_c} \right) \right] + i \frac{A}{A_m} \frac{R_1}{A_c}, \quad (3.49)$$

which are the same as those obtained by Getino and Ferrándiz (1997) for the symmetrical Earth.

## 3.6 Discussion and Numerical Estimates

Let us begin by performing a numerical integration of the system of differential equations describing the polar motion given by Eq. (3.46), in order to

check the validity of the analytical solution (3.47). To do this, we use the values (in c.g.s. units)  $\Omega = 7.29129 \times 10^{-5}$ ,  $A = 8.0177 \times 10^{44}$ ,  $A_c = 9.1716 \times 10^{43}$ ,  $C = 8.0438 \times 10^{44}$  and  $C_c = 9.1950 \times 10^{43}$ , taken from Mathews et al. (1991b), and  $B = 8.0179 \times 10^{44}$ ,  $B_c = 9.17176 \times 10^{43}$  deduced in González and Getino (1997) from Defraigne et al. (1996). As for the dissipation, it has been said that the present knowledge of the Earth's internal structure does not allow us to distinguish among the different coefficients. Then, in this stage it is enough to take the same value  $3.8 \times 10^{34}$  (Kubo 1979, Getino and Ferrándiz 1997) for the four coefficients  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R'_1$  and  $R'_2$ . The numerical results of the free frequencies obtained by the numerical integration as well as those given by the analytical solution are shown in Table 3.1. We can see that the difference between numerical and analytical (at the first order) values is negligible.

Table 3.1: Numerical and analytical solution: comparison

| Freq.             | Numerical                          | Analytical                         | Error                                      |
|-------------------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\sigma_1/\Omega$ | $0.0036604 + 2.7 \cdot 10^{-9} i$  | 0.0036616                          | $-1.2 \cdot 10^{-6} + 2.7 \cdot 10^{-9} i$ |
| $\sigma_2/\Omega$ | $-1.0028762 + 6.4 \cdot 10^{-6} i$ | $-1.0028774 + 6.4 \cdot 10^{-6} i$ | $1.2 \cdot 10^{-6} + 2.7 \cdot 10^{-9} i$  |

Now we study the contribution of the dissipation to the free frequencies. It is convenient to separate the real and imaginary part of these frequencies, and to express the real part as function of the corresponding period. Thus, the free frequencies given by (3.47) and (3.48) can be rewritten as

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = m_1 \\ \sigma_2 = m_2 + i d \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Omega}{CW}, \\ m_2 = -\Omega \left( 1 + \frac{1}{FCN} \right), \\ d = \frac{1}{2} \left( \frac{A}{A_m} \frac{R_1}{A_c} + \frac{B}{B_m} \frac{R_2}{B_c} \right), \end{array} \right. \quad (3.50)$$

where the periods of the components of the wobble of the mantle corresponding to the CW and the FCN frequencies are

$$\begin{aligned} CW &= \left[ \frac{A}{A_m} \sqrt{e\varepsilon} \right]^{-1}, \\ FCN &= \left[ \frac{A}{2A_m} (e_c + \varepsilon_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{A_m} \frac{R'_1}{\Omega A_c} + \frac{B}{B_m} \frac{R'_2}{\Omega B_c} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Eq. (3.50) and (3.51) show that, at the first order of our approximation, the CW period is not affected by the dissipation. As for the frequency of the FCN, it is affected in two ways: On the one hand, the coefficients  $R_1$  and  $R_2$  of the viscous friction produce a damping  $d$  of this frequency. On the other hand, the corresponding period suffers a small variation due to the coefficients  $R'_1$  and  $R'_2$  of the electromagnetic coupling. For this frequency, it is usual to define the quality factor  $Q$  as

$$Q = \frac{m_2}{2d}, \quad (3.52)$$

which, by means of Eq. (3.50) and (3.51), has the following analytical expression

$$|Q| = \frac{\Omega \left[ 1 + \frac{A}{2A_m} (e_c + \varepsilon_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{A_m} \frac{R'_1}{\Omega A_c} + \frac{B}{B_m} \frac{R'_2}{\Omega B_c} \right) \right]}{\frac{A}{A_m} \frac{R_1}{A_c} + \frac{B}{B_m} \frac{R_2}{B_c}}. \quad (3.53)$$

From this equation we can see that the order of magnitude of  $Q$  is mainly determined by the viscous friction (through coefficients  $R_1$  and  $R_2$ ), since the effect due to the electromagnetic coupling (coefficients  $R'_1$  and  $R'_2$ ) is almost negligible in front of the ellipticities  $e_c$ ,  $\varepsilon_c$ , which are much larger quantities.

To give a numerical estimation of the frequencies and quality factor we use for the different parameters the values listed at the beginning of this section. As for the coefficients of the dissipation, we also take another tentative value of  $R = 2 \times 10^{35}$ . The obtained estimates are shown in Table 3.2, where we include the values corresponding to different Earth models: Symmetrical, triaxial, with and without dissipation.

Table 3.2: Numerical values for different models

|           | Without Dissipation |          | With Dissipation        |                       |                         |                       |
|-----------|---------------------|----------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
|           | Symm.               | Triaxial | Symm.                   | Triaxial              | Symm.                   | Triaxial              |
|           |                     |          | $R = 3.8 \cdot 10^{34}$ | $R = 2 \cdot 10^{35}$ | $R = 3.8 \cdot 10^{34}$ | $R = 2 \cdot 10^{35}$ |
| $P_{CW}$  | 272.05              | 273.10   | 272.05                  | 272.05                | 273.10                  | 273.10                |
| $P_{FCN}$ | 347.11              | 348.31   | 346.34                  | 343.09                | 347.53                  | 344.26                |
| $d$       |                     |          | $4.7 \cdot 10^{-10}$    | $2.5 \cdot 10^{-9}$   | $4.7 \cdot 10^{-10}$    | $2.5 \cdot 10^{-9}$   |
| $Q$       |                     |          | 78159                   | 14851                 | 78159                   | 14151                 |

We can get more information by studying separately the dependence of  $FCN$  and  $Q$  on the dissipative effects and on the triaxiality of the core. We begin by considering the effect of the "triaxiality of the dissipation", that is to say, the effect of the differences  $R_2 - R_1$  and  $R'_2 - R'_1$ . To do this, expressions (3.51) and (3.53) can be rewritten in a more appropriate form as

$$FCN = \left[ \frac{A}{2A_m} (e_c + \varepsilon_c) + \frac{R'_1}{2\Omega} \left( \frac{A}{A_m A_c} + \frac{B}{B_m B_c} (1 + \delta R') \right) \right]^{-1},$$

$$|Q| = \frac{\Omega \left[ 1 + \frac{A}{2A_m} (e_c + \varepsilon_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{A_m} \frac{R'_1}{\Omega A_c} + \frac{B}{B_m} \frac{R'_2}{\Omega B_c} \right) \right]}{\frac{R_1}{\Omega} \left[ \frac{A}{A_m A_c} + \frac{B}{B_m B_c} (1 + \delta R) \right]} \quad (3.54)$$

where, as an estimation of the above-called triaxiality of the dissipation we have introduced the dimensionless magnitudes

$$\delta R' = \frac{R'_2 - R'_1}{R'_1}, \quad \delta R = \frac{R_2 - R_1}{R_1}. \quad (3.55)$$

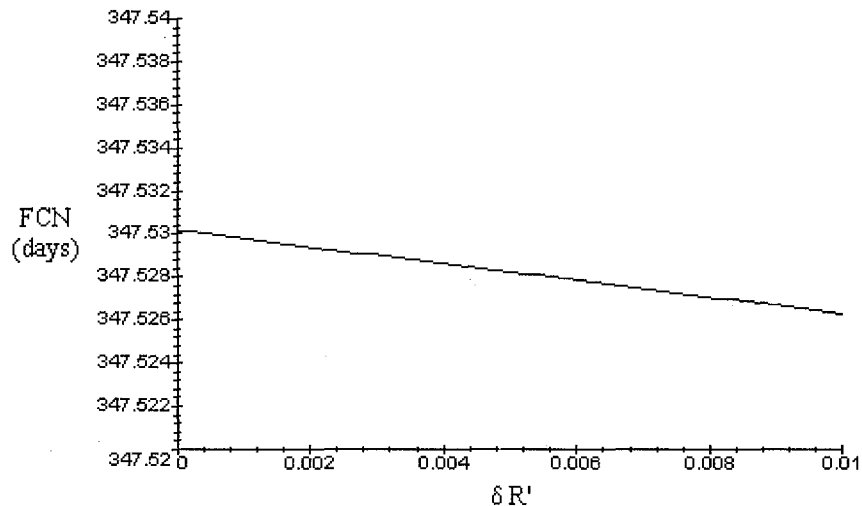
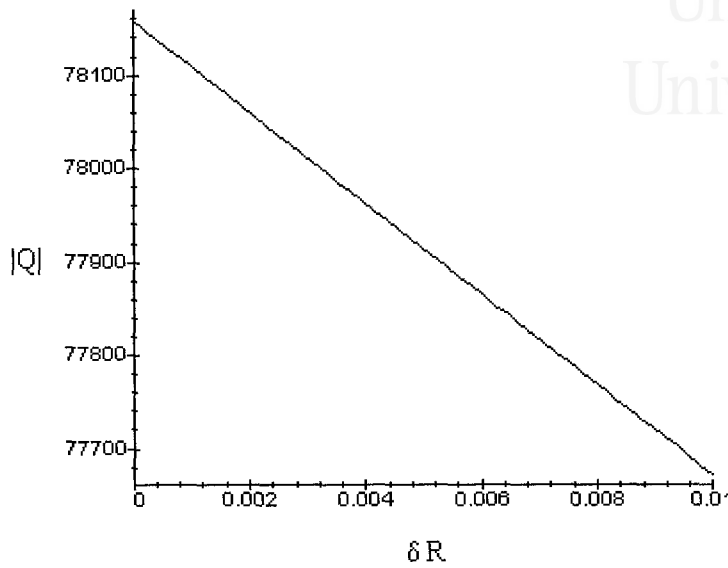


Figure 3.4: Variation of  $P_{FCN}$  with respect to  $\delta R'$

To evaluate the functions  $FCN$  and  $Q$  in expression (3.54), it is enough to take the tentative value  $3.8 \times 10^{34}$  for both coefficients  $R'_1$  and  $R_1$ . Fig. 3.4 and Fig. 3.5 represent their behavior with respect to  $\delta R'$  and  $\delta R$ . These

Figure 3.5: Variation of  $Q$  with respect to  $\delta R$ 

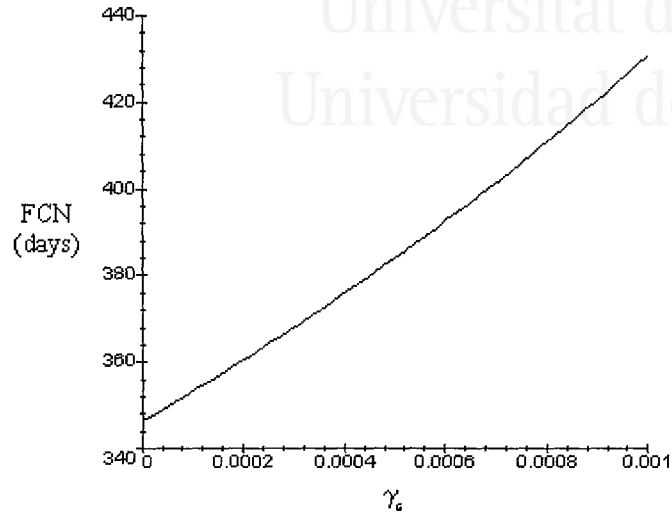
graphics show very clearly that the dependence on  $\delta R'$  and  $\delta R$  is absolutely negligible: even for very improbable values of  $\delta R'$  and  $\delta R$ , the variation in  $FCN$  and  $Q$  is not significative. As a conclusion, we can affirm that the triaxiality of the dissipation affect neither the  $FCN$  period, nor the quality factor  $Q$ . This fact allows us to make the simplifications

$$R'_1 = R'_2 \equiv R', \quad R_1 = R_2 \equiv R. \quad (3.56)$$

Much more important is to study the dependence on the triaxiality of the core. Note that, unlike the difference  $B - A$ , which can be evaluated with great accuracy from the  $J_2^2$  geopotential coefficient, the uncertainty in the estimations of the triaxiality of the core is large at present. Then, according to Eq. (3.56), and neglecting second order terms of the type  $R(B - A)/A$ , expressions for  $FCN$  and  $Q$  are rearranged as follows

$$\begin{aligned} FCN &= \left[ \frac{A}{A_m} \left( e_c - \frac{\gamma_c}{2} (1 + e_c) + \frac{R'}{\Omega A_c} \right) \right]^{-1}, \\ |Q| &= \frac{\Omega \left[ 1 + \frac{A}{A_m} \left( e_c - \frac{\gamma_c}{2} (1 + e_c) + \frac{R'}{\Omega A_c} \right) \right]}{2 \frac{A}{A_m} \frac{R}{\Omega A_c}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$



Figure 3.6: Variation of  $P_{FCN}$  with respect to  $\gamma_c$ 

where the triaxiality of the core is given by the dimensionless magnitude

$$\gamma_c = \frac{B_c - A_c}{A_c}. \quad (3.58)$$

With the numerical parameters listed at the beginning of this section, the corresponding graphics showing the influence of the triaxiality of the core on the  $FCN$  and  $Q$  are given respectively by Fig. 3.6 and Fig. 3.7. As for the quality factor, we can see that this influence is very small. However, the  $FCN$  period is strongly affected, and this fact must be taken into account when dealing with the forced nutations, since a one day change in this period induces a change of about 0.1 mas on the retrograde annual nutation.

Finally, we can examine the dependence of the  $FCN$  and  $Q$  on the viscous ( $R$ ) and electromagnetic ( $R'$ ) coupling, by considering in Eq. (3.57) the  $FCN$  as function of  $R'$  and the  $Q$  as function of  $R$ , taking for the remainder parameters the already used values. The corresponding graphics are drawn in Fig. 3.8 and Fig. 3.9. We can see that for  $R' \leq (\sim 10^{34})$ , the effect of the dissipation on the  $FCN$  period is very small, since the dominant part is the ellipticity of the core  $e_c$  (difference between triaxial and symmetrical Earth being about one day). For  $R' > (\sim 10^{34})$  the dissipation becomes the main part of the  $FCN$ , with a very large influence.

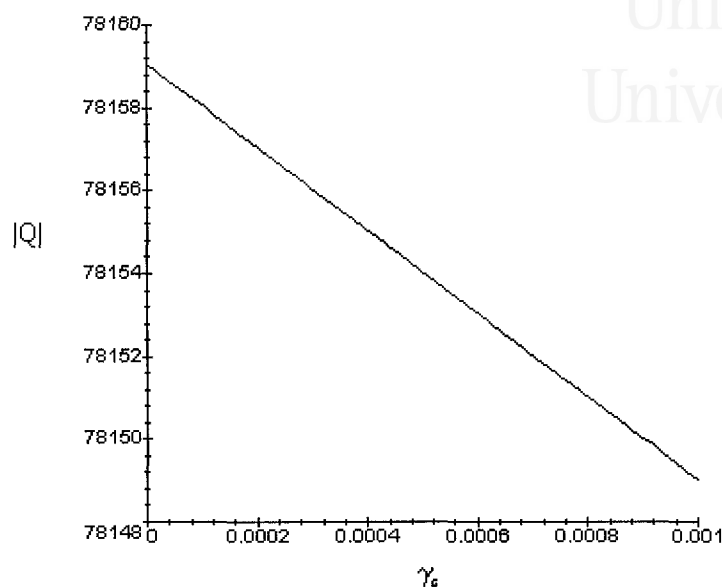


Figure 3.7: Variation of  $Q$  with respect to  $\gamma_c$

## Acknowledgments

This work has been partially supported by *Junta de Castilla y León*, Project No. VA40/97 and Project No.VA11/99, and DGES, Project No. PB95–0696. A. Escapa has been fully supported by a F.P.I. grant of the *Junta de Castilla y León* (Spain).

This work is a part of the Ph. D. Thesis written by A. Escapa under the supervision of J. Getino at the University of Valladolid (Spain).

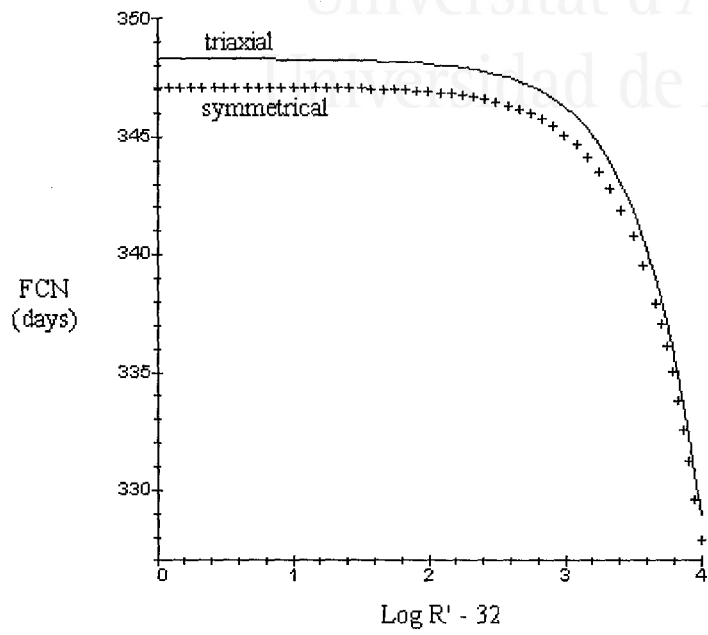


Figure 3.8: Variation of  $P_{FCN}$  with respect to  $R'$

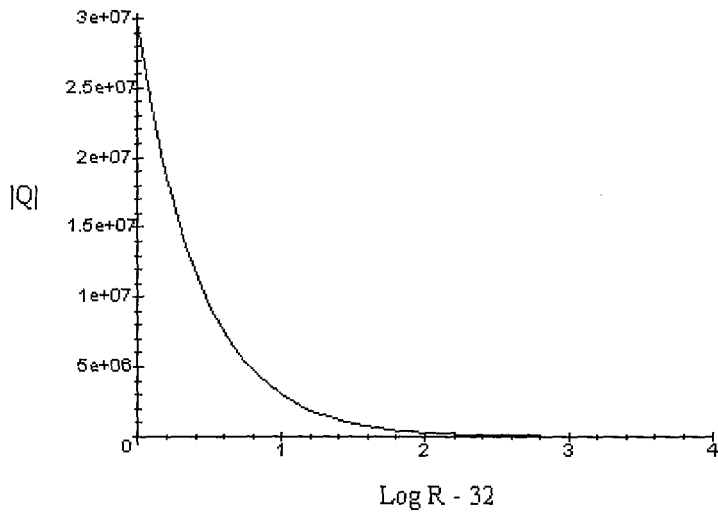


Figure 3.9: Variation of  $Q$  with respect to  $R'$



## Capítulo 4

# Hamiltonian theory for the non-rigid Earth: Semidiurnal terms<sup>1</sup>

The purpose of this paper is to determine the contributions to the nutation series arising from the triaxiality of a non-rigid Earth model composed of a rigid mantle and a liquid core. With this aim, the canonical formulation of the rotation of the non-rigid Earth developed by Getino and Ferrándiz is applied in order to study the semidiurnal terms arising from the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  geopotential coefficients. Once the corresponding generating function is calculated, analytical expressions of the Andoyer and figure planes are derived. We also provide numerical nutation series based on the analytical formulae.

### 4.1 Introduction

The Hamiltonian formalism has been applied by Getino and Ferrándiz to the study of non-rigid Earth models. At present, we have performed a comprehensive treatment of an Earth model composed of an elastic, axis-symmetric mantle, and a liquid core, including the dissipative effects in the core-mantle boundary (CMB) and the delay in the response of the deformation due to the inelasticity of the mantle. The corresponding free problem, with the determination of the free frequencies, is developed in Getino and Ferrándiz (1997), while the nutation series concerning the forced motion can be found in Getino and Ferrándiz (1999, 2000a).

---

<sup>1</sup>Getino, J., J. M. Ferrándiz y A. Escapa, *Astronomy & Astrophysics*, 370, 330-341, 2001.

We note that these previous studies refer to an axis-symmetric Earth model. Thus, the perturbed potential arises from the  $J_2$  part of the geopotential coefficient which is the main contribution to the nutation series.

However, the Earth's orientation in space nowadays can be determined with great accuracy. As a direct consequence, it is necessary to consider some effects, previously disregarded, which could contribute to the nutation series and which must be taken into account in order to achieve a more complete model.

Particularly, although the Earth is almost to an axis-symmetric body, the influence of its triaxiality on the nutation is not negligible. The influence of this effect on nutations was calculated firstly by Kinoshita (1977) for the biggest terms and by Kinoshita and Souchay (1990) up to 0.005 milli arc seconds. More recently, Folgueira et al. (1998a), Souchay et al. (1999) and Bretagnon et al. (1997) have evaluated the coefficients of nutation due to higher parts of the geopotential, obtaining the diurnal and the semidiurnal terms. Notice that all these works assume rigid Earth.

In this paper we begin with the study of the semidiurnal terms coming from the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  geopotential coefficients by considering a non-rigid Earth model and applying the Hamiltonian formalism developed by Getino and Ferrándiz. Due to the small magnitude of these terms, in a first approximation it is enough to consider a rigid mantle, liquid core Earth model, disregarding the effect of the elasticity, whose contribution is negligible.

In Sect. 2 we summarize the formalism applied to a symmetric Earth which will be extended in Sect. 3 to take into account the effect of the triaxiality. Under the Hamiltonian framework the semidiurnal terms are obtained through the generating function, which is studied in Sect. 4. In Sect. 5 the analytical expressions of the nutations of the Andoyer and figure planes are derived. Finally, in Sect. 6 we compute the numerical values of the nutations, making a comparison with the values obtained by Souchay et al. (1999) and Bretagnon et al. (1997) for a rigid Earth model.

## 4.2 The symmetrical two-layered Earth model: An overview

In this section we give a brief description of the Hamiltonian approach to the free and forced nutations of a symmetrical Earth. Further information, as well as a detailed study of this problem, can be found in Getino and Ferrándiz (1997, 1999, 2000a).

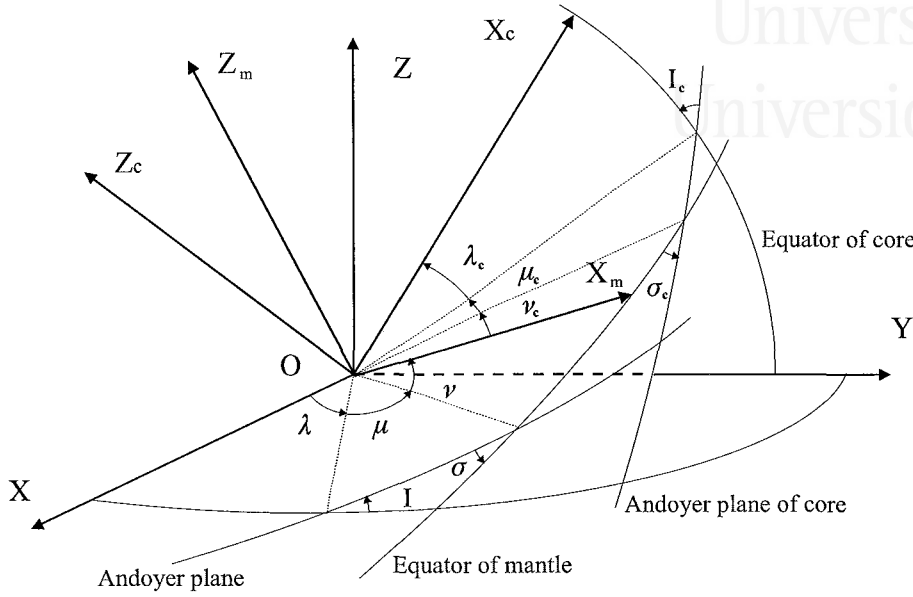


Figure 4.1: Canonical variables

### 4.2.1 Canonical variables and kinetic energy

We consider an Earth model composed of a mantle and a liquid core. As pointed out in the introduction, we can neglect the effect of the elasticity without harm, and consider the mantle as a rigid layer. Let  $OXYZ$  be a non-rotating inertial frame,  $OX_mY_mZ_m$  the frame of the principal axes of the total Earth rotating with an angular velocity  $\vec{\omega}$  with respect to the inertial frame, and  $OX_cY_cZ_c$  a core fixed frame rotating with angular velocity  $\delta\vec{\omega}$  with respect to the mantle.

With an appropriate definition of the core rotation (Moritz and Mueller 1987), the angular momentum vectors of mantle and core,  $\mathbf{L}_m$  and  $\mathbf{L}_c$ , can be expressed in the  $OX_mY_mZ_m$  frame as:

$$\mathbf{L}_m = \Pi_m \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{L}_c = \Pi_c (\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}), \quad (4.1)$$

where  $\boldsymbol{\omega}$  and  $\delta\boldsymbol{\omega}$  are respectively the corresponding column vectors for  $\vec{\omega}$  and  $\delta\vec{\omega}$  in the  $OX_mY_mZ_m$  frame, and

$$\Pi_m = \begin{pmatrix} A_m & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & C_m \end{pmatrix}, \quad \Pi_c = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Let us consider the total angular momentum of the Earth,  $\mathbf{L}$ , which will be:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_m + \mathbf{L}_c = \Pi \boldsymbol{\omega} + \Pi_c \delta \boldsymbol{\omega}, \quad (4.3)$$

where

$$\Pi = \Pi_m + \Pi_c = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

is the tensor of inertia of the total Earth. According to this, the components of the total angular momentum and the angular momentum of the core in the  $OX_m Y_m Z_m$  frame are:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A \omega_1 + A_c \delta \omega_1 \\ A \omega_2 + A_c \delta \omega_2 \\ C \omega_3 + C_c \delta \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} A_c \omega_1 + A_c \delta \omega_1 \\ A_c \omega_2 + A_c \delta \omega_2 \\ C_c \omega_3 + C_c \delta \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Thus, the kinetic energy is written as:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{L}_m^t \Pi_m^{-1} \mathbf{L}_m + \frac{1}{2} \mathbf{L}_c^t \Pi_c^{-1} \mathbf{L}_c = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_c)^t \Pi_m^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_c) + \frac{1}{2} \mathbf{L}_c^t \Pi_c^{-1} \mathbf{L}_c. \end{aligned} \quad (4.6)$$

To formulate canonically the kinetic energy, we use the set of canonical variables

$$\begin{aligned} \lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N, & \longrightarrow \text{for the total Earth,} \\ \lambda_c, \mu_c, \nu_c, \Lambda_c, M_c, N_c, & \longrightarrow \text{for the core.} \end{aligned}$$

The meaning of the angular variables is shown in Fig. 4.1. As for the canonical momenta,  $N$  is the  $OZ_m$  component of the total angular momentum  $\mathbf{L}$ ,  $M$  is the magnitude of  $\mathbf{L}$  and  $\Lambda$  is the  $OZ$  component of  $\mathbf{L}$ . Similarly for the core,  $N_c$  is the  $OZ_m$  component of the angular momentum of the core  $\mathbf{L}_c$ ,  $M_c$  is the magnitude of  $\mathbf{L}_c$  and  $\Lambda_c$  is the  $OZ_c$  component of  $\mathbf{L}_c$ . Thus, by means of the auxiliary angles  $\sigma$ ,  $I$ ,  $\sigma_c$  and  $I_c$ , we have the relationships

$$\begin{aligned} M &= |\mathbf{L}| & M_c &= |\mathbf{L}_c| \\ N &= M \cos \sigma & N_c &= M_c \cos \sigma_c \\ \Lambda &= M \cos I & \Lambda_c &= M_c \cos I_c. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Furthermore, according to Fig. 4.1, we can write the components of  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{L}_c$  in the  $OX_m Y_m Z_m$  frame in terms of the canonical variables as follows

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} K \sin \nu \\ K \cos \nu \\ N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_c = \begin{pmatrix} K_c \sin \nu_c \\ -K_c \cos \nu_c \\ N_c \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

where we have put

$$\begin{aligned} K &= (M^2 - N^2)^{1/2} = M \sin \sigma, \\ K_c &= (M_c^2 - N_c^2)^{1/2} = M_c \sin \sigma_c. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Finally, introducing (5.8) in (5.6) we get the canonical expression of the kinetic energy corresponding to this basic symmetrical Earth model as follows:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2(A - A_c)} \left( K^2 + \frac{A}{A_c} K_c^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2(C - C_c)} \left( N^2 - 2N N_c + \frac{C}{C_c} N_c^2 \right) + \\ &+ \frac{K K_c}{A - A_c} \cos(\nu + \nu_c). \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Dissipative coupling torque

We introduce the effect of dissipative forces in the boundary mantle–core, including electromagnetic coupling and the effects of the viscosity, following the same assumptions as in Sasao et al.(1980). Thus, as a general expression we can write

$$\mathbf{t}_c = -\mathbf{t}_m = \begin{pmatrix} -R \delta\omega_1 + R' \delta\omega_2 \\ -R \delta\omega_2 - R' \delta\omega_1 \\ -R^* \delta\omega_3 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

where  $R$ ,  $R'$  and  $R^*$  are coupling constants. Note that we have written  $R$ ,  $R'$ ,  $R^*$  instead of  $K$ ,  $K'$ ,  $K^*$  in the original to avoid confusion in the notation. In particular, the ratio  $\eta = R'/R$  is nearly zero in viscous coupling and unity in electromagnetic coupling (Sasao et al. 1980). As usual, this torque is characterized by the dimensionless complex coefficient

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma. \quad (4.12)$$

These new coefficients are related to the electromagnetic coupling constants  $R$  and  $R'$  by the relationships

$$\Gamma' = \frac{R'}{\Omega A_m}, \quad \Gamma = \frac{R}{\Omega A_m}. \quad (4.13)$$



In the Hamiltonian framework the dissipative effects are formulated by means of the corresponding generalized forces  $Q_p, Q_q$ , whose expression, developed in Getino and Ferrándiz (1997), will be given below.

### 4.2.3 Hamiltonian for the symmetrical Earth and first order integration

According to the previous sections, the Hamiltonian of the system (to the first order) is written as

$$H = T_0 + V_0, \quad (4.14)$$

where  $V_0$  is the perturbing potential coming from the  $J_2$  geopotential coefficient, and is the same as in Kinoshita (1977) for the rigid Earth, and  $T_0$  corresponds to the kinetic energy of an axis-symmetric rigid mantle – liquid core model, given by equation (5.10). Note that the generalized forces due to dissipative effects do not appear explicitly into the Hamiltonian (4.14), but they are taken into account in the corresponding equations of motion (Stiefel and Scheifele 1971). Now we perform a first order analytical integration of this Hamiltonian by using Hori's perturbation method (1966), following the same procedure as in Kinoshita (1977) for the rigid Earth. This procedure is briefly described here.

First of all, the Hamiltonian (4.14) is separated into an unperturbed part,  $H_0$ , corresponding to the free motion, and a perturbed part  $H_1$ , for the forced perturbations, in the form

$$H = H_0 + H_1 \rightarrow \begin{cases} H_0 = T_0 \\ H_1 = V_0 \end{cases}. \quad (4.15)$$

Then, we carry out a canonical transformation of the initial Hamiltonian  $H$  into a new one,  $H^*$ , easier to integrate

$$H = H_0 + H_1 \rightarrow H^* = H_0^* + H_1^*, \quad (4.16)$$

by means of a generating function  $W$ . In the new Hamiltonian, the unperturbed part is the same as in the old one,  $H_0^* = H_0$ , and for the new disturbing term we take the secular part of  $H_1$ , that is to say,  $H_1^* = H_{1\text{sec}}$ . We have finally

$$\begin{aligned} H_0^* &= \frac{1}{2A_m} \left[ K^{*2} + \frac{A}{A_c} K_c^{*2} \right] + \frac{K^* K_c^*}{A_m} \cos(\nu^* + \nu_c^*) + \\ &+ \frac{1}{2C_m} \left[ N^{*2} - 2N^* N_c^* + \frac{C}{C_c} N_c^{*2} \right], \\ H_1^* &= V_{0\text{sec}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

where expression of  $V_{0sec}$  can be found in Kinoshita (1977). Note that we have used asterisks to indicate the new variables resulting from the canonical transformation. However, in the following, these asterisks will be omitted for the sake of simplicity.

The periodic perturbations (nutations) are obtained through the generating function by means of the equations

$$\Delta q = \frac{\partial W}{\partial p^*}, \quad \Delta p = -\frac{\partial W}{\partial q^*} \quad (4.18)$$

where  $q$  stands for the angular variables  $(\lambda, \mu, \nu, \lambda_c, \mu_c, \nu_c)$  and  $p$  for the conjugated momenta  $(\Lambda, M, N, \Lambda_c, M_c, N_c)$ . This generating function of the transformation is obtained through

$$W = \int (H_1 - H_1^*) dt = \int H_{1per} dt, \quad (4.19)$$

where this integral is performed along the solution of the unperturbed part. This solution, corresponding to the free motion problem, is described in the next subsection.

#### 4.2.4 Unperturbed solutions

The free motion problem is solved by means of the corresponding equations of motion. It is convenient to include the effect of the dissipation in this free motion problem. Thus, the equations of motion must be modified to take into account the corresponding generalized forces. These equations are of the form (Stiefel and Scheifele 1971)

$$\dot{q} = \frac{\partial T_0}{\partial p} - Q_p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial T_0}{\partial q} + Q_q. \quad (4.20)$$

For our study, the required generalized equations of motion are (Getino and Ferrándiz 1997)

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \partial T_0 / \partial M - Q_M, & \dot{\mu}_c &= \partial T_0 / \partial M_c - Q_{M_c}, \\ \dot{\nu} &= \partial T_0 / \partial N - Q_N, & \dot{\nu}_c &= \partial T_0 / \partial N_c - Q_{N_c}, \\ \dot{N} &= -\partial T_0 / \partial \nu + Q_\nu, & \dot{N}_c &= -\partial T_0 / \partial \nu_c + Q_{\nu_c}, \\ \dot{M} &= -\partial T_0 / \partial \mu + Q_\mu, & \dot{M}_c &= -\partial T_0 / \partial \mu_c + Q_{\mu_c}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

and taking into account the expression of  $T_0$  (5.10) we can write

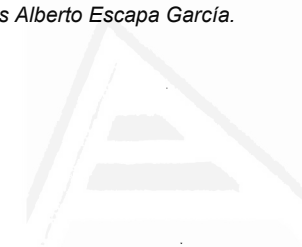
$$\begin{aligned}
 \dot{\mu} &= \frac{M}{A_m} + \frac{M}{A_m} \frac{K_c}{K} \cos(\nu + \nu_c) - Q_M, \\
 \dot{\nu} &= -\frac{N}{A_m} + \frac{N - N_c}{C_m} - \frac{N}{A_m} \frac{K_c}{K} \cos(\nu + \nu_c) - Q_N, \\
 \dot{N} &= \frac{1}{A_m} K K_c \sin(\nu + \nu_c) + Q_\nu, \\
 \dot{M} &= Q_\mu,
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

for the mantle, and

$$\begin{aligned}
 \dot{\mu}_c &= \frac{A}{A_c} \frac{M_c}{A_m} + \frac{M_c}{A_m} \frac{K}{K_c} \cos(\nu + \nu_c) - Q_{M_c}, \\
 \dot{\nu}_c &= -\frac{A}{A_c} \frac{N_c}{A_m} + \frac{1}{C_m} \left( N - \frac{C}{C_c} N_c \right) - \\
 &\quad - \frac{N_c}{A_m} \frac{K}{K_c} \cos(\nu + \nu_c) - Q_{N_c}, \\
 \dot{N}_c &= \frac{1}{A_m} K K_c \sin(\nu + \nu_c) + Q_{\nu_c}, \\
 \dot{M}_c &= Q_{\mu_c},
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

for the core. The generalized forces appearing in (4.23) are obtained in Getino and Ferrándiz (1997). The expressions of  $Q_i$  which will be used in the following are

$$\begin{aligned}
 Q_{\mu_c} &= -\frac{R}{A_m} \sin \sigma_c \left[ K \cos(\nu + \nu_c) + \frac{A}{A_c} K_c \right] + \\
 &\quad + \frac{R^*}{C_m} \cos \sigma_c \left[ N - \frac{C}{C_c} N_c \right] - \\
 &\quad - \frac{R'}{A_m} \sin \sigma_c K \sin(\nu + \nu_c), \\
 Q_{\nu_c} &= \frac{R^*}{C_m} \left[ N - \frac{C}{C_c} N_c \right],
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 Q_{N_c} &= -\frac{R}{A_m} \frac{K}{K_c} \sin(\nu + \nu_c) + \\
 &\quad + \frac{R'}{A_m} \left[ \frac{K}{K_c} \cos(\nu + \nu_c) + \frac{A}{A_c} \right], \\
 Q_\mu &= Q_\nu = Q_M = Q_N = 0.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Now, from (4.22), (4.23) and (4.24) we can proceed to solve the problem. By the definition of conjugated momenta,  $N$  and  $N_c$  are respectively the third components of  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{L}_c$  (see Eqs. (5.5) and (5.8)), thus (see Getino 1995b for more details):

$$\left. \begin{aligned} N &= C\omega_3 + C_c\delta\omega_3 \\ N_c &= C_c\omega_3 + C_c\delta\omega_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \frac{N - N_c}{C_m}, \\ \delta\omega_3 = \frac{C N_c - C_c N}{C_m C_c}. \end{cases} \tag{4.25}$$

Now, by means of the equations of motion (4.22), (4.23) and (4.24), and taking into account the expression of  $\delta\omega_3$  in (4.25) we have

$$\dot{N} - \dot{N}_c = \frac{R^*}{C_m} \left( \frac{C}{C_c} N_c - N \right) = R^* \delta\omega_3, \tag{4.26}$$

and then, from (4.25), we have

$$\dot{\omega}_3 = \frac{R^*}{C_m} \delta\omega_3. \tag{4.27}$$

On the other hand, from the second equation of (4.25), neglecting second order terms (product  $K K_c$  in equation of  $\dot{N}$ ) we obtain

$$\delta\dot{\omega}_3 = -\frac{C}{C_c} \frac{R^*}{C_m} \delta\omega_3, \tag{4.28}$$

and finally

$$\delta\omega_3 \rightarrow 0, \quad \omega_3 \rightarrow \text{constant} = \Omega. \tag{4.29}$$

Thus, taking into account Eqs. (4.25) and (4.29) we will write in the following  $N = C \Omega$  and  $N_c = C_c \Omega$ .

With regard to the remainder equations, which provide the free frequencies of the so-called polar motion, we define the variables

$$\begin{aligned} u &= M \sin \sigma (\sin \nu + i \cos \nu) = i K e^{-i\nu}, \\ v &= M_c \sin \sigma_c (\sin \nu_c - i \cos \nu_c) = -i K_c e^{i\nu_c}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

With the help of Eqs. (5.9), (4.22), (4.23) and (4.24) and after some algebra, the time derivatives of variables  $u$ ,  $v$  defined in Eq. (4.30) can be expressed in the form

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = i \mathbf{R} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

the matrix  $\mathbf{R}$  being

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 + \Omega \tilde{\Gamma} & r_4 - \Omega \tilde{\Gamma} \frac{A}{A_c} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

whose coefficients are

$$\begin{aligned} r_1 &= \Omega \left( \frac{A_c}{A_m} + e \frac{A}{A_m} \right), \\ r_2 &= -\Omega \frac{A}{A_m} (1 + e), \\ r_3 &= \Omega \frac{A_c}{A_m} (1 + e_c), \\ r_4 &= -\Omega \frac{A}{A_m} (1 + e_c), \end{aligned} \quad (4.33)$$

expressed as functions of the dynamical ellipticities

$$e = \frac{C - A}{A}, \quad e_c = \frac{C_c - A_c}{A_c}, \quad (4.34)$$

and  $\Gamma$  and  $\Gamma'$  are the dimensionless constants of dissipation, relative to viscous and electromagnetic coupling. The free frequencies corresponding to the solutions of system (4.31) are as follows

$$\sigma_1 = m_1, \quad \sigma_2 = m_2 + i d, \quad (4.35)$$

with

$$\begin{aligned} m_1 &= \Omega \frac{C - A}{A_m}, \\ m_2 &= -\Omega \left[ 1 + \frac{A}{A_m} \frac{C_c - A_c}{A_c} + \frac{A}{A_c} \Gamma' \right], \\ d &= \Omega \frac{A}{A_c} \Gamma, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Another useful result, which will be used in the computation of the generating function, is derived from the equations of motion corresponding to the variables  $\mu$  and  $\nu$  (see Eq. 4.22). From these equations we get

$$\dot{\mu} + \dot{\nu} = \Omega + \frac{M - N}{A_m} \left( 1 + \frac{K_c}{K} \cos(\nu + \nu_c) \right). \quad (4.37)$$

According to definition of canonical variables (4.7), the second term in the r.h.s. of Eq. (4.37) is of the second order in  $\sigma$ . Therefore, due to the smallness of variables  $\sigma$ ,  $\sigma_c \sim 10^{-6}$  rad (Nikitina 1990), neglecting this term we obtain the first order the relationship (Getino 1995b, Getino and Ferrándiz 1997)

$$\dot{\mu} + \dot{\nu} = \Omega. \quad (4.38)$$

### 4.3 Effect of the triaxiality of the Earth

This section is devoted to extending the Hamiltonian (4.14) corresponding to an axis-symmetric, two-layered Earth, in order to include the effect of the triaxiality. Notice that the Hamiltonian formalism has already been applied to a triaxial, two-layered model by González and Getino (1997) for the free problem, and by Getino, González and Escapa (2000), including the effect of dissipation.

In order to take into account this effect, the Hamiltonian (4.14) must be transformed in two ways: we include new terms in the perturbing potential corresponding to the geopotential coefficients  $C_{2,2}$  and  $S_{2,2}$ , which characterize the triaxiality of the Earth, and the kinetic energy  $T$  is also modified.

#### 4.3.1 Triaxial potential $V_{Tr}$

According to Kinoshita (1977), the additional potential is

$$V_{Tr} = \frac{G m^*}{a^{*3}} \frac{A - B}{4} \left( \frac{a^*}{r^*} \right)^3 P_2^2(\sin \delta) \cos 2\alpha. \quad (4.39)$$

Following Kinoshita, the angular part in (4.39) is developed in the form

$$\begin{aligned} V_{Tr} = & \eta k' \sum_{i,\tau=\pm 1} \left[ \frac{3}{4} \sin^2 \sigma B_i \cos(2\nu - \tau\Theta_i) + \right. \\ & + \sin \sigma C_i(\tau) \cos(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) + \\ & \left. + \frac{D_i(\tau)}{2} \cos(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

In expression (4.40) we have the coefficients

$$k' = 3 \frac{G m^*}{a^{*3}} \frac{2C - A - B}{2}, \quad \eta = \frac{B - A}{2C - A - B}, \quad (4.41)$$

$m^*$  and  $a^*$  being respectively the mass and semi-major axis concerning the perturbing body (Moon, Sun), and the functions  $B_i, C_i(\tau)$  and  $D_i(\tau)$  are given by:

$$\begin{aligned} B_i &= -\frac{1}{6} (3 \cos^2 I - 1) A_i^{(0)} - \frac{1}{2} \sin 2I A_i^{(1)} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin^2 I A_i^{(2)}, \\ C_i(\tau) &= -\frac{1}{4} \sin 2I A_i^{(0)} + \frac{\tau}{4} \sin I (1 + \tau \cos I) A_i^{(2)} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 + \tau \cos I) (-1 + 2\tau \cos I) A_i^{(1)}, \\ D_i(\tau) &= -\frac{1}{2} \sin^2 I A_i^{(0)} + \tau \sin I (1 + \tau \cos I) A_i^{(1)} - \\ &\quad - \frac{1}{4} (1 + \tau \cos I)^2 A_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

where  $\Theta_i$  is a linear combination of the orbital variables of Moon and Sun, and numerical values of the coefficients  $A_i^{(j)}$  can be found in Kinoshita (1977), and updated in Kinoshita and Souchay (1990).

### 4.3.2 Triaxial kinetic energy $T_{Tr}$

The kinetic energy corresponding to a triaxial, two-layered model has the following expression (González and Getino 1997)

$$\begin{aligned} T_{Tr} &= \frac{M^2}{2} \sin^2 \sigma \left( \frac{\sin^2 \nu}{A_m} + \frac{\cos^2 \nu}{B_m} \right) + \\ &\quad + \frac{M_c^2}{2} \sin^2 \sigma_c \left( \frac{A \sin^2 \nu}{A_m A_c} + \frac{B \cos^2 \nu}{B_m B_c} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2 C_m} \left( N^2 - 2 N N_c + \frac{C}{C_c} N_c^2 \right) + \\ &\quad + M M_c \sin \sigma \sin \sigma_c \left( \frac{\cos \nu \cos \nu_c}{B_m} - \frac{\sin \nu \sin \nu_c}{A_m} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

After a little re-arrangement this term can be rewritten in a more suitable form

$$T_{Tr} = T_0 + \Delta_{Tr} T, \quad (4.44)$$

where  $T_0$  is the kinetic energy for a symmetric Earth given by Eq. (5.10), and  $\Delta_{Tr}T$  represents the increment due to the triaxiality, which has the following expression

$$\begin{aligned} \Delta_{Tr}T = & \frac{A_m - B_m}{2A_m B_m} (M \sin \sigma \cos \nu + M_c \sin \sigma_c \cos \nu_c)^2 + \\ & + \frac{A_c - B_c}{2A_c B_c} M_c^2 \sin^2 \sigma_c \cos^2 \nu_c. \end{aligned} \quad (4.45)$$

### 4.3.3 Hamiltonian $H_{Tr}$ and first order integration

Gathering together the previous results, the Hamiltonian for a triaxial, two-layered Earth is expressed as

$$H_{Tr} = T_0 + \Delta_{Tr}T + V_0 + V_{Tr}. \quad (4.46)$$

It is interesting to break down this Hamiltonian into two parts in the form

$$H_{Tr} = H_S + \Delta_{Tr}H \rightarrow \begin{cases} H_S = T_0 + V_0, \\ \Delta_{Tr}H = \Delta_{Tr}T + V_{Tr}, \end{cases} \quad (4.47)$$

where  $H_S$  is the Hamiltonian corresponding to a symmetric Earth model, whose study has been described in section 2, and  $\Delta_{Tr}H$  encloses the terms arising from the triaxiality. Due to the small order of magnitude of  $\Delta_{Tr}H$  with respect to  $T_0$ , the triaxiality can be treated as a perturbation. Thus, performing a first order analytical integration described in the previous section, the periodic perturbations are given by the generating function

$$W = W_S + W_{Tr} \rightarrow \begin{cases} W_S = \int (V_0)_{per} dt \\ W_{Tr} = \int (\Delta_{Tr}T + V_{Tr})_{per} dt. \end{cases} \quad (4.48)$$

Periodic terms coming from  $W_S$ , corresponding to the symmetric case, have been studied in Getino and Ferrándiz (2000a). We will focus our attention on  $W_{Tr}$  to obtain the periodic terms due to the triaxiality.

## 4.4 Generating function $W_{Tr}$ and first simplifications

As described in sections 2 and 3, the generating function arising from the triaxiality is obtained by integrating the periodic part of  $\Delta_{Tr}H$  (4.47) over the solutions of  $H_0$  given in section 1.

In order to get  $W_{Tr}$ , a first simplification can be performed due to the smallness of angles  $\sigma$ ,  $\sigma_c \sim 10^{-6}$  rad. Neglecting second order terms in  $\sigma$



and  $\sigma_c$ , in expressions (4.40) and (4.45) for  $V_{Tr}$  and  $\Delta_{Tr}T$ , the generating function reduces to

$$W_{Tr} = \eta k' \sum_{i,\tau=\pm 1} \int \left[ \sin \sigma C_i(\tau) \cos(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) + \frac{D_i(\tau)}{2} \cos(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) \right] dt. \quad (4.49)$$

To carry out this integration, we follow the same technique developed in Getino and Ferrándiz (1997), which is summarized here.

#### 4.4.1 Auxiliary integrals

Let us begin by computing two integrals which will be very useful in the development of this technique. These integrals are written as

$$\begin{aligned} I_3 &= \int M \sin \sigma \cos(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) dt, \\ I_4 &= \int M_c \sin \sigma_c \cos(\mu + \nu - \nu_c - \tau\Theta_i) dt. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Let  $P$  and  $Q$  be new integrals whose imaginary parts are respectively  $I_3$  and  $I_4$ , that is,  $I_3 = \text{Im}\{P\}$ ,  $I_4 = \text{Im}\{Q\}$ , then defined by

$$\begin{aligned} P &= \int i M \sin \sigma e^{i\nu} e^{ih} dt, \\ Q &= \int i M_c \sin \sigma_c e^{-i\nu_c} e^{ih} dt, \end{aligned} \quad (4.51)$$

where we have introduced the notation

$$h = \mu + \nu - \tau\Theta_i. \quad (4.52)$$

On the other hand, the variables  $u$ ,  $v$  in Eq.(4.30) can be expressed as

$$u = i M \sin \sigma e^{-i\nu}, \quad v = -i M_c \sin \sigma_c e^{i\nu_c}. \quad (4.53)$$

From Eqs. (4.51) and (4.53) the new integrals are written as

$$P = - \int u^* e^{ih} dt, \quad Q = \int v^* e^{ih} dt, \quad (4.54)$$

where  $u^*$ ,  $v^*$  represent respectively the complex conjugates of  $u$ ,  $v$ .

Now let us pay attention to the system of equations for the free motion given by Eq. (4.31). This system can be transformed into

$$\begin{pmatrix} \int \dot{u}^* e^{ih} dt \\ \int \dot{v}^* e^{ih} dt \end{pmatrix} = -i \mathbf{R}^* \begin{pmatrix} \int u^* e^{ih} dt \\ \int v^* e^{ih} dt \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

The l.h.s. of Eq. (4.55) can be integrated by parts, and we obtain

$$\begin{pmatrix} \int \dot{u}^* e^{ih} dt \\ \int \dot{v}^* e^{ih} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* e^{ih} \\ v^* e^{ih} \end{pmatrix} - i n_h \begin{pmatrix} \int u^* e^{ih} dt \\ \int v^* e^{ih} dt \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

where, taking into account Eq.(4.38),

$$n_h = \frac{dh}{dt} = \dot{\mu} + \dot{\nu} - \tau \dot{\Theta}_i = \Omega - \tau n_i. \quad (4.57)$$

From Eqs. (4.51), (4.55) and (4.56) we get

$$\begin{pmatrix} P \\ -Q \end{pmatrix} = \frac{(\mathbf{R}^* - n_h \mathbf{1})^\alpha}{|\mathbf{R}^* - n_h \mathbf{1}|} \begin{pmatrix} -i u^* e^{ih} \\ -i v^* e^{ih} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

where the superscript  $\alpha$  stands for the adjoint matrix, and  $\mathbf{1}$  is the unit matrix. As the eigenvalues of matrix  $\mathbf{R}^*$  are the complex conjugates of those of matrix  $\mathbf{R}$ , being these ones the free frequencies  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  given by Eqs. (4.35) and (4.36), taking into account the expression of matrix  $\mathbf{R}$  in Eqs. (4.32) and (4.33), we have that

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}^* - n_h \mathbf{1}| &= (n_h - \sigma_1^*)(n_h - \sigma_2^*), \\ (\mathbf{R}^* - n_h \mathbf{1})^\alpha &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -n_h + r_4 - \Omega \frac{A}{A_c} \tilde{\Gamma}^* & -r_2 \\ -r_3 - \Omega \tilde{\Gamma}^* & -n_h + r_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

then, taking into account Eq. (4.53), the integrals  $P$  and  $Q$  are given by

$$\begin{aligned} P &= -M \sin \sigma e^{i(h+\nu)} \frac{c_{11}}{(n_h - \sigma_1^*)(n_h - \sigma_2^*)} + \\ &\quad + M_c \sin \sigma_c e^{i(h-\nu_c)} \frac{c_{12}}{(n_h - \sigma_1^*)(n_h - \sigma_2^*)}, \\ Q &= -M \sin \sigma e^{i(h+\nu)} \frac{c_{21}}{(n_h - \sigma_1^*)(n_h - \sigma_2^*)} + \\ &\quad + M_c \sin \sigma_c e^{i(h-\nu_c)} \frac{c_{22}}{(n_h - \sigma_1^*)(n_h - \sigma_2^*)}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

Finally, taking the imaginary parts in Eq. (4.60), and neglecting second order terms in ellipticities and dissipation, expressions of integrals  $I_3$ ,  $I_4$  are obtained in the form

$$\begin{aligned} I_3 &= M \sin \sigma \left[ \hat{F}_1^a \sin(h + \nu) + \hat{F}_1^b \cos(h + \nu) \right] + \\ &\quad + M_c \sin \sigma_c \left[ \hat{F}_2^a \sin(h - \nu_c) + \hat{F}_2^b \cos(h - \nu_c) \right], \\ I_4 &= M \sin \sigma \left[ \hat{G}_1^a \sin(h + \nu) + \hat{G}_1^b \cos(h + \nu) \right] + \\ &\quad + M_c \sin \sigma_c \left[ \hat{G}_2^a \sin(h - \nu_c) + \hat{G}_2^b \cos(h - \nu_c) \right], \end{aligned} \quad (4.61)$$

where, with the help of the notation

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= n_h - m_1 = \Omega - \tau n_i - m_1, \\ \hat{f}_2 &= n_h - m_2 = \Omega - \tau n_i - m_2, \end{aligned} \quad (4.62)$$

the following functions have been defined:

$$\begin{aligned} \hat{F}_1^a &= \frac{n_h - r_4 + \Omega \frac{A}{A_c} \Gamma'}{\hat{f}_1 \hat{f}_2}, \\ \hat{F}_1^b &= -\Omega \Gamma \frac{A}{A_c} \frac{n_h - r_4 - \hat{f}_2}{\hat{f}_1 \hat{f}_2^2}, \\ \hat{G}_1^a &= \frac{-r_3 - \Omega \Gamma'}{\hat{f}_1 \hat{f}_2}, \\ \hat{G}_1^b &= -\Omega \Gamma \frac{\hat{f}_2 - \frac{A}{A_c} r_3}{\hat{f}_1 \hat{f}_2^2}, \\ \hat{F}_2^a &= \frac{-r_2}{\hat{f}_1 \hat{f}_2}, \\ \hat{F}_2^b &= \Omega \Gamma \frac{A}{A_c} \frac{r_2}{\hat{f}_1 \hat{f}_2^2}, \\ \hat{G}_2^a &= \frac{n_h - r_1}{\hat{f}_1 \hat{f}_2}, \\ \hat{G}_2^b &= -\Omega \Gamma \frac{A}{A_c} \frac{n_h - r_1}{\hat{f}_1 \hat{f}_2^2}. \end{aligned} \quad (4.63)$$



### 4.4.2 Generating function

From expressions (4.49) and (4.40), the term of the generating function due to the triaxiality can be divided into two parts

$$W_{Tr} = \int V_{Tr} dt = W_C + W_D, \quad (4.64)$$

with

$$\begin{aligned} W_C &= \eta k' \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \int \sin \sigma \cos(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) dt, \\ W_D &= \eta k' \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{D_i(\tau)}{2} \int \cos(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) dt. \end{aligned} \quad (4.65)$$

The term  $W_D$  is the same as in Kinoshita (1977) for the rigid Earth. Taking into account Eq. (4.38), it is straightforward to obtain

$$W_D = \frac{\eta k'}{2} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{D_i(\tau)}{2\Omega - \tau n_i} \sin(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i), \quad (4.66)$$

were  $n_i = \dot{\Theta}_i$ . Now, by means of integral  $I_3$  (4.61), the term  $W_C$  is expressed as

$$\begin{aligned} W_C &= \eta k' \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \left[ \sin \sigma \left( \hat{F}_1^a \sin a_1 + \hat{F}_1^b \cos a_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_c}{M} \sin \sigma_c \left( \hat{F}_2^a \sin a_2 + \hat{F}_2^b \cos a_2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.67)$$

with the arguments

$$a_1 = \mu + 2\nu - \tau\Theta_i, \quad a_2 = \mu + \nu - \nu_c - \tau\Theta_i. \quad (4.68)$$

## 4.5 Forced Nutations

The periodic perturbations, forced nutations, are obtained through the generating function by means of the well-known relationships

$$\begin{aligned} \Delta_{Tr}(\mu, \nu, \lambda) &= \frac{\partial W_{Tr}}{\partial(M, N, \Lambda)}, \\ \Delta_{Tr}(M, N, \Lambda) &= \frac{-\partial W_{Tr}}{\partial(\mu, \nu, \lambda)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Next we compute the periodic perturbations of the fundamental planes, that is to say, the plane perpendicular to the angular momentum vector (or Andoyer plane), and the plane perpendicular to the figure axis of the Earth (figure plane or equatorial plane).

### 4.5.1 Nutations of the Andoyer plane

The longitude of the node and the inclination of this plane are given respectively by  $\lambda$  and  $I = \cos^{-1}(\Lambda/M)$ . The nutations corresponding to these variables, known as Poisson terms, are obtained through the equations (Kinoshita 1977)

$$\begin{aligned}\Delta_{Tr}\lambda &= \frac{-1}{M \sin I} \frac{\partial W_{Tr}}{\partial I}, \\ \Delta_{Tr}I &= \frac{1}{M \sin I} \left( \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \lambda} - \cos I \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \mu} \right).\end{aligned}\quad (4.70)$$

Neglecting second order terms in small parameters, the contribution of these nutations comes from the term  $W_D$  of the generating function, which corresponds to the rigid perturbation. Using the angles  $\psi = -\lambda$ ,  $\varepsilon = -I$  and taking into account the relationships between functions  $C_i(\tau)$  and  $D_i(\tau)$  (see Kinoshita 1977), the Poisson terms at the first order are as follows

$$\begin{aligned}\Delta_{Tr}^D\psi &= -\eta \frac{k_0}{\sin \varepsilon} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_i(\tau)}{2\Omega - \tau n_i} \sin(2\phi' - \tau\Theta_i), \\ \Delta_{Tr}^D\varepsilon &= \eta k_0 \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_i(\tau)}{2\Omega - \tau n_i} \cos(2\phi' - \tau\Theta_i),\end{aligned}\quad (4.71)$$

with

$$\begin{aligned}k_0 &= \frac{k'_0}{M} \simeq \frac{3Gm^*}{a^{*3}\Omega} \frac{C-A}{A}, \\ \phi' &= \mu + \nu.\end{aligned}\quad (4.72)$$

Expressions (4.71) are the same as those of Kinoshita (1977) for the rigid Earth. That is, the presence of the liquid core and the effects of dissipation do not influence the nutations of the Andoyer plane, which is consistent with the fact that the motion of the angular momentum axis does not depend on the internal constitution of the Earth (Moritz and Mueller 1987).



### 4.5.2 Nutations of the figure plane

The longitude of the node,  $\lambda_f$ , and the inclination  $I_f$  of this plane are given to the first order by (Kinoshita 1977)

$$\lambda_f = \lambda + \frac{\sigma}{\sin I} \sin \mu, \quad I_f = I + \sigma \cos \mu. \quad (4.73)$$

Following Kinoshita, the periodic perturbations of the increments  $\lambda_f - \lambda$ ,  $I_f - I$ , called Oppolzer terms, are given to the first order by

$$\begin{aligned} \Delta_{Tr}(\lambda_f - \lambda) &= \frac{1}{\sin I} \frac{1}{M \sin \sigma} \times \left[ \sin \mu \left( \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \mu} \right) + \sigma \cos \mu \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \sigma} \right], \\ \Delta_{Tr}(I_f - I) &= \frac{1}{M \sin \sigma} \times \left[ \cos \mu \left( \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \mu} \right) - \sigma \sin \mu \frac{\partial W_{Tr}}{\partial \sigma} \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Neglecting second order, the contribution to the Oppolzer terms comes from  $W_C$ . From Eq. (4.67), after some algebra we finally obtain, in terms of the angles  $\psi_f = -\lambda_f$ ,  $\varepsilon_f = -I_f$ , the following expressions

$$\begin{aligned} \Delta_{Tr}(\psi_f - \psi) &= \frac{\eta k_0}{\sin \varepsilon} \sum_{i, \tau = \pm 1} C_i(\tau) \times \\ &\quad \times \left[ \hat{F}_1^a \sin(2\phi' - \tau\Theta_i) + \hat{F}_1^b \cos(2\phi' - \tau\Theta_i) \right], \\ \Delta_{Tr}(\varepsilon_f - \varepsilon) &= -\eta k_0 \sum_{i, \tau = \pm 1} C_i(\tau) \times \\ &\quad \times \left[ \hat{F}_1^a \cos(2\phi' - \tau\Theta_i) - \hat{F}_1^b \sin(2\phi' - \tau\Theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

### 4.5.3 Comparison with the rigid Earth results of Kinoshita (1977)

As we have pointed out, Poisson terms (4.71) are the same as in the rigid case. In order to compare Oppolzer terms (4.75) with those of Kinoshita (1977)

for the rigid case, we must translate his results to our notation. Namely, the Oppolzer terms, due to the triaxiality of the Earth, of Kinoshita (1977), can be written as

$$\begin{aligned}\Delta_{Tr}(\psi_f - \psi)_{rigid} &= \frac{\eta k_0}{\sin \varepsilon} \times \\ &\times \sum_{i, \tau = \pm 1} \frac{C_i(\tau) \sin(2\phi' - \tau\Theta_i)}{\dot{\mu}_{rigid} + 2\dot{\nu}_{rigid} - \tau n_i}, \\ \Delta_{Tr}(\varepsilon_f - \varepsilon)_{rigid} &= -\eta k_0 \times \\ &\times \sum_{i, \tau = \pm 1} \frac{C_i(\tau) \cos(2\phi' - \tau\Theta_i)}{\dot{\mu}_{rigid} + 2\dot{\nu}_{rigid} - \tau n_i},\end{aligned}\tag{4.76}$$

where  $\dot{\mu}_{rigid}$  and  $\dot{\nu}_{rigid}$  are given by (see Kinoshita 1977)

$$\dot{\mu}_{rigid} \simeq \frac{C}{A}\Omega, \quad \dot{\nu}_{rigid} \simeq -\frac{C-A}{A}\Omega.\tag{4.77}$$

From Eqs. (4.75) and (4.76) it follows that Oppolzer terms are substantially different for the rigid and non-rigid cases. On the one hand, in the non-rigid case there are in-phase and out-of-phase terms. Out-of-phase terms come from the function  $\hat{F}_1^b$ , that, according to Eq. (4.63), is produced by the dissipation at the CMB (through the coefficients  $\Gamma$ ). On the other hand, amplitudes of in-phase terms, given by  $\hat{F}_1^a$ , are not the same as in the rigid case.

We can check that our non-rigid model coincides with that of Kinoshita (1977) when removing the non-rigidity of the Earth. With this aim, we must take into account that to convert our model into the rigid one the next steps must be followed. Firstly, in the rigid Earth there is no dissipation of electromagnetic or viscous origin, so we must take  $\tilde{\Gamma} = 0$ . Secondly, the rigid Earth is composed of only one layer, the mantle, therefore we must take  $e_c = 0$  and  $A_m = A$ . Bearing these considerations in mind we arrive at

$$\begin{aligned}\hat{F}_1^a)_{rigid} &= \left( \Omega - \tau n_i - \Omega \frac{C-A}{A} \right)^{-1}, \\ \hat{F}_b^a)_{rigid} &= 0,\end{aligned}\tag{4.78}$$

that, with the help of Eq. (4.77), can be re-written as

$$\begin{aligned}\hat{F}_1^a \Big|_{rigid} &= \left( \dot{\mu} \Big|_{rigid} + 2 \dot{\nu} \Big|_{rigid} - \tau n_i \right)^{-1}, \\ \hat{F}_b^a \Big|_{rigid} &= 0.\end{aligned}\quad (4.79)$$

Substituting these functions into Eqs. (4.75) we recover the Oppolzer terms given by Kinoshita (1977), Eqs. (4.76).

In order to gain more insight into the difference between the rigid and non-rigid situations, let us introduce the ratio between the in-phase amplitude for the rigid and non-rigid nutations corresponding to the same argument ( $2\phi' - \tau\Theta_i$ ). Taking into account Eqs. (4.36), (4.62), (4.63) and (4.79) we obtain

$$\begin{aligned}\frac{\hat{F}_1^a \Big|_{2\phi' - \tau\Theta_i}}{\hat{F}_1^a \Big|_{rigid}} &= \frac{(1 - e - \tau n_i / \Omega)}{(1 - A/A_m e - \tau n_i / \Omega)} \times \\ &\times \frac{[1 + A/A_m (1 + e_c) - \tau n_i / \Omega]}{(2 + A/A_m e_c - \tau n_i / \Omega)}.\end{aligned}\quad (4.80)$$

This equation shows that the ratio between the in-phase amplitudes for the non-rigid and rigid models is a function of some Earth parameters and of the frequency  $n_i$  corresponding to each term. It is important to note that due to the functional dependence in Eq. (4.80) and the values of  $n_i$ , there is no possibility of having small divisors, as happens to the analogous ratio for the usual long-period terms coming from  $J_2$ . That is, there is no noticeable resonant effect. The former ratio varies very slightly in the band of the disturbing frequencies  $n_i$  and is nearly constant. A straightforward Taylor expansion of this ratio with respect to the ellipticities and the frequencies  $n_i$  provides that its value deviates from 1 in about  $A_c/2 A_m$ . This last coefficient is a common factor of terms in  $n_i$  and the ellipticities, that have therefore a small effect.

The ratio given by Eq. (4.80) is not a "transfer function" (the ratio of the whole amplitudes of non-rigid and rigid nutations for each period, gathering both Poisson and Oppolzer terms). The true expression of the transfer function can easily be computed from Eqs. (4.83), (4.76) and (4.71). This transfer function is frequency-dependent from the mathematical perspective, although in practice is nearly equal to  $1 + A_c/A_m \simeq 1.123$  in the band of the relevant disturbing frequencies.



#### 4.5.4 Reference to Greenwich prime meridian

Note that the angle  $\phi' = \mu + \nu$  refers to the principal axis of the Earth corresponding to the minimum moment of inertia, according to the definition of the Andoyer angle  $\nu$  (see Kinoshita 1977, Getino 1995a). The angle  $\phi$  of sidereal rotation of the Earth, referred to the Greenwich prime meridian, is obtained by a phase shift in angle  $\phi'$  (Bretagnon et al. 1997). Thus, we can write a relationship of the form

$$2\phi = 2\phi' + g. \quad (4.81)$$

This phase shift is related to the geopotential coefficients  $J_2$ ,  $C_{2,2}$  and  $S_{2,2}$  by expressions

$$\eta \cos g = \frac{2C_{2,2}}{J_2}, \quad \eta \sin g = \frac{2S_{2,2}}{J_2}. \quad (4.82)$$

Finally, introducing Eq. (4.82) in expressions (4.71) and (4.75) we get the following expressions for the nutations of the figure axis

$$\begin{aligned} \Delta_{Tr}\varepsilon_f &= \frac{2k_0}{J_2} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \left[ \frac{1}{2\Omega - \tau n_i} - \hat{F}_1^a \right] \times \\ &\quad \times [C_{2,2} \cos(2\phi - \tau\Theta_i) - S_{2,2} \sin(2\phi - \tau\Theta_i)] + \\ &\quad + \frac{2k_0}{J_2} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \hat{F}_1^b \times \\ &\quad \times [C_{2,2} \sin(2\phi - \tau\Theta_i) + S_{2,2} \cos(2\phi - \tau\Theta_i)], \\ \Delta_{Tr}\psi_f &= \frac{-2k_0}{J_2 \sin \varepsilon} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \left[ \frac{1}{2\Omega - \tau n_i} - \hat{F}_1^a \right] \times \\ &\quad \times [C_{2,2} \sin(2\phi - \tau\Theta_i) + S_{2,2} \cos(2\phi - \tau\Theta_i)] - \\ &\quad - \frac{2k_0}{J_2 \sin \varepsilon} \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(\tau) \hat{F}_1^b \times \\ &\quad \times [C_{2,2} \cos(2\phi - \tau\Theta_i) - S_{2,2} \sin(2\phi - \tau\Theta_i)]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

## 4.6 Nutation Series

We proceed in this section to a numerical computation of the forced nutations given by Eqs. (4.71) for the angular momentum axis and (4.83) for the figure axis. First of all we take the following numerical values from the IERS standards (McCarty 1996)

| Parameter     | IERS standards                              |
|---------------|---------------------------------------------|
| $\Omega$      | $7.292115 \times 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$ |
| $\varepsilon$ | 84381."412                                  |
| $J_2$         | $1082.6359 \times 10^{-6}$                  |
| $C_{2,2}$     | $1.574410 \times 10^{-6}$                   |
| $S_{2,2}$     | $-0.903757 \times 10^{-6}$                  |

The nutations depend on a set of parameters characterizing the Earth model used, through coefficient  $r_4$ ,  $\Gamma$  and functions  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  appearing in definition of functions  $F_1^{a,b}$ , as well as the coefficients  $k_{0M}$  and  $k_{0S}$  of the perturbing potential. Analytical formulae of the forced nutations (4.71) and (4.83) can be expressed as functions of the following set of basic Earth parameters (BEP)

$$BEP = \{P_{CW}, P_{FCN}, A_c/A_m, \Gamma, k_{0M}, k_{0S}\},$$

where  $P_{CW}$  and  $P_{FCN}$  are respectively the periods corresponding to the free frequencies  $m_1$  and  $m_2$  (4.36), that is to say,

$$P_{CW} = \left[ e \frac{A}{A_m} \right]^{-1}, \quad P_{FCN} = \left[ \frac{A}{A_m} e_c + \frac{A}{A_c} \Gamma \right]^{-1}, \quad (4.84)$$

$A_c/A_m$  is the ratio between principal moments of core and mantle,  $\Gamma$  is the coefficient of the dissipation and  $k_{0M}, k_{0S}$  are the coefficients of the perturbing potential (4.72) for the Moon and Sun. Finally, by means of Eqs. (4.33), (4.36), (4.57), (4.62), (4.63) and (4.84) we get the expressions

$$\begin{aligned} \hat{F}_1^a &= \frac{2 + A_c/A_m + P_{FCN}^{-1} - \tau n_i/\Omega}{\Omega (1 - P_{CW}^{-1} - \tau n_i/\Omega) (2 + P_{FCN}^{-1} - \tau n_i/\Omega)}, \\ \hat{F}_1^b &= \frac{-\Gamma (1 + A_c/A_m)}{\Omega (1 - P_{CW}^{-1} - \tau n_i/\Omega) (2 + P_{FCN}^{-1} - \tau n_i/\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Values of BEP, taken from Getino and Ferrándiz (2000b), are the following

| Parameter | Getino and Ferrándiz |
|-----------|----------------------|
| $P_{CW}$  | 400.7 days           |
| $P_{FCN}$ | 432.94 days          |
| $A_c/A_m$ | 0.123234             |
| $\Gamma$  | $4.1 \times 10^{-6}$ |
| $k_{0M}$  | 7567."870647 / Jcy   |
| $k_{0S}$  | 3474."613747 / Jcy   |

With these parameters the amplitudes of the nutation series can be evaluated. First of all, we show in Table 4.1 the amplitudes corresponding to the dissipative terms in obliquity (depending on function  $\hat{F}_1^b$ ), where only the main terms are listed. As expected, these values are very small, so that the effect of the dissipation on the semi-diurnal terms can be disregarded in the future.

Table 4.1: Semi-Diurnal terms: Nutations in Obliquity. Dissipative terms (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\phi$ | Argument |       |     |     |          | Figure Axis    |                |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|----------------|----------------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ | $C_{22}(\sin)$ | $S_{22}(\cos)$ |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .029           | -.016          |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .003           | -.002          |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | -.009          | .005           |
| 2      | -1       | 0     | 0   | 0   | 0        | .001           | -.001          |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | -.024          | .013           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -1       | -.004          | .002           |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | -.004          | .002           |

Main amplitudes of non-dissipative terms are listed in Tables 4.2 (obliquity) and 4.4 (longitude), where we have included the amplitudes for angular momentum axis (Poisson terms) and figure axis. Finally in Tables 4.3 and 4.5 we compare our results for the amplitudes of the figure axis with those of Bretagnon et al. (1997) and Souchay et al. (1999) for the rigid Earth

## Acknowledgments

This work has been partially supported by Spanish Projects CICYT, Project No ESP97-1816-C04-02 and *Junta de Castilla y León*, Project No. VA11/99, and Spanish Projects I+D+I, Project No AYA2000 1787. A. Escapa has been fully supported by a F.P.I. grant of the *Junta de Castilla y León*.

Table 4.2: Semi-Diurnal terms: Nutations in Obliquity (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\phi$ | Argument |       |     |     |          | Period<br>(days) | Angular Momentum     |                      | Figure Axis          |                      | Alias<br>period |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | $C_{22}(\text{cos})$ | $S_{22}(\text{sin})$ | $C_{22}(\text{cos})$ | $S_{22}(\text{sin})$ |                 |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .498634          | 12.670               | 7.273                | -14.297              | -8.207               | $\infty$        |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .498598          | 1.717                | .986                 | -1.938               | -1.112               | -6798.36        |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | .500000          | -4.202               | -2.412               | 4.768                | 2.737                | 182.62          |
| 2      | 0        | -1    | -2  | 2   | -2       | .500685          | -.246                | -.141                | .280                 | .161                 | 121.75          |
| 2      | -1       | 0     | 0   | 0   | 0        | .507826          | .721                 | .414                 | -.844                | -.485                | 27.55           |
| 2      | 1        | 0     | -2  | 0   | -2       | .507985          | .259                 | .148                 | -.304                | -.174                | 27.09           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | .517526          | -9.351               | -5.367               | 11.385               | 6.535                | 13.66           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -1       | .517569          | -1.763               | -1.012               | 2.147                | 1.232                | 13.63           |
| 2      | 1        | 0     | -2  | -2  | -2       | .526074          | -.345                | -.198                | .435                 | .250                 | 9.56            |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | .527441          | -1.824               | -1.047               | 2.312                | 1.327                | 9.13            |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -1       | .527474          | -.344                | -.197                | .436                 | .250                 | 9.12            |
| 2      | 0        | 0     | -2  | -2  | -2       | .536299          | -.296                | -.170                | .389                 | .223                 | 7.10            |
| 2      | -2       | 0     | -2  | 0   | -2       | .537720          | -.246                | -.141                | .325                 | .186                 | 6.86            |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 1        | .498671          | -.251                | -.144                | .283                 | .162                 | 6798.36         |
| 2      | 0        | 0     | 2   | -2  | 2        | .497277          | .179                 | .103                 | -.201                | -.115                | -182.62         |
| 2      | 1        | 0     | 0   | 0   | 0        | .489770          | .695                 | .399                 | -.757                | -.435                | -27.55          |
| 2      | 0        | 0     | 2   | 0   | 2        | .481074          | .374                 | .214                 | -.393                | -.225                | -13.66          |
| 2      | 0        | 0     | 2   | 0   | 1        | .481036          | .239                 | .137                 | -.251                | -.144                | -13.63          |

Table 4.3: Comparison with rigid Earth theories. Figure axis. Obliquity  $\Delta\epsilon_f$  (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\phi$ | Argument |       |     |     |          | Period<br>(days) | Bretagnon et al. |       | Souchay et al. |       | Authors |        |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|------------------|------------------|-------|----------------|-------|---------|--------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | (cos)            | (sin) | (cos)          | (sin) | (cos)   | (sin)  |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | .527441          | 2.05             | 1.17  | 2.06           | 1.18  | 2.312   | 1.327  |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -1       | .517569          | 1.90             | 1.09  | 1.88           | 1.08  | 2.147   | 1.232  |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | .517526          | 10.08            | 5.79  | 9.89           | 5.68  | 11.385  | 6.535  |
| 2      | -1       | 0     | 0   | 0   | 0        | .507826          | -0.74            | -0.43 | -0.72          | -0.42 | -.844   | -.485  |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | .500000          | 4.22             | 2.42  | 4.12           | 2.36  | 4.768   | 2.737  |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .498634          | -12.67           | -7.27 | -12.40         | -7.12 | -14.297 | -8.207 |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .498598          | -1.72            | -0.99 | -1.66          | -0.95 | -1.938  | -1.112 |

Table 4.4: Semi-Diurnal terms: Nutations in Longitude (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\phi$ | Argument |       |     |     |          | Period<br>(days) | Angular Momentum |                | Figure Axis    |                | Alias<br>period |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|------------------|------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | $C_{22}(\sin)$   | $S_{22}(\cos)$ | $C_{22}(\sin)$ | $S_{22}(\cos)$ |                 |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .498634          | -31.853          | 18.285         | 35.944         | -20.632        | $\infty$        |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .498598          | -4.318           | 2.478          | 4.872          | -2.796         | -6798.36        |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | .500000          | 10.565           | -6.064         | -11.987        | 6.881          | 182.62          |
| 2      | 0        | -1    | -2  | 2   | -2       | .500685          | .620             | -.355          | -.705          | .404           | 121.75          |
| 2      | -1       | 0     | 0   | 0   | 0        | .507826          | -1.814           | 1.041          | 2.124          | -1.219         | 27.55           |
| 2      | 1        | 0     | -2  | 0   | -2       | .507985          | -.652            | .374           | .764           | -.438          | 27.09           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | .517526          | 23.509           | -13.494        | -28.622        | 16.430         | 13.66           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -1       | .517569          | 4.433            | -2.545         | -5.399         | 3.099          | 13.63           |
| 2      | 1        | 0     | -2  | -2  | -2       | .526074          | .869             | -.498          | -1.095         | .628           | 9.56            |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | .527441          | 4.587            | -2.633         | -5.812         | 3.336          | 9.13            |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -1       | .527474          | .864             | -.496          | -1.096         | .629           | 9.12            |
| 2      | 0        | 0     | -2  | -2  | -2       | .536299          | .744             | -.427          | -.978          | .561           | 7.10            |
| 2      | -2       | 0     | -2  | 0   | -2       | .537720          | .618             | -.355          | -.817          | .469           | 6.86            |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 1        | .498671          | .631             | -.362          | -.712          | .408           | 6798.36         |
| 2      | 0        | 0     | 2   | -2  | 2        | .497277          | -.452            | .259           | .507           | -.291          | -182.62         |
| 2      | 1        | 0     | 0   | 0   | 0        | .489770          | -1.749           | 1.004          | 1.905          | -1.093         | -27.55          |
| 2      | 0        | 0     | 2   | 0   | 2        | .481074          | -.940            | .539           | .988           | -.567          | -13.66          |
| 2      | 0        | 0     | 2   | 0   | 1        | .481036          | -.602            | .345           | .633           | -.363          | -13.63          |

Table 4.5: Comparison with rigid Earth theories. Figure axis.

Longitude  $\Delta\psi_f$  (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\phi$ | Argument |       |     |     |          | Period<br>(days) | Bretagnon et al. |        | Souchay et al |        | Authors |         |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|------------------|------------------|--------|---------------|--------|---------|---------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | (sin)            | (cos)  | (sin)         | (cos)  | (sin)   | (cos)   |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | .527441          | -5.15            | 2.96   | -5.10         | 2.93   | -5.812  | 3.336   |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | 1        | .517569          | -4.32            | 2.48   | -4.71         | 2.70   | -5.399  | 3.099   |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | .517526          | -25.36           | 14.55  | -25.53        | 14.65  | -28.622 | 16.430  |
| 2      | -1       | 0     | 0   | 0   | 0        | .507826          | 1.88             | -1.08  | 1.81          | -1.04  | 2.124   | -1.219  |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | .500000          | -10.63           | 6.10   | -10.45        | 6.00   | -11.987 | 6.881   |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .498634          | 31.85            | -18.28 | 31.82         | -18.24 | 35.944  | -20.632 |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .498598          | 4.32             | -2.48  | 4.28          | -2.45  | 4.872   | -2.796  |

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 5

# Indirect effect of the triaxiality in the Hamiltonian theory for the rigid Earth nutations<sup>1</sup>

In this investigation we determine a new contribution to the nutation series due to an indirect effect of the triaxiality of the rigid Earth. We undertake this work in the context of the Hamiltonian theory for the rigid Earth, developed by Kinoshita (1977) and recently updated by Souchay et al. (1999). To do this, we express the potential energy in terms of the action-angle variables for the triaxial Earth. Then, we work out analytical formulae for the new contributions, showing that their numerical values are within the truncation level adopted by REN-2000 (Souchay et al. 1999), which was fixed to  $0.1 \mu\text{as}$ .

### 5.1 Introduction

In the last years, a group led by Dr. Souchay has carried out an extensive reconstruction of the Hamiltonian theory of the nutation for the rigid Earth (Souchay and Kinoshita 1996, 1997; Folgueira et al. 1998a, 1998b; Souchay et al. 1999). The purpose of these studies was to update the pioneering investigations of Kinoshita (1977) and Kinoshita and Souchay (1990), in order to achieve a precision at the level of  $0.1 \mu\text{as}$  (microarcsecond) for each individual term of the nutation series of the Earth. Hence, it has been necessary to perform successive enhancements in the basic rigid Earth theory by

---

<sup>1</sup>Escapa, A., J. Getino y J. M. Ferrándiz, *Astronomy & Astrophysics*, 389, 1047-1054, 2002.

recalculating more precisely known contributions, or by including new effects previously disregarded, like the study of coupling mechanisms, influence of the planets, etc. (see Souchay et al. 1999 or Souchay 2000, for a complete description). The results of these works are collected in Souchay et al. (1999), where the tables for the resulting rigid Earth nutation (REN-2000) seemed to be definitive. As it is pointed out by Souchay et al. (1999), the tables REN-2000 'catch all the coefficients up to  $0.1 \mu as$ '.

One of the mentioned enhancements consists of incorporating the effects of the triaxiality of the Earth. As it is well-known, the Earth is not a perfect symmetrical body; this fact gives rise to the appearance of the non-zonal harmonics of the geopotential expansion, which affects the Earth nutations causing the so-called short period nutations, mainly diurnal and subdiurnal. The influence of these terms was studied by Kinoshita (1977), Kinoshita and Souchay (1990), Souchay and Kinoshita (1997) and Souchay et al. (1999) for the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  coefficients and by Folgueira et al. (1998a, 1998b) for the non-zonal coefficients of third and fourth degree. Indeed, as it is remarked in Souchay (2000), the short-period nutations terms are one of the most important new contributions allowing the REN-2000 tables to reach the sub-microsecond level.

Those works include the effect of the triaxiality in a direct way, that is to say, they compute the nutations terms arising from the potential terms caused by the triaxiality (non-zonal harmonics). However, the triaxiality also modifies the expression of the kinetic energy that is fundamental in the application of perturbation methods. Because of this fact, the action-angle variables for the torque-free motion of a triaxial Earth do not coincide with the Andoyer variables (Kinoshita 1972), which are action-angle variables only for the free motion of a symmetrical rigid body. Since Andoyer variables are not action-angle variables, to apply the Hori perturbation method (Hori 1966) it is convenient to expand the disturbing function in terms of the action-angle variables and not in terms of the Andoyer variables, to avoid the occurrence of elliptical functions when computing the generating function.

This step was published by Kinoshita (1977) himself, but he decided rightly not to take it into account since the truncation level of his work was  $0.1 mas$  (miliarcsecond). The transformation is achieved with the help of a canonical transformation which relates Andoyer variables with the action-angle variables (Kinoshita 1972, 1977). Thus, the triaxiality affects all the terms of the potential, the zonal and the non-zonal ones, changing the functional dependence of the disturbing function to some extent. Following the classical nomenclature in Celestial Mechanics we name this effect the 'indirect effect' of the triaxiality. So, the triaxiality of the Earth contributes to the nutations in two ways. First, through a 'direct effect' due to the existence

of the non-zonal harmonics. Second, through an 'indirect effect' due to the fact that the solution of the unperturbed problem (free motion) is different from the solution of the symmetrical case. As far as we know, the previous studies in the Hamiltonian theory for the rotation of the rigid Earth have not treated this second kind of influence, which could provide contributions to the nutation series within the present level of accuracy. The first effect has already been calculated by Kinoshita and Souchay (1990), Souchay and Kinoshita (1997), Souchay et al. (1999) and Folgueira et al. (1998a, 1998b) and it will not be treated in this work. On the other hand, Getino et al. (2001) computed the 'direct effect' of the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  harmonics for a two-layer, non-rigid Earth model.

The present investigation deals with the study of the indirect effect of the triaxiality, following the Hamiltonian method developed by Kinoshita (1977). In particular, we evaluate the contribution to the nutations of this effect when considering the zonal harmonic of the second degree, which is the larger coefficient in the geopotential expansion of the Earth. Although in REN-2000 Souchay et al. (1999) performed a comprehensive reconstruction of the Hamiltonian theory of the rigid Earth, to get the  $0.1 \mu\text{as}$  truncation level, this effect has not been discussed. However, the numerical contribution of this effect could reach a few tenths of microarcseconds and, therefore, it cannot be neglected within the truncation level sought nowadays.

In Section 2 we summarize the free-motion of a rigid body in terms of the action-angle variables associated with the Andoyer variables. In Section 3 we express the potential energy with the help of these variables. Once the potential energy has been transformed, in Section 4 we apply Hori's perturbation method and derive the generating function. In addition, we take advantage of the canonical invariance of this perturbation method and re-express the generating function as a function of the Andoyer variables that are more convenient for the calculations. In Sect. 5 we compute the analytical formulae for the nutation of the Andoyer plane, i.e. the plane perpendicular to the angular momentum axis of the Earth, the equatorial plane, i.e. the plane perpendicular to the figure axis of the Earth, and the plane perpendicular to the rotational axis. Finally, by using the same numerical parameters as in REN-2000 (Souchay et al. 1999) we compute the numerical expressions for the nutation series. We find that sixteen terms, eight for the nutation of the equatorial plane and eight for the nutation of the rotational axis, are larger than  $0.05 \mu\text{as}$ , with six terms larger than  $0.1 \mu\text{as}$ .



## 5.2 Torque-free motion

Next, we give a brief description of the solution of the torque-free motion in the short-axis rotation mode of a rigid body. We follow the same notation as in Kinoshita (1977). A more comprehensive study can be found in Kinoshita (1972, 1977).

The dynamical behavior of this system is described by means of the Andoyer canonical variables:  $G, L, H, g, l, h$  and the auxiliary angles  $J$  ( $L = G \cos J$ ) and  $I$  ( $H = G \cos I$ ). A dynamical and geometrical interpretation of this set is detailed in Kinoshita (1977). The mechanical properties of the rigid body, the Earth in our case, are characterized by its moments of inertia  $A < B < C$ . At this point, it is useful to introduce the non dimensional parameters (Kinoshita 1977)

$$H_d = \frac{2C - A - B}{2C}, \quad e = \frac{1/(2B) - 1/(2A)}{1/C - 1/(2A) - 1/(2B)}. \quad (5.1)$$

$H_d$  is the dynamical ellipticity of the body and  $e$  is a measure of the triaxiality, this parameter characterizing the departure from a symmetrical body ( $A = B$ ). For the Earth  $e \sim 10^{-3}$  so, in this work we suppose that  $e$  is a small parameter, and we only retain terms up to the first order in  $e$ .

The Hamiltonian for torque-free motion is given (Kinoshita 1977) by

$$F_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{C}. \quad (5.2)$$

As it can be seen, the Hamiltonian only depends on the coordinate  $l$  and the system can be solved by quadratures, leading to elliptic functions. We recall that the action-angle variables of a problem are characterized by the fact that the canonical momenta (action variables) are constants of motion while the canonical variables (angle variables) evolve linearly with time (Goldstein 1980). Therefore, Andoyer variables are not angle-action ones for the triaxial rigid body due to the occurrence of the coordinate  $l$  in eq. (5.2), unlike the axis-symmetrical case ( $A = B$ ) in which  $l$  disappears.

The action-angle set for the torque-free motion of a triaxial rigid body is developed by Kinoshita (1972), where a construction of these variables based on Andoyer variables is given. Though the canonical transformation relating both canonical sets (action-angle variables and Andoyer variables) involves the use of elliptical functions, it is possible to obtain more suitable expressions by expanding the canonical transformation in terms of  $e$ , which as we have pointed out is a small parameter. Thus, from Kinoshita (1977)

we have

$$\begin{aligned} l &= \tilde{l} - \frac{1}{4}e \left(1 + \sec^2 \tilde{J}\right) \sin 2\tilde{l}, \quad g = \tilde{g} + \frac{1}{2}e \sec \tilde{J} \sin 2\tilde{l}, \\ J &= \tilde{J} + \frac{1}{2}e \tan \tilde{J} \cos 2\tilde{l}, \quad G = \tilde{G}, \quad H = \tilde{H}, \quad h = \tilde{h}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

where  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{g}$  and  $\tilde{l}$  are the action–angle variables corresponding to  $G$ ,  $L$ ,  $g$  and  $l$  and  $\cos \tilde{J} = \tilde{L}/\tilde{G}$ . The mean motions  $n_{\tilde{l}}$  and  $n_{\tilde{g}}$  of  $\tilde{l}$  and  $\tilde{g}$  (Kinoshita 1972) are

$$n_{\tilde{g}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \tilde{G}, \quad n_{\tilde{l}} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) \tilde{L}, \quad (5.4)$$

whose expressions coincide, in our level of approximation, with the mean motions of  $l$  and  $g$  (Kinoshita 1977).

### 5.3 Disturbing function in terms of action–angle variables

As is pointed in Kinoshita (1977), in order to take into account the triaxiality in a complete way, we have to express the potential energy, or disturbing function, in terms of the action–angle variables. Because the triaxiality is small and the related geopotential coefficients consequently are also small, we only consider this transformation in the largest term of the geopotential, that is to say, in the zonal harmonic of the second degree ( $J_2$  term). From Kinoshita (1977) we have

$$\begin{aligned} V &= \frac{k'a^3}{r^3} P_2(\sin \delta) = \frac{k'}{2} (3 \cos^2 J - 1) \sum_{\nu} B_{\nu} \cos \Theta_{\nu} \\ &\quad - \frac{k'}{2} \sin 2J \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \cos(g - \varepsilon \Theta_{\nu}) \\ &\quad + \frac{k'}{4} \sin^2 J \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} D_{\nu}(\varepsilon) \cos(2g - \varepsilon \Theta_{\nu}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

where  $k' = 3\kappa^2 M' a^{-3} (2C - A - B)/2$ .  $k'$  is a numerical constant that depends on the perturbing body, Moon or Sun. Let us remember that  $V$  depends on  $I$  through  $B_{\nu}$ ,  $C_{\nu}(\varepsilon)$  and  $D_{\nu}(\varepsilon)$  and on  $h$  through  $\Theta_{\nu}$  (Kinoshita

1977). Substituting the relationships (5.3) in (5.5) we get

$$\begin{aligned}
\tilde{V} = & \frac{k'}{2} \left( 3 \cos^2 \tilde{J} - 1 \right) \sum_{\nu} B_{\nu} \cos \Theta_{\nu} \\
& - \frac{k'}{2} \sin 2\tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \cos(\tilde{g} - \varepsilon \Theta_{\nu}) \\
& + \frac{k'}{4} \sin^2 \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} D_{\nu}(\varepsilon) \cos(2\tilde{g} - \varepsilon \Theta_{\nu}) \\
& - \frac{3k'e}{4} \sin^2 \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} B_{\nu} \cos(2\tilde{l} - \varepsilon \Theta_{\nu}) \\
& - \frac{k'e}{4} \sin \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \left( \rho + \frac{\cos 2\tilde{J}}{\cos \tilde{J}} \right) \times \\
& \times \cos(\tilde{g} + 2\rho\tilde{l} - \varepsilon \Theta_{\nu}) + \\
& + \frac{k'e}{8} \sin \tilde{J} \tan \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} D_{\nu}(\varepsilon) \left( \rho + \cos \tilde{J} \right) \times \\
& \times \cos(2\tilde{g} + 2\rho\tilde{l} - \varepsilon \Theta_{\nu}). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

The transformed function has two parts. The first one has the same functional dependence as eq. (5.5), but the Andoyer variables have been literally replaced by the action-angle variables. The second one is a new term which arises as a direct consequence of incorporating the triaxiality. Note that if the rigid body were symmetrical then  $e = 0$  and the expression of the disturbing function in terms of the action-angle variables would coincide with the expression of the disturbing function in terms of the Andoyer variables. This is a consequence of the fact that when  $e = 0$  Andoyer variables are the action-angle variables for the free motion of a symmetrical rigid body.

## 5.4 Generating function

In order to carry out the analytical integration of the problem, Kinoshita (1977) applies a perturbation technique based on the Lie series (Hori 1966). With this technique, it is necessary to compute the generating function of a canonical transformation, so that the problem will be easier to solve in terms of the new canonical variables resulting from this transformation. The

generating function is obtained by means of integrating the periodic part of the potential energy along the solutions of the unperturbed problem. From eqs. (5.3) and (5.6) it follows that the secular part of  $V$  is not altered by the transformation into action–angle variables, that is to say:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\text{sec}} &= \frac{k'}{2} \left( 3 \cos^2 \tilde{J} - 1 \right) B_0 \cos \Theta_0 \\ &= \frac{k'}{2} \left( 3 \cos^2 J - 1 \right) B_0 \cos \Theta_0 = V_{\text{sec}},\end{aligned}\quad (5.7)$$

therefore, the generating function will be given by

$$\tilde{W} = \int \left( \tilde{V} - \tilde{V}_{\text{sec}} \right) dt, \quad (5.8)$$

The calculus of this integral is straightforward, providing

$$\begin{aligned}\tilde{W} &= \frac{k'}{2} \left( 3 \cos^2 \tilde{J} - 1 \right) \sum_{\nu \neq 0} \frac{B_\nu}{N_\nu} \sin \Theta_\nu \\ &\quad - \frac{k'}{2} \sin 2\tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{C_\nu(\varepsilon)}{n_{\tilde{g}} - \varepsilon N_\nu} \sin(\tilde{g} - \varepsilon \Theta_\nu) \\ &\quad + \frac{k'}{4} \sin^2 \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{D_\nu(\varepsilon)}{2n_{\tilde{g}} - \varepsilon N_\nu} \sin(2\tilde{g} - \varepsilon \Theta_\nu) \\ &\quad - \frac{3k'}{4} e \sin^2 \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{B_\nu}{2n_{\tilde{l}} - \varepsilon N_\nu} \sin(2\tilde{l} - \varepsilon \Theta_\nu) \\ &\quad - \frac{k'}{4} e \sin \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} C_\nu(\varepsilon) \left( \rho + \frac{\cos 2\tilde{J}}{\cos \tilde{J}} \right) \times \\ &\quad \frac{1}{n_{\tilde{g}} + 2\rho n_{\tilde{l}} - \varepsilon N_\nu} \sin(\tilde{g} + 2\rho \tilde{l} - \varepsilon \Theta_\nu) + \\ &\quad + \frac{k'}{8} e \sin \tilde{J} \tan \tilde{J} \sum_{\nu} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} D_\nu(\varepsilon) \left( \rho + \cos \tilde{J} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{2n_{\tilde{g}} + 2\rho n_{\tilde{l}} - \varepsilon N_\nu} \sin(2\tilde{g} + 2\rho \tilde{l} - \varepsilon \Theta_\nu).\end{aligned}\quad (5.9)$$

with  $N_\nu = \dot{\Theta}_\nu$ . In this integration, we have neglected the contribution coming from the secular part of the obliquity,  $I$ , and of the coefficients  $B_\nu$ ,  $C_\nu(\varepsilon)$

and  $D_\nu(\varepsilon)$ , because their effects are negligible as far as the nutation due to the indirect effect of the triaxiality is concerned. In addition, to simplify the notation we have noted with the same symbol the canonically transformed variables. It is must be understood that the variables in the right hand side of eq. (5.9) are the transformed variables.

We compute the forced nutations of the Earth with the aid of  $\tilde{W}$ , by expressing the longitude and obliquity of the Andoyer plane, the equatorial plane, and the plane perpendicular to the rotational axis in terms of the action-angle variables. Anyway, we can take advantage of the canonical invariance of the Hori's method (Hori 1966) by re-expressing the generating function, eq (5.9), in terms of the Andoyer variables. Following this procedure, the contributions of the indirect effect of the triaxiality to the nutations, computed in this work, may be added directly to REN-2000 tables ( Souchay et al. 1999).

To do this, we have to find the inverse relationships of eqs. (5.3). These relations turn out to be

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= l + \frac{1}{4}e(1 + \sec^2 J) \sin 2l, \quad \tilde{g} = g - \frac{1}{2}e \sec J \sin 2l, \\ \tilde{J} &= J - \frac{1}{2}e \tan J \cos 2l, \quad \tilde{G} = G.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Substituting these equations in (5.9) we obtain

$$W = W_K + eW_e, \quad (5.11)$$

where

$$\begin{aligned}W_K &= \frac{k'}{2} (3 \cos^2 J - 1) \sum_{\nu} \frac{B_{\nu}}{N_{\nu}} \sin \Theta_{\nu} \\ &\quad - \frac{k'}{2} \sin 2J \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{C_{\nu}(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_{\nu}} \sin (g - \varepsilon \Theta_{\nu}) \\ &\quad + \frac{k'}{4} \sin^2 J \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{D_{\nu}(\varepsilon)}{2n_g - \varepsilon N_{\nu}} \sin (2g - \varepsilon \Theta_{\nu}).\end{aligned}\quad (5.12)$$

This is the same expression that Kinoshita (1977) got when computing the generating function over the solution of the symmetric unperturbed problem.



On the other hand, we have

$$\begin{aligned}
W_e = & -\frac{3k'}{2} \sin^2 J \sum_{\nu \neq 0} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{\varepsilon B_\nu n_l}{N_\nu (2n_l - \varepsilon N_\nu)} \sin(2l - \varepsilon \Theta_\nu) \\
& -\frac{3k'}{4} \sin^2 J \frac{B_0}{n_l} \sin 2l - \\
& -\frac{k'}{2} \sin J \sum_{\nu} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} C_\nu(\varepsilon) \left( \rho + \frac{\cos 2J}{\cos J} \right) \times \\
& \times \frac{\rho n_l \sin(g + 2\rho l - \varepsilon \Theta_\nu)}{(n_g - \varepsilon N_\nu)(n_g + 2\rho n_l - \varepsilon N_\nu)} \\
& -\frac{k'}{4} e \sin J \tan J \sum_{\nu} \sum_{\rho, \varepsilon=\pm 1} D_\nu(\varepsilon) (\rho + \cos J) \times \\
& \times \frac{\rho n_l \sin(2g + 2\rho l - \varepsilon \Theta_\nu)}{(2n_g - \varepsilon N_\nu)(2n_g + 2\rho n_l - \varepsilon N_\nu)}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

In both expressions we have taken into account that  $n_{\bar{g}} = n_g$  and  $n_{\bar{l}} = n_l$ .

## 5.5 Nutations of the fundamental planes

Next, we compute the nutations for the three fundamental planes in the theory of the rotation of the Earth. These are the plane normal to the angular momentum (Andoyer plane), the plane normal to the figure axis (equatorial plane) and the plane normal to the instantaneous rotational axis. As usual (see, for instance, Kinoshita 1977 or Souchay et al. 1999), the nutations are computed to order 0 in  $J$ , since  $J \sim 10^{-6}$  rad (Kinoshita 1977).

Let us remember that the periodic variations of any function, due to the perturbation, are given to the first order by Hori (1966)

$$\Delta f = \{f, S\}. \tag{5.14}$$

In this expression  $f$  is a function of the canonical variables,  $S$  is the generating function of the first order and  $\{, \}$  is the symbol representing the Poisson bracket

$$\begin{aligned}
\{f, S\} = & \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial S}{\partial G} - \frac{\partial f}{\partial G} \frac{\partial S}{\partial g} + \frac{\partial f}{\partial l} \frac{\partial S}{\partial L} - \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial S}{\partial l} \\
& + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial S}{\partial H} - \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial S}{\partial h}. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

It is more expedient to compute the derivatives with respect to the momenta  $(G, L, H)$  through the auxiliary angles  $I$  and  $J$  with the aid of the relationships (Kinoshita 1977):

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial L} &= -\frac{1}{G \sin J}, & \frac{\partial J}{\partial G} &= \frac{\cot J}{G}, \\ \frac{\partial I}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin I}, & \frac{\partial I}{\partial G} &= \frac{\cot I}{G}.\end{aligned}\quad (5.16)$$

In this work we are interested in the influence of the triaxiality, therefore, we only focus our attention on the nutations terms that are proportional to  $e$ . Specifically, the functions  $f$  and  $S$  will be written as

$$f = f_s + e f_e, \quad S = S_s + e S_e, \quad (5.17)$$

and the nutations will be

$$\Delta f = \{f, S\} = \{f_s, S_s\} + e (\{f_s, S_e\} + \{f_e, S_s\}) + O(e^2). \quad (5.18)$$

The first and leading term on the right hand side of this equation has been treated in REN-2000 (Souchay et al. 1999), Kinoshita and Souchay (1990) and Kinoshita (1977). The second term is the new contribution due to the indirect effect of the triaxiality. So, we only work out expressions of the form

$$\Delta_e f = e (\{f_s, S_e\} + \{f_e, S_s\}). \quad (5.19)$$

### 5.5.1 Nutations of the Andoyer plane

The node and the inclination of this plane are given by the angles  $h$  and  $I$ , respectively. So, we have

$$\begin{aligned}\Delta h &= \{h, W\} = \{h, W_K\} + e \{h, W_e\}, \\ \Delta I &= \{I, W\} = \{I, W_K\} + e \{I, W_e\},\end{aligned}\quad (5.20)$$

taking into account eqs. (5.13), (5.15) and (5.16) we obtain

$$\Delta_e h = O(J) = 0, \quad \Delta_e I = O(J) = 0. \quad (5.21)$$

Therefore, the nutations in longitude and obliquity of the Andoyer plane, called Poisson terms (Kinoshita 1977), are not affected by the indirect effect of the triaxiality.

### 5.5.2 Nutations of the equatorial plane

The node and the inclination of this plane are given by the angles  $h_f$  and  $I_f$ , respectively. These angles are written in terms of the Andoyer set as (Kinoshita 1977)

$$h_f = h + \frac{J \sin g}{\sin I} + O(J^2), \quad I_f = I + J \cos g + O(J^2). \quad (5.22)$$

The nutations of this plane will be given by

$$\begin{aligned} \Delta h_f &\approx \{h_f, W\} = \Delta h + \left\{ \frac{J \sin g}{\sin I}, W_K \right\} + e \left\{ \frac{J \sin g}{\sin I}, W_e \right\}, \\ \Delta I_f &\approx \{I_f, W\} = \Delta I + \{J \cos g, W_K\} + e \{J \cos g, W_e\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

From eqs. (5.13), (5.15), (5.16), (5.21) and (5.23) we have

$$\begin{aligned} \Delta_e h_f &= \frac{ek}{\sin I} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{n_l C_{\nu}(\varepsilon) \sin(2g + 2l - \varepsilon \Theta_{\nu})}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})}, \\ \Delta_e I_f &= ek \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{n_l C_{\nu}(\varepsilon) \cos(2g + 2l - \varepsilon \Theta_{\nu})}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

where  $k = k'/G$ . The differential nutation of the equatorial plane with respect to the nutation of the Andoyer plane is given by the so-called Oppolzer terms of the figure axis (Kinoshita 1977),  $\Delta_e (J \sin g / \sin I)$  and  $\Delta_e (J \cos g)$  in our case. Oppolzer terms in the figure axis provides the entire indirect contribution to the nutation of the figure axis, since as given our order of approximation Poisson terms are  $\Delta_e h = \Delta_e I = 0$ . It is also worthy noting that these terms have a quasi semi-diurnal period, since  $n_g + n_l = \omega_E$ ,  $\omega_E$  being the mean angular velocity of the rotation of the Earth (Kinoshita 1977).

### 5.5.3 Nutations of the plane perpendicular to the rotational axis

The node and the inclination of this plane are given by the angles  $h_r$  and  $I_r$ , respectively. These angles are written in terms of the Andoyer set as



(Kinoshita 1977)

$$\begin{aligned}
h_r &= h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \frac{J \sin g}{\sin I} - \\
&\quad - e \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \frac{J \sin(2l + g)}{\sin I} + O(J^2), \\
I_r &= I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) J \cos g - \\
&\quad - e \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) J \cos(2l + g) + O(J^2). \quad (5.25)
\end{aligned}$$

These relationships depend on the structure of the body through the parameter  $e$ . The nutations of this plane are given by

$$\begin{aligned}
\Delta h_r &\approx \{h_r, W\} = \Delta h + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \Delta \left(\frac{J \sin g}{\sin I}\right) + \\
&\quad + e \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \left\{ \frac{J \sin(2l + g)}{\sin I}, W_K \right\}, \\
\Delta I_r &\approx \{I_r, W\} = \Delta I + \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \Delta (J \cos g) + \\
&\quad + e \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \{J \cos(2l + g), W_K\}. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Kinoshita (1977) neglected the bracket related to  $W_K$  and  $e$  due to its smallness. However, we incorporate these terms in order to perform a full analysis of the indirect effect of the triaxiality. In addition, as it will be shown in the next section, it provides numerical contributions within the assumed truncation level. From eqs. (5.12), (5.15) and (5.16) we get

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{J}{\sin I} \sin(2l + g), W_K \right\} &= -\frac{k}{\sin I} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \\
&\quad \times \frac{\sin(2g + 2l - \varepsilon\Theta_{\nu})}{n_g - \varepsilon N_{\nu}}, \\
\{J \cos(2l + g), W_K\} &= -k \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \\
&\quad \times \frac{\cos(2g + 2l - \varepsilon\Theta_{\nu})}{n_g - \varepsilon N_{\nu}}. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Therefore, by considering eqs. (5.21), (5.24), (5.26) and (5.27), the whole nutation, due to the indirect effect of the triaxiality of this plane turns out to be

$$\begin{aligned}\Delta_e h_r &= -\frac{ek}{\sin I} \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \\ &\quad \times \frac{(n_g + n_l - \varepsilon N_{\nu}) \sin(2g + 2l - \varepsilon \Theta_{\nu})}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})}, \\ \Delta_e I_r &= -ek \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} C_{\nu}(\varepsilon) \times \\ &\quad \frac{(n_g + n_l - \varepsilon N_{\nu}) \cos(2g + 2l - \varepsilon \Theta_{\nu})}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})}.\end{aligned}\quad (5.28)$$

Thus we remark that the nutation of the plane perpendicular to the rotational axis has also a quasi semi-diurnal period. The differential nutation of plane perpendicular to the rotational axis with respect to the nutation of the Andoyer plane is given by the so-called Oppolzer terms of the rotational axis (Kinoshita 1977). The indirect effect of the triaxiality on the nutation of the rotational axis is also contained in the corresponding Oppolzer terms, since in our order of approximation the Poisson terms are  $\Delta_e h = \Delta_e I = 0$ . It is important to point out that, in this case, Oppolzer terms of the rotational axis are of the same order of magnitude as those of the figure axis, since the presence of the factor  $1 - C/(2A) - C/(2B)$  in eq. (5.28) is compensated by the also small factor  $n_l$  in eq. (5.24) (see also eq. 5.38 below). That behaviour is different from the usual one in Kinoshita's theory (1977) and subsequent works (Souchay et al. 1999), where Oppolzer terms of the rotational axis are smaller, by a factor of about 1/300, than those of the figure axis. This is due to the fact that we consider the terms proportional to  $e$  in eq. (5.25). These terms are neglected by Kinoshita (1977) and in REN-2000 (Souchay et al. 1999).

## 5.6 Numerical results

In this section we compute numerically the additional nutations given by the formulae (5.24) and (5.28). In order to express these nutations in the same form as in Souchay et al. (1999), we must make some transformations. First, we note that the angle  $g + l$  is reckoned from the  $A$ -principal axis of inertia of the Earth (Kinoshita 1977). However, the angle used in the nutation series,  $\Phi$ , is the angle of the sidereal rotation of the Earth (Bretagnon et al.

1997, Souchay et al. 1999). So, we must perform a phase shift given by the relationship (Souchay et al. 1999)

$$\Phi = l + g + \Delta\Phi_0. \quad (5.29)$$

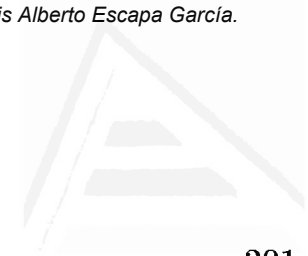
Here,  $\Delta\Phi_0$  is the angle between Greenwich prime meridian and the  $A$ -principal axis, along the equatorial plane. To avoid misunderstandings, we determine  $\Delta\Phi_0$  counterclockwise from the  $A$ -principal axis to the Greenwich meridian. Its numerical values can be derived from the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  components of the geopotential (Souchay et al. 1999). Namely, we have

$$\Delta\Phi_0 = -\frac{1}{2} \arctan \frac{S_{22}}{C_{22}} = .2605521 \text{ rd}. \quad (5.30)$$

The minus sign appearing in the above formula is due to the fact that, with the values of  $C_{22}$  and  $S_{22}$  provided by the IERS standards (McCarthy 1992), the angle  $1/2 \arctan(S_{22}/C_{22})$  is reckoned from Greenwich to the  $A$ -principal axis, therefore, it has the opposite sign than that of the angle  $\Delta\Phi_0$ . This sign is not present in Souchay et al. (1999), or in eq. (5.29), although the numerical results seem consistent with the arguments shown here. The present explanation also agrees with eq. (12) from Bretagnon et al. (1997).

Taking into account the above considerations and putting  $\varepsilon = -I$ ,  $\varepsilon_f = -I_f$ ,  $\varepsilon_r = -I_r$ ,  $\psi_f = -h_f$  and  $\psi_r = -h_r$ , we have for the equatorial plane

$$\begin{aligned} \Delta_e \psi_f &= \frac{ek}{\sin \varepsilon} \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{n_l C_{\nu}(\varepsilon)}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})} \\ &\quad \times (\cos(2\Delta\Phi_0) \sin(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu}) \\ &\quad - \sin(2\Delta\Phi_0) \cos(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu})), \\ \Delta_e \varepsilon_f &= -ek \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{n_l C_{\nu}(\varepsilon)}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})} \\ &\quad \times (\cos(2\Delta\Phi_0) \cos(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu}) \\ &\quad + \sin(2\Delta\Phi_0) \sin(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu})), \end{aligned} \quad (5.31)$$



and for the plane perpendicular to the rotational axis

$$\begin{aligned}
 \Delta_e \psi_r &= -\frac{ek}{\sin \varepsilon} \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{C_{\nu}(\varepsilon)}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})} \times \\
 &\quad \times \frac{(n_g + n_l - \varepsilon N_{\nu})}{(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})} (\cos(2\Delta\Phi_0) \sin(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu}) \\
 &\quad - \sin(2\Delta\Phi_0) \cos(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu})), \\
 \Delta_e \varepsilon_r &= ek \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) \sum_{\nu} \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{C_{\nu}(\varepsilon)}{(n_g - \varepsilon N_{\nu})} \times \\
 &\quad \times \frac{(n_g + n_l - \varepsilon N_{\nu})}{(n_g + 2n_l - \varepsilon N_{\nu})} (\cos(2\Delta\Phi_0) \cos(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu}) \\
 &\quad + \sin(2\Delta\Phi_0) \sin(2\Phi - \varepsilon\Theta_{\nu})). \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

To evaluate these series we need the numerical values of  $k$  for the Moon and the Sun, respectively  $k_M$  and  $k_S$ , that will be taken from Souchay and Kinoshita (1996). We need also the coefficients  $C_{\nu}(\varepsilon)$ ,  $N_{\nu}$  that will be obtained from Kinoshita (1977) and Kinoshita and Souchay (1990), the angular velocity of the Earth,  $\omega_E \simeq \dot{\Phi}$ , that will be taken from Aoki et al. (1982) and the obliquity  $\varepsilon$ , at epoch J2000, taken from Lieske et al. (1977). With respect to the remaining parameters let us point out that in order to derive their numerical values we will introduce another parameter related to the triaxiality of the Earth

$$\eta = \frac{B - A}{2C - A - B}, \tag{5.33}$$

which is more convenient than  $e$ . Then, we can express the moments of inertia in terms of  $\eta$  and the dynamical ellipticity  $H_d$  (see eq. 5.1). So, we have

$$\frac{C}{A} = \frac{1}{1 - H_d(\eta + 1)}, \quad \frac{B}{A} = \frac{1 + H_d(\eta - 1)}{1 - H_d(\eta + 1)}. \tag{5.34}$$

From these relationships, (5.1) and (5.4), we can obtain the values of  $e$ ,  $n_l$  and  $n_g$ . In addition, it will also be useful to put

$$n_l = \omega_E - n_g, \quad \left(1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B}\right) = \frac{n_l}{\omega_E} = 1 - \frac{n_g}{\omega_E}, \tag{5.35}$$

where (Kinoshita 1977)  $\tilde{G} \simeq \tilde{L} \simeq C\omega_E$ .

Table 5.1: Numerical parameters used in this work

| Parameter     | Value                        | Source                |
|---------------|------------------------------|-----------------------|
| $\varepsilon$ | 0.4090928041 <i>rd</i>       | Lieske et al. (1977)  |
| $\dot{\Phi}$  | 230121.67526278 <i>rd/cy</i> | Aoki et al. (1982)    |
| $J_2$         | $-1082.626075 \cdot 10^{-6}$ | IERS Standards (1992) |
| $C_{22}$      | $1.574410 \cdot 10^{-6}$     | IERS Standards (1992) |
| $S_{22}$      | $-.903757 \cdot 10^{-6}$     | IERS Standards (1992) |
| $k_M$         | 7546".717329 <i>/cy</i>      | Souchay et al. (1996) |
| $k_S$         | 3475".413512 <i>/cy</i>      | Souchay et al. (1996) |
| $H_d$         | .0032737548                  | Souchay et al. (1996) |

The dynamical ellipticity  $H_d$  will be also taken from Souchay and Kinoshita (1996).  $\eta$  is computed from the coefficients of the geopotential (Bretagnon et al. 1997):

$$\frac{2C - A - B}{2m_E a_E^2} = J_2, \quad \frac{B - A}{m_E a_E^2} = 4\sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}, \quad (5.36)$$

where  $J_2$  is the zonal harmonic of the second order. With these definitions and by means of the values in Table 1 we get

$$\eta = .0033536292, \quad e = .0033646441,$$

$$\frac{n_g}{\omega_E} = 1.0032845076. \quad (5.37)$$

The parameters shown in Table 5.1 are the same as those used by Souchay et al. (1999). With these parameters and those of eq. (5.37) the amplitudes of the nutation series due to the indirect effect of the triaxiality are computed. Since the indirect effect of the triaxiality is small, its contribution will be within the truncation level only for the leading arguments  $\Theta_\nu$ , that is to say, those corresponding to larger amplitudes. For convenience, we have performed the calculations using the whole set of 107 arguments  $\Theta_\nu$  given by Kinoshita (1977), which obviously contain all the leading terms relevant for this study. In Table 5.2 we show the series in longitude corresponding to the plane of figure and the plane normal to the rotational axis. In Table 5.3 we show the series in obliquity corresponding to these same planes. We have displayed all the terms larger than  $0.005 \mu as$ .

As one could expect, the amplitudes of the nutations terms due to the indirect effect of the triaxiality of the equatorial plane and the plane perpendicular to the rotational axis are small. Besides, from these values it is clear

## 5.6 Numerical results

203

Table 5.2: Indirect effect of the triaxiality. Figure and rotational axes. Longitude (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\Phi$ | Argument |       |     |     |          | Period<br>(days) | Figure axis            |                        | Rotational axis        |                        | Alias<br>period |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | $\Delta_e\psi_f(\sin)$ | $\Delta_e\psi_f(\cos)$ | $\Delta_e\psi_r(\sin)$ | $\Delta_e\psi_r(\cos)$ |                 |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .498635          | -.210                  | .120                   | .210                   | -.120                  | $\infty$        |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .498598          | -.028                  | .016                   | .028                   | -.016                  | -6798.36        |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | .500000          | .070                   | -.040                  | -.070                  | .040                   | 182.62          |
| 2      | -1       | 0     | 0   | 0   | 0        | .507826          | -.013                  | .007                   | .012                   | -.007                  | 27.55           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | .517526          | .173                   | -.099                  | -.161                  | .092                   | 13.66           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -1       | .517569          | .033                   | -.019                  | -.030                  | .017                   | 13.63           |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | .527441          | .036                   | -.021                  | -.032                  | .018                   | 9.13            |
| 2      | 1        | 0     | 0   | 0   | 0        | .489770          | -.011                  | .006                   | .011                   | -.006                  | -27.55          |
| 2      | 0        | 0     | 2   | 0   | 2        | .481037          | -.006                  | .003                   | .006                   | -.003                  | -13.66          |

Table 5.3: Indirect effect of the triaxiality. Figure and rotational axes. Obliquity (Unit= $\mu\text{as}$ )

| $\Phi$ | Argument |       |     |     |          | Period<br>(days) | Figure axis                   |                               | Rotational axis               |                               | Alias<br>period |
|--------|----------|-------|-----|-----|----------|------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------|
|        | $l_M$    | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | $\Delta_e\varepsilon_f(\sin)$ | $\Delta_e\varepsilon_f(\cos)$ | $\Delta_e\varepsilon_r(\sin)$ | $\Delta_e\varepsilon_r(\cos)$ |                 |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | 0        | .498635          | .048                          | .083                          | -.048                         | -.083                         | $\infty$        |
| 2      | 0        | 0     | 0   | 0   | -1       | .498598          | .006                          | .011                          | -.006                         | -.011                         | -6798.36        |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 2   | -2       | .500000          | -.016                         | -.028                         | .016                          | .028                          | 182.62          |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -2       | .517526          | -.040                         | -.069                         | .037                          | .064                          | 13.66           |
| 2      | 0        | 0     | -2  | 0   | -1       | .517569          | -.007                         | -.013                         | .007                          | .012                          | 13.63           |
| 2      | -1       | 0     | -2  | 0   | -2       | .527441          | -.008                         | -.014                         | .007                          | .013                          | 9.13            |

Table 5.4: Comparison of the largest quasi semi-diurnal amplitudes for direct and indirect effects. Figure axis (Unit= $\mu\text{as}$ )

| Argument |       |       |     |     |          | Period<br>(days) | Longitude      |       | Obliquity             |       | Harmonic         | Type     | Source    |
|----------|-------|-------|-----|-----|----------|------------------|----------------|-------|-----------------------|-------|------------------|----------|-----------|
| $\Phi$   | $l_M$ | $l_S$ | $F$ | $D$ | $\Omega$ |                  | $\Delta\psi_f$ |       | $\Delta\varepsilon_f$ |       |                  |          |           |
|          |       |       |     |     |          | sin              | cos            | sin   | cos                   |       |                  |          |           |
| 2        | 0     | 0     | 0   | 0   | 0        | .49864           | 31.3           | -18.0 | -7.1                  | -12.4 | $C_{22}, S_{22}$ | direct   | REN-2000  |
| 2        | 0     | 0     | -1  | 0   | -1       | .50790           | -.244          | -.356 | -.097                 | .067  | $C_{32}, S_{32}$ | direct   | REN-2000  |
| 2        | 0     | 0     | 1   | 0   | 2        | .48973           | -.008          | -.012 | -.114                 | .078  | $C_{32}, S_{32}$ | direct   | REN-2000  |
| 2        | 0     | 0     | 0   | 0   | 0        | .49864           | .016           | .030  | —                     | —     | $C_{42}, S_{42}$ | direct   | REN-2000  |
| 2        | 0     | 0     | 0   | 0   | 0        | .49864           | -.210          | .120  | .048                  | .083  | $J_2$            | indirect | This work |

that the indirect effect of the triaxiality on other geopotential coefficients different from  $J_2$  can be neglected. We have found eight terms larger than  $0.05 \mu as$  (five terms in longitude and three in obliquity for nutations of the equatorial plane). It is also worthy noting that the argument of the nutation is the same as the argument that appears when treating the influence of the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  coefficients on the nutations (Souchay et al. 1999). So, these new contributions should be added to those of REN-2000 tables (Souchay et al. 1999).

To make easier the visualization of the amount of the indirect effect, we have gathered in Table 5.4 the largest terms for each different contribution to the nutation of the figure axis of the rigid Earth having a quasi semi-diurnal period, including the usual 'direct effects' as well as the new 'indirect effect' studied in this work. The direct contributions arise from the non-zonal harmonics of second order and second, third and fourth degrees and are taken from REN-2000 (Souchay et al. 1999). For each nutation series of the figure axis coming from a selected harmonic, we have chosen the largest term in longitude and in obliquity. Explicitly, the largest term due to the harmonics  $C_{22}$  and  $S_{22}$  is taken from Souchay et al. (1999), the one given by the harmonics  $C_{32}$  and  $S_{32}$  is computed from Folgueira et al. (1998a) and the one due to the harmonics  $C_{42}$  and  $S_{42}$  is taken from Folgueira et al. (1998b). In the last row we have also displayed the largest nutation term of the figure axis caused by the indirect effect of the triaxiality ( $J_2$  indirect effect). As can be seen, the largest contribution of the indirect effect is smaller than that of the harmonics  $C_{32}$  and  $S_{32}$  and much smaller than that of the harmonics  $C_{22}$  and  $S_{22}$ , which is the leading one. However, the indirect effect contribution is much more important than the direct effect due to the harmonics  $C_{42}$  and  $S_{42}$ .

For the nutations of the plane perpendicular to the rotational axis there are five terms in longitude and three in obliquity that are larger than  $0.05 \mu as$ . Thus, we also have quasi semi-diurnal nutations for the rotational axis within the sub-microarcsecond level. The amplitude of these terms is mainly caused by the part that arises from  $W_K$ , eq. (5.27).

It is also interesting to point out that the nutations of the figure axis and of the rotational axis due to the indirect effect of the triaxiality have almost the same values but opposite sign. The explanation of this fact can be derived by considering the analytical expressions of these terms. The ratio between the nutation in longitude (in sine or cosine) for the figure axis, eq. (5.31), and for the rotational axis, eq. (5.32), corresponding to the same



argument  $(2\Phi - \varepsilon\Theta_\nu)$  can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_e \psi_r}{\Delta_e \psi_f} \Big|_{(2\Phi - \varepsilon\Theta_\nu)} &= - \left( 1 - \frac{C}{2A} - \frac{C}{2B} \right) \times \\ &\times \frac{(n_g + n_l - \varepsilon N_\nu)}{n_l} = \\ &= - \frac{n_l (\omega_E - \varepsilon N_\nu)}{n_l \omega_E} = -1 + \varepsilon \frac{N_\nu}{\omega_E}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

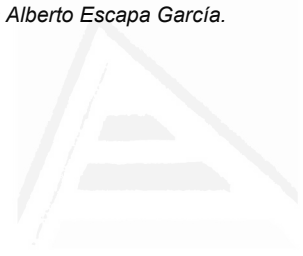
where we have taken into account eq. (5.35). This ratio is very close to  $-1$  for most of the terms. The same conclusion is obtained for the nutation in obliquity.

Finally, let us point out that the internal structure of the Earth could amplify these effects due to the resonance caused by the fluid core, that could reach even a few microarcseconds. So, this discussion should be extended to non-rigid Earth models, in the same way as Getino et al. (2001), who studied the effect of the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  coefficients on the nutations of a two layer Earth model. This work is in progress and will be presented in a forthcoming paper.

## Acknowledgments

This work has been partially supported by Spanish Projects *Ministerio de Ciencia y Tecnología*, *I+D*, Project No. AYA2000-1787, Project No. AYA2001-0787, *PNE-015/2001-C* and *Junta de Castilla y León* Project VA72/02.





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Referencias

Ahrens, J. T. ed., *Global Earth Physics: a handbook of physical constants*, American Geophysical Union, 1995.

Andoyer, H., *Cours de Mécanique Celeste*, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1923.

Aoki S., B. Guinot, G. Kaplan et al., The new definition of universal time, *Astron. Astrophys.*, 105, 359–361, 1982.

Arnold, V. I., *Mecánica Clásica: métodos matemáticos*, Paraninfo, 1983.

Arnold, V. I., V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 2nd ed., Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3, Springer, 1991.

Arnold, V. I., *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Rubiños–1860, 1994.

Bretagnon, P., P. Rocher and J.L. Simon, Theory of the rotation of the rigid Earth., *Astron. Astrophys.*, 319, 305–317, 1997.

Brumberg, V. A., *Essential relativistic Celestial Mechanics*, Hilger, Bristol, 1991.

Brouwer, D. and G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, 1961.

Busse, F. H., The dynamical coupling between inner core and mantle of the Earth and the 24-year libration of the pole, in *Earthquake Displacement Fields and the Rotation of the Earth*, edited by L. Mansinha, D. E. Smylie, and A. E. Beck, D. Reidel, Norwell, Mass., 88–98, 1970.

Chao, B. F., Global science enabled by Earth rotation observations, [en línea], 2001. [Consulta: 10 de marzo de 2006], <http://ivscc.gsfc.nasa.gov/mhonarc/core-panel/msg00030.html>.

- Chao, B. F., R. D. Ray, J. M. Gipson, G. D. Egbert and C. Ma, Diurnal/semidiurnal polar motion excited by oceanic tidal angular momentum, *J. Geophys. Res.*, 20, 151–163, 1996.
- Choi, J. S. and B. D. Tapley, An extended canonical perturbation method, *Celest. Mech.*, 7, 77–90, 1973.
- Cid, R. y V. Camarena, *Curso de Mecánica*, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 1979.
- Defraigne P., V. Dehant and J. M. Wahr, Internal loading of an inhomogeneous compressible Earth with phase boundaries, *Geophys. J. Int.*, 125, 173–192, 1996.
- Dehant, V., F. Arias, CH. Bizouard et al., Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory, *Celest. Mech.*, 72, 245–310, 1999.
- Ekman, M., A concise history of the theories of tides, precession-nutation and polar motion (from antiquity to 1950), *Surv. in Geophys.*, 14, 585–617, 1993.
- Escapa, A., Desarrollos complementarios en la teoría hamiltoniana de la rotación de una Tierra no rígida y verificación de términos de segundo orden, tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, 1997.
- Escapa, A., J. Getino and J. M. Ferrándiz, Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model, *J. Geophys. Res.*, 106, 11387–11397, 2001.
- Escapa, A., J. Getino and J. M. Ferrándiz, Application of Poincaré's formalism to the free nutations of a three-layer Earth model, *Proceedings of the Journées 2001*, edited by N. Capitaine, Paris Obs., Paris, France, 239–245, 2002.
- Escapa, A., J. Getino and J. M. Ferrándiz, On the effect of the redistribution tidal potential on the rotation of the non-rigid Earth: discrepancies and clarifications, *Proceedings of the Journées 2004*, edited by N. Capitaine, Paris Obs., Paris, France, 70–73, 2005.
- Ferrándiz, J. M., Movimiento de dos sólidos sometidos a atracción newtoniana. Aplicaciones, tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, 1979.
- Ferrándiz, J. M. and J. Getino, Enhanced accuracy of analytical nutation series incorporating oceanic corrections (abstract) *Eos Trans. AGU*, 80 (46), Fall Meet. Suppl. F248, 1999.

Ferrándiz, J. M., M. E. Sansaturio and R. Caballero, On the roto-translatory motion of a satellite of an oblate primary, *Celest. Mech.*, 57, 189–202, 1993.

Ferrándiz, J. M., J. F. Navarro, A. Escapa and J. Getino, Precession of the non-rigid Earth: effect of the fluid outer core, *Astron. J.*, 128, 1407–1411, 2004.

Folgueira M., J. Souchay and H. Kinoshita, Effects on the nutation of the non-zonal harmonics of third degree, *Celest. Mech.*, 69, 373–402, 1998a.

Folgueira M., J. Souchay and H. Kinoshita, Effects on the nutation of  $C_{4,m}$  and  $S_{4,m}$  harmonics, *Celest. Mech.*, 70, 147–157, 1998b.

Fukushima, T., Geodesic nutation, *Astron. Astrophys.*, 244, L11–L12, 1991.

Fukushima, T., New canonical variables for orbital and rotational motions, *Celest. Mech.*, 60, 57–68, 1994.

Fukushima, T., A new precession formula, *Astron. J.*, 126, 494–534, 2003.

Gantmacher, F. R., *The theory of matrices*, Vol. 1, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, 1990.

Getino, J., Teoría hamiltoniana del movimiento de rotación de una Tierra deformable, tesis doctoral, Universidad de Valladolid, 1989.

Getino, J., An interpretation of the core-mantle interaction problem, *Geophys. J. Int.*, 120, 693–705, 1995a.

Getino, J., Forced nutation of a rigid mantle-liquid core Earth model in canonical formulation, *Geophys. J. Int.*, 122, 803–814, 1995b.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, On the effect of mantle's elasticity on the Earth's rotation, *Celest. Mech.*, 61, 117–180, 1995.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Applying the Hamiltonian formalism to the rotation of the non-rigid Earth, in *Proceedings of the Journées 1996*, edited by N. Capitaine, Paris Obs., Paris, France, 168–173, 1996.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Hamiltonian approach to dissipative phenomena between Earth's mantle and core, and effects on free nutations, *Geophys. J. Int.*, 130, 326–334, 1997.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Canonical approach for the free nutations of a non-rigid Earth with solid inner core, in *IV International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*, edited by A. López García et al., Univ. of Valencia, Valencia, Spain, 183–190, 1998a.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Geophysical parameters derived from the Hamiltonian non-rigid Earth theory, paper presented at XXIII General Assembly of the European Geophysical Society, Nice, France, April 20-24, 1998b.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, New nutation series derived from the Hamiltonian theory, in *Proceedings of the Journées 1998*, edited by N. Capitaine, Paris Obs., Paris, France, 118–119, 1998c.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Accurate analytical nutation series, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 306, L45–L49, 1999.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Effects of dissipation and liquid core on the forced nutations in the Hamiltonian theory, *Geophys. J. Int.*, 142, 703–715, 2000a.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Advances in the unified theory of the rotation of the non-rigid Earth, in *Proceedings of IAU Colloquium 180*, edited by K. J. Johnston, D. D. McCarthy, B. J. Luzum, and G. H. Kaplan, U.S. Nav. Obs., Washington, D. C., 236–241, 2000b.

Getino, J. and J. M. Ferrándiz, Forced nutation of a two-layer Earth model, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 322, 785–799, 2001.

Getino, J., J. M. Farto and J. M. Ferrándiz, Obtaining the free frequencies of the non-rigid Earth, *Celest. Mech.*, 71, 95–108, 1998.

Getino, J., J. M. Ferrándiz and A. Escapa, Hamiltonian theory of the non-rigid Earth: semidiurnal terms, *Astron. Astrophys.*, 370, 330–341, 2001.

Getino, J., A. B. González and A. Escapa, The rotation of a non-rigid, non-symmetrical Earth II: free nutations and dissipative effects, *Celest. Mech.*, 76, 1–21, 2000.

Getino, J., A. Escapa and A. García, Spheroidal and toroidal modes for tidal kinetic energy in axisymmetric, slightly elliptical, elastic bodies, *Rom. Astron. J.*, 13, 143–161, 2003.

Gilbert, F. and A. M. Dziewonski, An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A.*, 278, 187–269, 1975.

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison–Wesley, Reading, MA, 1980.

González, A.B. and J. Getino, The rotation of a non-rigid, non-symmetrical Earth I: free nutations, *Celest. Mech.* 68, 139–149, 1997.

González, A. B., J. Getino and J. M. Farto, An algorithm for an eigenvalues problem in the Earth rotation theory, *J. Comput. Appl. Math.*, 101, 243–254, 1999.

Henrard, J. and M. Moons, Hamiltonian theory of the libration of the Moon, in *Dynamics of Planets and Satellites and Theories of Their Motion*, edited by V. Szebehely, D. Reidel, Norwell, Mass., 125–135, 1978.

Hori, G., Theory of general perturbation with unspecified canonical variables, *Publ. Astron. Soc. Jpn.*, 18, 287–296, 1966.

Hori, G., Theory of general perturbations for non-canonical systems, *Publ. Astron. Soc. Jpn.*, 23, 567–587, 1971.

Hori, G., Theory of general perturbations, in *Recent Advances in Dynamical Astronomy*, edited by B. D. Tapley and V. Szebehely, Dordrecht, Reidel, 231–249, 1973.

Huang, C., W. Jin and X. Liao, A new nutation model of non-rigid Earth with ocean and atmosphere, in *Proceedings of IAU Colloquium 180*, edited by K. J. Johnston, D. D. McCarthy, B. J. Luzum, and G. H. Kaplan, U.S. Nav. Obs., Washington, D. C., 242–247, 2000.

IERS Conventions 2003, *IERS Technical Note 32*, ed. D. D. McCarthy, and G. Petit, Frankfurt amMain: Verlag des Bundesamts fr Kartographie und Geodsie, 2004.

Jeffreys, H., *The Earth*, 6th ed., Cambridge University Press, 1976.

Jeffreys, H. and R. O. Vicente, The theory of nutation and the variation of latitude, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 117, 142–161. 1957a.

Jeffreys, H. and R. O. Vicente, The theory of nutation and the variation of latitude: the Roche model core, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 117, 162–173, 1957b.

- Kakuta, C., I. Okamoto and T. Sasao, Is the nutation of the solid inner core responsible for the 24-year libration of the pole?, *Publ. Astron. Soc. Jpn.*, 27, 357–365, 1975.
- Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, 2nd ed., Springer, 1995.
- Kinoshita, H., First-Order Perturbations of the two Finite body problem, *Publ. Astron. Soc. Jpn.*, 24, 423–457, 1972.
- Kinoshita, H., Theory of the rotation of the rigid Earth, *Celest. Mech.*, 15, 277–326, 1977.
- Kinoshita, H., Analytical expansions of torque-free motions for short and long axis modes, *Celest. Mech.*, 53, 365–375, 1992.
- Kinoshita, H. and T. Sasao, Theoretical aspects of the Earth rotation, in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, edited by J. Kovalesky et al., Kluwer Acad., Norwell, Mass., 173–211, 1989.
- Kinoshita, H. and J. Souchay, The theory of the nutation for the rigid Earth model at the second order, *Celest. Mech.*, 48, 187–265, 1990.
- Kinoshita, H., K. Nakajima, Y. Kubo, I. Nakagawa, T. Sasao and K. Yokoyama, Note on nutation in ephemerides, *Publ. Int. Latitude Observatory of Mizusawa*, 2, 71–108, 1979.
- Kovalesky, J., I. I. Mueller and B. Kolaczek, eds., *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*, Kluwer Acad., Norwell, Mass., 1989.
- Kubo, Y., A core-mantle interaction in the rotation of the Earth, *Celest. Mech.*, 19, 215–241, 1979.
- Kubo, Y., Solution to the rotation of the elastic Earth by method of the rigid dynamics, *Celest. Mech.*, 50, 165–187, 1991.
- Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed., Dover Publications, New York, 1932.
- Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed., Dover Publications, New York, 1986.
- Leubner, C., Correcting a widespread error concerning the angular velocity of a rotating rigid body, *Am. J. Phys.*, 49, 232–234, 1981.
- Lieske, J. H., T. Lederle, W. Fricke and B. Morando, Expressions for the precession quantities based upon the IAU /1976/ system of astronomical constants, *Astron. Astrophys.*, 58, 1–16, 1977.

McCarthy, D. D., IERS Standards, 1992.

McCarthy, D. D., IERS Conventions, *IERS Tech. Note* 21, 1996.

Mathews, P. M. and I. I. Shapiro, Nutations of the Earth, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 20, 469–500, 1992.

Mathews, P. M., B. A. Buffet, T. A. Herring and I. I. Shapiro, Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics, 1, theory, *J. Geophys. Res.*, 96, 8219–8242, 1991a.

Mathews, P. M., B. A. Buffet, T. A. Herring and I. I. Shapiro, Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics, 2, numerical results and comparisons, *J. Geophys. Res.*, 96, 8243–8257, 1991b.

Mathews, P. M., T. A. Herring and B. A. Buffet, Modeling of nutation-precession: new nutation series for non-rigid Earth, and insights into the Earth's interior, *J. Geophys. Res.*, 107, 10.1029/2001JB000390, 2002.

Molodensky, M. S., The theory of nutation and diurnal Earth tides, *Commun. Obs. R. Belg.*, 188, 25–56, 1961.

Moritz, H., A variational principle for Molodensky's liquid core problem, *Bull. Geod.*, 56, 381–400, 1982.

Moritz, H. and I. Mueller, *Earth Rotation*, Frederic Ungar, New York, 1987.

Munk, W. K. and Macdonal, G. J. F., *The rotation of the Earth: a geophysical discussion*, Cambridge University Press, 1960.

Navarro, J. F., Teoría analítica de la rotación de la Tierra mediante manipulación simbólica específica, tesis doctoral, Universidad de Alicante, 2002.

Nikitina, L. V., Angle between the rotation axes of the Earth's core and mantle, *Geomagn. Aeron.*, 30, 702–705, 1990.

Poincaré, H., Sur la précession des corps déformables, *Bull. Astron.*, 27, 321–356, 1910.

Rochester, M. G., Core-mantle interactions: geophysical and astronomical consequences, in *Earthquake Displacement Fields and the Rotation of the Earth*, edited by L. Mansinke et al., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 136–148, 1970.

Rochester, M. G., The secular decrease of obliquity due to dissipative core-mantle coupling, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 46, 109–126, 176.



- Routh, E. J., *Advanced dynamics of a system of rigid bodies*, 6th ed., Dover Phoenix Editions, 2005.
- Sasao, T., S. Okubo and M. Saito, A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth, in *Proceedings of IAU Symposium 78*, edited by E. P. Federov, M. L. Smith, and P. L. Bender, D. Reidel, Norwell, Mass., 165–183, 1980.
- Seidelmann, P. K., 1980 IAU theory of nutation - The final report of the IAU working group on nutation, *Celest. Mech.*, 27, 79–106, 1982.
- Sevilla, M. and P. Romero, Polar motion for an elastic Earth model with a homogeneous liquid core using a canonical theory, *Bull. Geod.*, 61, 1–20, 1987.
- Schastok, J., A new nutation series for a more realistic Earth model, *Geophys. J. Int.*, 130, 137–151, 1997.
- Shirai, T. and T. Fukushima, Improvement of non-rigid Earth nutation theory by adding a model free core nutation term, in *Proceedings of IAU Colloquium 180*, edited by K. J. Johnston, D. D. McCarthy, B. J. Luzum, and G. H. Kaplan, U.S. Nav. Obs., Washington, D. C., 223–229, 2000.
- Smith, M. L., Wobble and nutation of the Earth, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 50, 103–140, 1977.
- Soffel, M., *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer, 1989.
- Soffel, M. and S. Klioner, Relativity in the problems of Earth rotation and astronomical reference systems: status and prospects, in *Proceedings of the Journées 2004*, edited by N. Capitaine, Paris Obs., Paris, France, 191–195, 2005.
- Soffel, M., A. Klioner, G. Petit et al., The IAU 2000 resolutions for Astrometry, Celestial Mechanics, and Metrology in the relativistic framework: explanatory supplement, *Astron. J.*, 126, 2687–2706, 2003.
- Souchay, J., Rigid Earth nutation models, in *Proceedings of IAU Colloquium 180*, edited by K. J. Johnston, D. D. McCarthy, B. J. Luzum, and G. H. Kaplan, U.S. Nav. Obs., Washington, D. C., 190–195, 2000.
- Souchay, J. and H. Kinoshita, Corrections and new developments in rigid earth nutation theory. I. Lunisolar influence including indirect planetary effects, *Astron. Astrophys.*, 312, 1017–1030, 1996.

Souchay, J. and H. Kinoshita, Corrections and new developments in rigid-Earth nutation theory. II. Influence of second-order geopotential and direct planetary effect, *Astron. Astrophys.*, 318, 639–652, 1997.

Souchay, J., B. Losley, H. Kinoshita and M. Folgueira, Corrections and new developments in rigid earth nutation theory. III. Final tables “REN-2000” including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 135, 111–131, 1999.

Stiefel, E. L. and G. Scheifele, *Linear and regular Celestial Mechanics*, Springer, 1971.

Wahr, J. M., A normal mode expansion for the forced response of a rotating Earth, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 64, 651–675, 1981a.

Wahr, J. M., The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 64, 705–727, 1981b

Wahr, J. M., Computing tides, nutations, and tidally induced variations in the Earth’s rotation rate for a rotating, elliptical earth, in *Geodesy and Global Geodynamics*, edited by H. Moritz and H. Sünkel, Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, No. 41, 327–379, 1982.

Wahr, J. M., The Earth’s rotation, *Ann. Rev. Earth Planet Sci.*, 16, 231–249, 1988.

Whittaker, E. T., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4th ed., Cambridge University Press, 1989.

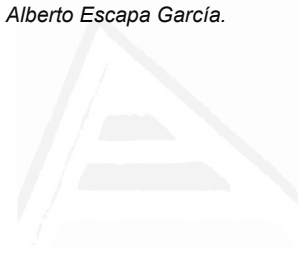
Wigner, E., *Group theory*, Academic Press, 1959.

Wintner, A., *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princenton University Press, 1941.

Woolard, E. W., Theory of the rotation of the Earth around its center of mass, *Astron. Papers Amer. Ephemeris*, 15, 1–165, 1953.

Woolard, E. W., A redevelopment of the theory of nutation, *Astron. J.*, 58, 1–3, 1953.

Xu, S. and A. M. K. Szeto, Gravitational coupling in the Earth’s interior revisited, *Geophys. J. Int.*, 118, 94–100, 1994.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Apéndice

## Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model

Alberto Escapa and Juan Getino

Grupo de Mecánica Celeste, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain

José M. Ferrándiz

Departamento Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias  
Universidad de Alicante, Alicante, Spain

**Abstract.** The Hamiltonian formalism is applied to a three-layer Earth model composed of a rigid mantle, a fluid outer core and a rigid inner core, with no dissipation of frictional or electromagnetic origin. Analytical expressions for the free nutations are derived in a set of nonsingular canonical variables that allow a much simpler mathematical treatment. They are checked versus numerical solutions and compared with previous results by *Mathews et al.* [1991a] and *Getino and Ferrándiz* [1996, 1998a] with complete agreement up to the first order in the ellipticities.

### 1. Introduction

The study of the nutations of the Earth is interesting for obtaining accurate information about Earth orientation in space and also as a means of gaining information about the Earth's interior properties. This issue has been comprehensively studied throughout the 20th century, especially in the last two decades. Nevertheless, the great development of the current geodetic techniques makes the nutation terms known very accurately but not always well predicted by current Earth rotation models. So, it is necessary to include additional, unmodeled physical mechanisms in order to fit more precisely the observational data. This is an important challenge in improving the theoretical Earth rotation theories.

The nutations of the Earth have been approached by a great variety of works. With respect to the nonrigid Earth models, these studies can be divided into different types according to the general guidelines followed by the theories [e.g., *Smith*, 1977; *Kinoshita and Sasao*, 1989; *Mathews and Shapiro*, 1992; *Moritz and Mueller*, 1987]. For our purposes it will suffice to sketch two main features of the theories, namely, the way in which the equations of the theories are obtained and the treatment of the forced nutations of the Earth.

An important division is achieved when paying attention to the perspective from which the fundamental equations of the theories are constructed. One group of the theories are based on applying the equations of the continuum mechanics in computing the displacement field in the whole Earth [e.g., *Smith*, 1977; *Wahr*, 1981a, 1981b]. This approach is probably the most complete of all because it considers all the normal modes of the rotating, elliptical Earth, not only the nutational ones. However, these theories are essentially numerical that provide only moderate physical insight into the problem. In addition, to perform the numerical integration it is necessary to have the explicit knowledge of the functional dependence of the rheological parameters (density, elastic properties, etc.) This fact complicates enormously the adjustment to the observational data, which is

necessary to test the geophysical models as well as to obtain precise nutation series.

The second group of theories builds the equations of the system by means of classical mechanics [e.g., *Molodensky*, 1961; *Sasao et al.*, 1980; *Mathews et al.*, 1991a, 1991b]. In this way the general equations of the angular momentum conservations are stated for the whole Earth and its layers. The equations of hydrodynamics are needed in order to compute the evolution of the fluid layer and the torque which exerts on the Earth. The main advantage of this approach over the first group is that it provides simple analytical expressions for the nutational normal modes. In these expressions the internal structure of the Earth only enters through a set of parameters, which could be computed from geophysical Earth models or properly fitted to the observations.

Finally, another method is to approach the problem using the variational theories of classical mechanics [e.g., *Poincaré*, 1910; *Jeffreys and Vicente*, 1957a, 1957b; *Kubo*, 1979; *Moritz*, 1982; *Getino and Ferrándiz*, 1998c] as in this investigation. As it is well known, the variational methods and the vectorial methods are almost equivalent because they are based on almost overlapping physical principles. Nevertheless, the variational approach presents some advantages: On one hand, it shares the benefits of the angular momentum theory over the displacement field approach. On the other hand, the variational treatment is simpler, avoiding the calculations of some inner torques of the system. For instance, and as it will be shown in this paper, the fluid torques are obtained by constructing the kinetic energy of the system, without the need to employ the equations of hydrodynamics. In this way, as pointed out by *Moritz* [1982], the treatment of the problem is very elegant and symmetric and to some extent independent of the nature of the layer. It should be noted that by using the variational methods some physical intuition may be lost with respect to the classical mechanics. This fact is due to the numerous mathematical details employed by the variational methods. On the other hand, some insight can be gained on the internal structure of the system (see, for instance, section 4.6 of *Moritz and Mueller* [1987]) where a detailed discussion of Poincaré variables for nonrigid Earth is made, including the relationships with the symmetries of the system.

Let us remark that Hamiltonian variational equations and *Mathews et al.* [1991a] equations are not equivalent, but only partially equivalent. Of course, there is a close link between angular momentum equations and canonical equa-

Copyright 2001 by the American Geophysical Union.

Paper number 2000JB900443.  
0148-0227/01/2000JB900443\$09.00

**THE ROTATION OF A NON-RIGID, NON-SYMMETRICAL EARTH II:  
FREE NUTATIONS AND DISSIPATIVE EFFECTS**

JUAN GETINO<sup>1</sup>, ANA B. GONZÁLEZ<sup>2</sup> and ALBERTO ESCAPA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Grupo de Mecánica Celeste, Departamento de Matemática Aplicada Fundamental, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, Prado de la Magdalena s/n, 47005 Valladolid, Spain*

<sup>2</sup>*Grupo de Mecánica Celeste, Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería, E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid, Paseo del Cauce s/n, 47011 Valladolid, Spain*

(Received: 8 April 1999; accepted: 10 March 2000)

**Abstract.** The study of the rotation of a non-rigid, non-symmetrical Earth with a heterogeneous and stratified liquid core was recently accomplished by González and Getino (1997) through the Hamiltonian formalism. In this work that model is extended by including the effect of the dissipation arising from the mantle–core interaction due to the viscous and electromagnetic coupling. A canonical transformation to a new set of non-singular variables is performed, in order to avoid small divisors in the system of equations. Numerical estimations of the effect of the dissipation are given in form of tables and graphics, and the significance of this effect is discussed.

**Keywords:** non-rigid earth, nutation, free nutation, dissipative effects

### 1. Introduction

The Hamiltonian theory of Kinoshita (1977) of the rigid Earth has been extended by Getino (1995a, b) and Getino and Ferrándiz (1995, 1997) for non-rigid Earth models, considering the elasticity of the mantle, the presence of the fluid core and the solid inner core, and dissipation in the boundaries, with a canonical formulation by means of an adequate sets of Andoyer-like variables for the different layers. These works, as well as most of theories of rigid and non-rigid Earth consider a simplified symmetrical model, with  $A = B$  (principal moments of inertia).

Nevertheless, the accuracy of the present observational data reached by modern techniques such as VLBI (very long baseline interferometry) and LLR (lunar laser ranging) requires to elaborate more precise rotation theories considering more realistic Earth models, and adding effects which were disregarded in the past. For instance, we can refer to the work by Kinoshita and Souchay (1990), which consider the triaxiality of the Earth among other effects.

For this reason, González and Getino have recently begun the study of the effect of the triaxiality on the Earth's rotation by extending the previous models of Getino (1995a, b) and Getino and Ferrándiz (1995, 1997) to the case  $A \neq B$ . Still under the Hamiltonian formalism, the first paper (González and Getino, 1997) was devoted to the formulation of the free motion of a non-symmetrical Earth composed of a



*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 76: 1–21, 2000.  
© 2000 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

A&A 370, 330–341 (2001)  
 DOI: 10.1051/0004-6361:20010186  
 © ESO 2001

Astronomy  
&  
Astrophysics

## Hamiltonian theory for the non-rigid Earth: Semidiurnal terms

J. Getino<sup>1</sup>, J. M. Ferrándiz<sup>2</sup>, and A. Escapa<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Grupo de Mecánica Celeste, Facultad de Ciencias, 47005 Valladolid, Spain

<sup>2</sup> Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad de Alicante, 03080 Alicante, Spain

Received 15 June 2000 / Accepted 31 January 2001

**Abstract.** The purpose of this paper is to determine the contributions to the nutation series arising from the triaxiality of a non-rigid Earth model composed of a rigid mantle and a liquid core. With this aim, the canonical formulation of the rotation of the non-rigid Earth developed by Getino and Ferrándiz is applied in order to study the semidiurnal terms arising from the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  geopotential coefficients. Once the corresponding generating function is calculated, analytical expressions of the Andoyer and figure planes are derived. We also provide numerical nutation series based on the analytical formulae.

**Key words.** celestial mechanics – earth – method: analytical

### 1. Introduction

The Hamiltonian formalism has been applied by Getino and Ferrándiz to the study of non-rigid Earth models. At present, we have performed a comprehensive treatment of an Earth model composed of an elastic, axis-symmetric mantle, and a liquid core, including the dissipative effects in the core-mantle boundary (CMB) and the delay in the response of the deformation due to the inelasticity of the mantle. The corresponding free problem, with the determination of the free frequencies, is developed in Getino & Ferrándiz (1997), while the nutation series concerning the forced motion can be found in Getino & Ferrándiz (1999, 2000a).

We note that these previous studies refer to an axis-symmetric Earth model. Thus, the perturbed potential arises from the  $J_2$  part of the geopotential coefficient which is the main contribution to the nutation series.

However, the Earth's orientation in space nowadays can be determined with great accuracy. As a direct consequence, it is necessary to consider some effects, previously disregarded, which could contribute to the nutation series and which must be taken into account in order to achieve a more complete model.

Particularly, although the Earth is almost to an axis-symmetric body, the influence of its triaxiality on the nutation is not negligible. The influence of this effect on nutations was calculated firstly by Kinoshita (1977) for the biggest terms and by Kinoshita & Souchay (1990) up to

0.005 milli arcsec. More recently, Folgueira et al. (1998), Souchay et al. (1999) and Bretagnon et al. (1997) have evaluated the coefficients of nutation due to higher parts of the geopotential, obtaining the diurnal and the semidiurnal terms. Notice that all these works assume rigid Earth.

In this paper we begin with the study of the semidiurnal terms coming from the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  geopotential coefficients by considering a non-rigid Earth model and applying the Hamiltonian formalism developed by Getino and Ferrándiz. Due to the small magnitude of these terms, in a first approximation it is enough to consider a rigid mantle, liquid core Earth model, disregarding the effect of the elasticity, whose contribution is negligible.

In Sect. 2 we summarize the formalism applied to a symmetric Earth which will be extended in Sect. 3 to take into account the effect of the triaxiality. Under the Hamiltonian framework the semidiurnal terms are obtained through the generating function, which is studied in Sect. 4. In Sect. 5 the analytical expressions of the nutations of the Andoyer and figure planes are derived. Finally, in Sect. 6 we compute the numerical values of the nutations, making a comparison with the values obtained by Souchay et al. (1999) and Bretagnon et al. (1997) for a rigid Earth model.

### 2. The symmetrical two-layered Earth model: An overview

In this section we give a brief description of the Hamiltonian approach to the free and forced nutations

Send offprint requests to: J. Getino,  
 e-mail: getino@maf.uva.es

A&A 389, 1047–1054 (2002)  
 DOI: 10.1051/0004-6361:20020734  
 © ESO 2002

## Indirect effect of the triaxiality in the Hamiltonian theory for the rigid Earth nutations

A. Escapa<sup>1</sup>, J. Getino<sup>2</sup>, and J. M. Ferrándiz<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Escuela Politécnica Superior, Universidad de Alicante, 03080 Alicante, Spain

<sup>2</sup> Grupo de Mecánica Celeste, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, 47005 Valladolid, Spain

Received 20 September 2001 / Accepted 30 April 2002

**Abstract.** In this investigation we determine a new contribution to the nutation series due to an indirect effect of the triaxiality of the rigid Earth. We undertake this work in the context of the Hamiltonian theory for the rigid Earth, developed by Kinoshita (1977) and recently updated by Souchay et al. (1999). To do this, we express the potential energy in terms of the action-angle variables for the triaxial Earth. Then, we work out analytical formulae for the new contributions, showing that their numerical values are within the truncation level adopted by REN-2000 (Souchay et al. 1999), which was fixed to  $0.1 \mu\text{as}$ .

**Key words.** celestial mechanics

### 1. Introduction

In the last years, a group headed by Dr. Souchay has carried out an extensive reconstruction of the Hamiltonian theory of the nutation for the rigid Earth (Souchay & Kinoshita 1996, 1997; Folgueira et al. 1998a, 1998b; Souchay et al. 1999). The purpose of these studies was to update the pioneering investigations of Kinoshita (1977) and Kinoshita & Souchay (1990), in order to achieve a precision at the level of  $0.1 \mu\text{as}$  (microarcsecond) for each individual term of the nutation series of the Earth. Hence, it has been necessary to perform successive enhancements in the basic rigid Earth theory by recalculating more precisely known contributions, or by including new effects previously disregarded, like the study of coupling mechanisms, influence of the planets, etc. (see Souchay et al. 1999 or Souchay 2000, for a complete description). The results of these works are collected in Souchay et al. (1999), where the tables for the resulting rigid Earth nutation (REN-2000) seemed to be definitive. As it is pointed out by Souchay et al. (1999), the tables REN-2000 “catch all the coefficients up to  $0.1 \mu\text{as}$ ”.

One of the mentioned enhancements consists of incorporating the effects of the triaxiality of the Earth. As it is well-known, the Earth is not a perfect symmetrical body; this fact gives rise to the appearance of the non-zonal harmonics of the geopotential expansion, which affects the Earth nutations causing the so-called short period nutations, mainly diurnal and subdiurnal. The in-

fluence of these terms was studied by Kinoshita (1977), Kinoshita & Souchay (1990), Souchay & Kinoshita (1997) and Souchay et al. (1999) for the  $C_{22}$  and  $S_{22}$  coefficients and by Folgueira et al. (1998a, 1998b) for the non-zonal coefficients of third and fourth degree. Indeed, as it is remarked in Souchay (2000), the short-period nutations terms are one of the most important new contributions allowing the REN-2000 tables to reach the sub-microarcsecond level.

Those works include the effect of the triaxiality in a direct way, that is to say, they compute the nutations terms arising from the potential terms caused by the triaxiality (non-zonal harmonics). However, the triaxiality also modifies the expression of the kinetic energy that is fundamental in the application of perturbation methods. Because of this fact, the action-angle variables for the torque-free motion of a triaxial Earth do not coincide with the Andoyer variables (Kinoshita 1972), which are action-angle variables only for the free motion of a symmetrical rigid body. Since Andoyer variables are not action-angle variables, to apply the Hori perturbation method (Hori 1966) it is convenient to expand the disturbing function in terms of the action-angle variables and not in terms of the Andoyer variables, to avoid the occurrence of elliptical functions when computing the generating function.

This step was published by Kinoshita (1977) himself, but he decided rightly not to take it into account since the truncation level of his work was  $0.1 \text{ mas}$  (milliarcsecond). The transformation is achieved with the help of a canonical transformation which relates Andoyer variables with the action-angle variables (Kinoshita 1972, 1977). Thus, the triaxiality affects all the terms of the

Send offprint requests to: A. Escapa,  
 e-mail: Alberto.Escapa@ua.es