



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.

Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.

[Ir directamente al índice](#)

Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriores

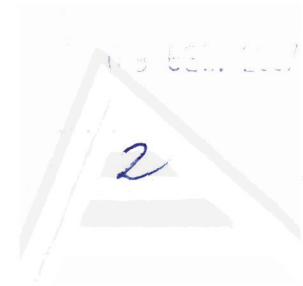
Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'índex al principi i final de cadascun dels capítols .

[Anar directament a l'índex](#)

Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriors.

Universidad de Alicante

Depto. de Estadística e Investigación Operativa



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Algunas Contribuciones a la Programación Semi-Infinita Convexa

Memoria presentada por María Dolores Fajardo Gómez para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, realizada bajo la dirección del doctor D. Marco Antonio López Cerdá.

Alicante, 2007.





Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



D. MARCO ANTONIO LÓPEZ CERDÁ, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante,

CERTIFICA: Que la presente memoria **Algunas Contribuciones a la Programación Semi-Infinita Convexa** ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante por Dña. María Dolores Fajardo Gómez, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firma el presente certificado en Alicante, a ocho de enero de dos mil siete.

Fdo: Marco Antonio López Cerdá



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Sirvan estas líneas para expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que han contribuido, de forma directa o indirecta, a que esta Tesis haya sido posible:

A los profesores Marco Antonio López Cerdá, Miguel Ángel Goberna Torrent y Valentín Jornet Pla, quienes me iniciaron en el estudio del Análisis Convexo y de la Programación Semi-Infinita.

A mis director de tesis, Marco Antonio, por su paciencia, su continuo apoyo y su dedicación.

A mis compañeras, Margarita, Mariola y M^a José, por su incondicional ayuda cuando la necesitaba.

A mis padres por haber hecho posible que llegase este momento.

Y, por último, a mis hijos, Dani y Pablo, por su cariño en los momentos que más lo he necesitado.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

A mis padres



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice General

Introducción	1
Capítulo 0. Preliminares	5
0.1. Notación y definiciones	5
0.2. Herramientas básicas	10
0.2.1. Conjuntos convexos	10
0.2.2. Funciones convexas	14
0.2.3. Sistemas semi-infinitos de desigualdades	24
Capítulo 1. Sistemas localmente Farkas-Minkowski (LFM) en programación semi-infinita convexa	29
1.1. Introducción	29
1.2. Sistemas LFM	31
1.3. La multifunción de las restricciones activas	34
1.4. La multifunción de las restricciones sup-activas	42
1.5. La cualificación de restricciones de Slater generalizada	46

Capítulo 2. Algunos resultados sobre la geometría facial de los sistemas semi-infinitos convexos	55
2.1. Introducción	55
2.2. Resultados generales	56
2.3. Representación lineal de un sistema convexo	63
2.4. Geometría de los sistemas LFM	68
2.5. Caracterización del interior y del interior relativo del conjunto de soluciones	75
Capítulo 3. Representaciones de una función convexa. Funciones cuasipoliédricas	89
3.1. Introducción	89
3.2. Representación de una función mediante minorantes afines	90
3.3. Representaciones LFM	93
3.4. Representaciones localmente poliédricas (LOP). Funciones cuasipoliédricas	95
3.5. Conjugada de una función cuasipoliédrica	101
3.6. Operaciones con funciones cuasipoliédricas	113
3.7. Subdiferencial de una función cuasipoliédrica en un punto	125
3.8. Representaciones Farkas-Minkowski (FM)	130
3.9. Una aplicación de la convexidad cuasipoliédrica	133
Bibliografía	149
Índice alfabético	153



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Introducción

Un problema de optimización en el que o bien el número de variables o bien el número de restricciones (desigualdades) es infinito es un problema de Programación Semi-Infinita (SIP¹, para abreviar). Este modelo surge, de forma natural, en las Ciencias Sociales y en la Física, asociado con la consideración de restricciones en las variables de estado o de control del sistema durante un periodo de tiempo o en todo punto de una región geométrica.

Los orígenes de la SIP pueden relacionarse con el clásico trabajo de Haar [16], pero el término SIP fue establecido por Charnes, Cooper y Kortanek en 1962, siendo este último autor quien desarrolló las primeras aplicaciones de SIP en Economía, Teoría de Juegos, Inferencia Estadística, etc.

Cuando tanto la función objetivo como las restricciones son convexas, nos encontramos frente a un problema de Programación Semi-Infinita Convexa (CSIP², para abreviar). En particular, si todas las funciones involucradas son lineales, se denomina problema de Programación Semi-infinita Lineal (LSIP³, para abreviar). Así pues, la CSIP puede ser considerada como una extensión de la Programación Convexa ordinaria. Bien conocido es, en este campo, que la denominada Cualificación de Restricciones Básica (BCQ⁴, para abreviar), la cuál requiere que el cono normal en cada punto de la frontera del conjunto factible coincida con el cono de restricciones activas en ese punto, juega un papel muy importante en el análisis teórico del problema. En particular, la BCQ se satisface si y sólo si la condición suficiente de optimalidad Karush-Kuhn-Tucker

¹ Del inglés, *Semi-Infinite Programming*.

² Del inglés, *Convex Semi-Infinite Programming*.

³ Del inglés, *Linear Semi-Infinite Programming*.

⁴ Del inglés, *Basic Constraint Qualification*.

(KKT) es también necesaria (véase, por ejemplo, [17, Prop. VII.2.2.1]), cualquiera que sea la función objetivo.

En el trabajo de Puente y Vera de Serio [24], la cualificación BCQ ha sido extendida a sistemas infinitos de desigualdades lineales, a través de la noción de Sistemas Localmente Farkas-Minkowski (LFM, abreviado). El texto de Goberna y López [14] presenta, en el Capítulo 7, un análisis exhaustivo de la Teoría de Optimalidad en LSIP, cuando el sistema de restricciones del problema es LFM. Ello supone que la propiedad LFM puede ser considerada como una cualificación de restricciones, así como su extensión a la CSIP, introducida en ese mismo capítulo.

En el trabajo de Li *et al.* [19], se obtienen caracterizaciones de la propiedad LFM (utilizando la denominación BCQ) en términos de la semicontinuidad superior (en el sentido de Kuratowski) de dos multifunciones relacionadas con los conos convexos generados, la primera, por el conjunto subdiferencial, en cada punto, de la función supremo de las infinitas funciones convexas que aparecen en el sistema de restricciones, y la segunda, por la unión de los subdiferenciales de las funciones asociadas a los índices sup-activos (es decir, las funciones que en el punto coinciden con la función supremo). En este mismo trabajo, se proporcionan fórmulas para la distancia de un punto al conjunto de soluciones de un sistema convexo que satisface la BCQ.

El Capítulo 1 de esta memoria está dedicado al estudio de la cualificación de restricciones LFM en CSIP, proporcionando caracterizaciones desde una perspectiva geométrica, y en términos del comportamiento de dos multifunciones relacionadas con las funciones asociadas a los índices activos (es decir, las funciones que se anulan en el punto) y sup-activos en cada punto. Se pondrá, pues, de manifiesto, el importante papel que la función supremo juega en nuestro enfoque, que, en cierta medida, es próximo al de [19].

También se presentará una nueva cualificación de restricciones del tipo de la de Slater, que generalizará versiones previas que aparecen en los trabajos de Goberna y López [14] y López y Vercher [21]. Esta cualificación garantizará un comportamiento regular de la función supremo, dando lugar a la conocida fórmula de Valadier para el subdiferencial de dicha función.

La propiedad LFM tiene importantes repercusiones en la geometría del conjunto factible del problema. En LSIP se han obtenido caracterizaciones de la dimensión del conjunto factible y del conjunto óptimo en el trabajo de Goberna y López [13], mientras que el Capítulo 5 de [14] está dedicado a la geometría del conjunto factible, estableciendo, en primer lugar, diversas relaciones de inclusión del interior y de la frontera (relativos y absolutos) de dichos conjuntos. En el Teorema 5.9 de [14], que trata de los sistemas lineales que verifican la propiedad LFM, se proporcionan fórmulas para la dimensión de su conjunto factible, para su afinidad, y para su interior relativo topológico. En dicho teorema, el conjunto interior se caracteriza como el conjunto de los puntos de Slater del sistema obtenido a partir del original, eliminando todas las desigualdades triviales.

El Capítulo 2 extiende los resultados mencionados en el párrafo anterior al problema de CSIP. Resulta fundamental el papel que juega cierta linealización del conjunto factible, expresada en términos de los subgradientes de las funciones convexas involucradas en el sistema, y que fue introducida en el trabajo de López y Vercher [21, Def. 4.1]. Los sistemas convexos LFM presentan también similitudes geométricas con los sistemas lineales, pero las caracterizaciones del interior y el interior relativo del conjunto factible necesitarán de ciertas hipótesis adicionales. En este capítulo, se proporcionan numerosos ejemplos que clarifican las diferencias con el caso lineal.

La propiedad LFM puede ser considerada como un estadio intermedio entre dos familias de sistemas lineales: los sistemas Farkas-Minkowski (FM, para abreviar) y los sistemas localmente poliédricos (LOP, para abreviar). La caracterización de los sistemas FM como aquéllos tales que su cono característico es cerrado, fue dada de forma independiente por Zhu [29], como consecuencia inmediata del Lema de Farkas Generalizado, y por Cernikov [7], quien los denominó "poliédricamente cerrados". La clase de los sistemas LOP fue introducida en el trabajo de Anderson *et al.* [1], extendiendo la clase de los denominados p -sistemas en Marchi *et al.* [22], cuyos conjuntos de soluciones eran cuasipoliédricos. Este último concepto fue introducido por Klee [18] en relación con el problema de separación de conjuntos convexos. En referencia a LSIP, Anderson *et al.* [2] describen dos métodos del estilo del simplex para

problemas cuyo sistema de restricciones asociado es LOP.

Existe una correspondencia entre los conjuntos convexos y cerrados (no vacíos) y estas dos familias de sistemas. en el sentido de que todo conjunto convexo y cerrado puede representarse (es decir, es el conjunto de soluciones) mediante un sistema lineal FM (y, en consecuencia, LFM), y admite una representación LOP si y solo si el conjunto es cuasipoliédrico (véase [14, Th. 5.11]). Dado que toda función convexa y cerrada verifica que su epigrafo es un conjunto convexo y cerrado, puede establecerse una relación entre la función y una representación lineal de la misma, que permitirá, en el Capítulo 3, introducir un nuevo enfoque en el estudio de las propiedades de la función en base a las propiedades del sistema que representa su epigrafo.

El concepto de función convexa cuasipoliédrica, en correspondencia con una representación LOP de su epigrafo, puede entenderse como una generalización del concepto de función poliédrica. Esta clase de funciones es cerrada respecto a operaciones bien conocidas, como se analiza ampliamente en la Sección 19 del texto de Rockafellar [26]. Hemos recogido en la Proposición 3.7 del Capítulo 3 los principales resultados en esta dirección, a efectos comparativos. Se prueba que en la familia de las funciones cuasipoliédricas casi todas las operaciones se preservarán, aunque en algunos casos necesitaremos ciertas hipótesis adicionales. El capítulo se cerrará con una aplicación de la convexidad cuasipoliédrica que "elimina" la parte no convexa de una función continua, sustituyéndola por una función convexa cuasipoliédrica, dando como resultado final una función convexa en todo el espacio.

Los tres capítulos que constituyen el cuerpo de esta memoria están precedidos por un capítulo de preliminares, el Capítulo 0, en el que se recoge la notación, definiciones y enunciados de los resultados ya conocidos que se van a utilizar en los demás capítulos, refiriéndolos a sus fuentes originales. También se incluyen en este capítulo una serie de ejemplos relacionados entre sí, con el fin de aligerar la presentación de un ejemplo del Capítulo 2.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 0

Preliminares

0.1 Notación y definiciones

Sea f una función definida en \mathbb{R}^n con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. El conjunto

$$\text{epi } f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \leq \alpha \right\}$$

se llama *epigrafo* de f , y se dice que f es *convexa* si $\text{epi } f$ es un conjunto convexo de \mathbb{R}^{n+1} .

El *dominio efectivo* de una función convexa f es el conjunto convexo

$$\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}.$$

La convexidad de f equivale a decir que, para todo par de puntos $x, y \in \text{dom } f$, y para todo escalar λ , $0 < \lambda < 1$, se verifica que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

En particular, si la desigualdad anterior es estricta, para $x \neq y$, se dice que f es *estrictamente convexa*.

Una función convexa f se dice *propia* si $\text{dom } f \neq \emptyset$. En esta memoria consideraremos exclusivamente funciones convexas propias. Si, además, $\text{dom } f = \mathbb{R}^n$, decimos que f es una función *finito-valorada*.

Otro conjunto asociado a f de interés es el *grafo* de f :

$$\text{gph } f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \text{dom } f \right\}.$$

La *clausura* de una función convexa f , $\text{cl } f$, es, a su vez, una función convexa, que se define como la envoltura semicontinua inferiormente de f ; es decir,

$$(\text{cl } f)(x) := \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

Si $\text{cl } f = f$, decimos que f es *cerrada*, y esto es equivalente a que $\text{epi } f$ sea un conjunto cerrado en \mathbb{R}^{n+1} (ambas condiciones son, a su vez, equivalentes a que los conjuntos de nivel $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ sean cerrados, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$). La condición de ser cerrada también equivale a decir que es *semicontinua inferiormente* en todo punto de \mathbb{R}^n ; es decir,

$$f(x) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} f(x^r),$$

para toda sucesión $\{x^r\}_{r=1}^{\infty}$ convergente a x , para todo $x \in \mathbb{R}^n$, siempre que $\lim_{r \rightarrow \infty} f(x^r)$ exista en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Toda función convexa finito-valorada es cerrada y continua en todo el espacio, dado que una función convexa es continua en el interior relativo de su dominio.

Si f es una función convexa en \mathbb{R}^n y $x \in \text{dom } f$, la *derivada direccional* de f en x respecto al vector $v \in \mathbb{R}^n$

$$f'(x; v) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda}$$

siempre existe ($+\infty$ y $-\infty$ se permiten como límites), siendo

$$f'(x; v) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda}.$$

Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ es un *subgradiente* de la función convexa f en un punto $x \in \text{dom } f$ si

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^n . El conjunto de todos los subgradientes

de f en x se llama *subdiferencial* de f en x , y se denota $\partial f(x)$. La multifunción⁵ $\partial f : x \rightrightarrows \partial f(x)$ se denomina *subdiferencial* de f . El conjunto $\partial f(x)$ es cerrado, convexo y posiblemente vacío. Si $\partial f(x)$ no es vacío, decimos que f es *subdiferenciable* en x .

Es inmediato, a partir de la definición de subgradiente, que

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x), \text{ para } \lambda > 0.$$

Es también obvio que $0_n \in \partial f(x)$ si, y sólo si, la función f alcanza su valor mínimo en x .

A continuación introducimos algunas funciones convexas particulares que se utilizarán en esta memoria. Dado un conjunto convexo no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$, consideremos la *función indicadora* de C

$$\delta(x | C) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in C \\ +\infty, & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Esta función es cerrada si y sólo si C es cerrado.

La *conjugada de Fenchel* de una función dada f es una herramienta crucial en análisis convexo, y viene definida de la siguiente manera

$$f^*(u) = \sup \{ \langle u, x \rangle - f(x) \mid x \in \text{dom } f \}.$$

Esta función es convexa y cerrada. Si f es convexa y cerrada, se tiene $f^{**} = f$.

La *función soporte* $\delta^*(\cdot | C)$ de un conjunto convexo no vacío C , se define

$$\delta^*(u | C) := \sup \{ \langle u, x \rangle \mid x \in C \},$$

verificándose que, si C es cerrado, esta función y la función indicadora de C son conjugadas una de la otra. Además, para cualquier conjunto convexo no vacío C , se tiene que

$$\delta^*(u | C) = \delta^*(u | \text{cl } C) = \delta^*(u | \text{rint } C), \text{ para todo } u.$$

⁵ Llamaremos *multifunción* a toda aplicación punto a conjunto.

Consideremos el Problema de Optimización Convexa

$$(P) \inf \{g(x) \mid f_t(x) \leq 0, t \in T\},$$

donde las funciones g y f_t , para todo $t \in T$, son convexas definidas en \mathbb{R}^n .

El sistema de restricciones de (P) se representa $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$. Si el conjunto de índices T es infinito, estaremos ante un problema de CSIP. A lo largo de la memoria, T será un conjunto arbitrario, excepto en la Sección 1.5 del Capítulo 1, en la que asumiremos que T posee cierta estructura.

El conjunto solución de σ , llamado también *conjunto factible* de (P), se denotará por F , y diremos que σ es *consistente* si F es no vacío. En otro caso, diremos que es *inconsistente*.

En el caso particular de que las funciones consideradas en (P) sean afines, resulta el problema de LSIP

$$(P) \inf \{\langle c, x \rangle \mid \langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\},$$

donde c, x, a_t son vectores de \mathbb{R}^n y $b_t \in \mathbb{R}$. En este caso, el sistema de restricciones es $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$. Si σ es consistente, cuando todos los coeficientes de cierta desigualdad son cero (es decir, $a_t = 0_n$ y $b_t = 0$, para cierto $t \in T$), se dice que dicha desigualdad es *trivial*, y el mismo término se utiliza para aquellos sistemas donde todas las desigualdades son triviales.

Introducimos acto seguido alguna notación que emplearemos en la memoria. Dado $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\text{span } X$, $\text{aff } X$, $\dim X$, $\text{conv } X$ y $\text{cone } X$ al *subespacio vectorial generado* por X , la *envoltura afín* de X , la *dimensión* de X (definida como la dimensión de $\text{aff } X$), la *envoltura convexa* de X y el *cono convexo generado* por X , respectivamente. Otro cono de interés será el *cono polar* de X , X° (supuesto X convexo), y que está dado por

$$X^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 0, \text{ para todo } x \in X\},$$

verificándose que, si X es un cono, entonces $X^{\circ\circ} = \text{cl } X$.

Si consideramos el conjunto de todas las semi-rectas cerradas $L_y := \{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$ de \mathbb{R}^n , donde $y \neq 0_n$, se puede establecer la relación de equivalencia

"la semi-recta L_1 es una traslación de la semi-recta L_2 ". Cada clase de equivalencia se denomina *dirección* de \mathbb{R}^n , y la *dirección de un vector* $y \neq 0_n$ es la dirección de la semi-recta $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$, independientemente del punto x elegido.

Dado un conjunto convexo no vacío $X \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $y \neq 0_n$, se dice que la dirección de y es una *dirección de recesión* de X si $x + \lambda y \in X$, para todo $\lambda \geq 0$ y para todo $x \in X$. El conjunto de todos los vectores cuya dirección es una dirección de recesión de X , junto con el vector nulo, constituyen el denominado *cono de recesión* de X , 0^+X ; es decir,

$$0^+X := \{y \in \mathbb{R}^n \mid x + \lambda y \in X, \text{ para todo } \lambda \geq 0 \text{ y } x \in X\}.$$

En ocasiones utilizaremos también el *espacio de linealidad* de X (supuesto X convexo), dado por $\text{lin } X = (0^+X) \cap (-(0^+X))$, cuya dimensión se denomina *linealidad* de X , y que denotaremos $\text{lineality } X$. Un conjunto convexo es *apuntado* si su espacio de linealidad se reduce al vector nulo. Convendremos que $\text{cone } X$ siempre contiene al vector nulo, y por tanto, $\text{cone } (\emptyset) = \{0_n\}$.

Las normas *euclídea* y de *Chebyshev* de $x \in \mathbb{R}^n$ serán representadas por $\|x\|$ y $\|x\|_\infty$, respectivamente. La *bola unidad abierta*, en \mathbb{R}^n , para la norma euclídea y para la de Chebyshev, será representada por \mathbb{B} y \mathbb{B}_∞ , respectivamente. Mediante $\mathbb{R}_+^{(T)}$ representaremos el cono de todas las funciones $\lambda : T \rightarrow \mathbb{R}_+$, que toman valores positivos sólo en una cantidad finita de puntos de T , conjunto denotado por $\text{supp } (\lambda)$. En el ámbito topológico, si X es un subconjunto de cualquier espacio topológico, $\text{int } X$, $\text{cl } X$ y $\text{bd } X$ denotarán el *interior*, la *clausura* y la *frontera* de X , respectivamente, mientras que $\text{rint } X$ y $\text{rbd } X$ representarán el *interior relativo* y la *frontera relativa* de X (respecto de $\text{aff } X$), respectivamente.

Si $\{X_r\}_{r=1}^\infty$ es una sucesión de conjuntos no vacíos, en \mathbb{R}^p , $\liminf_{r \rightarrow \infty} X_r$ (respectivamente $\limsup_{r \rightarrow \infty} X_r$) es el conjunto de todos los límites (respectivamente puntos de acumulación) de todas las posibles sucesiones $\{x^r\}_{r=1}^\infty$, $x^r \in X_r$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Puede caracterizarse como el conjunto de los puntos x tales que cada uno de sus entornos interseca a todos los X_r , excepto a un número finito de ellos (respectivamente interseca a una infinidad de los X_r). Se dice que $\{X_r\}_{r=1}^\infty$ converge a un conjunto no

vacío X en el sentido de *Painlevé-Kuratowski* (véase, por ejemplo, [27, Chap. 4, Sec. B]) si $X = \liminf_{r \rightarrow \infty} X_r = \limsup_{r \rightarrow \infty} X_r$, en cuyo caso se escribe $X = \lim_{r \rightarrow \infty} X_r$. Si, en particular, la sucesión $\{X_r\}_{r=1}^{\infty}$ es expansiva (es decir, $X_r \subset X_{r+1}$, para todo $r \in \mathbb{N}$), entonces $\lim_{r \rightarrow \infty} X_r = \text{cl} \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} X_r \right)$.

0.2 Herramientas básicas

Esta sección recoge las herramientas del Análisis Convexo que se utilizan a lo largo de la memoria.

0.2.1 Conjuntos convexos

Proposición 0.1 [26, Cor. 6.3.1] Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos en \mathbb{R}^n . Entonces $\text{cl } C_1 = \text{cl } C_2$ si y sólo si $\text{rint } C_1 = \text{rint } C_2$. Estas condiciones son equivalentes a la condición $\text{rint } C_1 \subset C_2 \subset \text{cl } C_1$.

Proposición 0.2 [26, Th. 6.4] Sea C un conjunto convexo no vacío en \mathbb{R}^n . Entonces $z \in \text{rint } C$ si y sólo si para todo $x \in C$ existe un escalar $\mu > 1$ tal que $(1 - \mu)x + \mu z \in C$.

Proposición 0.3 [26, Th. 6.5] Sea C_i un conjunto convexo, en \mathbb{R}^n , para $i \in I$, siendo I un conjunto de índices arbitrario. Supongamos que los conjuntos $\text{rint } C_i$ tienen al menos un punto en común. Entonces

$$\text{cl} \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\text{cl } C_i).$$

Si I es finito, se cumple además

$$\text{rint} \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\text{rint } C_i).$$

Proposición 0.4 [26, Cor. 6.5.2] Sea C_1 un conjunto convexo. Sea C_2 un conjunto convexo contenido en $\text{cl } C_1$ pero no completamente contenido en la frontera relativa de

C_1 . Entonces $\text{rint } C_2 \subset \text{rint } C_1$.

Proposición 0.5 [26, Th. 8.2] *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces 0^+C es cerrado, y consiste en todos los posibles límites de sucesiones de la forma $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots$, donde $x_r \in C$ y $\lambda_r \downarrow 0$.*

Proposición 0.6 [26, Th. 8.3] *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío en \mathbb{R}^n , y sea $y \neq 0_n$. Si existe algún punto x tal que $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\} \subset C$, entonces $y \in 0^+C$.*

Como consecuencia de la proposición anterior, un conjunto convexo cerrado es apuntado si, y sólo si, no contiene ninguna recta completa.

Proposición 0.7 [26, Cor. 8.3.4] *Sea A una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , y sea C un conjunto convexo cerrado en \mathbb{R}^m tal que $A^{-1}C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in C\} \neq \emptyset$. Entonces $0^+(A^{-1}C) = A^{-1}(0^+C)$.*

Proposición 0.8 [26, Cor. 14.6.1] *Sea C un conjunto convexo cerrado en \mathbb{R}^n que contiene al origen. Entonces*

$$\text{lineality}(C^\circ) = n - \dim C.$$

Recordemos que un conjunto de $m + 1$ puntos $\{a^0, a^1, \dots, a^m\}$ en \mathbb{R}^n se dice que es *afinmente independiente* si $\dim \text{aff } \{a^0, a^1, \dots, a^m\} = m$. El siguiente resultado proporciona dos criterios equivalentes de este concepto.

Proposición 0.9 [25, Th. 2.15] *Sea $S = \{a^0, a^1, \dots, a^m\}$ un conjunto de $m + 1$ puntos en \mathbb{R}^n . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) S es *afinmente independiente*;
- (ii) los vectores $a^1 - a^0, \dots, a^m - a^0$ son *linealmente independientes* en \mathbb{R}^n ;
- (iii) los vectores $\begin{pmatrix} a^0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a^m \\ 1 \end{pmatrix}$ son *linealmente independientes* en \mathbb{R}^{n+1} .

Proposición 0.10 [25, Th. 2.31] *Sea S un conjunto no vacío en \mathbb{R}^n , y sea $C = \text{conv } S$. Entonces $x \in C$ si y sólo si x puede ser expresado como una combinación convexa, con*

coeficientes estrictamente positivos, de un subconjunto finito de puntos de S afinmente independiente.

Como consecuencia de la proposición anterior, la envoltura convexa de un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^n$ coincide con el conjunto de todas las combinaciones convexas de todos los subconjuntos de, como mucho, $n + 1$ puntos de S . Este resultado se conoce como *Teorema de Carathéodory*.

Recuérdese que una *cara* de un conjunto convexo C es un subconjunto convexo C' de C tal que cualquier segmento cerrado en C con un punto de su interior relativo en C' tiene también los extremos en C' . Un *punto extremo* de C es una cara de dimensión cero. Si C' es una cara de C que es una semi-recta, a la dirección de C' le denomina *dirección extrema* de C (punto extremo de C en el infinito).

Una *cara expuesta* de C es todo conjunto de la forma $C \cap H$, donde H es un hiperplano no trivial soporte a C . Un *punto expuesto* de C es una cara expuesta de C de dimensión cero. En particular, si C es un cono convexo, un *rayo expuesto* de C es una cara expuesta que coincide con una semi-recta que nace en el origen.

Es inmediato, a partir de la definición de cara, que todo punto extremo o dirección extrema de una cara de C es a su vez un punto extremo o una dirección extrema del propio C . En [26, p. 163], se demuestra también que toda dirección extrema de C es a su vez una dirección extrema de 0^+C .

Proposición 0.11 [26, Th. 18.1] *Sea C un conjunto convexo, y sea C' una cara de C . Si D es un subconjunto convexo de C tal que $C' \cap \text{rint } D \neq \emptyset$, entonces $D \subset C'$.*

Proposición 0.12 [26, Cor. 18.1.3] *Sea C un conjunto convexo, y sea C' una cara de C distinta del propio C . Entonces $C' \subset \text{rbd } C$, de manera que $\dim C' < \dim C$.*

Consideremos un conjunto de puntos $S_0 \subset \mathbb{R}^n$ y un conjunto de direcciones S_1 . Se define la *envoltura convexa* de $S = S_0 \cup S_1$ como el menor conjunto convexo C tal que $S_0 \subset C$ y además toda dirección de S_1 es una dirección de recesión de C .

Proposición 0.13 [26, Th. 18.3] *Sea $C = \text{conv } S$, donde S es un conjunto de puntos y direcciones, y sea C' una cara no vacía de C . Entonces $C' = \text{conv } S'$, donde S' consiste*

en los puntos de S que pertenecen a C' y las direcciones en S que son direcciones de recesión de C' .

Proposición 0.14 [26, Cor. 18.3.1] *Sea $C = \text{conv } S$, donde S es un conjunto de puntos y direcciones. Entonces todo punto extremo de C es un punto de S . Si ninguna semi-recta en C contiene un conjunto de puntos no acotado de S , entonces toda dirección extrema de C es una dirección de S .*

Proposición 0.15 [26, Th. 18.5] *Sea C un conjunto convexo cerrado apuntado, y sea S el conjunto de todos los puntos extremos y todas las direcciones extremas de C . Entonces $C = \text{conv } S$.*

Proposición 0.16 [26, Cor. 18.7.1] *Sea $K \neq \{0_n\}$ un cono convexo cerrado apuntado. Sea T cualquier conjunto de vectores en K tal que cada rayo expuesto de K es generado por algún $x \in T$. Entonces $K = \text{cl cone } T$.*

Definición 0.1 *Un conjunto convexo poliédrico es aquél que puede ser expresado como intersección de un número finito de semiespacios cerrados en \mathbb{R}^n ; es decir, es el conjunto de soluciones de algún sistema finito de desigualdades de la forma*

$$\langle a^i, x \rangle \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Si además está acotado, se denomina polítopo.

Un conjunto cuasipoliédrico es aquél cuyas intersecciones no vacías con polítopos son polítopos.

Proposición 0.17 [26, Cor. 19.1.1] *Un conjunto convexo poliédrico no vacío tiene un número finito de puntos extremos y direcciones extremas.*

Proposición 0.18 [26, Cor. 19.3.2] *Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos poliédricos en \mathbb{R}^n . Entonces $C_1 + C_2$ es un conjunto poliédrico.*

Proposición 0.19 [26, Th. 19.6] *Sean C_1, C_2, \dots, C_m conjuntos convexos poliédricos no vacíos en \mathbb{R}^n , y sea $C = \text{cl conv } (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m)$. Entonces C es un conjunto convexo poliédrico.*

Proposición 0.20 [5, Th. 8.2] *Sea C un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^n tal que $\dim C = n$, y consideremos una representación de C*

$$\{\langle a^i, x \rangle \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p\}. \quad (0.1)$$

Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (i) $\text{bd } C = \bigcup_{i=1}^p H_i \cap C$, donde $H_i := \{x \mid \langle a^i, x \rangle = b_i\}$;
- (ii) si F es una faceta de C (es decir, una cara de dimensión $n - 1$), existirá $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $F = H_j \cap C$;
- (iii) cada conjunto $H_i \cap C$ es una faceta de C si y sólo si (0.1) es una representación minimal de C , es decir, un sistema de desigualdades de las que ninguna de ellas es redundante.

Proposición 0.21 [3, Ch. VII, Th. 1.6] *Un conjunto convexo no vacío C es cuasipoliédrico si y sólo si el cono de direcciones factibles*

$$D(C, x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid x + \lambda y \in C, \text{ para algún } \lambda > 0\},$$

es poliédrico, para todo $x \in C$.

0.2.2 Funciones convexas

Recordemos que a lo largo de esta memoria se considerarán funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propias; es decir, $\text{dom } f \neq \emptyset$.

Proposición 0.22 [26, Th. 7.6] *Sea f una función convexa, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \inf f$. Entonces los conjuntos de nivel convexos $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ y $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ tienen la misma clausura y el mismo interior relativo, que son, respectivamente,*

$$\{x \mid (\text{cl } f)(x) \leq \alpha\}, \quad \{x \in \text{rint}(\text{dom } f) \mid f(x) < \alpha\}.$$

Además, ambos conjuntos tienen la misma dimensión que $\text{dom } f$.

Recuérdese que si f una función convexa, 0^+ ($\text{epi } f$) puede interpretarse como el epigrafo de cierta función convexa, llamada *función de recesión* de f , y denotada por

$f0^+$. Entonces, por definición

$$\text{epi}(f0^+) = 0^+(\text{epi } f).$$

Proposición 0.23 [26, Th. 8.5] *Sea f una función convexa. Entonces, para todo vector $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$(f0^+)(y) = \sup \{f(x+y) - f(x) \mid x \in \text{dom } f\}.$$

Si f es cerrada, entonces $f0^+$ también es cerrada, y para cualquier $x \in \text{dom } f$, $f0^+$ viene dada por la fórmula

$$(f0^+)(y) = \sup_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Recordemos que una función convexa f se dice que es *cofinita* si es cerrada y $\text{epi } f$ no contiene semi-rectas que no sean verticales, es decir

$$(f0^+)(y) = +\infty,$$

para todo $y \neq 0_n$.

Proposición 0.24 [26, Cor. 13.3.1] *Sea f una función convexa cerrada. Entonces f^* es finito-valorada, si, y sólo si, f es cofinita.*

Proposición 0.25 [26, Th. 23.3] *Sea f una función convexa y sea $x \in \text{dom } f$. Si f no es subdiferenciable en x , entonces debe existir un vector y tal que*

$$f'(x; y) = -f'(x; -y) = -\infty.$$

De hecho, esto se verifica para cualquier y de la forma $z - x$, con $z \in \text{rint}(\text{dom } f)$.

Proposición 0.26 [26, Th. 23.4] *Sea f una función convexa. Para un punto $x \notin \text{dom } f$, $\partial f(x)$ es un conjunto vacío. Para $x \in \text{rint}(\text{dom } f)$, $\partial f(x)$ es no vacío, y además*

$$f'(x; y) = \sup \{\langle u, y \rangle \mid u \in \partial f(x)\} = \delta^*(y \mid \partial f(x)).$$

Finalmente, $\partial f(x)$ es un conjunto no vacío acotado (y, por lo tanto, compacto) si y sólo si $x \in \text{int}(\text{dom } f)$, en cuyo caso, $f'(x; y)$ es finita para todo y .

Esta proposición nos permite concluir que si f es una función convexa finito-valorada, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. $\partial f(x)$ es un conjunto convexo no vacío y compacto.

A continuación veamos dos propiedades globales. En este punto señalaremos que, dado que las multifunciones que utilizaremos a lo largo de esta memoria están definidas en \mathbb{R}^n , y asignan subconjuntos de \mathbb{R}^n . todos los conceptos y propiedades referidos a multifunciones los particularizaremos a dicho contexto. Así, recordemos el concepto de *grafo* de una multifunción $\rho : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, como el conjunto, en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\text{gph } \rho := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mid x \in \text{dom } \rho, u \in \rho(x) \right\},$$

siendo $\text{dom } \rho := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x) \neq \emptyset\}$ el *dominio efectivo* de ρ .

Proposición 0.27 [17, Ch. VI, Prop. 6.2.1] *Sea f es una función convexa finito-valorada, definida sobre \mathbb{R}^n . Entonces $\text{gph } \partial f$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Proposición 0.28 [26, Th. 24.7] *Sea f una función convexa cerrada, y sea C un conjunto compacto no vacío en $\text{int}(\text{dom } f)$. Entonces el conjunto*

$$\partial f(C) := \bigcup \{\partial f(x), x \in C\}$$

es no vacío y compacto.

A lo largo de la memoria utilizaremos el siguiente resultado de dualidad en la teoría de los subgradientes.

Proposición 0.29 [26, Th. 23.5] *Sea f una función convexa y sea x un punto cualquiera. Las siguientes condiciones relativas a v son equivalentes:*

- (a) $v \in \partial f(x)$;
- (b) $\langle z, v \rangle - f(z)$ alcanza su supremo en z cuando $z = x$;
- (c) $f(x) + f^*(v) \leq \langle x, v \rangle$;
- (d) $f(x) + f^*(v) = \langle x, v \rangle$.

Si $(\text{cl } f)(x) = f(x)$, pueden añadirse la siguientes condiciones a la lista anterior:

$$(a^*) x \in \partial f^*(v);$$

$$(b^*) \langle x, u \rangle - f^*(u) \text{ alcanza su supremo en } u \text{ cuando } u = v;$$

$$(a^{**}) v \in \partial(\text{cl } f)(x).$$

En el Ejemplo 2.14 del Capítulo 2, nos interesará obtener el subdiferencial en el origen de cierta función convexa. Debido a la extensión de dicho cálculo, hemos optado por introducir en la presente sección una serie de ejemplos dirigidos a la obtención del mismo.

Ejemplo 0.1 Sea C es un conjunto convexo compacto no vacío, en \mathbb{R}^n , y consideremos su función soporte

$$\delta^*(u | C) = \max \{ \langle u, x \rangle \mid x \in C \}.$$

Podemos observar que $y \in \partial \delta^*(0_n | C)$ si y sólo si $0_n \in \partial \delta(y | C)$ (hemos aplicado la equivalencia entre (a) y (a*) en la Proposición 0.29), y esto equivale a decir que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\delta(x | C) \geq \delta(y | C),$$

o, lo que es lo mismo, $y \in C$. Podemos afirmar, por lo tanto, que

$$\partial \delta^*(0_n | C) = C.$$

Si, en particular, consideramos $C = \text{cl } \mathbb{B}$, dado que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\delta^*(u | \text{cl } \mathbb{B}) = \max \{ \langle u, x \rangle \mid x \in \text{cl } \mathbb{B} \} = \|u\|,$$

obtenemos

$$\partial \|0_n\| = \partial \delta^*(0_n | \text{cl } \mathbb{B}) = \text{cl } \mathbb{B}.$$

Proposición 0.30 [26, Th. 23.8] Sean f_1, f_2, \dots, f_m funciones convexas, y sea $f := f_1 + f_2 + \dots + f_m$. Entonces

$$\partial f(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_m(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si además los conjuntos convexos $\text{rint}(\text{dom } f_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$

tienen algún punto en común, entonces

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_m(x).$$

Proposición 0.31 [26, Th. 23.9] Sea $f(x) = h(Ax)$, donde h es una función convexa definida en \mathbb{R}^m , y A es una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m . Entonces

$$\partial f(x) \supset A^* \partial h(Ax),$$

para todo x , siendo A^* la transformación lineal de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n cuya matriz asociada es la traspuesta de la matriz asociada a A . Además, si existe algún x^0 tal que $Ax^0 \in \text{rint}(\text{dom } h)$, entonces, para todo x ,

$$\partial f(x) = A^* \partial h(Ax).$$

Ejemplo 0.2 Vamos a calcular el subdiferencial en el origen de la función convexa, definida en \mathbb{R}^3 ,

$$f(x) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Podemos expresar esta función $f(x) = \|Ax\|$, siendo A la transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. de acuerdo con la Proposición 0.31,

tenemos que $\partial f(0_3) = A^* \partial \|0_2\|$, donde A^* tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hemos calculado en el Ejemplo 0.1 que $\partial \|0_2\| = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$, de manera que obtenemos

$$\partial f(0_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_1^2 + v_2^2 \leq 1, v_3 = 0\}.$$

Proposición 0.32 [26, Th. 25.5] Sea f una función convexa en \mathbb{R}^n , y sea D el conjunto de los puntos donde f es diferenciable. Entonces D es un subconjunto denso de $\text{int}(\text{dom } f)$, y su complementario en $\text{int}(\text{dom } f)$ es un conjunto de medida cero.

Recordemos que un vector v se dice que es *normal* a un conjunto convexo C en un punto $x \in C$ si $\langle y - x, v \rangle \leq 0$, para todo $y \in C$. El conjunto de todos los vectores

normales a C en x es un cono, que se denomina *cono normal* a C en x , y se representa $N(C, x)$. Es obvio que $N(C, x) = D(C, x)^\circ$.

Proposición 0.33 [26, Cor. 23.7.1] *Sea f una función convexa, y sea $x \in \text{int}(\text{dom } f)$ tal que $0_n \notin \partial f(x)$. Un vector v es normal a $C := \{z \mid f(z) \leq f(x)\}$ en x si y sólo si existe un escalar $\lambda \geq 0$ tal que $v \in \lambda \partial f(x)$.*

Otro cono que utilizaremos en esta memoria es el *cono tangente* a un conjunto convexo C en $x \in C$, $T(C, x) := \text{cl cone}(C - x)$, verificándose que $T(C, x) = N(C, x)^\circ$.

Proposición 0.34 [17, Ch. VI, Th. 1.3.4] *Sea f una función convexa finito-valorada, definida en \mathbb{R}^n , y consideremos un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0_n \notin \partial f(x)$. Sea $C := \{z \mid f(z) \leq f(x)\}$. Entonces*

$$T(C, x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid f'(x; d) \leq 0\}, \quad (0.2)$$

$$\text{int}(T(C, x)) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid f'(x; d) < 0\} \neq \emptyset. \quad (0.3)$$

Proposición 0.35 [26, Th. 9.4] *Sea $\{f_t, t \in T\}$ una familia de funciones convexas cerradas, definidas en \mathbb{R}^n . Si existe un punto x^0 tal que $\sup \{f_t(x^0), t \in T\} < +\infty$, entonces la función*

$$f := \sup \{f_t, t \in T\}$$

es convexa propia y cerrada en \mathbb{R}^n y, además,

$$f0^+ = \sup \{f_t 0^+, t \in T\}.$$

Proposición 0.36 [17, Ch. VI, Cor. 4.3.2] *Sean f_1, f_2, \dots, f_m funciones convexas finito-valoradas, definidas en \mathbb{R}^n , y sea*

$$f := \max \{f_1, f_2, \dots, f_m\}.$$

Sea $S(x) = \{i \mid f(x) = f_i(x)\}$. Entonces

$$\partial f(x) = \text{conv} \left\{ \bigcup \{ \partial f_i(x), i \in S(x) \} \right\}.$$

Ejemplo 0.3 Utilizaremos el Ejemplo 0.2 y la proposición anterior para calcular el subdiferencial en el origen de la función convexa, definida en \mathbb{R}^3 ,

$$f(x) := \max \left\{ \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - (x_1 + x_2)}{2}, -x_1, -x_2 \right\}.$$

Si denotamos por

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - (x_1 + x_2)}{2} = \frac{1}{2}(g(x) + h(x)),$$

$$f_2(x) = -x_1,$$

$$f_3(x) = -x_2,$$

donde $h(x) := -(x_1 + x_2)$, obtenemos que, en virtud de la Proposición 0.30 y del Ejemplo 0.2,

$$\partial f_1(0_3) = \frac{1}{2}(\partial g(0_3) + \partial h(0_3)) = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\},$$

y por lo tanto

$$\partial f(0_3) = \text{conv} \left(\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Proposición 0.37 [17, Ch. VI, Lem. 4.4.1] *Sea $\{f_t, t \in T\}$ una familia de funciones convexas finito-valoradas, definidas en \mathbb{R}^n , y supongamos que*

$$f(x) = \sup \{f_t(x), t \in T\} < +\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $S(x) := \{t \in T \mid f_t(x) = f(x)\}$ es el conjunto de los índices asociados a las restricciones sup-activas, se cumple

$$\partial f(x) \supset \text{cl conv} \left\{ \bigcup \{ \partial f_t(x), t \in S(x) \} \right\}.$$

Proposición 0.38 [17, Ch. VI, Th. 4.4.2] *Con las mismas hipótesis de la Proposición 0.37, si además T es un conjunto compacto (en algún espacio métrico), en el que la*

función $t \mapsto f_t(x)$ es semicontinua superiormente, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\partial f(x) = \text{conv} \left\{ \bigcup \{ \partial f_t(x), t \in S(x) \} \right\}.$$

Esta igualdad se conoce como fórmula de Valadier.

Debido a la importancia de la función supremo, damos otro resultado, que es válido sin necesidad de ninguna hipótesis, y que agranda en conjunto $S(x)$ de manera que también se consideran los índices asociados a las restricciones que son *casi sup-activas*. Se define, por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $\delta > 0$ el conjunto

$$S_\delta(x) := \{t \in T \mid f_t(x) \geq f(x) - \delta\}.$$

Proposición 0.39 [17, Ch. VI, Th. 4.4.8] *Con las mismas hipótesis que la Proposición 0.37, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \text{cl conv} \left\{ \bigcup \{ \partial f_t(y), t \in S_\delta(x), y \in x + \delta \mathbb{B} \} \right\}.$$

Definición 0.2 *Sea f una función convexa definida en \mathbb{R}^n , y $x \in \text{dom } f$. Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ es un ε -subgradiente, con $\varepsilon > 0$, de f en x si*

$$f(y) \geq f(x) - \varepsilon + \langle u, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de todos los ε -subgradientes se denota $\partial_\varepsilon f(x)$ y se denomina ε -sudiferencial de f en x .

Si consideramos la función convexa

$$h(y) := f(x + y) - f(x),$$

cuya conjugada es

$$h^*(u) = f^*(u) + f(x) - \langle u, x \rangle,$$

tendremos que h^* es una función convexa cerrada no negativa, en \mathbb{R}^n , con $\text{dom } h^* = \text{dom } f^*$, y que el conjunto de vectores donde h^* vale cero es precisamente $\partial f(x)$, en virtud de la equivalencia entre (a) y (d) de la Proposición 0.29. Observemos que

$u \in \partial_\varepsilon f(x)$ si y sólo si

$$\varepsilon \geq \langle u, y \rangle - h(y),$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como el supremo de $\langle u, y \rangle - h(y)$ en y es $h^*(u)$, tendremos que

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{u \in \text{dom } f^* \mid h^*(u) \leq \varepsilon\}.$$

En particular, obtenemos que $\partial_\varepsilon f(x)$ es un conjunto convexo cerrado, y además

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon f(x) = \partial f(x).$$

Proposición 0.40 [28, Th. A] *Sea $\{f_t, t \in T\}$ una familia de funciones convexas, definidas en \mathbb{R}^n , y sea x un punto donde $f := \sup \{f_t, t \in T\}$ es finita y continua.*

Entonces

$$\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{cl conv} \{\partial_\varepsilon f_t(x), t \in S_\varepsilon(x)\}.$$

Proposición 0.41 [23, Th. 3.17] *Sea f una función convexa cerrada, definida en \mathbb{R}^n .*

Entonces, dado un punto $x^0 \in \text{dom } f$, dos escalares $\varepsilon > 0$ y $\lambda > 0$, y cualquier vector $u \in \partial_\varepsilon f(x^0)$, existen $x \in \text{dom } f$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$v \in \partial f(x), \quad \|x - x^0\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \text{y} \quad \|u - v\| \leq \lambda.$$

Este resultado constituye una versión finito-dimensional del *Teorema de Brønsted-Rockafellar*.

Completamos los principales resultados que se utilizarán sobre el subdiferencial de una función convexa con su caracterización en términos de una propiedad de monotonía.

Definición 0.3 *Se dice que un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es monótono si*

$$\langle v^2 - v^1, x^2 - x^1 \rangle \geq 0,$$

para todo par de puntos $\begin{pmatrix} x^1 \\ v^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ v^2 \end{pmatrix}$ en G .

Definición 0.4 *Una multifunción $\rho : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ se dice monótona si $\text{gph } \rho$ es un conjunto monótono. Una multifunción monótona es maximal en $D \subset \mathbb{R}^n$ si el conjunto*

monótono $\text{gph } \rho \cap (D \times \mathbb{R}^n)$ es maximal (respecto de la inclusión) en la familia de todos los conjuntos monótonos contenidos en $D \times \mathbb{R}^n$.

Proposición 0.42 [27, Th. 12.17] Si f es una función convexa, definida en \mathbb{R}^n , entonces la multifunción $\partial f : x \rightrightarrows \partial f(x)$ es monótona. De hecho, una función f semicontinua inferiormente es convexa si y sólo si ∂f es monótona, en cuyo caso, ∂f es monótona maximal en \mathbb{R}^n .

Definición 0.5 Una multifunción $\rho : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es semicontinua superiormente en el sentido de Berge (usc, abreviado) en $x \in \mathbb{R}^n$ si para todo abierto W en \mathbb{R}^n que contiene a $\rho(x)$, existe un entorno U de x en \mathbb{R}^n tal que $\rho(y) \subset W$, para todo $y \in U$. Se dice que ρ es usc en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ si es usc en todo punto $x \in A$.

Proposición 0.43 [23, Lem. 7.7] Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, que $\rho : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es una multifunción usc y monótona, y que $\rho(x)$ es un conjunto no vacío, convexo y cerrado, para todo $x \in D$; entonces ρ es monótona maximal en D .

Finalizamos esta sección estableciendo las conexiones existentes entre la semicontinuidad superior y otra noción de continuidad para las multifunciones, que utilizaremos en el Capítulo 1.

Definición 0.6 Una multifunción $\rho : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es cerrada en $x \in \mathbb{R}^n$ si para todo par de sucesiones $\{x^r\}_{r=1}^\infty, \{y^r\}_{r=1}^\infty$ en \mathbb{R}^n , tales que $\lim_{r \rightarrow \infty} x^r = x^0$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} y^r = y^0$, verificando $y^r \in \rho(x^r)$, $r = 1, 2, \dots$, entonces $y^0 \in \rho(x^0)$.

Señalaremos que el concepto de multifunción cerrada en un punto (extraído de [4, p. 25]) es equivalente al de semicontinua exteriormente en el punto, que se utiliza en [27] (véase Def. 5.4).

Definición 0.7 Una multifunción $\rho : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es localmente acotada en $x \in \mathbb{R}^n$ si existe un entorno U de x en \mathbb{R}^n tal que $\rho(U) := \cup \{\rho(y), y \in U\}$ es un conjunto acotado en \mathbb{R}^n .

Proposición 0.44 [27, Th. 5.19] Sea $\rho : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ localmente acotada en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces ρ es cerrada en x si y sólo si es usc en x y además $\rho(x)$ es cerrado.

0.2.3 Sistemas semi-infinitos de desigualdades

Dado un sistema consistente $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, con conjunto de soluciones F , para cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos el siguiente subconjunto de índices:

$$T(\bar{x}) := \{t \in T \mid f_t(\bar{x}) = 0\}.$$

Si una solución x^0 de σ verifica que $T(x^0) = \emptyset$, entonces satisface estrictamente todas las restricciones; es decir

$$f_t(x^0) < 0, \text{ para todo } t \in T,$$

y decimos que el punto x^0 es un *punto de Slater* de σ .

Si, además, todas las restricciones se cumplen con cierta holgura; es decir

$$f_t(x^0) \leq -\varepsilon, \text{ para todo } t \in T,$$

y cierto número real positivo ε , x^0 se denomina *punto fuerte de Slater* para σ (un *SS-elemento*⁶, para abreviar). La existencia de puntos fuertes de Slater es una propiedad que ya aparece en los orígenes de la Programación Semi-Infinita (véase, por ejemplo, [6]), y juega un papel relevante en la estabilidad de un modelo lineal, como se pone en evidencia en [15].

Si $\bar{x} \in F$, los índices en $T(\bar{x})$ son aquéllos asociados con las llamadas *restricciones activas* en \bar{x} . Por esta razón, se denomina *cono activo* en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ al cono convexo

$$A(\bar{x}) := \text{cone} \left(\bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in T(\bar{x}) \} \right).$$

En particular, para un sistema lineal, $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$, el cono activo en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ será $A(\bar{x}) = \text{cone} \{a_t, t \in T(\bar{x})\}$, donde

$$T(\bar{x}) = \{t \in T \mid \langle a_t, \bar{x} \rangle = b_t\}.$$

Proposición 0.45 [14, Lem. 7.7] *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Entonces, para todo $\bar{x} \in F$,*

$$D(F, \bar{x}) \subset A(\bar{x})^\circ. \quad (0.4)$$

⁶ Del inglés, *Strong Slater*.

Podemos observar que la inclusión (0.4) es equivalente a la inclusión $A(\bar{x}) \subset N(F, \bar{x})$, donde $N(F, \bar{x})$ es el cono normal a F en \bar{x} .

Dado un sistema lineal consistente $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$, con conjunto de soluciones F , se dice que $\langle a, x \rangle \leq b$ es una *consecuencia* de σ si la satisfacen todos los puntos de F ; es decir, $\langle a, z \rangle \leq b$ para todo $z \in F$. En relación con este concepto, el *Teorema de Farkas Generalizado* (véase, por ejemplo, [14, Th.3.1]) caracteriza las desigualdades lineales $\langle a, x \rangle \leq b$ que son consecuencia de σ , como aquéllas que satisfacen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{cl } K,$$

donde K es el *cono característico* de σ , y se define

$$K := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definición 0.8 *Un sistema lineal consistente σ es localmente Farkas Minkowski (abreviado LFM) en $\bar{x} \in F$ si cualquier relación consecuente de σ que determina un hiperplano soporte a su conjunto solución F es también consecuencia de un subsistema finito.*

En particular, si cualquier relación consecuente de σ es también consecuencia de un subsistema finito, se dice que σ es un sistema Farkas Minkowski (FM, abreviado).

Los sistemas FM pueden ser caracterizados en términos del cono K .

Proposición 0.46 [14, Th. 5.3 (i) y (iii)] *Dado un sistema lineal consistente σ , las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (i) σ es FM si y sólo si K es cerrado;
- (iii) Si σ es FM, entonces $A(x)^\circ = \text{cl } D(F, x)$, para todo $x \in F$.

Proposición 0.47 [14, Th. 5.7] *Un sistema lineal consistente σ es LFM si y sólo si, para todo $\bar{x} \in F$,*

$$D(F, \bar{x})^\circ = A(\bar{x}).$$

Se dice que un sistema consistente σ es *ajustado*, si para todo punto $\bar{z} \in \text{bd } F$, $\dim A(\bar{z}) > 0$. En virtud de la Proposición 0.47, todo sistema lineal LFM será ajustado.

Definición 0.9 *Un sistema lineal consistente σ se dice que es localmente poliédrico (LOP, para abreviar) si, para todo $\bar{x} \in F$,*

$$A(\bar{x})^\circ = D(F, \bar{x}).$$

Si σ es LOP, el cono de direcciones factibles es cerrado en todo punto factible.

Proposición 0.48 [14, Th. 5.5] *Sea $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$ un sistema lineal consistente no trivial. El conjunto de puntos de acumulación de*

$$\left\{ \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|^{-1} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \neq 0_{n+1}, t \in T \right\},$$

se llama conjunto derivado D de σ . Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que σ sea LOP:

- (i) *El sistema $\sigma \cup \{\langle a, x \rangle = b\}$ es inconsistente, para todo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D$;*
- (ii) *σ es una representación lineal ajustada de un conjunto cuasipoliédrico de dimensión completa.*

Proposición 0.49 [14, Th. 5.6] *Las siguientes condiciones son necesarias para que un sistema lineal σ sea LOP:*

- (i) *$A(\bar{x}) = D(F, \bar{x})^\circ$, para todo $\bar{x} \in F$, siendo además un cono convexo poliédrico;*
- (ii) *F es un conjunto cuasipoliédrico y el conjunto de sus puntos extremos no posee puntos de acumulación.*

Proposición 0.50 [14, Th. 5.11] *Cualquier conjunto convexo cerrado no vacío $F \subset \mathbb{R}^n$ puede ser representado linealmente mediante un sistema FM (y, en consecuencia, LFM). Además, F admite una representación LOP si y sólo si es un conjunto cuasipoliédrico.*

Finalmente, utilizaremos las siguientes caracterizaciones de los puntos extremos y las direcciones extremas del conjunto de soluciones F de un sistema $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$, del cual se dice que verifica el *supuesto de rango completo* si $\dim \text{span} \{a_t, t \in T\} = n$.

Una propiedad general básica de cualquier conjunto de soluciones F de un sistema lineal $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$, es que su cono de recesión es el conjunto de soluciones del *sistema homogéneo* $\sigma_0 := \{\langle a_t, x \rangle \leq 0, t \in T\}$. De esta manera, $T_0(u)$ denotará el conjunto de índices asociados a restricciones activas de σ_0 en $u \in 0^+F$.

Proposición 0.51 [14, Th. 9.1(i)] *Dado $\bar{x} \in F$, si $\dim A(\bar{x}) = n$, entonces \bar{x} es un punto extremo de F . Esta condición es también necesaria si σ es LOP.*

Proposición 0.52 [14, Cor. 9.2.2] *Sea $u \in 0^+F$, $u \neq 0_n$, y supongamos que se verifica el supuesto de rango completo. Una condición suficiente para que u sea una dirección extrema de F es que $\dim \text{span} \{a_t, t \in T_0(u)\} = n - 1$. La condición es también necesaria si σ_0 es LOP.*



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 1

Sistemas localmente Farkas-Minkowski (LFM) en programación semi-infinita convexa

1.1 Introducción

Dedicamos este capítulo al estudio de dos cualificaciones de restricción en CSIP. La primera de ellas, la cualificación de restricciones LFM, fue introducida en la Sección 7.5 del texto de Goberna y López [14], donde se demuestra que la condición KKT es necesaria para la optimalidad cuando el sistema de restricciones es LFM. También se prueba en [14] que la cualificación de restricciones de Slater es más fuerte que la LFM, verificándose aquella (véase [14, p. 163]) si las siguientes condiciones se cumplen simultáneamente:

- (i) T es un espacio topológico compacto Hausdorff;
- (ii) la función $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mapsto f_t(x)$ es continua en $T \times \mathbb{R}^n$;
- (iii) existe un punto de Slater x^0 ; es decir, $f_t(x^0) < 0$, para todo $t \in T$.

Cabe resaltar que la hipótesis de partida, tanto en Programación Lineal Ordinaria, como en el texto referido anteriormente y en el trabajo de Li *et al.* [19], dentro del

contexto de la Programación Semi-Infinita Convexa, es que todas las funciones convexas involucradas en el problema son finito-valoradas. Con el mismo propósito de simplificar los argumentos, aceptaremos esta misma hipótesis de trabajo.

Señalaremos, no obstante, que la extensión de la propiedad LFM para sistemas convexos de la forma $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T; x \in C\}$, donde T es un conjunto de índices arbitrario (posiblemente infinito), C es un conjunto convexo cerrado de un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo X y $f_t : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa propia semicontinua inferiormente, para todo $t \in T$, puede encontrarse en el reciente trabajo de Dinh, Goberna, López y Son [8]. En dicho contexto, se prueba en [8] que σ es LFM en un punto factible a , si, y sólo si, para cualquier función convexa cerrada f , continua en algún punto factible, tal que $a \in \text{dom } f$, la condición KKT es necesaria para que el punto a sea una solución del problema

$$(P) \inf \{f(x) \mid f_t(x) \leq 0, t \in T; x \in C\}.$$

Así mismo, suponiendo que X es un espacio de Banach y las funciones involucradas en el sistema son convexas y continuas en X , Li y Ng en [20] extienden la propiedad BCQ así como ciertas propiedades relacionadas que se introducen en [19].

El sumario del presente capítulo es el siguiente. En la Sección 1.2 se recordará el papel de la propiedad LFM como cualificación de restricciones dentro de la Programación Semi-Infinita Convexa, obteniéndose una caracterización geométrica de los sistemas que satisfacen dicha propiedad. En las Secciones 1.3 y 1.4, analizaremos la relación entre dicha cualificación y la semicontinuidad superior de las multifunciones denominadas activa y sup-activa. Mencionaremos ya este punto que, así como la multifunción activa está relacionada con las restricciones activas en el punto considerado x , la multifunción sup-activa considera las restricciones cuyas funciones asociadas coinciden en el punto con la función supremo de todas las funciones convexas involucradas en el sistema de restricciones. Se pone, pues, de manifiesto, el importante papel que jugará en esta secciones dicha función supremo. Ciertas condiciones que conllevan el cumplimiento de la propiedad LFM se relacionarán estrechamente con un comportamiento regular de la función supremo, y posibilitarán la validez de la fórmula

de Valadier bajo supuestos bastante generales. En estas secciones, el conjunto de índices no presentará ninguna estructura en particular.

La última sección estará dedicada a la segunda cualificación de restricciones, cuya formulación será de tipo Slater, y generalizará la condición de Slater que aparece en [14] y la que introducen López y Vercher en [21]. Nuestra cualificación se diferencia de aquéllas en que se relaja el requisito de que el conjunto de índices sea compacto. No obstante, se requerirá, en nuestro caso, cierta estructura para T , y como veremos, nuestra cualificación implica a su vez la cualificación de restricciones LFM.

En cada sección, presentaremos ejemplos que clarificarán la necesidad de algunas hipótesis adicionales para el cumplimiento de los resultados obtenidos.

1.2 Sistemas LFM

Consideremos el Problema de Optimización Convexa

$$(P) \inf \{g(x) \mid f_t(x) \leq 0, t \in T\},$$

donde las funciones g y f_t , $t \in T$, son convexas finito-valoradas, definidas en \mathbb{R}^n y, por lo tanto, para todo $t \in T$, $\partial f_t(\bar{x})$ es un conjunto no vacío compacto, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

El sistema de restricciones de (P) se representa $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, y F representará el conjunto factible.

Definición 1.1 *Se dice que la condición Karush-Kuhn-Tucker (condición KKT) se satisface en un punto $\bar{x} \in F$ si*

$$\partial g(\bar{x}) \cap \{-A(\bar{x})\} \neq \emptyset,$$

o, equivalentemente, si existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, tal que $\text{supp}(\bar{\lambda}) \subset T(\bar{x})$, cumpliendo la condición

$$0_n \in \partial g(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t \partial f_t(\bar{x}).$$

En la Sección 7.5 de [14], se demuestra que la condición KKT en $\bar{x} \in F$ implica la optimalidad en dicho punto. Para lograr que la condición KKT sea también

una condición necesaria de optimalidad, es necesario exigir alguna cualificación de restricciones. En esta misma referencia, se dice que un sistema σ es LFM en $\bar{x} \in F$ si

$$A(\bar{x}) = D(F, \bar{x})^\circ,$$

y se dice que σ es LFM si lo es en todo punto factible.

En virtud de la Proposición 0.45, siempre podemos garantizar, para todo $\bar{x} \in F$,

$$A(\bar{x}) \subset D(F, \bar{x})^\circ.$$

Esta inclusión puede ser estricta, como ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1 Consideremos el sistema en \mathbb{R} , $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, donde

$$f_t(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x^t, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad t \in T := [2, 3].$$

Puede comprobarse que $F =]-\infty, 0]$. Para $\bar{x} = 0$, obtenemos que $D(F, \bar{x}) =]-\infty, 0]$, y por lo tanto $D(F, \bar{x})^\circ =]0, +\infty]$, mientras que $T(\bar{x}) = T$ y $A(\bar{x}) = \text{cone}\{0\} = \{0\}$.

El Teorema 7.8 de [14] demuestra que si \bar{x} es una solución óptima del Problema de Programación Semi-Infinita (P), cuyo sistema de restricciones es LFM en \bar{x} , entonces la condición KKT se satisface en dicho punto, de manera que la propiedad LFM puede, efectivamente, considerarse como una cualificación de restricciones.

El objetivo de este capítulo será proporcionar un estudio más profundo de la propiedad LFM. Comenzaremos con el siguiente resultado, que se establece, sin prueba, en [14, Sec. 7.5].

Lema 1.1 *El sistema de restricciones de (P) es LFM en todo punto de $\text{int } F$.*

Demostración. Si $\bar{x} \in \text{int } F$, claramente $D(F, \bar{x}) = \mathbb{R}^n$, y por lo tanto $D(F, \bar{x})^\circ = \{0_n\}$. En el caso de que \bar{x} sea un punto de Slater de σ , $A(\bar{x}) = \{0_n\}$, y se verificará la igualdad. Si ocurriera que $T(\bar{x}) \neq \emptyset$, tomemos un vector $u \in \partial f_t(\bar{x})$, para un cierto índice $t \in T(\bar{x})$. Dado que $\bar{x} \in \text{int } F$, vamos a considerar un escalar $\delta > 0$ tal que

$\bar{x} + \delta u \in F$. Entonces

$$0 \geq f_t(\bar{x} + \delta u) \geq f_t(\bar{x}) + \delta \|u\|^2 = \delta \|u\|^2,$$

y esto implica que $u = 0_n$. Por lo tanto, $A(\bar{x}) = \{0_n\}$ una vez más. ■

La consecuencia directa de este lema es que la propiedad LFM debe investigarse únicamente en los puntos frontera del conjunto factible. Si σ es LFM en $\bar{x} \in \text{bd } F$, tendremos que $A(\bar{x}) \neq \{0_n\}$, ya que $D(F, \bar{x})^\circ \neq \{0_n\}$; es decir, existen restricciones activas en \bar{x} , verificando alguna de ellas que el conjunto $\partial f_t(\bar{x})$ es distinto de $\{0_n\}$. Ello a su vez implica que todo sistema LFM es ajustado.

A continuación, vamos a obtener una caracterización parcial de esta propiedad, que posee un claro significado geométrico. Vamos a denotar por (P_S) , al subproblema de (P) asociado a un subconjunto S de T :

$$(P_S) \quad \text{Inf } g(x) \quad \text{s.t.} \quad f_t(x) \leq 0, \quad t \in S.$$

El conjunto factible de (P_S) será denotado por F_S .

Lema 1.2 *Si el sistema de restricciones de (P) es LFM en $\bar{x} \in \text{bd } F$, entonces, para todo $a \neq 0_n$ tal que F está contenido en el subespacio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \langle a, \bar{x} \rangle\}$, existirá un subconjunto finito $S \subset T$, de manera que F_S también está contenido en dicho subespacio. El recíproco es cierto si σ posee algún punto de Slater.*

Demostración. Supongamos, primeramente, que σ es LFM en $\bar{x} \in \text{bd } F$, y que $F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x - \bar{x} \rangle \leq 0\}$, para cierto vector $a \neq 0_n$. Entonces $a \in D(F, \bar{x})^\circ$ y, por lo tanto, $a \in A(\bar{x})$, de manera que existe un subconjunto finito de T , $S = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset T(\bar{x})$, ciertos vectores $u^i \in \partial f_{t_i}(\bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, k$, y escalares positivos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, tales que $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i u^i$. Si $x \in F_S$, podemos escribir, para $i = 1, 2, \dots, k$,

$$0 \geq f_{t_i}(x) \geq f_{t_i}(\bar{x}) + \langle u^i, x - \bar{x} \rangle = \langle u^i, x - \bar{x} \rangle.$$

Multiplicando por λ_i , y sumando todas las desigualdades, para $i = 1, 2, \dots, k$, llegamos a que $\langle a, x - \bar{x} \rangle \leq 0$; es decir, $F_S \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \langle a, \bar{x} \rangle\}$.

Recíprocamente, si la propiedad considerada se cumple, y σ posee algún punto de Slater, tomemos $a \in D(F, \bar{x})^\circ \setminus \{0_n\}$, y comprobemos que $a \in A(\bar{x})$. Dado que $F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \langle a, \bar{x} \rangle\}$, por hipótesis, existe un subconjunto finito $S = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset T$ tal que $F_S \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \langle a, \bar{x} \rangle\}$. Esta inclusión es equivalente a afirmar que la función lineal $\langle -a, x \rangle$ alcanza un mínimo sobre F_S en \bar{x} . de acuerdo con el Teorema de Kuhn-Tucker (véase, por ejemplo, [26, Cor. 28.3.1]), tenemos garantizada la existencia de escalares no negativos λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, tales que

$$0_n \in \{-a\} + \sum_{i=1}^k \lambda_{t_i} \partial f_{t_i}(\bar{x}),$$

y además

$$\lambda_{t_i} f_{t_i}(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (\text{condición de complementariedad}).$$

En otras palabras, hemos llegado a la conclusión de que $a \in A(\bar{x})$, debido a la condición de complementariedad. ■

La existencia de puntos de Slater es necesaria para obtener el recíproco del lema, como muestra de nuevo el Ejemplo 1.1. Podemos observar que $F_S = F$, para cualquier subconjunto no vacío de índices S , y la condición del lema se cumple trivialmente en $\bar{x} = 0$, a pesar de que el sistema σ no es LFM en dicho punto. Ello se debe a que ningún punto factible es un punto de Slater.

1.3 La multifunción de las restricciones activas

Definición 1.2 En relación con el CSIP (P), $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, que asigna a cada punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $A(\bar{x}) \cap \mathbb{S}$, donde \mathbb{S} denota la esfera unidad para la norma euclídea, se llama la multifunción de las restricciones activas.

El siguiente teorema muestra que la cualificación de restricciones LFM puede ser "casi" caracterizada en términos de la semicontinuidad superior de \mathcal{A} en F . Para ello, introducimos la función supremo

$$f(x) := \sup \{f_t(x), t \in T\}.$$

Dado que estamos tratando con sistemas consistentes, la función f es una función convexa y cerrada, verificando además que el conjunto factible F coincide con el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$. Veamos, previamente, el siguiente lema.

Lema 1.3 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema convexo consistente. Entonces \mathcal{A} es usc en todo punto $\bar{x} \in \text{int } F$.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{int } F$. Tomemos un escalar $\delta > 0$, de manera que $\bar{x} + \delta\mathbb{B} \subset \text{int } F$. Como $A(x) \subset D(F, x)^\circ = \{\mathbb{R}^n\}^\circ = \{0_n\}$, para todo $x \in \bar{x} + \delta\mathbb{B}$, tendremos que $A(x) = A(x) \cap \mathbb{S} = \emptyset$, con lo que \mathcal{A} es trivialmente usc en \bar{x} . ■

Teorema 1.1 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema convexo consistente. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (i) *Si σ es LFM, entonces \mathcal{A} es usc en F .*
- (ii) *Si \mathcal{A} es usc en F , $A(x)$ es cerrado para todo $x \in F$, $F \subset \text{int}(\text{dom } f)$ y σ posee un SS-elemento x^0 , entonces σ es LFM.*

Demostración. (i) Por hipótesis se verifica $D(F, x)^\circ = A(x)$ para todo $x \in F$. Supongamos que \mathcal{A} no es usc en cierto punto $\bar{x} \in \text{bd } F$ (en virtud del Lema 1.3, \mathcal{A} será usc en $\text{int } F$). Entonces existirá un conjunto abierto, W conteniendo $A(\bar{x})$, y una sucesión $\{x^r\}_{r=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ convergente a \bar{x} tal que $A(x^r)$ no está contenido en W , para todo $r \in \mathbb{N}$.

Para cada $r \in \mathbb{N}$, elegimos un elemento $a^r \in A(x^r) \setminus W$; es decir, $a^r \in A(x^r) \cap \mathbb{S}$ y $a^r \notin W$. Entonces, como $a^r \in A(x^r)$, podemos tomar $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T(x^r))}$ tal que

$$a^r = \sum_{t \in T(x^r)} \lambda_t^r u_t^r, \quad (1.1)$$

donde $u_t^r \in \partial f_t(x^r)$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Nótese que, aunque en principio, algunos de estos vectores pueden pertenecer al mismo conjunto subdiferencial $\partial f_t(x^r)$, debido a la convexidad del mismo, los podemos agrupar y considerar un único vector en dicho conjunto.

También podemos observar que

$$\langle a^r, x \rangle \leq \langle a^r, x^r \rangle, \quad (1.2)$$

se satisface en todo punto $x \in F$. De hecho, si $t \in T(x^r)$ y $x \in F$,

$$0 \geq f_t(x) \geq f_t(x^r) + \langle u_t^r, x - x^r \rangle = \langle u_t^r, x - x^r \rangle.$$

Multiplicando por λ_t^r y sumando en $t \in T(x^r)$, obtenemos (1.2), habida cuenta de (1.1).

Como $\|a^r\| = 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim_{r \rightarrow \infty} a^r = a$, y tomando límites en (1.2), para cada punto fijo $x \in F$, llegamos a que $\langle a, x \rangle \leq \langle a, \bar{x} \rangle$. Por lo tanto,

$$a \in (F - \bar{x})^\circ \cap \mathbb{S} = D(F, \bar{x})^\circ \cap \mathbb{S} = A(\bar{x}) \cap \mathbb{S} \subset W,$$

lo que contradice que $a^r \notin W$, para todo r .

(ii) Realizaremos la demostración en varias partes:

Parte 1. Primero probaremos que, bajo nuestras hipótesis,

$$\text{bd } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\},$$

y que $\text{int } F \neq \emptyset$.

Elijamos \tilde{x} tal que $f(\tilde{x}) < 0$, por ejemplo, un SS-elemento. Como $\tilde{x} \in F \subset \text{int}(\text{dom } f)$, f será continua en \tilde{x} , de manera que existe un entorno de \tilde{x} , U , verificando que $f(x) \leq 0$ si $x \in U$; es decir, $\tilde{x} \in \text{int } F$. Por lo tanto, si $\bar{x} \in \text{bd } F$, necesariamente $f(\bar{x}) = 0$.

Recíprocamente, si $f(\tilde{x}) = 0$ y $\tilde{x} \in \text{int } F$, aplicando la Proposición 0.2, existirá un escalar $\lambda > 1$ tal que

$$x(\lambda) := (1 - \lambda)x^0 + \lambda\tilde{x} \in F, \quad (1.3)$$

y, por lo tanto, $f(x(\lambda)) \leq 0$. Debido a la convexidad de f ,

$$\begin{aligned} 0 &= f(\tilde{x}) = f\left(\frac{1}{\lambda}x(\lambda) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x^0\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}f(x(\lambda)) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)f(x^0) < 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

lo que constituye una contradicción.

Parte 2. A continuación, probaremos que si $\bar{x} \in \text{bd } F$, entonces $\mathcal{A}(\bar{x}) \neq \emptyset$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{A}(\bar{x}) = \emptyset$. Debido a la hipótesis de semicontinuidad superior de \mathcal{A} en \bar{x} , llegamos a que $\mathcal{A}(x) = \emptyset$, para todo punto x en cierto entorno U de \bar{x} .

Por otro lado, como $\bar{x} \in \text{bd } F$, podemos encontrar una sucesión $\{x^r\}_{r=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ convergente a \bar{x} y un índice $t_r \in T$ asociado a cada x^r tal que $f_{t_r}(x^r) > 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Si $f_{t_r}(\bar{x}) = 0$ para alguno de estos índices t_r , como existe un SS-elemento, \bar{x} no sería un mínimo global de f_{t_r} , en cuyo caso $0_n \notin \partial f_{t_r}(\bar{x})$, y por lo tanto,

$$\emptyset \neq (\mathbb{R}_+ \partial f_{t_r}(\bar{x})) \cap \mathbb{S} \subset \mathcal{A}(\bar{x}) = \emptyset,$$

y obtenemos una contradicción. Esto nos permite concluir que $f_{t_r}(\bar{x}) < 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$. En virtud del Teorema de Bolzano, para cada $r \in \mathbb{N}$, existe un punto $y^r \in]\bar{x}, x^r[$ verificando $f_{t_r}(y^r) = 0$, de manera que $t_r \in T(y^r)$, y por lo tanto

$$\emptyset \neq (\mathbb{R}_+ \partial f_{t_r}(y^r)) \cap \mathbb{S} \subset \mathcal{A}(y^r).$$

Pero $\lim_{r \rightarrow \infty} y^r = \bar{x}$, por lo tanto, a partir de cierto r_0 , $y^r \in U$ y debe ser $\mathcal{A}(y^r) = \emptyset$, lo que supone una nueva contradicción.

Parte 3. Probemos, razonando por reducción al absurdo, que σ es LFM en un punto cualquiera $\bar{x} \in \text{bd } F$.

Supongamos que $\mathcal{A}(\bar{x}) \subsetneq D(F, \bar{x})^\circ$. Descompondremos la prueba en varias partes, debido a la extensión de la demostración.

3.1) Dado que $\text{int } F \neq \emptyset$, En virtud de la Proposición 0.8, aplicada al conjunto convexo cerrado $F - \bar{x}$, tenemos

$$\text{lineality}(D(F, \bar{x})^\circ) = \text{lineality}((F - \bar{x})^\circ) = n - \dim(F - \bar{x}) = 0,$$

y, por lo tanto, $D(F, \bar{x})^\circ$, así como $\mathcal{A}(\bar{x})$, son conos cerrados y apuntados, distintos del vector nulo. Aplicando la Proposición 0.16, existirá un vector $v \in D(F, \bar{x})^\circ$, que genera un rayo expuesto de dicho cono, y además $v \notin \mathcal{A}(\bar{x})$ (pues, de otro modo, ambos conos coincidirían). Por la definición de rayo expuesto, existirá un hiperplano no trivial,

soporte a $D(F, \bar{x})^\circ$, que pasa por el origen, $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle d, x \rangle = 0\}$, de manera que

$$\{\lambda v \mid \lambda \geq 0\} = D(F, \bar{x})^\circ \cap H.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|d\| = 1$, y como consecuencia de lo anterior

$$\langle d, v \rangle = 0,$$

y, además

$$\langle d, z \rangle < 0, \text{ para todo } z \in D(F, \bar{x})^\circ \setminus \{\lambda v \mid \lambda \geq 0\}. \quad (1.5)$$

En particular,

$$\langle d, a \rangle < 0, \text{ para todo } a \in A(\bar{x}) \setminus \{0_n\}. \quad (1.6)$$

Por otro lado, como $v \in D(F, \bar{x})^\circ = N(F, \bar{x})$, y $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(\bar{x})\}$, la existencia de un SS-elemento asegura, en virtud de la Proposición 0.33, la existencia de un vector $\bar{u} \in \partial f(\bar{x})$ y un escalar $\lambda_v > 0$ tal que $v = \lambda_v \bar{u}$. Tenemos, entonces

$$\langle d, \bar{u} \rangle = 0. \quad (1.7)$$

3.2) En este punto, vamos a explotar la semicontinuidad superior de \mathcal{A} en \bar{x} . Dado que $A(\bar{x})$ es cerrado, $\mathcal{A}(\bar{x})$ es compacto, y (1.6) implica la existencia de un $\beta < 0$ tal que

$$\langle d, a \rangle < \beta, \text{ para todo } a \in \mathcal{A}(\bar{x}). \quad (1.8)$$

(Podemos tomar, por ejemplo, $\beta = \frac{1}{2} \max\{\langle d, a \rangle \mid a \in \mathcal{A}(\bar{x})\}$).

Vamos a considerar el conjunto abierto

$$W := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle d, y \rangle < \beta\}.$$

Entonces, (1.8) puede expresarse como $\mathcal{A}(\bar{x}) \subset W$. La semicontinuidad superior de \mathcal{A} en \bar{x} implicará la existencia de un entorno de \bar{x} , U , verificando

$$\langle d, a \rangle < \beta, \text{ para todo } a \in \mathcal{A}(x) \text{ y para todo } x \in U \cap \text{bd } F. \quad (1.9)$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que U es compacto, suficientemente

pequeño para asegurar que $U \subset \text{int}(\text{dom } f)$. Además, como $\bar{x} \in U$ y $f(\bar{x}) > f(x^0)$, por la continuidad de f en U , podemos también suponer que $f(x) > f(x^0)$, para todo $x \in U$ (pues, si fuera necesario, tomaríamos un entorno más pequeño).

Si denotamos por

$$M(x) := \text{conv} \left(\bigcup \{ \partial f_t(x), t \in T(x) \} \right),$$

es evidente que $A(x) = \mathbb{R}_+ M(x)$. Además, si $x \in \text{bd } F$, $f(x) = 0$, y la Proposición 0.37 garantiza que $M(x) \subset \partial f(x)$, de manera que $\mathcal{A}(x) \subset \mathbb{R}_+ \partial f(x)$. Así pues, para todo $x \in U \cap \text{bd } F$, y cualquier vector $a \in \mathcal{A}(x)$, existirá un escalar positivo λ_a y un vector $u_a \in \partial f(x)$ tales que $a = \lambda_a u_a$. Claramente, $\|u_a\| = 1/\lambda_a$, y las desigualdades en (1.9) nos llevan a que

$$\langle d, u_a \rangle < \beta/\lambda_a \leq \beta \inf \{ \|u\| \mid u \in \partial f(U) \}, \quad (1.10)$$

donde $\partial f(U) := \cup \{ \partial f(x), x \in U \}$. Debido a las propiedades que posee el entorno elegido U , la Proposición 0.28 garantiza que $\partial f(U)$ es un conjunto compacto no vacío, tal que $0_n \notin \partial f(U)$, pues $f(x) > f(x^0)$, para todo $x \in U$. Por lo tanto, se alcanza el ínfimo que aparece en (1.10), y podemos denotar

$$\gamma := \min \{ \|u\| \mid u \in \partial f(U) \} > 0.$$

Ahora, (1.10) permite establecer que, para todo $x \in U \cap \text{bd } F$, y para todo $a \in \mathcal{A}(x)$, existe $u_a \in \partial f(x)$ tal que

$$\langle d, u_a \rangle < \beta\gamma < 0. \quad (1.11)$$

3.3) Como consecuencia, de nuevo, de la Proposición 0.33,

$$D(F, \bar{x})^\circ = N(F, \bar{x}) = \mathbb{R}_+ \partial f(\bar{x}).$$

Si recuperamos las desigualdades de (1.5), podemos escribir

$$\langle d, z \rangle < 0, \text{ para todo } z \in \partial f(\bar{x}) \setminus \{ \lambda \bar{u} \mid \lambda \geq 0 \}. \quad (1.12)$$

A partir de (1.7) y (1.12), y aplicando la Proposición 0.26, obtenemos

$$f'(\bar{x}; d) = \max \{ \langle d, z \rangle \mid z \in \partial f(\bar{x}) \} = 0,$$

y, de acuerdo con la relación (0.2) en la Proposición 0.34⁷, llegamos a que

$$d \in \text{bd}(T(F, \bar{x})). \quad (1.13)$$

3.4) Como consecuencia de (1.13), probaremos que existe una sucesión $\{x^r\}_{r=1}^{\infty} \subset \text{bd } F \setminus \{\bar{x}\}$ convergente a \bar{x} , verificando

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{x^r - \bar{x}}{\|x^r - \bar{x}\|} = d. \quad (1.14)$$

Vamos a proceder considerando las siguientes posibilidades:

Caso 1. Supongamos que existe un $\alpha > 0$ tal que el segmento $[\bar{x}, \bar{x} + \alpha d] \subset \text{bd } F$. En este caso, es suficiente con tomar $x^r := \bar{x} + (\alpha/r)d$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Caso 2. No existe ningún $\alpha > 0$ verificando $[\bar{x}, \bar{x} + \alpha d] \subset \text{bd } F$. Ahora bien, la relación (0.3) en la Proposición 0.34 garantiza la existencia de una sucesión $\{d^r\}_{r=1}^{\infty} \subset D(F, \bar{x})$ convergente a d . Claramente, podemos suponer que $\|d^r\| = 1$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

En esta situación, si existiera algún $\alpha > 0$, verificando que $f(\bar{x} + \alpha d^r) < 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$, al ser f una función convexa, tendríamos que $[\bar{x}, \bar{x} + \alpha d^r] \subset F$, para todo $r \in \mathbb{N}$, y, tomando límites, $[\bar{x}, \bar{x} + \alpha d] \subset F$. Además, si para algún $\alpha_0 \in]0, \alpha]$ se verificara que $\bar{x} + \alpha_0 d \in \text{int } F$, d no podría pertenecer a $\text{bd}(T(F, \bar{x}))$, lo cual contradice (1.13). Por lo tanto, $[\bar{x}, \bar{x} + \alpha d] \subset \text{bd } F$, y esta posibilidad queda excluida en el Caso 2. De manera que no existe ningún escalar positivo α tal que $f(\bar{x} + \alpha d^r) < 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Podemos, por tanto, tomar $\alpha = k^{-1}$, $k = 1, 2, \dots$, y elegir un r_k tal que $f(\bar{x} + \frac{1}{k}d^{r_k}) \geq 0$. Definiremos $\alpha_k := 1/k$, en el caso de que $f(\bar{x} + \frac{1}{k}d^{r_k}) = 0$. Si ocurriera que $f(\bar{x} + \frac{1}{k}d^{r_k}) > 0$, como d^{r_k} es una dirección factible en \bar{x} , podemos encontrar, a partir del Teorema de Bolzano, un escalar positivo α_k ($\alpha_k < 1/k$) tal que $f(\bar{x} + \alpha_k d^{r_k}) = 0$. Repitiendo el procedimiento para $\alpha = (k+1)^{-1}$, pero empezando en el término $r_k + 1$, garantizamos que $r_{k+1} > r_k$, y, al mismo tiempo, tenemos que $\alpha_{k+1} \leq (k+1)^{-1}$.

Definiendo $x^{r_k} := \bar{x} + \alpha_k d^{r_k}$, $k = 1, 2, \dots$, entonces $\{x^{r_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{bd } F$, pues

⁷ Aunque la hipótesis en esta proposición es $\text{dom } f = \mathbb{R}^n$, la demostración sólo requiere la finitud de f en un entorno de \bar{x} , y esto es cierto, en nuestro caso, pues $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } f)$.

$f(x^{r_k}) = 0$, y $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{r_k} = \bar{x}$, ya que $\|d^{r_k}\| = 1$ y $\alpha_k \leq 1/k$. Además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{r_k} - \bar{x}}{\|x^{r_k} - \bar{x}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} d^{r_k} = d.$$

En cualquier caso, hemos probado la existencia de una sucesión con las propiedades mencionadas, que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que está contenida en el entorno U .

3.5) En esta última parte de la demostración, aplicaremos la monotonía de la aplicación subdiferencial, en virtud de la Proposición 0.42. Para cada punto x^r de la sucesión construida en 3.4), tomemos un vector arbitrario $a^r \in \mathcal{A}(x^r)$, y el subgradiente asociado $u_{a^r} \in \partial f(x^r)$, que hemos considerado en (1.11). Para \bar{x} , tomaremos el subgradiente $\bar{u} \in \partial f(\bar{x})$, que aparece en (1.7). La monotonía de ∂f implica que, para todo $r \in \mathbb{N}$,

$$\langle u_{a^r} - \bar{u}, x^r - \bar{x} \rangle \geq 0,$$

y también que, para todo $r \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle u_{a^r} - \bar{u}, \frac{x^r - \bar{x}}{\|x^r - \bar{x}\|} \right\rangle \geq 0. \quad (1.15)$$

Como $\{u_{a^r}\}_{r=1}^{\infty} \subset \partial f(U)$, existirá un punto de acumulación \tilde{u} , y podemos escribir, sin pérdida de generalidad, que $\lim_{r \rightarrow \infty} u_{a^r} = \tilde{u}$. Tomando límites en (1.15), y teniendo en cuenta (1.7), obtenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle u_{a^r}, \frac{x^r - \bar{x}}{\|x^r - \bar{x}\|} \right\rangle \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle \bar{u}, \frac{x^r - \bar{x}}{\|x^r - \bar{x}\|} \right\rangle = \langle \bar{u}, d \rangle = 0. \quad (1.16)$$

Finalmente, (1.11) y (1.16) nos llevan a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{u}, 0_n \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle u_{a^r}, \frac{x^r - \bar{x}}{\|x^r - \bar{x}\|} - d \right\rangle \\ &\geq - \lim_{r \rightarrow \infty} \langle u_{a^r}, d \rangle \geq -\beta\gamma > 0, \end{aligned}$$

obteniendo la contradicción deseada. ■

Observación 1.1 Volviendo al Ejemplo 1.1, nos damos cuenta del importante papel que desempeña la existencia de un SS-elemento para el sistema. En dicho ejemplo,

tenemos que

$$T(x) = \begin{cases} [2, 3], & \text{si } x \leq 0, \\ \emptyset, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

y, consecuentemente, $A(x) = \{0\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathcal{A}(x) = \emptyset$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y \mathcal{A} es, trivialmente, usc en F , a pesar de que σ no es LFM en $\bar{x} = 0$.

1.4 La multifunción de las restricciones sup-activas

Debido a la estructura, algo complicada, de $T(\bar{x})$, nos interesaría obtener un subconjunto de índices alternativo, que, ocasionalmente pudiera ser más cómodo de manejar que $T(\bar{x})$. Este otro conjunto será $S(\bar{x})$, relacionado con la función supremo $f(x) = \sup \{f_t(x), t \in T\}$. Para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, recordemos que las restricciones sup-activas en \bar{x} son aquéllas asociadas los índices del conjunto

$$S(\bar{x}) := \{t \in T \mid f_t(\bar{x}) = f(\bar{x})\}.$$

Definición 1.3 *En relación con el CSIP (P), $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, que asigna a cada punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ el conjunto convexo cerrado (posiblemente vacío)*

$$\mathcal{B}(\bar{x}) := \text{cl conv} \left(\bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in S(\bar{x}) \} \right),$$

se llama la multifunción de las restricciones sup-activas.

En el caso lineal, $\mathcal{B}(\bar{x}) = \text{cl conv} \{a_t, t \in S(\bar{x})\}$.

\mathcal{B} nos va a permitir obtener un resultado homólogo a la proposición (ii) en el Teorema 1.1, incluyendo como consecuencia, una fórmula del tipo Valadier. Para tales propósitos, recuérdese que, en virtud de la Proposición 0.37⁸,

$$\mathcal{B}(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x}). \tag{1.17}$$

Teorema 1.2 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema convexo consistente, y consideremos la función supremo $f(x) = \sup \{f_t(x), t \in T\}$. Supongamos que*

⁸ Aunque esta proposición tiene como hipótesis de partida que f sea finito-valorada, sólo es necesario que, para algún punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x^0) < +\infty$, siendo éste nuestro caso, pues tratamos con sistemas consistentes.

$F \subset \text{int}(\text{dom } f)$. Entonces, si la multifunción \mathcal{B} es usc en $\text{int}(\text{dom } f)$ y $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ en cualquier punto de este conjunto, se verifica:

(i) $\partial f(\bar{x}) = \mathcal{B}(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } f)$; es decir, la siguiente fórmula tipo Valadier se cumple:

$$\partial f(\bar{x}) = \text{cl conv} \left(\bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in S(\bar{x}) \} \right).$$

(ii) Si, además, el cono activo, $A(\bar{x})$, es cerrado para todo $\bar{x} \in F$, y σ posee un SS-elemento, el sistema σ es LFM.

Demostración. (i) En virtud de la Proposición 0.42, la multifunción ∂f es monótona, y debido a la relación (1.17), \mathcal{B} también es monótona. Esto, a su vez, implica que ambas multifunciones son monótonas en el conjunto abierto $D := \text{int}(\text{dom } f)$, que es no vacío, pues contiene a F . Además, se verifica que

$$(\text{gph } \partial f) \cap (D \times \mathbb{R}^n) \supset (\text{gph } \mathcal{B}) \cap (D \times \mathbb{R}^n).$$

Por otro lado, al cumplirse todas las hipótesis de la Proposición 0.43, tendremos que \mathcal{B} es monótona maximal en D , por tanto, podemos concluir que

$$(\text{gph } \partial f) \cap (D \times \mathbb{R}^n) = (\text{gph } \mathcal{B}) \cap (D \times \mathbb{R}^n),$$

y ello implica que, para todo $\bar{x} \in D$,

$$\partial f(\bar{x}) = \mathcal{B}(\bar{x}).$$

(ii) Probaremos que, para todo $\bar{x} \in \text{bd } F$, se cumple que $D(F, \bar{x})^\circ \subset A(\bar{x})$. De hecho, si x^0 es un SS-elemento de σ , se tiene que $f(x^0) < 0$. Como $f(\bar{x}) = 0$ (véase la Parte 1 en la demostración del apartado (ii) en el Teorema 1.1), la Proposición 0.33 garantiza que

$$D(F, \bar{x})^\circ = \mathbb{R}_+ \partial f(\bar{x}) = \mathbb{R}_+ \mathcal{B}(\bar{x}). \quad (1.18)$$

Además, como

$$\text{conv} \left(\bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in S(\bar{x}) \} \right) \subset A(\bar{x}),$$

al ser $A(\bar{x})$ cerrado, tenemos que

$$\mathcal{B}(\bar{x}) = \text{cl conv} \left(\bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in S(\bar{x}) \} \right) \subset A(\bar{x}),$$

y, consecuentemente, $\mathbb{R}_+ \mathcal{B}(\bar{x}) \subset A(\bar{x})$. Así pues, obtenemos de (1.18) la inclusión deseada. ■

Observación 1.2 La proposición (ii) del Teorema 1.2 requiere de la existencia de un SS-elemento para el sistema σ . El siguiente ejemplo muestra que no podemos eliminar dicho requerimiento de las hipótesis:

Ejemplo 1.2 Consideremos el sistema, en \mathbb{R} ,

$$\sigma := \{2tx \leq t^2, t \in T\},$$

con $T = [0, +\infty[$. Se puede comprobar que

$$f(x) = \sup \{2tx - t^2, t \in T\} = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

y el conjunto solución $F =]-\infty, 0]$, verificándose que σ no es LFM en $\bar{x} = 0$. De hecho, tenemos que $T(\bar{x}) = S(\bar{x}) = \{0\}$ y $A(\bar{x}) = \{0\} \subsetneq [0, +\infty[= D(F, \bar{x})^\circ$. Además, $A(x)$ es el conjunto cerrado $\{0\}$, para todo $x \in F$. Así mismo, se puede obtener

$$S(x) = \{0\} \text{ y } \mathcal{B}(x) = \{0\}, \quad \text{si } x \leq 0,$$

$$S(x) = \{x\} \text{ y } \mathcal{B}(x) = \{2x\}, \quad \text{si } x > 0.$$

A pesar de la semicontinuidad superior de \mathcal{B} en \mathbb{R} , la propiedad LFM no se verifica, debido a la ausencia de SS-elementos para el sistema.

Observación 1.3 La semicontinuidad superior de \mathcal{B} en $\text{int}(\text{dom } f)$ no implica que el conjunto

$$\mathcal{B}'(\bar{x}) := \text{conv} \left(\bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in S(\bar{x}) \} \right)$$

sea cerrado, para todo $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } f)$, como muestra el siguiente ejemplo. Esta circunstancia justificaría el hecho de tomar la clausura en la definición de $\mathcal{B}(\bar{x})$.

Ejemplo 1.3. Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ el sistema, en \mathbb{R} , formado por los siguientes grupos de restricciones

$$t \in]0, +\infty[: f_t(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq t^2/(2t+1), \\ (2t+2)x - t^2, & \text{si } x \in]t^2/(2t+1), t], \\ x^2 + 2x, & \text{si } x > t, \end{cases}$$

y

$$t \in]-1, 0]: f_t(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0, \\ (1-t)x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Se obtiene que $F =]-\infty, 0]$, y además

$$f(x) = \sup \{f_t(x), t \in T\} = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 2x, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

de manera que $\text{dom } f = \mathbb{R}$. Se puede verificar de forma sencilla que

$$S(x) = T \text{ y } \mathcal{B}'(x) = \{1\}, \quad \text{si } x < 0,$$

$$S(0) = T \text{ y } \mathcal{B}'(0) = [1, 2[,$$

$$S(x) =]0, x] \text{ y } \mathcal{B}'(x) = \{2x + 2\}, \quad \text{si } x > 0.$$

Claramente, \mathcal{B} es usc en \mathbb{R} , a pesar de que $\mathcal{B}'(0)$ no es cerrado. Obsérvese, además, que $\partial f(0) = [1, 2]$, y que σ posee SS-elementos.

Observación 1.4 La propiedad LFM no implica la semicontinuidad de \mathcal{B} en F , en contraste con el Teorema 1.1 (i).

Ejemplo 1.4 El sistema que vamos a considerar es el mismo del Ejemplo 1.3, pero excluyendo el segundo grupo de restricciones; es decir, aquéllas asociadas con los índices en el intervalo $]-1, 0]$. Así, el conjunto de índices $T =]0, +\infty[$.

De nuevo obtenemos que $F =]-\infty, 0]$, y la función supremo coincide con la del sistema del Ejemplo 1.3. Además, para $\bar{x} = 0$, $T(\bar{x}) = S(\bar{x}) = T$, por lo tanto

$$A(\bar{x}) = [0, +\infty[= D(F, \bar{x})^\circ.$$

Así pues, σ es LFM. Sin embargo, $\mathcal{B}(\bar{x}) = \{1\}$, mientras que $\mathcal{B}(x) = \{2x + 2\}$, cuando

$x > 0$. De manera que \mathcal{B} no es usc en $\bar{x} = 0$.

Observación 1.5 La semicontinuidad superior de \mathcal{B} en $\text{int}(\text{dom } f)$ no asegura que los conjuntos $\mathcal{B}(\bar{x})$ sean no vacíos en los puntos de este conjunto, por lo que debe incluirse como una hipótesis independiente.

Ejemplo 1.5 De nuevo consideramos el sistema σ del Ejemplo 1.3, ahora excluyendo las restricciones del primer grupo, correspondientes a los índices en el intervalo $]0, +\infty[$.

El conjunto de índices $T =]-1, 0]$.

Nuevamente, tenemos que $F =]-\infty, 0]$, siendo además

$$f(x) = \sup \{f_t(x), t \in T\} = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0, \\ 2x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtenemos que

$$S(x) = T \text{ y } \mathcal{B}(x) = \{1\}, \quad \text{si } x < 0,$$

$$S(0) = T \text{ y } \mathcal{B}(0) = [1, 2],$$

$$S(x) = \emptyset \text{ y } \mathcal{B}(x) = \emptyset, \quad \text{si } x > 0.$$

\mathcal{B} es usc en $\text{int}(\text{dom } f) = \mathbb{R}$, pero $\mathcal{B}(x)$ es vacío en los puntos del intervalo $]0, +\infty[$.

1.5 La cualificación de restricciones de Slater generalizada

Vamos a presentar una nueva cualificación de restricciones, que también asegura un comportamiento regular de la función supremo $f(x) = \sup \{f_t(x), t \in T\}$. Para tal fin exigiremos que el conjunto de índices T sea un espacio topológico. A lo largo de esta sección, utilizaremos el conjunto de índices asociados a las *restricciones μ -activas*

$$T_\mu(\bar{x}) := \{t \in T \mid f_t(\bar{x}) \geq -\mu\},$$

donde $\mu \geq 0$. Claramente, si $\bar{x} \in F$,

$$T(\bar{x}) = T_0(\bar{x}) = \bigcap_{\mu > 0} T_\mu(\bar{x}).$$

Definición 1.4 Decimos que la cualificación de restricciones de Slater generalizada se satisface en un punto $\bar{x} \in \text{bd } F$ si se verifican las siguientes condiciones:

- (i) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la función $t \mapsto f_t(x)$ es semicontinua superiormente y, en particular, $t \mapsto f_t(\bar{x})$ es continua;
- (ii) existe un SS-elemento;
- (iii) la función supremo f es continua en \bar{x} ;
- (iv) existe cierto escalar $\mu_0 > 0$ para el cual $T_{\mu_0}(\bar{x})$ es no vacío y compacto.

Teorema 1.3 La cualificación de restricciones de Slater generalizada en $\bar{x} \in \text{bd } F$ implica que el sistema de restricciones de (P) es LFM en \bar{x} .

Demostración. Como consecuencia de (iii), si $\bar{x} \in \text{bd } F$ entonces $f(\bar{x}) = 0$, siguiendo el mismo argumento utilizado en la prueba del apartado (ii) del Teorema 1.1.

En virtud de la Proposición 0.40, tenemos

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcap_{\mu > 0} \text{cl conv} \{ \partial_{\mu} f_t(\bar{x}), t \in T_{\mu}(\bar{x}) \}, \quad (1.19)$$

donde $\partial_{\mu} f_t(\bar{x})$ es el μ -subdiferencial de la función f_t en el punto \bar{x} . Procederemos demostrando, en varias etapas, que la fórmula de Valadier se cumple; es decir, $\partial f(\bar{x}) = \text{conv } C(\bar{x})$, donde

$$C(\bar{x}) := \bigcup \{ \partial f_t(\bar{x}), t \in T(\bar{x}) \}.$$

En una primera etapa estableceremos que $T(\bar{x}) \neq \emptyset$. Dado que

$$0 = f(\bar{x}) = \sup \{ f_t(\bar{x}), t \in T \} = \sup \{ f_t(\bar{x}), t \in T_{\mu_0}(\bar{x}) \},$$

y $T_{\mu_0}(\bar{x})$ es compacto, la hipótesis de continuidad establecida en la condición (i) nos asegura la existencia de un índice $t \in T_{\mu_0}(\bar{x})$ tal que $f_t(\bar{x}) = 0$. En consecuencia, $T(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Dado que, de acuerdo con la Proposición 0.37, $\text{conv } C(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$, vamos a demostrar la inclusión contraria. Para ello, primero veremos que todos los conjuntos

$$C_{\mu}(\bar{x}) := \bigcup \{ \partial_{\mu} f_t(\bar{x}), t \in T_{\mu}(\bar{x}) \}$$

están acotados, con $\mu \geq 0$. De hecho, si $C_\mu(\bar{x})$ no estuviera acotado, para cierto $\mu \geq 0$, existiría una sucesión $\{u^r\}_{r=1}^\infty \subset C_\mu(\bar{x})$ tal que $\lim_{r \rightarrow \infty} \|u^r\| = +\infty$. Por lo tanto, puede encontrarse una sucesión asociada $\{t_r\}_{r=1}^\infty \subset T_\mu(\bar{x})$ verificando $u^r \in \partial_\mu f_{t_r}(\bar{x})$ (algún índice t_r puede aparecer repetido). En virtud de esto, podemos establecer que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_{t_r}(x) \geq f_{t_r}(\bar{x}) + \langle u^r, x - \bar{x} \rangle - \mu. \quad (1.20)$$

Para cada $r \in \mathbb{N}$, consideremos

$$x^r := \bar{x} + \delta \|u^r\|^{-1} u^r,$$

donde el escalar $\delta > 0$ se toma suficientemente pequeño para garantizar que $f(x) \leq M$ cuando $x \in \bar{x} + \delta \text{cl } \mathbb{B}$ (recuérdese que la función f es continua en \bar{x}). Obtenemos

$$\begin{aligned} M &\geq f(x^r) \geq f_{t_r}(x^r) \geq f_{t_r}(\bar{x}) + \delta \|u^r\| - \mu \\ &\geq -2\mu + \delta \|u^r\|. \end{aligned}$$

La última desigualdad constituye una contradicción cuando hacemos que r tienda a infinito.

Debido a la hipótesis de continuidad de la condición (i), los conjuntos $T_\mu(\bar{x})$ son cerrados, para todo $\mu \geq 0$, y como $T_\mu(\bar{x}) \subset T_{\mu_0}(\bar{x})$, cuando $0 \leq \mu \leq \mu_0$, tendremos que $T_\mu(\bar{x})$ será compacto, cuando $0 \leq \mu \leq \mu_0$. Así, nuestro siguiente paso se dedicará a demostrar que $C_\mu(\bar{x})$ es cerrado cuando $0 \leq \mu \leq \mu_0$. Para tal fin, tomaremos las mismas sucesiones que en el paso anterior (es decir, $\{u^r\}_{r=1}^\infty \subset C_\mu(\bar{x})$ y $\{t^r\}_{r=1}^\infty \subset T_\mu(\bar{x})$), y supongamos que $\lim_{r \rightarrow \infty} u^r = u^0$. La compacidad de $T_\mu(\bar{x})$ garantiza la existencia de una subred $\{t_\alpha, \alpha \in \mathbb{A}\}$ convergente a $t_0 \in T_\mu(\bar{x})$. La condición (i) nos permite escribir, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f_{t_0}(x) &\geq \limsup_{\alpha \in \mathbb{A}} f_{t_\alpha}(x) \\ &\geq \limsup_{\alpha \in \mathbb{A}} \{f_{t_\alpha}(\bar{x}) + \langle u^\alpha, x - \bar{x} \rangle - \mu\} \\ &= f_{t_0}(\bar{x}) + \langle u^0, x - \bar{x} \rangle - \mu, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $C_\mu(\bar{x})$ es cerrado, ya que $u^0 \in \partial_\mu f_{t_0}(\bar{x})$.

Debido a la compacidad de $C_\mu(\bar{x})$ cuando $\mu \leq \mu_0$, tendremos que $\text{conv } C_\mu(\bar{x})$ es

compacto, cuando $\mu \leq \mu_0$, y, dado que $C_{\mu'}(\bar{x}) \subseteq C_{\mu}(\bar{x})$ si $\mu' \leq \mu$, (1.19) nos conduce a

$$\partial f(\bar{x}) = \bigcap_{\mu \in]0, \mu_0]} \text{conv } C_{\mu}(\bar{x}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \text{conv } C_{\mu_0/r}(\bar{x}).$$

Por lo tanto, si $u \in \partial f(\bar{x})$, tenemos, asociados a cada r , los siguientes conjuntos (algunos de cuyos elementos pueden coincidir):

$$\begin{aligned} \{t_{r,1}, t_{r,2}, \dots, t_{r,n+1}\} &\subset T_{\mu_0/r}(\bar{x}), \\ \{u^{r,1}, u^{r,2}, \dots, u^{r,n+1}\}, \quad u^{r,j} &\in \partial_{\mu_0/r} f_{t_{r,j}}(\bar{x}) \quad j = 1, \dots, n+1, \\ \{\lambda_{r,1}, \lambda_{r,2}, \dots, \lambda_{r,n+1}\} &\subset \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (1.21)$$

de tal manera que, para cada $r \in \mathbb{N}$, en virtud del Teorema de Carathéodory,

$$u = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{r,j} u^{r,j} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{r,j} = 1.$$

Además, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ a partir de (1.21), podemos escribir

$$f_{t_{r,j}}(x) \geq f_{t_{r,j}}(\bar{x}) + \langle u^{r,j}, x - \bar{x} \rangle - (\mu_0/r). \quad (1.22)$$

Dado que, para cada $j = 1, 2, \dots, n+1$, las sucesiones $\{u^{r,j}\}_{r=1}^{\infty}$ están contenidas en el conjunto compacto $C_{\mu_0}(\bar{x})$, podemos aplicar el usual argumento recurrente para encontrar subsucesiones $\{u^{k_r,j}\}_{r=1}^{\infty}$ convergentes a u^j , para cada $j = 1, 2, \dots, n+1$.

El mismo procedimiento se aplica a las sucesiones $\{\lambda_{r,j}\}_{r=1}^{\infty} \subset [0, 1]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_{k_r,j} = \lambda_j$, para cada $j = 1, 2, \dots, n+1$, y tendremos además, que, $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$. Realmente hemos llegado a que

$$u = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j u^j. \quad (1.23)$$

Además, como $\{t_{k_r,j}\}_{r=1}^{\infty} \subset T_{\mu_0}(\bar{x})$, para cada $j = 1, 2, \dots, n+1$, podemos aplicar de nuevo un procedimiento recurrente finito que garantiza la existencia de subredes $\{t_{\alpha,j}, \alpha \in \mathbb{A}\}$ convergentes a $t_j \in T_{\mu_0}(\bar{x})$. Dado que $t_{r,j} \in T_{\mu_0/r}(\bar{x})$, tenemos que $f_{t_{r,j}}(\bar{x}) \geq -(\mu_0/r)$, para todo $r \in \mathbb{N}$ y, por continuidad,

$$f_{t_j}(\bar{x}) = \lim_{\alpha \in \mathbb{A}} f_{t_{\alpha,j}}(\bar{x}) \geq 0;$$

es decir, $t_j \in T(\bar{x})$, para todo $j = 1, 2, \dots, n+1$. Finalmente, tomando límites en (1.22), restringiéndonos a las subredes asociadas al conjunto dirigido \mathbb{A} , llegamos a

$$f_{t_j}(x) \geq \limsup_{\alpha \in \mathbb{A}} f_{t_{\alpha,j}}(x) \geq f_{t_j}(\bar{x}) + \langle u^j, x - \bar{x} \rangle;$$

es decir, $u^j \in \partial f_{t_j}(\bar{x})$, para todo $j = 1, 2, \dots, n+1$, que, junto a (1.23) prueba que el vector $u \in \text{conv}(C(\bar{x}))$, o, de otro modo, que $\text{conv}(C(\bar{x})) \supset \partial f(\bar{x})$.

Dado que se verifica la condición (ii), tenemos $f(x^0) < 0 = f(\bar{x})$, y \bar{x} no es un mínimo global de f . Aplicando de nuevo la Proposición 0.33, podemos concluir que $D(F, \bar{x})^\circ = \mathbb{R}_+ \partial f(\bar{x}) = \text{cone}(C(\bar{x})) = A(\bar{x})$. Por lo tanto, σ es LFM en \bar{x} . ■

Observación 1.6 Las condiciones (i)-(iv) en la definición de la cualificación de restricciones de Slater generalizada nos permite relajar la condición más fuerte de compacidad, requerida para T , en la Proposición 0.38. La hipótesis de continuidad de la función $t \mapsto f_t(\bar{x})$, en (i), nos garantiza que los conjuntos $C_\mu(\bar{x})$, para $0 \leq \mu \leq \mu_0$, sean cerrados, y da validez al argumento recurrente que se utiliza en la última parte de la demostración. Por otro lado, el argumento que se sigue en [17, Cap. VI, Th. 4.4.2] no se aplica aquí (en particular, los conjuntos J_t , que se introducen en la p. 267 de dicha referencia, pueden no ser compactos). El siguiente ejemplo demuestra que no es suficiente suponer que $T(\bar{x})$ es un conjunto compacto no vacío, en lugar de la condición (iv).

Ejemplo 1.6 Consideremos el sistema, en \mathbb{R}^2 ,

$$\sigma := \left\{ \begin{array}{l} -tx_1 - 1 \leq 0, \quad t \in [-1, 0[\\ tx_2 - 1 \leq 0, \quad t \in [0, 1[\end{array} \right\}.$$

Puede comprobarse que $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 1, x_2 \leq 1\}$, y que las condiciones (i),

(ii) y (iii), se cumplen en el punto $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

(i) la función $t \mapsto f_t(x)$ es continua en $T = [-1, 1[$, para cualquier x que tomemos;

(ii) 0_2 es un SS-elemento (con holgura asociada $\varepsilon = 1$);

(iii) como, para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, el conjunto $\{f_t(x), t \in T\}$ está acotado, tenemos que

$\text{dom } f = \mathbb{R}^2$, y f es obviamente continua en \bar{x} .

Finalmente, la condición (iv) no se cumple en este caso, y ésta es la causa de que σ no sea LFM en dicho punto. De hecho, se obtiene que

$$T_{\mu}(\bar{x}) = \begin{cases} T, & \text{si } \mu \geq 1, \\ [-1, \mu - 1] \cup [1 - \mu, 1[, & \text{si } 0 < \mu < 1, \end{cases}$$

todos ellos no cerrados, y (iv) no se satisface. Al mismo tiempo, $T(\bar{x}) = \{-1\}$, y

$$A(\bar{x}) = [0, +\infty[\times \{0\} \subsetneq [0, +\infty[\times [0, +\infty[= D(F, \bar{x})^{\circ},$$

de manera que la propiedad LFM no se cumple en \bar{x} .

Observación 1.7 El siguiente ejemplo clarifica el significado de la condición (i).

Ejemplo 1.7 Consideremos el sistema, en \mathbb{R}^2 , $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, donde $T = [0, +\infty[$ y

$$f_0(x) := -x_2,$$

$$f_t(x) := (1 + 2t)x_1 - x_2 - t^2, \quad t \in]0, +\infty[.$$

Fácilmente se obtiene

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 \geq (x_1)^2 + x_1\}.$$

Tomando $\bar{x} = 0_2$, $T(0_2) = \{0\}$ y

$$A(0_2) = \{0\} \times]-\infty, 0] \subsetneq \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = D(F, \bar{x})^{\circ}.$$

Por lo tanto, σ no es LFM en $\bar{x} = 0_2$.

Hagamos un repaso de las condiciones de la cualificación de restricciones de Slater generalizada. Obtenemos:

- (i) La función $t \mapsto f_t(x)$ es usc si, y sólo si, $x_1 \leq 0$. En particular, la función $t \mapsto f_t(0_2)$ es continua, pero la condición no se cumple en aquellos puntos donde $x_1 > 0$;
- (ii) $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un SS-elemento de σ (con holgura asociada $\varepsilon = 1$);

(iii) $\text{dom } f = \mathbb{R}^2$ (de hecho, $f(x) = \max\{-x_2, (x_1)^2 + x_1 - x_2\}$), y f es continua en todo el espacio;

(iv) $T(0_2) = \{0\}$ y $T_\mu(0_2) = [0, \sqrt{\mu}]$, todos ellos compactos.

Sin embargo, la consecuencia del incumplimiento de la condición (i) es que

$$\partial f(0_2) = \bigcap_{\mu > 0} \text{cl conv } C_\mu(0_2) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

mientras que $\text{conv } C(0_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Los resultados que se presentan en este capítulo proceden de [9]. Li, Nahak y Singer, en un artículo posterior [19], establecieron algunos resultados relacionados con los Teoremas 1.1 y 1.2, precisando en todo momento dichas relaciones, que resumimos a continuación.

Cabe señalar que la hipótesis de partida en [19] referente a la finitud de la función supremo f en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se utiliza principalmente para asegurar la continuidad de dicha función en $\text{bd } F$, siendo por tanto equiparable a nuestra hipótesis de partida $F \subset \text{int}(\text{dom } f)$ en los teoremas mencionados con anterioridad.

Así pues, manteniendo la notación que se ha utilizado en este capítulo, las relaciones que se pueden establecer entre ambos trabajos son las siguientes:

1) El Teorema 3 en [19] afirma que si $\bar{x} \in \text{bd } F$ y $S(z) \neq \emptyset$ en un entorno de \bar{x} , entonces σ es LFM en \bar{x} si, y sólo si, las multifunciones $\mathcal{Q} : x \rightrightarrows \text{cone}(\partial f(x))$ y $\mathcal{G} : x \rightrightarrows \text{cone}(\cup \{\partial f_t(x), t \in S(x)\})$ son cerradas en \bar{x} . Este resultado tiene cierta similitud con el Teorema 1.1 del presente capítulo, como se menciona en [19, Remark 2].

2) El Teorema 11 (a) en [19] establece que $\partial f(x) = \mathcal{B}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si, y sólo si, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ y \mathcal{B} es cerrada en \mathbb{R}^n . Bajo el supuesto de que f es finito-valorada, podemos observar que la parte "si" de este resultado es equivalente al Teorema 1.2 (i) del presente capítulo, puesto que, al ser la multifunción \mathcal{B} localmente acotada en \mathbb{R}^n (véase la Proposición 0.28) con imágenes cerradas, la semicontinuidad superior de \mathcal{B} equivale a que \mathcal{B} sea cerrada (Proposición 0.44). La analogía entre ambos resultados se menciona, de hecho, en [19, Remark 3 (a)].

3) Finalmente, en la Proposición 13 (a) de [19] se afirma que si σ posee un SS-elemento y $\partial f(x) = \mathcal{B}(x)$ para todo $x \in \text{bd } F$, entonces el $A(x) = D(F, x)^\circ$ para todo $x \in \text{bd } F$. Observemos que si añadimos la hipótesis de que $A(x)$ sea cerrado para todo $x \in F$, y en virtud del Teorema 11 (a) en [19], obtenemos la proposición (ii) del Teorema 1.2 del capítulo actual, circunstancia que se menciona también en [19, Remark 5 (a)].

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 2

Algunos resultados sobre la geometría facial de los sistemas semi-infinitos convexos

2.1 Introducción

Este capítulo está dedicado a la obtención de información geométrica del conjunto de soluciones F de un sistema consistente convexo σ , poniendo especial atención en los sistemas LFM.

En [14, Sec. 5.1] se plantea el problema geométrico de la caracterización del interior y de la frontera (relativos y absolutos) de F para sistemas consistentes lineales generales. En la Sección 2.2 se obtienen resultados análogos para sistemas consistentes convexos generales, salvo para el caso de la frontera absoluta del conjunto. Este problema será resuelto en la Sección 2.3, a partir de ciertas condiciones que garantizarán el cumplimiento de la relación de inclusión buscada. Dichas condiciones nacen de los vínculos existentes entre los conceptos de cara y conjunto de índices portadores de cierta representación lineal de F , obtenida a partir de los subgradientes de las funciones convexas involucradas en el sistema.

En la Sección 2.4 se recordarán las propiedades geométricas de los sistemas

consistentes lineales LFM, obtenidas en [14, Sec.5.3], y se analizarán dichas propiedades en el contexto convexo, señalando las principales diferencias, que serán ilustradas mediante una variedad de ejemplos aclaratorios. Como veremos, en el caso convexo no se podrá obtener una caracterización completa del interior y del interior relativo de F , de manera que en la Sección 2.5 se propondrán diferentes condiciones que facilitarían dichas caracterizaciones.

2.2 Resultados generales

En este punto procede recordar ciertos conceptos y resultados, relativos a un sistema lineal, a fin de poder ser comparados con los que se obtendrán para el caso convexo.

Dado un sistema lineal consistente $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$, una cara de F (respecto de σ) $F_t := \{x \in F \mid \langle a_t, x \rangle = b_t\}$, con $t \in T$ siempre es una cara expuesta de F , es decir, es el conjunto de mínimos de una función afín. Si $a_t \neq 0_n$, entonces el índice $t \in T$ se dice que es *propio*, y un índice $t \in T$ se denomina *índice portador* si $F_t = F$. El conjunto de índices portadores se denota T_C , y claramente $T_C = \emptyset$ cuando σ posee puntos de Slater.

Proposición 2.1 [14, Th.5.1] *Si $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución de $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$, entonces se verifica:*

(i) $\text{rint } F$ (y, en particular, $\text{int } F$) está contenido en el conjunto solución del sistema

$$\{\langle a_t, x \rangle < b_t, t \in T \setminus T_C; \langle a_t, x \rangle = b_t, t \in T_C\}.$$

(ii) $\text{rbd } F$ contiene la unión de todas las caras correspondientes a índices no portadores, mientras que $\text{bd } F$ contiene la unión de todas las caras asociadas a índices propios.

Proposición 2.2 [14, Cor. 5.1.1] *Un sistema lineal consistente σ tiene, al menos, un punto de Slater si, y sólo si, $T_C = \emptyset$.*

Consideremos ahora un sistema convexo consistente $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, donde las funciones $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son cerradas. Asociamos a cada índice $t \in T$

el siguiente conjunto:

$$F_t := \{x \in F \mid f_t(x) = 0\}.$$

A diferencia del caso lineal, F_t no tiene porqué ser convexo, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ el sistema convexo, en \mathbb{R} ,

$$f_t(x) := x^2 - t, t \in T = [1, 2]$$

El conjunto solución de σ es $F = [-1, 1]$, y los conjuntos

$$F_t = \begin{cases} \{-1, 1\}, & \text{si } t = 1, \\ \emptyset, & \text{si } t \in]1, 2]. \end{cases}$$

Claramente, F_1 no es un conjunto convexo.

Sin embargo, los conjuntos F_t sí que verifican la propiedad de que todo subconjunto convexo de un conjunto convexo C debe cumplir para ser una cara de C .

Proposición 2.3 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Para cualquier $t \in T$, si un segmento cerrado de F tiene un punto de su interior relativo en F_t , entonces el segmento está totalmente contenido en F_t .

Demostración. Supongamos que el segmento $[x, y] \subset F$ verifica que, para cierto escalar $\alpha \in]0, 1[$, el punto $z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in F_t$. Como x e y pertenecen a F , y a partir de la convexidad de f_t , tendremos que

$$0 = f_t(z) \leq \alpha f_t(x) + (1 - \alpha)f_t(y) \leq 0,$$

lo que implica que $f_t(x) = f_t(y) = 0$ y, por lo tanto, x e y pertenecen también a F_t .

Esto demuestra que cualquier segmento cerrado contenido en F cuyo interior relativo intersecta con F_t , verifica además que sus extremos se encuentran en F_t . Vamos a utilizar este resultado para demostrar que el interior relativo del segmento $[x, y]$ está contenido en F_t .

Consideremos, por tanto, un escalar $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda \neq \alpha$, y el punto asociado $z_\lambda := \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Si ocurriera que $\lambda > \alpha$, el segmento $[z_\lambda, y] \subset F$ verifica que su interior relativo corta a F_t , pues al menos el punto z se encuentra en ambos conjuntos, y, por el resultado anterior, los extremos del segmento. y, en consecuencia, z_λ , pertenece a F_t .

En el caso de que $\lambda < \alpha$, el razonamiento es análogo para el segmento $[x, z_\lambda]$, concluyendo que, de nuevo, $z_\lambda \in F_t$. ■

Corolario 2.1 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Para todo $t \in T$, la siguiente implicación es cierta:

$$F_t \cap \text{rint } F \neq \emptyset \Rightarrow F_t = F.$$

Demostración. Supongamos que $z \in F_t \cap \text{rint } F$, y tomemos un punto arbitrario $x \in F$, $x \neq z$. Dado que $z \in \text{rint } F$, en virtud de la Proposición 0.2, existirá un escalar $\mu > 1$ tal que $x_\mu := x + \mu(z - x) \in F$. Por lo tanto, $[x, x_\mu]$ es un segmento cerrado en F con un punto del interior relativo, z , en F_t . Así, la Proposición 2.3 garantiza que $x \in [x, x_\mu] \subset F_t$ y, por lo tanto, $F \subset F_t$. Como la inclusión opuesta es obvia, $F = F_t$. ■

Procedemos a extender de forma natural los conceptos de desigualdad trivial, índice propio e índice portador al caso convexo.

Definición 2.1 Si $f_t \equiv 0$, la desigualdad correspondiente en el sistema consistente $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ se dice que es trivial, y este mismo término se aplicará a los sistemas en los que todas las desigualdades sean triviales.

Definición 2.2 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Decimos que un índice $t \in T$ es propio si f_t no es una función constante.

Un índice $t \in T$ es portador si $F = F_t$. El conjunto de índices portadores será denotado nuevamente por T_C .

A continuación, estableceremos las relaciones entre $\text{rint } F$, $\text{rbd } F$, T_C y los conjuntos F_t , para todo $t \in T$. La siguiente proposición presenta una condición suficiente para que $\text{rint } F$ esté contenido en un conjunto dependiente de los índices no portadores.

Proposición 2.4 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente, y supongamos que la siguiente condición se cumple:

$$F \cap I \neq \emptyset, \quad (2.1)$$

donde

$$I := \bigcap_{t \in T \setminus T_C} \text{rint}(\text{dom } f_t).$$

Entonces

$$\text{rint } F \subset \{x \in I \mid f_t(x) < 0, t \in T \setminus T_C\}. \quad (2.2)$$

Demostración. Para cada $t \in T$, consideremos el siguiente conjunto convexo cerrado:

$$G_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) \leq 0\}.$$

G_t es no vacío, puesto que σ es consistente y, obviamente, $F = \bigcap_{t \in T} G_t$.

Sea $t \in T \setminus T_C$. Entonces, existe un punto $x^0 \in F$ tal que $f_t(x^0) < 0$. Aplicando la Proposición 0.22, tenemos que

$$\text{rint } G_t = \{x \in \text{rint}(\text{dom } f_t) \mid f_t(x) < 0\},$$

y, por lo tanto,

$$\text{rbd } G_t = \{G_t \setminus \text{rint}(\text{dom } f_t)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) = 0\}. \quad (2.3)$$

Vamos a demostrar que $(\text{rint } F) \cap (\text{rint } G_t) \neq \emptyset$, razonando por reducción al absurdo. Si ocurriera que $(\text{rint } F) \cap (\text{rint } G_t) = \emptyset$, dado que $F \subset G_t$, tendríamos que

$$\text{rint } F \subset \text{rbd } G_t. \quad (2.4)$$

Supongamos que existe un punto $z \in \text{rint } F$ tal que $f_t(z) = 0$; en otras palabras, que $F_t \cap \text{rint } F \neq \emptyset$. Entonces el Corolario 2.1 garantiza que $F_t = F$, en contradicción con $t \notin T_C$. Este hecho nos lleva, junto con (2.4) y (2.3), a concluir que

$$\text{rint } F \subset G_t \setminus \text{rint}(\text{dom } f_t).$$

Dado que $G_t \setminus \text{rint}(\text{dom } f_t)$ es cerrado,

$$F = \text{cl } F = \text{cl}(\text{rint } F) \subset G_t \setminus \text{rint}(\text{dom } f_t),$$

y esto contradice la hipótesis (2.1).

Podemos, por tanto, afirmar, que $(\text{rint } F) \cap (\text{rint } G_t) \neq \emptyset$ y, de acuerdo con la Proposición 0.3,

$$\text{rint } F = \text{rint}(F \cap G_t) = (\text{rint } F) \cap (\text{rint } G_t),$$

lo que implica que

$$\text{rint } F \subset \text{rint } G_t.$$

Al cumplirse esta relación de inclusión, para todo $t \in T \setminus T_C$, se verificará, por tanto, (2.2). ■

Cuando las funciones f_t , $t \in T$, son todas finito-valoradas, (2.1) se satisface trivialmente, siendo $I = \mathbb{R}^n$. Por otro lado, es evidente que si el conjunto I es vacío, la inclusión (2.2) no puede cumplirse. A continuación, vamos a obtener una versión relajada de (2.2), que extiende la Proposición 2.1, y que no requiere ninguna condición adicional del estilo de (2.1).

Proposición 2.5 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Entonces*

$$\text{rint } F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T \setminus T_C; f_t(x) = 0, t \in T_C\}, \quad (2.5)$$

y

$$\text{rbd } F \supset \bigcup_{t \in T \setminus T_C} F_t. \quad (2.6)$$

Demostración. Sea $t \in T \setminus T_C$ y $G_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) \leq 0\}$.

Si existiera un punto $z \in \text{rint } F \subset G_t$ tal que $f_t(z) = 0$, el Corolario 2.1 nos asegura que $F_t = F$, en contradicción con $t \notin T_C$. Por lo tanto

$$\text{rint } F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0\}. \quad (2.7)$$

Además, si $t \in T_C$,

$$\text{rint } F \subset F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) = 0\}. \quad (2.8)$$

Entonces, (2.5) se obtiene de (2.7) y (2.8), mientras que (2.6) es una consecuencia inmediata de (2.5), por complementariedad. ■

Observación 2.1 La propiedad enunciada en el punto (ii) de la Proposición 2.1, en referencia a la frontera de F para los sistemas lineales, no se extiende a los convexos, pues puede encontrarse un índice propio t tal que F_t no esté contenida en $\text{bd } F$, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ el sistema, en \mathbb{R} , con

$$f_t(x) := \max\{0, tx^2 - t\}, \quad T = [1, 2].$$

Puede comprobarse que $F = [-1, 1] = F_t$, para todo $t \in T$, mientras que $\text{bd } F = \{-1, 1\}$.

El Corolario 2.4, en la próxima sección, establece una condición suficiente para el caso convexo que garantiza las inclusiones $F_t \subset \text{bd } F$, para cualquier índice $t \in T$.

Corolario 2.2 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Entonces σ tiene un punto de Slater si y sólo si $T_C = \emptyset$.

Demostración. Comencemos suponiendo que existe un punto de Slater; es decir, un punto $x^0 \in F$ tal que $f_t(x^0) < 0$, para todo $t \in T$. Entonces $F \neq F_t$, para todo $t \in T$, y concluimos que $T_C = \emptyset$.

Recíprocamente, si $T_C = \emptyset$, obtenemos, como consecuencia de la Proposición 2.5,

$$\text{rint } F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T\}.$$

Dado que F es un conjunto convexo no vacío, $\text{rint } F \neq \emptyset$ y, por lo tanto, existe un punto de Slater para σ . ■

Recordemos que un sistema consistente (lineal o convexo) es ajustado si, para cualquier $\bar{x} \in \text{bd } F$, $\dim A(\bar{x}) > 0$. En el caso lineal, un sistema es ajustado si y

sólo si $\text{bd } F$ es la unión de todas las caras F_t asociadas con índices propios (veáse [14, p. 103]). De nuevo, esta propiedad no está garantizada para un sistema convexo ajustado, como muestra el Ejemplo 2.2, donde el sistema σ es ajustado, pues

$$A(1) = \text{cone} \left\{ \bigcup_{t \in T} [0, 2t] \right\} = [0, +\infty[, \text{ y}$$

$$A(-1) = \text{cone} \left\{ \bigcup_{t \in T} [-2t, 0] \right\} =]-\infty, 0].$$

Lo que sí podemos asegurar es el siguiente resultado:

Proposición 2.6 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema ajustado. Entonces $\text{bd } F$ está contenido en la unión de todos los conjuntos F_t asociados con índices propios.*

Demostración. Si $\bar{x} \in \text{bd } F$, entonces $\dim A(\bar{x}) > 0$, y, por lo tanto, existe un índice $t \in T(\bar{x})$ y un vector $v \in \partial f_t(\bar{x})$ de manera que $v \neq 0_n$. Esto implica que $\bar{x} \in F_t$ y que t es un índice propio, ya que si no lo fuera, y f_t fuera una función constante, tendríamos que $\partial f_t(\bar{x}) = \{0_n\}$. ■

La existencia de puntos de Slater nos garantiza la siguiente propiedad:

Corolario 2.3 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente, con algún punto de Slater. Si σ es ajustado, entonces $\text{bd } F$ es la unión de todos los conjuntos $F_t, t \in T$.*

El recíproco es cierto si, para todo $t \in T, F \subset \text{dom } \partial f_t$.

Demostración. Observemos, en primer lugar, que $T_C = \emptyset$, en virtud del Corolario 2.2.

Vamos a suponer que σ es ajustado. Por (2.6), $\text{bd } F$ contiene la unión de todos los conjuntos $F_t, t \in T$, pues $\text{bd } F \supset \text{rbd } F$. Por otro lado, si $t \in T$ no es un índice propio, entonces f_t será una función constante negativa (pues si $f_t \equiv 0$, entonces $t \in T_C$, y no puede ser positiva, por la consistencia de σ), y por lo tanto $F_t = \emptyset$. Dado que σ es ajustado, la Proposición 2.6 nos asegura la inclusión opuesta.

Recíprocamente, si se cumpliera que

$$\text{bd } F = \bigcup_{t \in T} F_t,$$

y σ no fuera ajustado, existiría un punto $\bar{x} \in \text{bd } F$, tal que $A(\bar{x}) = \{0_n\}$. Como, por hipótesis, $\bar{x} \in F_t$, para algún índice $t \in T$, tendremos que $t \in T(\bar{x})$, en cuyo caso, $\emptyset \neq \partial f_t(\bar{x}) = \{0_n\}$. Esto significa que \bar{x} es un mínimo global de la función f_t , siendo además $f_t(\bar{x}) = 0$. Por lo tanto, $f_t(x) = 0$, para todo punto $x \in F$, y $t \in T_C$, llegando de esta manera a una contradicción. ■

2.3 Representación lineal de un sistema convexo

Vamos a asociar a un sistema convexo $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ el siguiente sistema de desigualdades lineales:

$$\sigma_L := \{\langle u, x \rangle \leq \langle u, y \rangle - f_t(y), t \in T, y \in \text{dom } \partial f_t, u \in \partial f_t(y)\}.$$

Puede comprobarse fácilmente que σ y σ_L tienen el mismo conjunto de soluciones, F , y, por lo tanto, ambos sistemas son equivalentes. Este hecho proporciona una representación lineal de F , cuyo conjunto de índices es

$$T_L := \{(t, y, u), t \in T, y \in \text{dom } \partial f_t, u \in \partial f_t(y)\}.$$

Para cada índice $(t, y, u) \in T_L$, la cara expuesta asociada será denotada por $F_{(t,y,u)}$; es decir,

$$F_{(t,y,u)} := \{x \in F \mid \langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle - f_t(y)\}.$$

El conjunto de índices portadores para σ_L se representará $T_{L,C}$. Vamos a establecer las relaciones entre los conjuntos F_t , $F_{(t,y,u)}$, T_C y $T_{L,C}$.

Proposición 2.7 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(i) *Si $t \in T$, entonces $F_{(t,y,u)} \subset F_t$, para todo $y \in \text{dom } \partial f_t$ y para todo $u \in \partial f_t(y)$.*

(ii) *Si $t \in T$ y $F \subset \text{dom } \partial f_t$, entonces*

$$F_t = \bigcup \{F_{(t,x,u)} \mid x \in F, u \in \partial f_t(x)\}.$$

(iii) *Si $F_t \neq \emptyset$ es una cara expuesta de F , y $F \subset \text{dom } \partial f_t$, existirá un punto $\bar{x} \in F$ y un*

vector $\bar{u} \in \partial f_t(\bar{x})$ tal que $F_t = F_{(t,\bar{x},\bar{u})}$.

(iv) Si $(t, y, u) \in T_{L,C}$, entonces $t \in T_C$. En particular $T_C = \emptyset$ implica que $T_{L,C} = \emptyset$.

(v) Si $F \cap \text{rint}(\text{dom } f_t) \neq \emptyset$, para todo $t \in T$, entonces $T_{L,C} = \emptyset$ implica que $T_C = \emptyset$.

(vi) Si $t \in T_C$ y $F \cap \text{rint}(\text{dom } f_t) \neq \emptyset$, entonces existe un punto $x \in F$ y un vector $u \in \partial f_t(x)$ tal que $(t, x, u) \in T_{L,C}$.

(vii) Si $t \in T \setminus T_C$ y $F \subset \text{dom } \partial f_t$, entonces

$$F_t = \bigcup \{F_{(t,x,u)} \mid x \in \text{rbd } F, u \in \partial f_t(x)\}.$$

Demostración. (i) Supongamos que $F_{(t,y,u)} \neq \emptyset$, pues, de lo contrario, la inclusión es inmediata. Tomemos un punto $x \in F_{(t,y,u)}$. Como $x \in F$, debe ser $f_t(x) \leq 0$. Además,

$$f_t(x) \geq f_t(y) + \langle u, x - y \rangle = 0.$$

Por lo tanto, $f_t(x) = 0$, y ello implica que $x \in F_t$.

(ii) Dado que $F \subset \text{dom } \partial f_t$, y de acuerdo con (i), $F_{(t,x,u)} \subset F_t$, para todo $x \in F$ y para todo $u \in \partial f_t(x)$.

Para demostrar la inclusión contraria, tomemos un punto $x \in F_t$. Como $x \in F$ y $f_t(x) = 0$, consideraremos el índice (t, x, u) en T_L donde $u \in \partial f_t(x) \neq \emptyset$. Entonces $\langle u, x \rangle = \langle u, x \rangle - f_t(x)$, y obtenemos $x \in F_{(t,x,u)}$.

(iii) Sabemos por (i) que $F_{(t,x,u)} \subset F_t$, para todo $x \in F$ y para todo $u \in \partial f_t(x)$. Demostraremos, por tanto, que existe un punto $\bar{x} \in F$ y un vector $\bar{u} \in \partial f_t(\bar{x})$ tal que $F_t \subset F_{(t,\bar{x},\bar{u})}$.

Si probamos que $(\text{rint } F_t) \cap F_{(t,\bar{x},\bar{u})} \neq \emptyset$ para algún $(t, \bar{x}, \bar{u}) \in T_L$, la Proposición 0.11 nos conducirá a la inclusión buscada.

Por reducción al absurdo, supongamos que $(\text{rint } F_t) \cap F_{(t,x,u)} = \emptyset$ para todo (t, x, u) , con $x \in F$ y $u \in \partial f_t(x)$. Entonces

$$(\text{rint } F_t) \cap \left(\bigcup \{F_{(t,x,u)} \mid x \in F, u \in \partial f_t(x)\} \right) = \emptyset,$$

y por (ii), llegamos a que $(\text{rint } F_t) \cap F_t = \emptyset$, y ello contradice el hecho de que F_t es un conjunto convexo no vacío.

(iv) Si $(t, y, u) \in T_{L,C}$ entonces $F_{(t,y,u)} = F$ y por (i), $F \subset F_t$, por lo tanto $F = F_t$.

(v) Si $T_{L,C} = \emptyset$, de acuerdo con la Proposición 2.2, σ_L tiene un punto de Slater. Probaremos que σ también tiene un punto de Slater, y aplicando el Corolario 2.2, concluiremos que $T_C = \emptyset$.

Sea $x^0 \in F$ un punto de Slater de σ_L . En el caso de que $x^0 \in \text{rbd } F$, tomando cualquier punto $z \in \text{rint } F$, puede comprobarse fácilmente que, para todo escalar λ , $0 < \lambda < 1$, $(1 - \lambda)z + \lambda x^0 \in \text{rint } F$ es también un punto de Slater de σ_L .

Esto nos lleva a que podamos considerar la posibilidad de que $x^0 \in \text{rint } F$.

Como $F \cap \text{rint}(\text{dom } f_t) \neq \emptyset$, y $F \subset \text{cl}(\text{dom } f_t)$, F no estará enteramente contenido en $\text{rbd}(\text{dom } f_t)$, para todo $t \in T$, y la Proposición 0.4 garantiza que $\text{rint } F \subset \text{rint}(\text{dom } f_t)$, para todo $t \in T$. Por lo tanto, $\partial f_t(x^0) \neq \emptyset$, para todo $t \in T$, en virtud de la Proposición 0.26. Si ocurriera que $f_t(x^0) = 0$ para algún $t \in T$, podemos tomar el índice (t, x^0, u) en T_L , con $u \in \partial f_t(x^0)$. La restricción asociada será activa en x^0 , y obtendríamos una contradicción, pues x^0 un punto de Slater de σ_L . Necesariamente $f_t(x^0) < 0$ para todo $t \in T$, y x^0 es un punto de Slater de σ .

(vi) Tomemos un índice $t \in T_C$, de manera que $F_t = F$. Primeramente, probaremos que $F \subset \text{dom } \partial f_t$.

En el caso de que $\dim F = 0$, no hay nada que probar, pues $F \cap \text{rint}(\text{dom } f_t) \neq \emptyset$ implica que $F \subset \text{rint}(\text{dom } f_t) \subset \text{dom } \partial f_t$. Por lo tanto, supongamos que $\dim F > 0$.

De nuevo, aplicando conjuntamente la Proposición 0.4 y la Proposición 0.26,

$$\text{rint } F \subset \text{rint}(\text{dom } f_t) \subset \text{dom } \partial f_t.$$

Si F no estuviera contenido en $\text{dom } \partial f_t$, existiría un punto $\bar{x} \in \text{rbd } F$ tal que $\partial f_t(\bar{x}) = \emptyset$. La Proposición 0.25 nos asegura que, para todo $z \in \text{rint}(\text{dom } f_t)$,

$$f'_t(\bar{x}; z - \bar{x}) = -\infty.$$

En particular, para todo $z \in \text{rint } F$,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f_t(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x}))}{\lambda} = -\infty, \quad (2.9)$$

pues $f_t(\bar{x}) = 0$. Pero, para cualquier escalar λ , $0 < \lambda \leq 1$,

$$\bar{x} + \lambda(z - \bar{x}) = (1 - \lambda)\bar{x} + \lambda z \in \text{rint } F,$$

y

$$\frac{f_t(\bar{x} + \lambda(z - \bar{x}))}{\lambda} = 0,$$

en contradicción con (2.9). Por lo tanto, $F \subset \text{dom } \partial f_t$. A partir de (iii), obtenemos que $F_t = F = F_{(t,x,u)}$, para algún $x \in F$ y algún $u \in \partial f_t(x)$.

(vii) Si aplicamos (ii) a un índice $t \in T \setminus T_C$, obtenemos que

$$\bigcup \{F_{(t,x,u)} \mid x \in \text{rbd } F, u \in \partial f_t(x)\} \subset F_t.$$

Por otro lado, (2.6) garantiza que $F_t \subset \text{rbd } F$. Por lo tanto, si $\bar{x} \in F_t$, tenemos que $\bar{x} \in F_{(t,\bar{x},\bar{u})}$, para todo $\bar{u} \in \partial f_t(\bar{x})$. ■

Corolario 2.4 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente. Entonces

$$\text{bd } F \supset \bigcup_{t \in T} F_t,$$

siempre que alguna de las siguientes condiciones se cumpla:

(i) $T_C = \emptyset$;

(ii) $T_C \neq \emptyset$, $F \cap \text{rint}(\text{dom } f_t) \neq \emptyset$, para todo $t \in T$, y además $\inf f_t < 0$ para todo $t \in T_C$.

Demostración. (i) Si $T_C = \emptyset$, (2.6) nos permite concluir la inclusión buscada.

(ii) Tomemos un índice $t \in T \setminus T_C$. Entonces, de nuevo por (2.6),

$$F_t \subset \text{rbd } F \subset \text{bd } F.$$

Consideremos ahora un índice $t \in T_C$. Vamos a demostrar que $\text{bd } F = F = F_t$.

Como $t \in T_C$, por la Proposición 2.7 (vi), existe un punto $x \in F$ y un vector $u \in \partial f_t(x)$ tal que $(t, x, u) \in T_{L,C}$. Entonces

$$F \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, y \rangle = \langle u, x \rangle - f_t(x)\}.$$

Pero $f_t(x) = 0$, y además $0_n \notin \partial f_t(x)$, pues $\inf f_t < 0$. Entonces tenemos que

$$F \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, y \rangle = \langle u, x \rangle\},$$

donde $u \neq 0_n$. Esto implica que $\text{int } F = \emptyset$ y, por lo tanto, $\text{bd } F = F$.

Podemos, de esta manera, afirmar que, en este caso, $\text{bd } F = \bigcup_{t \in T} F_t$. ■

Observación 2.2 La condición $F \subset \text{dom } \partial f_t$ no puede eliminarse en los puntos (ii) y (iii) de la Proposición 2.7, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3 Consideremos un sistema convexo, en \mathbb{R} , con una única desigualdad, $\sigma = \{f_0(x) \leq 0\}$, donde

$$f_0(x) := \begin{cases} -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } |x| \leq 1, \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Se puede comprobar que $F = [-1, 1]$. La función f_0 es subdiferenciable (de hecho, diferenciable) en x , siempre que $|x| < 1$, pero $\partial f_0(x) = \emptyset$ cuando $|x| = 1$. Obtenemos que $F_0 = \{-1, 1\}$ y, para todo $x \in F \cap \text{dom } \partial f_0 =]-1, 1[$,

$$\partial f_0(x) = \left\{ x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Entonces, para todo $x \in]-1, 1[$, tenemos que

$$F_{(0,x,\partial f_0(x))} = \{y \in F \mid yx = 1\} = \emptyset,$$

y, en consecuencia,

$$\bigcup \{F_{(0,x,u)} \mid x \in F \cap \text{dom } \partial f_0, u \in \partial f_0(x)\} = \emptyset \neq F_0.$$

Ejemplo 2.4 Sea $\sigma = \{f_0(x) \leq 0\}$ un sistema convexo, en \mathbb{R} , donde

$$f_0(x) := \begin{cases} -x^{\frac{1}{2}}, & \text{si } x \geq 0, \\ +\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se obtiene que $F = [0, +\infty[$. La función f_0 es diferenciable en $x > 0$, con $\partial f_0(x) = -(1/2)x^{-(1/2)}$, pero $\partial f_0(0) = \emptyset$. Además, $F_0 = \{0\}$, es una cara expuesta de F , y para todo $x > 0$,

$$F_{(0,x,\partial f_0(x))} = \{y \in F \mid y = -x\} = \emptyset.$$

Observación 2.3 Finalmente, si $F \subset \text{rbd}(\text{dom } f_t)$, para algún índice $t \in T$, en la Proposición 2.7, (v) puede no cumplirse, como ocurre en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema convexo, en \mathbb{R} , donde $T = \{0\} \cup \mathbb{N}$, y

$$f_0(x) := \begin{cases} -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } |x| \leq 1, \\ +\infty & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

$$f_r(x) := |x-1| - \frac{1}{r}, r \in \mathbb{N}.$$

Se obtiene que $F = \{1\} \subset \text{rbd}(\text{dom } f_0)$, y además $T_C = \{0\}$.

En este caso, σ_L es el sistema formado por las siguientes desigualdades (eliminando las repetidas):

$$\left\{ tx \leq 1, |t| < 1, x \leq 1 + \frac{1}{s}, s > 0, -x \leq -1 + \frac{1}{u}, u > 0 \right\},$$

y podemos observar que $T_{L,C} = \emptyset$.

Este ejemplo también muestra que (vi) puede no cumplirse si, para algún $\bar{t} \in T$, $F \cap \text{rint}(\text{dom } f_{\bar{t}}) = \emptyset$ (en este caso, $\bar{t} = 0$).

2.4 Geometría de los sistemas LFM

En esta sección nos proponemos analizar las propiedades geométricas de los sistemas convexos LFM. Por los motivos referidos en la introducción del Capítulo 1, en esta sección consideraremos sólo funciones convexas finito-valoradas y, por lo tanto, $\text{dom } f_t = \mathbb{R}^n$, para todo $t \in T$.

De nuevo recordamos algunos resultados, relativos a un sistema lineal, que serán comparados con los que se obtendrán para el caso convexo.

Proposición 2.8 [14, Th. 5.9] *Un sistema $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle \leq b_t, t \in T\}$ no trivial LFM verifica las siguientes propiedades:*

(i) *Para todo $\bar{x} \in F$*

$$\text{lin } A(\bar{x}) = (F - \bar{x})^\perp = \text{span} \{a_t, t \in T_C\}.$$

(ii) $\dim F = n$ si, y sólo si, $A(x)$ es un cono apuntado, para todo $x \in F$, o, de forma equivalente,

$$0_{n+1} \notin \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \neq 0_{n+1}, t \in T \right\}.$$

(iii) $\dim F = n - \dim \text{span} \{a_t, t \in T_C\}$.

Además, si $T_C \neq \emptyset$, tenemos que

$$\text{aff } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_t, x \rangle = b_t, t \in T_C\}.$$

(iv) $\text{rint } F$ es el conjunto solución del sistema

$$\{\langle a_t, x \rangle < b_t, t \in T \setminus T_C; \langle a_t, x \rangle = b_t, t \in T_C\}.$$

En particular, $\text{int } F$ es el conjunto de los puntos de Slater del sistema equivalente obtenido al eliminar las desigualdades triviales de σ .

(v) Si $\langle a, x \rangle \leq b$ es un semi-espacio soporte a F que define una cara expuesta E , entonces E es la intersección de un número finito de caras asociadas con índices propios. Además, $a \in A(x)$, para todo $x \in E$.

Teorema 2.1 Las siguientes afirmaciones son ciertas para cualquier sistema no trivial

LFM $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$:

(i) Para todo $\bar{x} \in F$

$$\text{lin } A(\bar{x}) = (F - \bar{x})^\perp = \text{span} \{\cup_{t \in T_C} \cap_{y \in F} \partial f_t(y)\}. \quad (2.10)$$

(ii) Si $T_C \neq \emptyset$, entonces

$$\text{aff } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle, u \in \cup_{t \in T_C} \cap_{y \in F} \partial f_t(y)\}. \quad (2.11)$$

(iii) Si $T_C = \emptyset$, entonces $\text{int } F$ es el conjunto de los puntos de Slater de σ .

(iv) Si $\langle a, x \rangle \leq b$ es un semi-espacio soporte a F que define una cara expuesta E , entonces $a \in A(y)$ para todo $y \in E$, y E está contenida en la intersección de un número finito de conjuntos F_t asociados con índices propios.

Demostración. Procederemos de la siguiente manera. En el Teorema 7.10 de [14], se demuestra que el sistema convexo σ es LFM si y sólo si el sistema lineal σ_L es LFM, verificándose además que, si denotamos por $A_L(\bar{x})$ al cono activo en un punto $\bar{x} \in F$ respecto de σ_L , entonces $A(\bar{x}) = A_L(\bar{x})$. Esto significa que σ_L verificará todas las propiedades enunciadas en la Proposición 2.8, pues la hipótesis de que σ no sea trivial equivale a que su linealización tampoco lo sea. De esta manera, trasladaremos dichas propiedades, cuando sea posible, a σ , haciendo uso de las conexiones establecidas en la Proposición 2.7.

(i) Dado $\bar{x} \in F$, de acuerdo con la Proposición 2.8 (i), obtenemos

$$\text{lin } A(\bar{x}) = (F - \bar{x})^\perp = \text{span} \{u \in \mathbb{R}^n \mid (t, y, u) \in T_{L,C}\}. \quad (2.12)$$

Definiendo los conjuntos:

$$X := \{u \in \mathbb{R}^n \mid (t, y, u) \in T_{L,C}\} \text{ e}$$

$$Y := \cup_{t \in T_C} \cap_{y \in F} \partial f_t(y),$$

demostraremos que $\text{span } X = \text{span } Y$. Comprobaremos primeramente, que $X \subset Y$.

Sea $u \in X$. Entonces existe un vector $y \in \mathbb{R}^n$ y un índice $t \in T$ tal que $u \in \partial f_t(y)$ y además $(t, y, u) \in T_{L,C}$. de acuerdo con la Proposición 2.7 (iv), $t \in T_C$. Demostraremos que $u \in \partial f_t(x)$ para todo $x \in F$.

Como $(t, y, u) \in T_{L,C}$, se tiene que $F_{(t,y,u)} = F$, y, en consecuencia, para todo $x \in F$, $f_t(y) = \langle u, y - x \rangle$.

Por otro lado, dado que $u \in \partial f_t(y)$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $f_t(z) \geq f_t(y) + \langle u, z - y \rangle$. Reemplazando $f_t(y)$ por $\langle u, y - x \rangle$, obtenemos

$$f_t(z) \geq \langle u, y - x \rangle + \langle u, z - y \rangle = \langle u, z - x \rangle,$$

y, como $f_t(x) = 0$, para todo $x \in F$, pues $t \in T_C$, podemos escribir, para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$f_t(z) \geq f_t(x) + \langle u, z - x \rangle,$$

para todo $x \in F$. Podemos concluir que $u \in \partial f_t(x)$ para todo $x \in F$, de manera que $u \in Y$ y, consecuentemente, $\text{span } X \subset \text{span } Y$.

A continuación demostraremos que también se verifica la inclusión contraria. Para ello, tomemos un vector $v \in Y$. Existirá, por tanto, un índice $t \in T_C$ tal que $v \in \partial f_t(y)$, para todo $y \in F$. Como consecuencia de ello, obtenemos que

$$f_t(\bar{x}) \geq f_t(y) + \langle v, \bar{x} - y \rangle,$$

para todo $y \in F$.

En particular, también se verificará que $v \in \partial f_t(\bar{x})$, de manera que, para todo $y \in F$,

$$f_t(y) \geq f_t(\bar{x}) + \langle v, y - \bar{x} \rangle.$$

Teniendo en cuenta que $f_t(x) = 0$, para todo $x \in F$, pues $t \in T_C$, concluimos que $v \in (F - \bar{x})^\perp$. Así pues, hemos demostrado que $Y \subset (F - \bar{x})^\perp$, de donde se deriva que $\text{span } Y \subset \text{span } X$, de acuerdo con (2.12)..

(ii) Primero, podemos observar que si tomamos cualquier vector u en el conjunto Y definido en la demostración del punto (i), al estar Y contenido en $(F - \bar{x})^\perp$, para todo $\bar{x} \in F$, la función lineal $\langle u, \cdot \rangle$ es constante sobre F . En consecuencia, la igualdad en (2.11) está bien definida.

Ahora, si $T_C \neq \emptyset$, entonces $T_{L,C} \neq \emptyset$, de acuerdo con la Proposición 2.7 (v), y aplicando la Proposición 2.8 (iii), tenemos

$$\text{aff } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle - f_t(y), (t, y, u) \in T_{L,C}\}. \quad (2.13)$$

Definamos el conjunto afín

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle, u \in \cup_{t \in T_C} \cap_{y \in F} \partial f_t(y)\},$$

y probemos primero que $\text{aff } F \subseteq Z$.

Tomemos un vector $x \in \text{aff } F$. Entonces, según (2.13), $\langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle - f_t(y)$ para todo $(t, y, u) \in T_{L,C}$. Para demostrar que $x \in Z$, sólo debemos ver que, si $t \in T_C$ y $u \in \cap_{y \in F} \partial f_t(y)$, entonces $(t, z, u) \in T_{L,C}$, para todo $z \in F$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existiera un punto $z \in F$ tal que $(t, z, u) \in T_L \setminus T_{L,C}$. Ello implicaría a su vez la existencia de otro punto $z^0 \in F$ verificando que $\langle u, z^0 \rangle < \langle u, z \rangle - f_t(z)$. Pero $f_t(z) = 0$, y por lo tanto $\langle u, z^0 \rangle < \langle u, z \rangle$, contradiciendo el hecho de que la función lineal $\langle u, \cdot \rangle$ es constante sobre F . Podemos concluir que $\langle u, x \rangle = \langle u, z \rangle$,

para todo $z \in F$ y, por lo tanto, $x \in Z$.

Probemos ahora la inclusión contraria. Tomemos un punto $x \in Z$ y un índice $(t, y, u) \in T_{L,C}$. Se ha demostrado en (i) que $t \in T_C$ y $u \in \partial f_t(z)$ para todo $z \in F$, de manera que $u \in \bigcup_{t \in T_C} \bigcap_{z \in F} \partial f_t(z)$, y como $x \in Z$, tendremos que $\langle u, x \rangle = \langle u, z \rangle$, para todo $z \in F$. Por otro lado, $F_{(t,y,u)} = F$, y, para todo $z \in F$, se verificará que $\langle u, z \rangle = \langle u, y \rangle - f_t(y)$. Concluimos que $\langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle - f_t(y)$ y, por lo tanto, $x \in \text{aff } F$.

(iii) Si $T_C = \emptyset$, en virtud de la relación (2.5), y habida cuenta de que $\text{int } F \subset \text{rint } F$, obtenemos

$$\text{int } F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T\}, \quad (2.14)$$

de manera que $\text{int } F$ está contenido en el conjunto de puntos de Slater de σ , que es no vacío, de acuerdo con el Corolario 2.2.

Por otra parte, aplicando la Proposición 2.7 (iv), se tendrá que $T_{L,C} = \emptyset$, y no puede haber, por tanto, desigualdades triviales en σ_L . Así pues, según la Proposición 2.8 (iv), se verifica la igualdad

$$\text{int } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle < \langle u, y \rangle - f_t(y), (t, y, u) \in T_L\}.$$

Ahora bien, si x es un punto de Slater de σ , y tomamos un índice $(t, y, u) \in T_L$, entonces $0 > f_t(x) \geq f_t(y) + \langle u, x - y \rangle$, y por lo tanto $\langle u, x \rangle < \langle u, y \rangle - f_t(y)$. Así, hemos obtenido

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T\} \subset \text{int } F,$$

que, junto con (2.14), nos conduce a la igualdad buscada.

(iv) Sea $E = F \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\}$ y supongamos que $\langle a, x \rangle \leq b$ para todo $x \in F$. Aplicando la Proposición 2.8 (v), $a \in A_L(y) = A(y)$, para todo $y \in E$, y además, se cumple

$$E = \bigcap_{i \in I} F_{(t_i, y_i, u_i)},$$

donde $u_i \neq 0_n$, para todo $i \in I$, siendo I finito. En virtud de la Proposición 2.7 (i), cada cara expuesta $F_{(t_i, y_i, u_i)}$ está contenida en F_{t_i} , y ninguna función f_{t_i} puede ser constante (de lo contrario, $\partial f_{t_i}(x) = \{0_n\}$, para todo x). Podemos afirmar, por tanto, que t_i es un

índice propio, para todo $i \in I$, y además $E \subset \bigcap_{i \in I} F_{t_i}$. ■

Corolario 2.5 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema no trivial LFM. Entonces:

(i) $\dim F = n$ si y sólo si $A(x)$ es apuntado, para todo $x \in F$, y esto ocurre siempre que

$$0_{n+1} \notin \text{conv} \left(\bigcup \{ \text{gph } f_t^*, t \in T \} \setminus \{0_{n+1}\} \right). \quad (2.15)$$

(ii) $\dim F = n - \dim \text{span} \{ \bigcup_{t \in T_C} \bigcap_{y \in F} \partial f_t(y) \}$.

Demostración. (i) La equivalencia es una consecuencia directa de la Proposición 2.8 (ii), dado que $A_L(x) = A(x)$, para todo $x \in F$. A su vez, $A(x)$ es apuntado si, y sólo si,

$$0_{n+1} \notin \text{conv} \left\{ \left(\begin{array}{c} u \\ \langle u, y \rangle - f_t(y) \end{array} \right) \neq 0_{n+1}, (t, y, u) \in T_L \right\}. \quad (2.16)$$

De acuerdo con la Proposición 0.29, $u \in \partial f_t(y)$ es equivalente a $f_t(y) + f_t^*(u) = \langle u, y \rangle$ y por lo tanto, (2.16) puede reformularse

$$0_{n+1} \notin \text{conv} \left\{ \left(\begin{array}{c} u \\ f_t^*(u) \end{array} \right) \neq 0_{n+1}, u \in \text{range } \partial f_t, t \in T \right\},$$

siendo

$$\text{range } \partial f_t := \bigcup \{ \partial f_t(x), x \in \mathbb{R}^n \}.$$

La implicación (a) \Rightarrow (d) de la proposición mencionada anteriormente nos permite deducir la inclusión $\text{range } \partial f_t \subset \text{dom } f_t^*$, con lo cuál obtenemos la condición suficiente (2.15).

(ii) Es una consecuencia directa de (2.10). ■

Observación 2.4 En el caso de que σ no sea un sistema LFM, los tres subespacios involucrados en (2.10) verifican siempre las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} \text{span} \{ \bigcup_{t \in T_C} \bigcap_{y \in F} \partial f_t(y) \} &\subset (F - \bar{x})^\perp, \\ \text{lin } A(\bar{x}) &\subset (F - \bar{x})^\perp. \end{aligned}$$

Sin embargo, estas inclusiones pueden ser estrictas, y los subespacios $\text{lin } A(\bar{x})$ y $\text{span} \{ \bigcup_{t \in T_C} \bigcap_{y \in F} \partial f_t(y) \}$ no tienen por qué coincidir, como se comprueba en el

siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6 Consideremos el siguiente sistema lineal, definido en \mathbb{R}^2 ,

$$\sigma = \{x_1 \leq 0, -x_1 \leq t, x_2 \leq t, -x_2 \leq t, t \in]0, 1]\}.$$

Se puede comprobar que $F = \{0_2\}$, pero σ no es LFM, ya que $D(F, 0_2)^\circ = \mathbb{R}^2$ y, por otro lado, $A(0_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \geq 0 \right\}$. En este caso, $(F - 0_2)^\perp = \mathbb{R}^2$ y $\text{lin } A(0_2) = \{0_2\}$, mientras que $\text{span}\{a_t, t \in T_C\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Observación 2.5 Aplicando la Proposición 2.8 (iv) al sistema lineal σ_L , puede establecerse que $\text{int } F$ es el conjunto de los puntos de Slater del sistema equivalente que se obtiene al eliminar todas las desigualdades triviales. Esto, sin embargo, no puede generalizarse para el sistema convexo. De hecho, para el sistema del Ejemplo 2.2, obtuvimos que $F = [-1, 1] = F_t$, para todo $t \in T$; y por lo tanto $T_C = T$. El sistema σ es LFM y el conjunto de los puntos de Slater está vacío, mientras que $\text{int } F \neq \emptyset$.

Observación 2.6 De nuevo, aplicando la Proposición 2.8 (iv) al sistema lineal σ_L , resulta que $\text{rint } F$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u, x \rangle < \langle u, y \rangle - f_t(y), \quad (t, y, u) \in T_L \setminus T_{L,C}, \\ \langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle - f_t(y), \quad (t, y, u) \in T_{L,C} \end{array} \right\}. \quad (2.17)$$

Sin embargo, para el sistema convexo, no podemos afirmar que

$$\text{rint } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T \setminus T_C; f_t(x) = 0, t \in T_C\},$$

como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.7 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema convexo, en \mathbb{R} , con $T = \{0\} \cup [2, 3]$ y

$$f_0(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f_t(x) := e^x - t, \quad t \in [2, 3].$$

Observemos que $F =] - \infty, 0]$, el sistema σ es LFM, y $T_C = \{0\}$. Sin embargo, en este caso, como $F_t = \emptyset$, para todo $t \in [2, 3]$, tenemos

$$\text{rint } F = \text{int } F \subsetneq F = \{x \in \mathbb{R} \mid f_t(x) < 0, t \in [2, 3]; f_0(x) = 0\}.$$

Observación 2.7 La última comparación que podemos realizar respecto a los resultados obtenidos en la Proposición 2.8 y en el Teorema 2.1 atañe a las proposiciones (v) y (iv), respectivamente. Mientras que en el caso lineal toda cara expuesta E definida por un semi-espacio es la intersección de un número finito de caras F_t asociadas con índices propios, en el caso convexo sólo podemos garantizar la inclusión de E en la intersección de un número finito de conjuntos F_t asociados con índices propios. Si consideramos otra vez el sistema del Ejemplo 2.7, tomando $E = \{0\}$, cualquier índice es propio, y además $F_t = \emptyset$, para todo $t \in [2, 3]$, $F_0 = F$ y $E \subsetneq F_0$.

2.5 Caracterización del interior y del interior relativo del conjunto de soluciones

Como se apuntó en la Observación 2.5, si $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ es un sistema convexo no trivial LFM, no podemos garantizar la igualdad

$$\text{int } F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in \tilde{T} \right\}, \quad (2.18)$$

donde $\tilde{T} = \{t \in T \mid f_t \text{ no es idénticamente cero}\}$; es decir, el conjunto de índices del sistema equivalente $\tilde{\sigma}$ obtenido al eliminar las desigualdades triviales en σ . El Teorema 2.2 nos va a proporcionar condiciones necesarias y suficientes para el cumplimiento de la igualdad (2.18). Su prueba requiere el siguiente lema:

Lema 2.1 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente, y supongamos que $T_C \neq \emptyset$. Si existe un índice $t \in T_C$ tal que $\inf f_t < 0$, entonces $\text{int } F = \emptyset$.*

Demostración. Dado que $t \in T_C$, aplicando la Proposición 2.7 (vi), $F = F_{(t,y,u)}$, para algún punto $y \in F$ y algún vector $u \in \partial f_t(y)$; entonces $F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle\}$. Si ocurriera que $u = 0_n$, obtendríamos que y es un mínimo global de f_t , pero $f_t(y) = 0$

y se verifica que $\inf f_t < 0$. Concluimos, por lo tanto, que $u \neq 0_n$, lo cual implica que $\dim F < n$ y, en consecuencia, $\text{int } F = \emptyset$. ■

Teorema 2.2 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema no trivial LFM y sea $\tilde{\sigma}$ el sistema equivalente obtenido al eliminar todas las desigualdades triviales. Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que σ verifique (2.18):

- (i) $\tilde{T}_C = \emptyset$;
- (ii) $\tilde{T}_C \neq \emptyset$ y existe un índice $\tilde{t} \in T_C$ tal que $\inf f_{\tilde{t}} < 0$;
- (iii) $\tilde{T}_C \neq \emptyset$ y existe un índice $\tilde{t} \in T_C$ tal que $f_{\tilde{t}}$ no es diferenciable en ningún punto de F .

Además, si σ verifica la igualdad (2.18), entonces una de las condiciones (i)-(iii) debe cumplirse.

Demostración. (i) Si $\tilde{T}_C = \emptyset$, como F es el conjunto solución del sistema LFM $\tilde{\sigma}$, se obtiene el resultado del Teorema 2.1 (iii).

Procederemos ahora de la siguiente forma: si suponemos que $\tilde{T}_C \neq \emptyset$, entonces $T_C \neq \emptyset$ y, para algún índice $t \in T_C$, f_t no es idénticamente cero. Además, el conjunto de puntos de Slater de $\tilde{\sigma}$ es vacío, en virtud del Corolario 2.2. Vamos a analizar todas las posibilidades, y veremos que sólo en los casos especificados en (ii) y (iii), ocurrirá que $\text{int } F = \emptyset$. De esta manera, habremos demostrado tanto la implicación directa como la inversa.

Caso 1 (que corresponde al caso (ii)). Si existe un índice $\tilde{t} \in T_C$ tal que $\inf f_{\tilde{t}} < 0$, entonces $\text{int } F = \emptyset$, en virtud del Lema 2.1.

Caso 2. Para todo $t \in T_C$, $\inf f_t = 0$. Esto equivale a que $0_n \in \partial f_t(z)$, para todo $z \in F$, y todo $t \in T_C$, de manera que $0_n \in \bigcap_{z \in F} \partial f_t(z)$, para todo $t \in T_C$.

de acuerdo con el Corolario 2.5 (ii),

$$\dim F = n - \dim \text{span} \left\{ \bigcup_{t \in T_C} \bigcap_{z \in F} \partial f_t(z) \right\},$$

y se pueden presentar dos posibilidades:

Caso 2.1. Para todo $t \in T_C$, f_t es diferenciable en algún punto $z_t \in F$. Esto implica que $\{0_n\} = \partial f_t(z_t)$, por lo que $\bigcup_{t \in T_C} \bigcap_{z \in F} \partial f_t(z) = \{0_n\}$. Entonces, $\dim F = n$ y por

lo tanto $\text{int } F \neq \emptyset$. En este caso, el conjunto de los puntos de Slater de $\tilde{\sigma}$ no coincide con $\text{int } F$.

Caso 2.2 (que corresponde al caso (iii)). Existe algún índice $\tilde{t} \in T_C$ tal que $f_{\tilde{t}}$ no es diferenciable en ningún punto de F . de acuerdo con la Proposición 0.32, el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ de los puntos donde $f_{\tilde{t}}$ es diferenciable es un subconjunto denso de \mathbb{R}^n , y podemos concluir que $\text{int } F = \emptyset$ (pues, de otro modo $D \cap \text{int } F \neq \emptyset$). ■

A continuación, vamos a caracterizar el interior relativo del conjunto solución F de un sistema no trivial LFM. El objetivo será, de nuevo, proporcionar condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la igualdad

$$\text{rint } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T \setminus T_C; f_t(x) = 0, t \in T_C\}, \quad (2.19)$$

que es válida, en el caso lineal, pero no lo es, en general, en el caso convexo (recuérdese la Observación 2.6).

Supondremos que F no es una variedad afín. En otro caso, $\text{rint } F = F$ y por lo tanto, $\text{rbd } F = \emptyset$. A partir de la inclusión (2.6), se deduce que, si $t \in T \setminus T_C$, entonces $F_t = \emptyset$. De esta manera, si $t \in T \setminus T_C$, entonces $f_t(x) < 0$, para todo $x \in F$, mientras que, si $t \in T_C$, $f_t(x) = 0$, para todo $x \in F$. Esto quiere decir que la igualdad (2.19) se cumple trivialmente.

El hecho de suponer que F no es una variedad afín implica la existencia de puntos en la frontera relativa de F . Ello justifica los argumentos que seguidos en las demostraciones de los resultados que se obtienen a continuación.

Vamos a empezar viendo dos condiciones necesarias que no involucran la propiedad LFM para el sistema σ , siendo la segunda de ellas incluso suficiente en el caso de que $\dim F = n$.

Proposición 2.9 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente no trivial. Si se cumple la igualdad (2.19), entonces existe un índice $t \in T \setminus T_C$ tal que $F_t \neq \emptyset$.*

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo, y supongamos que $F_t = \emptyset$, para todo $t \in T \setminus T_C$. Entonces para cualquier punto $x \in \text{rbd } F$, $f_t(x) < 0$, si $t \in T \setminus T_C$, y

$f_t(x) = 0$, si $t \in T_C$. Teniendo en cuenta (2.5), podemos concluir que

$$\text{rint } F \subsetneq \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0, t \in T \setminus T_C; f_t(x) = 0, t \in T_C\},$$

contradiciendo (2.19). ■

El siguiente ejemplo demuestra que la condición necesaria de la Proposición 2.9 no es suficiente, incluso en el caso de que $F_t \neq \emptyset$, para todo índice $t \in T \setminus T_C$. En este ejemplo el sistema σ además es LFM.

Ejemplo 2.10 Consideremos el sistema, en \mathbb{R} , $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, con $T = [1, +\infty[$ y

$$f_1(x) := \begin{cases} -3x - 6, & \text{si } x \leq -2, \\ 0, & \text{si } -2 < x \leq 0, \\ x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$f_t(x) := x^2 + (2 - t)x - 2t, t > 1.$$

Se obtiene $F = [-2, 0]$, $T_C = \{1\}$, $F_t = \{-2\}$, para todo $t > 1$, y

$$\text{int } F \subsetneq] -2, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid f_t(x) < 0, t > 1; f_1(x) = 0\}.$$

Proposición 2.10 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema consistente no trivial que verifica la igualdad (2.19). Entonces para todo punto $\bar{x} \in \text{rbd } F$, existe un índice $t \in T(\bar{x})$ tal que $\inf f_t < 0$. Además, si $\dim F = n$ el recíproco también es cierto.

Demostración. Claramente podemos deducir de (2.5) que se verificará la igualdad (2.19) si y sólo si, para todo $x \in \text{rbd } F$,

$$T(x) \cap (T \setminus T_C) \neq \emptyset. \quad (2.20)$$

Razonaremos por reducción al absurdo. Si existiera algún punto $\bar{x} \in \text{rbd } F$ tal que $\inf f_t = 0$, para todo $t \in T(\bar{x})$, entonces

$$0 = f_t(\bar{x}) \leq f_t(x) \leq 0,$$

para todo $x \in F$, y llegaríamos a que $T(\bar{x}) \subset T_C$, lo que contradice (2.20). ■

Supongamos ahora que $\dim F = n$. Demostraremos que se verifica (2.20), para todo $x \in \text{bd } F$.

Sea $\bar{x} \in \text{bd } F$, y tomemos un índice $t \in T(\bar{x})$ tal que $\inf f_t < 0$, el cual, por hipótesis, existe. El conjunto

$$G_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) \leq 0\},$$

es un conjunto convexo cerrado en \mathbb{R}^n , que contiene a F y, por tanto, $\dim G_t = n$. Consecuentemente, y en virtud de la Proposición 0.22, se verifica que

$$\text{int } G_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) < 0\} \text{ y } \text{bd } G_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) = 0\}.$$

Como $\dim F = n$, entonces $F \cap \text{int } G_t \neq \emptyset$ y esto asegura la existencia de un punto $x^0 \in F$ que verifica $f_t(x^0) < 0$. Por lo tanto $t \notin T_C$. ■

De acuerdo con la Proposición 2.10, la igualdad (2.19) no se cumple en el Ejemplo 2.10 debido a que, para el punto $\bar{x} = 0 \in \text{bd } F$, $\inf f_t = 0$, si $t \in T(\bar{x}) = \{1\}$.

El siguiente ejemplo muestra que, si $\dim F < n$, la condición necesaria que se establece en la Proposición 2.10 no es suficiente, incluso cuando el sistema es LFM.

Ejemplo 2.11 Sea $\sigma = \{f_t(x_1, x_2) \leq 0, t \in T\}$ el sistema convexo, en \mathbb{R}^2 , donde $T = [0, 1] \cup \{2\}$ y

$$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2) &:= |x_1| + [x_2]_+ \equiv |x_1| + \max\{0, x_2\}, \\ f_t(x_1, x_2) &:= x_1^2 + tx_2 - t, t \in]0, 1], \\ f_2(x_1, x_2) &:= x_1. \end{aligned}$$

Deducimos que el conjunto solución $F = \{0\} \times]-\infty, 0]$ y que $T_C = \{0, 2\} = T(0_2)$. También se verifica que $\inf f_2 < 0$. Obtenemos, por tanto, que $\{0_2\} = \text{rbd } F$ y que $T(0_2) \cap (T \setminus T_C) = \emptyset$, de manera que no se cumple la igualdad (2.19). Veamos a continuación que σ es LFM.

Si denotamos por $g_1(x_1, x_2) = |x_1|$ y $g_2(x_1, x_2) = [x_2]_+$, sabemos que para $\bar{x} = 0_2$, $T(\bar{x}) = \{0, 2\}$ y se obtiene

$$\begin{aligned} \partial g_1(\bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}, \\ \partial g_2(\bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 = 0, 0 \leq u_2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

80 2. Algunos resultados sobre la geometría facial de los sistemas semi-infinitos convexos

Aplicando la Proposición 0.30, $\partial f_0(\bar{x}) = \partial g_1(\bar{x}) + \partial g_2(\bar{x})$. Por lo tanto,

$$\partial f_0(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\}.$$

Por otro lado, $\partial f_2(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Entonces

$$A(\bar{x}) = \text{cone} \{ \partial f_0(\bar{x}) \cup \partial f_2(\bar{x}) \} = \mathbb{R} \times [0, +\infty[= D(F, \bar{x})^\circ.$$

También para $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_2 < 0$, obtenemos $T(\bar{x}) = \{0, 2\}$ y

$$\partial g_1(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}, \quad \partial g_2(\bar{x}) = \{0_2\}.$$

En consecuencia

$$\partial f_0(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}.$$

Teniendo en cuenta que $\partial f_2(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, obtenemos

$$A(\bar{x}) = \text{cone} \{ \partial f_0(\bar{x}) \cup \partial f_2(\bar{x}) \} = \mathbb{R} \times \{0\} = D(F, \bar{x})^\circ.$$

Exceptuando el caso $\dim F = n$, no existe ninguna otra relación entre las condiciones necesarias que se han establecido en las Proposiciones 2.9 y 2.10, que denotaremos:

(C.1) existe un índice $t \in T \setminus T_C$ tal que $F_t \neq \emptyset$;

(C.2) para todo punto $\bar{x} \in \text{rbd } F$, existe un índice $t \in T(\bar{x})$ tal que $\inf f_t < 0$.

De hecho, en el caso $\dim F = n$, (C.2) es equivalente al cumplimiento de la igualdad (2.19), y ésta a su vez implica (C.1). Sin embargo (C.1) no garantiza que se cumpla (C.2), y el Ejemplo 2.10 es prueba de ello, al fallar la igualdad (2.19). Basta observar que, para el punto $\bar{x} = 0 \in \text{rbd } F$, se verifica $T(0) = \{1\}$ e $\inf f_1 = 0$.

Por otro lado, si $\dim F < n$, el sistema del Ejemplo 2.11 verifica la condición (C.2). Sin embargo, para todo $t \in T \setminus T_C =]0, 1]$, $F_t = \emptyset$, y por lo tanto (C.1) no se cumple. Finalmente, la condición (C.1) tampoco implica (C.2), como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.12 Sea $\sigma = \{f_t(x_1, x_2) \leq 0, t \in T\}$ el sistema convexo, en \mathbb{R}^2 , con $T = [1, 2[$ y

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &:= |x_1| + [x_2]_+, \\ f_t(x_1, x_2) &:= x_2^2 + (2-t)x_2 - 2t, t \in]1, 2[. \end{aligned}$$

Se tiene que $F = \{0\} \times [-2, 0]$ y $T_C = \{1\}$. Para todo $t \in T \setminus T_C$, $F_t = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ y, por lo tanto, (C.1) se cumple.

Por otro lado, para $\bar{x} = 0_2 \in \text{rbd } F$, $T(\bar{x}) = \{1\}$, e $\inf f_1 = 0$. De manera que (C.2) no se verifica.

Como en ejemplos anteriores, el sistema es LFM:

Para $\bar{x} = 0_2$, fue calculado en el Ejemplo 2.11 el subdiferencial

$$\partial f_1(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\},$$

por lo tanto $A(\bar{x}) = \text{cone } \{\partial f_1(\bar{x})\} = \mathbb{R} \times [0, +\infty[= D(F, \bar{x})^\circ$.

Si $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $T(\bar{x}) = T$, y además

$$\begin{aligned} \partial f_1(\bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}, \\ \partial f_t(\bar{x}) &= \{\nabla f_t(\bar{x})\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2-t \end{pmatrix} \right\}, t \in]1, 2[. \end{aligned}$$

(El cálculo de $\partial f_1(\bar{x})$ se ha realizado en el Ejemplo 2.11, para el caso $x_2 < 0$.)

Por lo tanto, $A(\bar{x}) = \text{cone } \left\{ \bigcup \partial f_t(\bar{x}), t \in T \right\} = \mathbb{R} \times]-\infty, 0] = D(F, \bar{x})^\circ$.

Finalmente, para los puntos $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $-2 < x_2 < 0$, obtenemos $T(\bar{x}) = \{1\}$ y

$$\partial f_1(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\},$$

de manera que $A(\bar{x}) = \mathbb{R} \times \{0\} = D(F, \bar{x})^\circ$.

Nos centraremos ahora en los sistemas convexos no triviales LFM y buscaremos condiciones suficientes para que se verifique la igualdad (2.19). Primero, establecemos los siguientes lemas:

Lema 2.2 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema no trivial LFM y $\bar{x} \in \text{rbd } F$. Entonces existe un índice $t \in T(\bar{x})$ y un vector $u \in \partial f_t(\bar{x})$ tales que, para todo $x \in F$,

$\langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle$, y además $\langle u, z \rangle < \langle u, \bar{x} \rangle$, para algún $z \in F$.

Demostración. Habida cuenta de (2.17) en la Observación 2.6, si $\bar{x} \in \text{rbd } F$, debe verificarse que

$$T_L(\bar{x}) \cap (T_L \setminus T_{L,C}) \neq \emptyset.$$

Por otro lado, se puede obtener la siguiente relación entre $T_L(\bar{x})$ y $T(\bar{x})$ (véase [14, (7.11)]):

$$T_L(\bar{x}) = \{(t, \bar{x}, u) \mid t \in T(\bar{x}), u \in \partial f_t(\bar{x})\}.$$

De manera que existe un índice $t \in T(\bar{x})$ y un vector $u \in \partial f_t(\bar{x})$ tales que $(t, \bar{x}, u) \notin T_{L,C}$, y ello implica que, como $f_t(\bar{x}) = 0$, para todo $x \in F$, $\langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle$, y además $\langle u, z \rangle < \langle u, \bar{x} \rangle$ para algún $z \in F$. ■

Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema convexo no trivial LFM y sea $\bar{x} \in \text{rbd } F$. Definimos el siguiente conjunto, que denotaremos por $U_{\bar{x}}$:

$$\{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle, \text{ para todo } x \in F; \langle u, z \rangle < \langle u, \bar{x} \rangle, \text{ para algún } z \in F\}.$$

Evidentemente, $U_{\bar{x}} = N(F, \bar{x}) \setminus (F - \bar{x})^\perp$.

Lema 2.3 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema no trivial LFM y $\bar{x} \in \text{rbd } F$. $U_{\bar{x}}$ es un conjunto convexo no vacío tal que, si $t \in T(\bar{x})$ verifica que $\partial f_t(\bar{x}) \cap U_{\bar{x}} \neq \emptyset$, entonces $\text{rint } \partial f_t(\bar{x}) \subset U_{\bar{x}}$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia del Lema 2.2.

Ahora, sea $t \in T(\bar{x})$ tal que $\partial f_t(\bar{x}) \cap U_{\bar{x}} \neq \emptyset$. Tomemos un vector $u \in \partial f_t(\bar{x}) \cap U_{\bar{x}}$. En el caso de que $v \in \text{rint } \partial f_t(\bar{x})$ y sea distinto de u , entonces, de acuerdo con la Proposición 0.2, existe un escalar $\mu > 1$ tal que $w := (1 - \mu)u + \mu v \in \partial f_t(\bar{x})$. Por lo tanto, $v = \lambda w + (1 - \lambda)u$, tomando $\lambda = \frac{1}{\mu}$.

Al ser t un índice en $T(\bar{x})$, y dado que $w \in \partial f_t(\bar{x})$, se cumplirá, para todo $x \in F$,

$$0 \geq f_t(x) \geq \langle w, x - \bar{x} \rangle.$$

En consecuencia, $w \in N(F, \bar{x})$ y, por convexidad, $v \in N(F, \bar{x})$.

Si ocurriera que $v \in (F - \bar{x})^\perp$, tendríamos que, para todo $x \in F$,

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle = \lambda \langle w, x - \bar{x} \rangle + (1 - \lambda) \langle u, x - \bar{x} \rangle = 0,$$

lo que obliga a que $u \in (F - \bar{x})^\perp$, y esto es imposible, puesto que $u \in U_{\bar{x}}$. Concluimos, por tanto, que $v \in U_{\bar{x}}$. ■

Teorema 2.3 *Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema no trivial LFM verificando la condición (C.2). Cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que σ verifique la igualdad (2.19):*

- (i) $\dim F = n$;
- (ii) $\dim F < n$ y, para todo $\bar{x} \in \text{rbd } F$,

$$\left(\bigcup \{ \partial f_t(\text{rint } F), t \in T(\bar{x}) \} \right) \cap U_{\bar{x}} \neq \emptyset. \quad (2.21)$$

Demostración. (i) Ya ha sido demostrado en la Proposición 2.10.

(ii) Vamos a probar que, para todo $\bar{x} \in \text{rbd } F$, $T(\bar{x}) \cap (T \setminus T_C) \neq \emptyset$.

Si $\bar{x} \in \text{rbd } F$, entonces $U_{\bar{x}} \neq \emptyset$, de acuerdo con el Lema 2.3. Tomemos un vector $u \in U_{\bar{x}}$ y consideremos el semiespacio

$$H_u := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle\}.$$

Se verifica que $F \subset H_u$, pero F no está completamente contenido en $\text{bd } H_u$. En virtud de la Proposición 0.4, $\text{rint } F \subset \text{int } H_u$. Observemos además que esta condición implica que, si $u \in U_{\bar{x}}$, entonces $\langle u, y \rangle < \langle u, \bar{x} \rangle$, para todo $y \in \text{rint } F$.

Como se verifica (2.21), existirá un índice $t \in T(\bar{x})$ y un punto $y \in \text{rint } F$ tales que $\partial f_t(y) \cap U_{\bar{x}} \neq \emptyset$. Vamos a tomar un vector $v \in \partial f_t(y) \cap U_{\bar{x}}$. Entonces

$$0 = f_t(\bar{x}) \geq f_t(y) + \langle v, \bar{x} - y \rangle \text{ y } \langle v, \bar{x} - y \rangle > 0.$$

Por lo tanto $f_t(y) < 0$, lo que implica que $t \notin T_C$. ■

Observación 2.8 Ahora podemos analizar qué es lo que fallaba en el Ejemplo 2.11, donde $\dim F < n$, cumpliéndose (C.2), pero incumpléndose la igualdad (2.19). Se

observa que, para el punto $\bar{x} = 0_2$, $U_{\bar{x}} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 > 0\}$, mientras que

$$\bigcup \{\partial f_t(\text{rint } F), t \in T(\bar{x})\} \subset \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Teorema 2.4 Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$ un sistema no trivial LFM, verificando que, para todo $t \in T_C$ y para todo $\bar{x} \in \text{rbd } F$,

$$\partial f_t(\bar{x}) \subset (F - \bar{x})^\perp.$$

Entonces se cumple la igualdad (2.19). Además las siguientes afirmaciones son ciertas:

(i) Para todo $\bar{x} \in F$

$$\text{lin } A(\bar{x}) = (F - \bar{x})^\perp = \text{span} \{\cup_{t \in T_C} \cap_{y \in \text{rbd } F} \partial f_t(y)\}.$$

(ii) $\dim F = n - \dim \text{span} \{\cup_{t \in T_C} \cap_{y \in \text{rbd } F} \partial f_t(y)\}$.

Demostración. Para demostrar que la igualdad (2.19) se cumple, probaremos nuevamente, que $T(\bar{x}) \cap (T \setminus T_C) \neq \emptyset$ para cualquier punto $\bar{x} \in \text{rbd } F$. De hecho, en virtud del Lema 2.2, existe un índice $t \in T(\bar{x})$ y un vector $u \in \partial f_t(\bar{x})$ tales que, para todo $x \in F$, $\langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle$ y además $\langle u, z \rangle < \langle u, \bar{x} \rangle$ para algún punto $z \in F$. Entonces $u \notin (F - \bar{x})^\perp$ y, por hipótesis, $t \notin T_C$.

Por otro lado, aplicando el Teorema 2.1 (i), tenemos que, para todo $\bar{x} \in F$,

$$\text{lin } A(\bar{x}) = (F - \bar{x})^\perp = \text{span} \{\cup_{t \in T_C} \cap_{y \in F} \partial f_t(y)\},$$

y resulta obvio que

$$\text{span} \{\cup_{t \in T_C} \cap_{y \in F} \partial f_t(y)\} \subset \text{span} \{\cup_{t \in T_C} \cap_{y \in \text{rbd } F} \partial f_t(y)\}.$$

Tomemos ahora un vector $v \in \partial f_t(y)$, para todo $y \in \text{rbd } F$ y cierto índice $t \in T_C$. Entonces, por hipótesis, $v \in (F - y)^\perp$ y, en consecuencia,

$$\langle v, y \rangle = \langle v, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in F. \quad (2.22)$$

Por otro lado, como $v \in \partial f_t(y)$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$f_t(z) \geq f_t(y) + \langle v, z - y \rangle. \quad (2.23)$$

Al ser t un índice portador del sistema σ , $f_t(y) = 0$, pues $y \in \text{rbd } F$, y a su vez, $f_t(x) = 0$, para todo $x \in F$. De manera que, a partir de (2.22) y (2.23), obtenemos

$$f_t(z) \geq f_t(x) + \langle v, z - x \rangle, \text{ para todo } x \in F,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$, lo que implica que $v \in \partial f_t(x)$, para todo $x \in F$. Hemos probado, por tanto, la igualdad en (i), mientras que (ii) es una consecuencia directa de ella. ■

En el caso de que $\dim F = n$, la hipótesis del Teorema 2.3 es consecuencia de la hipótesis del Teorema 2.4, pues el hecho de que se verifique la igualdad (2.19) es equivalente a (C.2), en virtud de la Proposición 2.10. Los siguientes ejemplos muestran que ambas hipótesis son, en general, independientes.

Ejemplo 2.13 Sea $\sigma = \{f_t(x_1, x_2) \leq 0, t \in T\}$ el sistema convexo, en \mathbb{R}^2 , con $T = [0, 1] \cup \{2\}$ y

$$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2) &:= |x_1| + [x_2]_+, \\ f_t(x_1, x_2) &:= x_1^2 + tx_2, t \in]0, 1], \\ f_2(x_1, x_2) &:= x_1. \end{aligned}$$

El conjunto solución es $F = \{0\} \times]-\infty, 0]$ y $T_C = \{0, 2\}$. En este caso, $T(0_2) = T$ y tenemos que $\inf f_2 < 0$. Vamos a comprobar que σ es LFM.

Para el punto $\bar{x} = 0_2$,

$$\partial f_0(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\}, \partial f_2(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

tal como se obtuvo en el Ejemplo 2.11. Por otro lado, $\partial f_t(\bar{x}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right\}, t \in]0, 1]$.

Entonces

$$A(\bar{x}) = \text{cone} \left\{ \bigcup \partial f_t(\bar{x}), t \in T \right\} = \mathbb{R} \times [0, +\infty[= D(F, \bar{x})^\circ.$$

Tomemos ahora un punto $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_2 < 0$. Dado que tenemos las mismas restricciones activas en \bar{x} que en el Ejemplo 2.11, se cumplirá igualmente que $A(\bar{x}) = D(F, \bar{x})^\circ$.

Este sistema cumple la condición (ii) del Teorema 2.3 ya que, para $\bar{x} = 0_2$,

$$U_{\bar{x}} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 > 0\},$$

y tomando cualquier índice $t \in]0, 1]$, para todo $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \text{rint } F$,

$$\partial f_t(0, x_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right\} \subset U_{\bar{x}}.$$

Sin embargo, la hipótesis del Teorema 2.4 falla, pues

$$\partial f_0(\bar{x}) \not\subset (F - \bar{x})^\perp = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Ejemplo 2.14 Sea $\sigma = \{f_t(x_1, x_2, x_3) \leq 0, t \in T\}$ el sistema convexo, en \mathbb{R}^3 , con $T = [0, +\infty[$ y

$$f_0(x_1, x_2, x_3) := \max \left\{ \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - (x_1 + x_2)}{2}, -x_1, -x_2 \right\},$$

$$f_t(x_1, x_2, x_3) := t|x_3|, t > 0.$$

La convexidad de la función f_0 sobre \mathbb{R}^3 es una consecuencia directa de la convexidad de la función

$$g(x_1, x_2, x_3) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

y de la Proposición 0.35. Realmente, g es la norma Euclídea restringida al subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

Se puede comprobar fácilmente que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0\}$$

y, por lo tanto, $\dim F = 2$. De nuevo probaremos que σ es LFM y, para ello, analizaremos lo que sucede en cada punto $\bar{x} \in F$.

(1) Para $\bar{x} = 0_3$, $T(\bar{x}) = T$. Se obtiene de forma simple que, para los índices $t > 0$,

$$\partial f_t(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = u_2 = 0, |u_3| \leq t\}. \quad (2.24)$$

En el Ejemplo 0.3 obtuvimos

$$\partial f_0(\bar{x}) = \text{conv} \left(\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right),$$

que, en conjunción con (2.24), nos conduce a

$$\begin{aligned} A(\bar{x}) &= \text{cone} \{ \partial f_0(\bar{x}) \cup (\bigcup_{t>0} \partial f_t(\bar{x})) \} \\ &=]-\infty, 0] \times]-\infty, 0] \times \mathbb{R} \\ &= D(F, \bar{x})^\circ. \end{aligned}$$

(2) Para los puntos $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $x_1 > 0$, de nuevo $T(\bar{x}) = T$. Si $t > 0$,

se verifica (2.24), pero en este caso la función g es diferenciable, de manera que

$$\partial g(\bar{x}) = \{ \nabla g(\bar{x}) \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y, por lo tanto,}$$

$$\partial f_0(\bar{x}) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.25)$$

De (2.24) y (2.25) obtenemos

$$A(\bar{x}) = \{0\} \times]-\infty, 0] \times \mathbb{R} = D(F, \bar{x})^\circ.$$

(3) Para $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 > 0$, podemos utilizar un razonamiento simétrico al seguido en (2).

(4) Finalmente, para $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, $T(\bar{x}) =]0, +\infty[$, de manera que, a partir de (2.24), calculamos

$$A(\bar{x}) = \{0_2\} \times \mathbb{R} = D(F, \bar{x})^\circ.$$

En conclusión, σ es un sistema LFM.

Las hipótesis del Teorema 2.4 se satisfacen ya que, para todo $t \in T_C =]0, +\infty[$ y para todo $\bar{x} \in \text{rbd } F$, tenemos

$$\partial f_t(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = u_2 = 0, |u_3| \leq t\} \subset \text{lin } A(\bar{x}) = (F - \bar{x})^\perp.$$

Sin embargo las hipótesis del Teorema 2.3 no se verifican. De hecho, para $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $x_1 > 0$, tenemos que $T(\bar{x}) = T$ y

$$U_{\bar{x}} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = 0, u_2 < 0\}.$$

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{rint } F$, podemos observar que $\partial f_t(x) \cap U_{\bar{x}} = \emptyset$, para todo índice

$t > 0$. Además

$$\partial f_0(x) = \left\{ \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dado que $x_2 \neq 0$, se tiene

$$x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 < 0,$$

y podemos concluir que $\partial f_0(x) \cap U_{\bar{x}} = \emptyset$.

Ejemplo 2.15 Consideremos el sistema convexo $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, t \in T\}$, en \mathbb{R} , con $T = [1, 2]$ y

$$f_1(x) := x^2 - 1,$$

$$f_t(x) := \begin{cases} -tx - t, & \text{si } x \leq -1, \\ 0, & \text{si } -1 < x < 1, \\ tx - t, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad 1 < t \leq 2,$$

Resulta ser $F = [-1, 1]$, $T_C =]1, 2]$ y $F_1 = \{-1, 1\}$. Se comprueba fácilmente que el sistema σ es LFM y, para $\bar{x}_1 = -1$ y $\bar{x}_2 = 1$, podemos tomar $t = 1$, que verifica $\inf f_1 < 0$. Como $\dim F = 1$, estaríamos en el caso (i) del Teorema 2.3. Pero las condiciones del Teorema 2.4 no se verifican, pues si tomamos $\bar{x} = -1$ y el índice $2 \in T_C$, entonces $-2 \in \partial f_2(\bar{x})$ y, sin embargo, $(F - \bar{x})^\perp = \{0\}$.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Capítulo 3

Representaciones de una función convexa. Funciones cuasipoliédricas

3.1 Introducción

En este capítulo introducimos el concepto de representación de una función f convexa y finito-valorada, definida en \mathbb{R}^n , con el fin de establecer un nuevo marco que nos permitirá obtener caracterizaciones de algunas propiedades conocidas atribuibles a la función.

Procederemos, en primer lugar, a establecer la relación entre la función f y un sistema de desigualdades lineales σ , en base a que el epigrafo de f coincida con el conjunto de soluciones de σ . Ello motivará la definición de representación de f que proponemos en la Sección 3.2.

La Sección 3.3 se centra en el estudio de las representaciones LFM. Se obtendrán dos caracterizaciones de tales representaciones, la segunda de las cuales vendrá expresada en términos de una fórmula de tipo Valadier. Las representaciones LFM no caracterizan a la función f en forma alguna, pues toda función convexa finito-valorada poseerá una representación LFM. No ocurrirá así con las representaciones LOP, estudiadas en la Sección 3.4, las cuales darán lugar al concepto de función convexa cuasipoliédrica.

Así como los conjuntos convexos cuasipoliédricos pueden ser considerados como una generalización de los poliédricos, las funciones convexas cuasipoliédricas generalizan las poliédricas. Ello ha motivado la investigación sobre qué operaciones, que ya preservan la convexidad poliédrica de las funciones, siguen preservando la convexidad cuasipoliédrica: conjugación, la imagen y la imagen inversa bajo una transformación lineal, la adición (punto a punto) y la multiplicación a la derecha por un escalar λ positivo, que incluirá el caso $\lambda = 0^+$. De este modo, la Sección 3.5 se ocupa del estudio de la conjugada de una función cuasipoliédrica, derivándose una representación, para esta última, en términos de los puntos extremos del epigrafo de su conjugada. El resto de operaciones se recogen en la Sección 3.6.

En la Sección 3.7 se obtendrá una caracterización del subdiferencial y del ε -subdiferencial de una función cuasipoliédrica en un punto, pudiendo este último también ser representado en términos de los minorantes afines de una representación FM de la función, representaciones introducidas en la Sección 3.8.

Finalmente, en la Sección 3.9, presentaremos una aplicación de la convexidad cuasipoliédrica, que nos permitirá construir una función convexa a partir de una función no convexa, pero continua, con la particularidad de que ambas funciones coincidirán en los conjuntos (convexos) donde la función de origen sea convexa.

3.2 Representación de una función mediante minorantes afines

En virtud de la Proposición 0.35, la función supremo de una familia arbitraria no vacía de funciones afines definidas en \mathbb{R}^n ,

$$f(x) := \sup \{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T \}, \quad (3.1)$$

donde x y a_t son vectores en \mathbb{R}^n , b_t en \mathbb{R} , es convexa y cerrada. Además, si existe un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x^0) < +\infty$, también es propia.

Por otro lado, si f es una función convexa propia y cerrada, como consecuencia de

la igualdad $f = f^{**}$, se verifica

$$f(x) = \sup \{ \langle u, x \rangle - f^*(u), u \in \text{dom } f^* \},$$

siendo f^* la función conjugada de f .

Podemos, por tanto, representar cualquier función convexa y cerrada como el supremo (punto a punto) de una colección de funciones minorantes afines. Con objeto de simplificar las pruebas, vamos a suponer que f es una función convexa finito-valorada. Esto implica que f es continua en \mathbb{R}^n , y por lo tanto cerrada, pudiendo ser expresada como (3.1) si, y sólo si, $\text{epi } f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \}. \quad (3.2)$$

De hecho, si $\text{epi } f$ es el conjunto de soluciones de (3.2), tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \min \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \text{epi } f \right\} \\ &= \min \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T \} \\ &= \sup \{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T \}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si f puede ser expresada como (3.1), para todo $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \text{epi } f$, se verifica

$$\alpha \geq f(x) \geq \langle a_t, x \rangle - b_t, \text{ para todo } t \in T,$$

y, por lo tanto, $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$ es una solución del sistema (3.2).

Diremos que σ es una *representación* de f en términos de los minorantes afines asociados a las desigualdades de σ .

Observación 3.1 Aunque por representación de una función convexa finito-valorada entendemos un sistema de la forma $\{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \}$, de cualquier sistema cuyo conjunto de soluciones sea $\text{epi } f$ podemos derivar una representación de f . Basta observar que si $\text{epi } f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\hat{\sigma} = \{ \langle d_t, x \rangle + \gamma_t x_{n+1} \leq c_t, t \in T \},$$

donde $d_t \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_t, c_t \in \mathbb{R}$, para todo $t \in T$, dado que el vector $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in 0^+(\text{epi } f)$,

se verificará que si $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{epi } f$, entonces $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} + \lambda \end{pmatrix} \in \text{epi } f$, para todo escalar $\lambda \geq 0$ y, en consecuencia,

$$\langle d_t, x \rangle + \gamma_t (x_{n+1} + \lambda) \leq c_t,$$

para todo índice $t \in T$, lo que obliga a que $\gamma_t \leq 0$, para todo $t \in T$. Vamos a denotar mediante T_1 al subconjunto de índices $t \in T$ tales que $\gamma_t < 0$.

Obviamente, si para algún índice, $\gamma_t = 0$, necesariamente $d_t = 0_n$ y $c_t \geq 0$, pues todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ debe satisfacer la restricción $\langle d_t, x \rangle \leq c_t$. Llamando $a_t := d_t / |\gamma_t|$, $b_t := c_t / |\gamma_t|$, para todo $t \in T_1$, obtenemos que el sistema

$$\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T_1 \}$$

es equivalente a $\hat{\sigma}$ y, por lo tanto, será una representación de f .

Si (3.2) es una representación de f , podemos asociar a cada punto $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{epi } f$ el conjunto de índices correspondientes a las restricciones activas en dicho punto

$$T \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \{ t \in T \mid \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} = b_t \}.$$

En el caso de que $x_{n+1} = f(x)$, obtenemos la siguiente equivalencia

$$t \in T \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \iff f(x) = \langle a_t, x \rangle - b_t,$$

mientras que si $x_{n+1} > f(x)$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{int}(\text{epi } f)$, tenemos que

$$T \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \emptyset.$$

Esto nos permite concluir que los puntos que son realmente de interés son aquéllos que se encuentran en la frontera de $\text{epi } f$. Por lo tanto, en lugar de $T \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, vamos a utilizar una notación más simple

$$T(x) := \{ t \in T \mid f(x) = \langle a_t, x \rangle - b_t \}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Por esta razón

$$A_\sigma(x) := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \end{pmatrix}, t \in T(x) \right\} \quad (3.3)$$

se denominará *cono de los minorantes activos* en x asociado a σ .

De una forma similar, en el caso en que $x_{n+1} > f(x)$ tendremos que

$$D\left(\text{epi } f, \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } N\left(\text{epi } f, \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}\right) = \{0_{n+1}\}.$$

De acuerdo con el convenio notacional anterior, $D(\text{epi } f, x)$ y $N(\text{epi } f, x)$ representarán el cono de las direcciones factibles y el cono normal a $\text{epi } f$ en el punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, respectivamente; es decir,

$$D(\text{epi } f, x) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \lambda w \in \text{epi } f, \text{ para algún } \lambda > 0 \right\},$$

y $N(\text{epi } f, x) = D(\text{epi } f, x)^\circ$.

Tendremos, entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y de acuerdo con la Proposición 0.45,

$$A_\sigma(x) \subset N(\text{epi } f, x). \quad (3.4)$$

Recordemos el siguiente resultado, que será de gran utilidad en este capítulo. Si f es una función convexa finito-valorada, se tiene para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\partial f(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix} \in N(\text{epi } f, x) \right\}. \quad (3.5)$$

3.3 Representaciones LFM

Iniciamos el estudio de las representaciones LFM presentando una primera caracterización de las mismas.

Proposición 3.1 $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ es una representación LFM de una función convexa finito-valorada f si, y sólo si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$A_\sigma(x) = N(\text{epi } f, x). \quad (3.6)$$

Demostración. En virtud de la Proposición 0.47, el sistema σ es LFM si y sólo si el cono activo en cualquier punto de su conjunto de soluciones, $\text{epi } f$, coincide con el cono normal a $\text{epi } f$ en el punto. Si el punto estuviera en $\text{int}(\text{epi } f)$, ambos conos se reducirían al origen, por lo que los únicos puntos que tiene que ser investigados son los de la frontera de $\text{epi } f$. Podemos por tanto concluir que σ es LFM si, y sólo si, se verifica (3.6). ■

En la Proposición 3.17 probaremos que toda función convexa finito-valorada admite una representación Farkas-Minkowski (FM, para abreviar) y, en consecuencia, admitirá también una representación LFM. Este tipo de representaciones presenta una interesante segunda caracterización.

Proposición 3.2 $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ es una representación LFM de función convexa finito-valorada f si, y sólo si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica la fórmula del tipo Valadier

$$\partial f(x) = \text{conv} \{a_t, t \in T(x)\}. \quad (3.7)$$

Demostración. Sea σ una representación LFM de f , de manera que se cumple la igualdad (3.6). Si reemplazamos en (3.5), obtenemos

$$u \in \partial f(x) \iff \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix} \in A_\sigma(x),$$

y, de acuerdo con (3.3), esto equivale a que $u \in \text{conv} \{a_t, t \in T(x)\}$.

Recíprocamente, si se verifica (3.7), para todo $x \in \mathbb{R}^n$, obtenemos, en virtud de (3.5),

$$\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix} \in N(\text{epi } f, x) \iff \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \end{pmatrix}, t \in T(x) \right\}. \quad (3.8)$$

Tomemos un punto $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in N(\text{epi } f, x)$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, y demostremos que $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in A_\sigma(x)$.

Como $N(\text{epi } f, x) = D(\text{epi } f, x)^\circ$ y además $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in 0^+(\text{epi } f) \subset D(\text{epi } f, x)$,

tendremos que

$$\langle a, 0_n \rangle + \alpha \leq 0,$$

y, en consecuencia, $\alpha \leq 0$.

En particular, si $\alpha = 0$, por la definición de cono normal, ocurriría que, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, y - x \rangle \leq 0$, y esto implica $a = 0_n$, por lo que $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = 0_{n+1} \in A_\sigma(x)$.

Podemos afirmar, entonces, que si $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \neq 0_{n+1}$, debe ser $\alpha < 0$, y ello nos permite escribir

$$\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = |\alpha| \begin{pmatrix} \frac{a}{|\alpha|} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dado que $N(\text{epi } f, x)$ es un cono, ocurrirá que $\begin{pmatrix} \frac{a}{|\alpha|} \\ -1 \end{pmatrix} \in N(\text{epi } f, x)$, y aplicando (3.8), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{|\alpha|} \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \end{pmatrix}, t \in T(x) \right\} \subset A_\sigma(x),$$

y, en consecuencia, $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in A_\sigma(x)$.

En virtud de (3.4) y (3.6), concluimos que σ es una representación LFM de f . ■

3.4 Representaciones localmente poliédricas (LOP). Funciones cuasipoliédricas.

Recordemos que una función convexa f es *poliédrica* si $\text{epi } f$ es un conjunto poliédrico. Si además f es finito-valorada, este tipo de funciones puede estudiarse como un caso particular de las siguientes:

Definición 3.1 Se dice que una función f convexa finito-valorada es cuasipoliédrica si $\text{epi } f$ es un conjunto cuasipoliédrico.

Obsérvese que, en virtud de la Proposición 0.49 (ii), si σ es una representación LOP de una función convexa finito-valorada f , el conjunto solución de σ , que es $\text{epi } f$, será

un conjunto cuasipoliédrico, y por tanto, f será cuasipoliédrica.

Recíprocamente, si f es una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica, la Proposición 0.50 nos permite afirmar que existirá una representación LOP de f : basta observar que si $\{\langle d_t, x \rangle + \gamma_t x_{n+1} \leq c_t, t \in T\}$ es un sistema LOP cuyo conjunto de soluciones es $\text{epi } f$, podemos obtener, de acuerdo con la Observación 3.1, un sistema equivalente $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T_1\}$ (donde $T_1 \subseteq T$) que conserva el cono activo en cada punto de $\text{epi } f$, de tal manera que σ será también un sistema LOP.

Así pues, podemos caracterizar una función cuasipoliédrica en términos de una representación LOP de la misma, en contraposición con las representaciones LFM, que no caracterizan a la función de forma alguna (recordemos que toda función convexa finito-valorada admitirá una representación LFM), por lo que no tiene ningún sentido hablar de funciones LFM.

Establecemos, inicialmente, un resultado análogo a la Proposición 3.1, cuya prueba omitimos por su similitud.

Proposición 3.3 $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ es una representación LOP de una función convexa finito-valorada f si, y sólo si, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$A_\sigma(x)^\circ = D(\text{epi } f, x). \quad (3.9)$$

Claramente, si σ es una representación LOP de f , la Proposición 0.49 (i) nos permite afirmar que también será una representación LFM, de manera que la igualdad (3.7) es también válida para aquellas representaciones.

Sea C un conjunto no vacío en \mathbb{R}^n y σ una representación de una función convexa finito-valorada f . Vamos a utilizar la siguiente notación

$$T(C) := \bigcup \{T(x), x \in C\}.$$

A continuación presentamos una caracterización de las funciones convexas finito-valoradas y cuasipoliédricas que constituirá una herramienta fundamental en la prueba de los principales resultados de este capítulo.

Proposición 3.4 *Una función convexa finito-valorada f es cuasipoliédrica si, y sólo si, existe una representación de f , $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$, tal que $T(C)$ es un conjunto de índices no vacío y finito, para todo conjunto compacto no vacío C en \mathbb{R}^n . Además, σ es una representación LOP de f .*

Demostración. Sea f una función cuasipoliédrica. Vamos a considerar la sucesión de polítopos, en \mathbb{R}^n , $\{r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty\}_{r=1}^\infty$ y denotemos

$$m_r := \min \{f(x), x \in r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty\} \text{ y } M_r := \max \{f(x), x \in r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty\},$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Como $\{r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty \times [m_r, M_r]\}$ es un polítopo en \mathbb{R}^{n+1} , el conjunto

$$C_r := \text{epi } f \cap \{r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty \times [m_r, M_r]\}$$

será un polítopo, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Definamos la siguiente función convexa

$$f_r(x) := f(x) + \delta(x \mid r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty).$$

Es fácil demostrar que $\text{epi } f_r = C_r \cup D_r$, para todo $r \in \mathbb{N}$, donde

$$D_r := r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty \times [M_r, +\infty[.$$

Por lo tanto, $\text{epi } f_r$, que es un conjunto convexo cerrado, es la unión de dos conjuntos poliédricos y, en virtud de la Proposición 0.19, $\text{epi } f_r$ es un conjunto poliédrico. Podemos concluir que f_r es una función poliédrica, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Consideremos una representación minimal de $\text{epi } f_r$ (es decir, una representación sin desigualdades redundantes),

$$\{\langle a_r^i, x \rangle - x_{n+1} \leq b_r^i, i = 1, 2, \dots, k_r, \|x\|_\infty \leq r\}, \quad (3.10)$$

y definamos

$$A_r := \left\{ \begin{pmatrix} a_r^i \\ b_r^i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, k_r \right\},$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. Dado que $\text{epi } f_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto poliédrico y $\dim(\text{epi } f_r) = n + 1$, si denotamos

$$H_r^i := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle a_r^i, x \rangle - x_{n+1} = b_r^i \right\},$$

entonces $H_r^i \cap \text{epi } f_r$ es una faceta de $\text{epi } f_r$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k_r\}$, en virtud de la Proposición 0.20 (iii). Pero f_{r+1} restringida a $r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty$ coincide con f_r , por lo que cada una de estas facetas coincidirá o estará contenida en una faceta de $\text{epi } f_{r+1}$, y por lo tanto $H_r^i \cap \text{epi } f_{r+1}$ es una faceta de $\text{epi } f_{r+1}$, de manera que, aplicando la Proposición 0.20 (ii), podemos concluir que $A_r \subset A_{r+1}$, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Sea entonces $A := \lim_{r \rightarrow \infty} A_r = \text{cl} \{ \cup_{r=1}^\infty A_r \}$ y definamos el sistema

$$\sigma := \left\{ \langle a, x \rangle - x_{n+1} \leq b, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in A \right\}.$$

Vamos a demostrar que σ es una representación de f , comprobando que su conjunto de soluciones es $\text{epi } f$.

Supongamos primero que $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ es una solución de σ , y que $x \in r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty$, para cierto $r \in \mathbb{N}$. Dado que $A_r \subset A$, se cumplirá que $\langle a_r^i, x \rangle - x_{n+1} \leq b_r^i$, para todo $i = 1, 2, \dots, k_r$, de manera que $x_{n+1} \geq \langle a_r^i, x \rangle - b_r^i$, para todo $i = 1, 2, \dots, k_r$, y consecuentemente $x_{n+1} \geq f_r(x) = f(x)$ por tanto, $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{epi } f$.

Recíprocamente, si $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{epi } f$ y $\|x\|_\infty \leq k$, para cierto $k \in \mathbb{N}$, entonces $x \in r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty$, para todo $r \geq k$ por tanto $f(x) = f_r(x)$, para todo $r \geq k$. Esto, a su vez, implica

$$\langle a_r^i, x \rangle - b_r^i \leq f_r(x) \leq x_{n+1},$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k_r$ para todo $r \geq k$. Por otro lado, $A_s \subset A_k$, para todo $s \leq k$, de manera que $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ verificará $\langle a, x \rangle - x_{n+1} \leq b$, para todo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{cl} \{ \cup_{r=1}^\infty A_r \} = A$.

Además, como consecuencia de la minimalidad de las representaciones (3.10), tendremos que σ es ajustado. En virtud de la Proposición 0.48 (ii), este sistema es LOP.

La representación σ verifica la propiedad que estamos buscando ya que, para cualquier conjunto compacto no vacío C en \mathbb{R}^n , existirá un $r \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty$, de manera que el número de índices en $T(C)$ será a lo sumo k_r y, por tanto, finito.

Además, debido a que σ es ajustado, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $T(x) \neq \emptyset$, y tendremos que $T(C) \neq \emptyset$.

Demostremos a continuación que, si $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ es una representación de f , tal que $T(C)$ es un conjunto de índices no vacío y finito, para cualquier conjunto compacto no vacío C en \mathbb{R}^n , entonces $\text{epi } f$ es un conjunto cuasipoliédrico. Observemos que, bajo nuestra hipótesis, $T(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea \widehat{C} un polítopo arbitrario de manera que $\widehat{C} \cap \text{epi } f \neq \emptyset$. Consideremos una representación minimal de dicho polítopo

$$\widehat{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle a_i, x \rangle + c_i x_{n+1} \leq b_i, i = 1, 2, \dots, p \right\},$$

y tomemos la proyección de \widehat{C} en el espacio de las n primeras coordenadas

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \widehat{C}, \text{ para algún } x_{n+1} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vamos a demostrar que $\widehat{C} \cap \text{epi } f$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\sigma(\widehat{C}) := \left\{ \begin{array}{l} \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, \quad t \in T(C), \\ \langle a_i, x \rangle + c_i x_{n+1} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{array} \right\}.$$

Como \widehat{C} es compacto, entonces C será también compacto, y por lo tanto $T(C)$ es no vacío y finito. Llegaremos entonces a que $\widehat{C} \cap \text{epi } f$ será un conjunto poliédrico acotado; es decir, un polítopo.

Es evidente que $\widehat{C} \cap \text{epi } f$ está contenido en el conjunto de soluciones de $\sigma(\widehat{C})$, pues es el conjunto de soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, \quad t \in T, \\ \langle a_i, x \rangle + c_i x_{n+1} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{array} \right\},$$

y las desigualdades de $\sigma(\widehat{C})$ pertenecen también a este sistema.

Por otro lado, si $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{n+1} \end{pmatrix}$ es una solución de $\sigma(\widehat{C})$, entonces $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{n+1} \end{pmatrix} \in \widehat{C}$ y, por tanto, $\bar{x} \in C$. Tomando cualquier índice $t_0 \in T(\bar{x}) \subset T(C)$, tendremos que

$$f(\bar{x}) = \langle a_{t_0}, \bar{x} \rangle - b_{t_0}.$$

Dado que $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{n+1} \end{pmatrix}$ satisface la desigualdad asociada con t_0 , tenemos que $\bar{x}_{n+1} \geq \langle a_{t_0}, \bar{x} \rangle - b_{t_0} = f(\bar{x})$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{n+1} \end{pmatrix} \in \tilde{C} \cap \text{epi } f$. ■

Los puntos extremos del epigrafo de una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica pueden ser caracterizados de la siguiente forma:

Proposición 3.5 *Sea f una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica, y consideremos la representación de f*

$$\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \},$$

que verifica que, para todo conjunto compacto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$, $T(C)$ es finito y no vacío. Entonces $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ f(\bar{x}) \end{pmatrix}$ es un punto extremo de $\text{epi } f$ si, y sólo si,

$$\dim \text{aff} \{ a_t, t \in T(\bar{x}) \} = \dim \partial f(\bar{x}) = n. \quad (3.11)$$

Demostración. Sabemos, en virtud de la Proposición 3.4, que esta representación existe. Además, el sistema σ es LOP.

Como $\text{epi } f$ es el conjunto de soluciones de σ , aplicando la Proposición 0.51, tenemos la siguiente equivalencia: $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ f(\bar{x}) \end{pmatrix}$ es un punto extremo de $\text{epi } f$ si, y sólo si,

$$\dim \text{aff cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \end{pmatrix}, t \in T(\bar{x}) \right\} = n + 1,$$

que es equivalente a

$$\dim \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \end{pmatrix}, t \in T(\bar{x}) \right\} = n + 1,$$

y también a

$$\dim \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ 1 \end{pmatrix}, t \in T(\bar{x}) \right\} = n + 1. \quad (3.12)$$

En virtud de la Proposición 0.9, la igualdad (3.12) se verificará si, y sólo si,

$$\dim \text{aff} \{ a_t, t \in T(\bar{x}) \} = n. \quad (3.13)$$

Hemos probado, por tanto, que $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ f(\bar{x}) \end{pmatrix}$ es un punto extremo de $\text{epi } f$ si, y sólo si, se cumple (3.13). Como todo sistema LOP es LFM, a partir de la Proposición 3.2 concluimos que $\dim \text{aff} \{a_t, t \in T(\bar{x})\} = \dim \partial f(\bar{x})$. ■

3.5 Conjugada de una función cuasipoliédrica

Iniciamos esta sección investigando bajo qué condiciones, si f es una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica, su conjugada f^* posee las mismas propiedades. Caracterizaremos, en primer lugar, la finitud de f^* . La Proposición 0.24 establecía que, bajo nuestras hipótesis actuales sobre f , su conjugada es finito-valorada si, y sólo si, f es cofinita.

La Proposición 3.6 presentará, para una función convexa finito-valorada, tres criterios equivalentes a la cofinitud. Uno de ellos, por su propia relevancia, lo presentamos como un lema anterior, aunque señalaremos que se menciona en [17, p. 181] sin demostración.

Recordemos que f es *1-coerciva* si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty. \quad (3.14)$$

Lema 3.1 *Sea f una función convexa y cerrada, definida en \mathbb{R}^n . Entonces f es cofinita si, y sólo si, es 1-coerciva.*

Demostración. Supongamos primero que f es 1-coerciva y que, por lo tanto, (3.14) se cumple. Tomemos cualquier punto $x \in \text{dom } f$ y cualquier $y \neq 0_n$. Como f es cerrada, en virtud de la Proposición 0.23,

$$(f0^+)(y) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda},$$

pero

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \lambda y)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \lambda y)}{\|x + \lambda y\|} \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} x + y \right\| = +\infty$$

y, por lo tanto, $(f0^+)(y) = +\infty$, de manera que f es cofinita.

Recíprocamente, if f fuese cofinita y no se verificara (3.14), existiría una constante $M > 0$, tal que, para todo $r \in \mathbb{N}$, podríamos encontrar un punto $x^r \in \mathbb{R}^n$, con $\|x^r\| > r$, de manera que

$$\frac{f(x^r)}{\|x^r\|} \leq M. \quad (3.15)$$

Por otro lado, al cumplirse que $f^*(0_n) \geq \langle 0_n, x \rangle - f(x)$, para todo $x \in \text{dom } f$, obtenemos

$$f(x^r) \geq -f^*(0_n),$$

y, en consecuencia,

$$M \geq \frac{f(x^r)}{\|x^r\|} \geq -\frac{f^*(0_n)}{\|x^r\|} \geq \min\{0, -f^*(0_n)\},$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado, pues, que la sucesión de (3.15) también está acotada inferiormente, pues $0_n \in \text{dom } f^* = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(x^r)}{\|x^r\|} = \eta,$$

y además

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{x^r}{\|x^r\|} = y, \quad \|y\| = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x^r\|} \begin{pmatrix} x^r \\ f(x^r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$$

y, en virtud de la Proposición 0.5,

$$\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \in 0^+(\text{epi } f) = \text{epi } (f0^+).$$

De esta manera hemos obtenido

$$(f0^+)(y) \leq \eta, \quad \text{con } y \neq 0_n,$$

contradiciendo el hecho de que f es cofinita. ■

Proposición 3.6 Dada la función, definida en \mathbb{R}^n ,

$$f(x) := \sup \{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T \},$$

y suponiendo que sea propia, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) f es cofinita;
- (ii) $\text{conv} \{a_t, t \in T\} = \mathbb{R}^n$;
- (iii) f es 1-coerciva.

Además, si f es finito-valorada, podemos añadir a la lista anterior la siguiente condición:

- (iv) $\text{conv} \partial f(\mathbb{R}^n) = \text{conv} \partial f^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Demostración. Primero, probaremos que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii), puesto que la equivalencia (iii) \Leftrightarrow (i) fue probada en el Lema 3.1. A continuación, demostraremos que, si f es finito-valorada, entonces (i)-(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii).

(i) \Rightarrow (ii) Aplicando la Proposición 0.35, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$(f0^+)(y) = \sup \{ (f_t0^+)(y), t \in T \},$$

donde $f_t(x) := \langle a_t, x \rangle - b_t$, para todo $t \in T$. Ahora, de acuerdo con la Proposición 0.23,

$$(f_t0^+)(y) = \sup \{ f_t(x+y) - f_t(x), x \in \mathbb{R}^n \} = \langle a_t, y \rangle,$$

y por lo tanto

$$(f0^+)(y) = \sup \{ \langle a_t, y \rangle, t \in T \}.$$

Definamos $A := \text{conv} \{a_t, t \in T\}$. Entonces

$$\delta^*(y | \text{cl } A) = \delta^*(y | A) = \sup \{ \langle a, y \rangle, a \in A \} = \sup \{ \langle a_t, y \rangle, t \in T \},$$

y obtenemos

$$(f0^+)(y) = \delta^*(y | \text{cl } A).$$

Como f es cofinita, tendremos que $\delta^*(y | \text{cl } A) = +\infty$, para todo $y \neq 0_n$, y esto implica

que, para un punto $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\delta(x \mid \text{cl } A) &= \delta^{**}(x \mid \text{cl } A) \\ &= \sup \{ \langle x, y \rangle - \delta^*(y \mid \text{cl } A), y \in \text{dom } \delta^*(\cdot \mid \text{cl } A) \} \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues $\text{dom } \delta^*(\cdot \mid \text{cl } A) = \{0_n\}$, siendo además

$$\delta^*(0_n \mid \text{cl } A) = (f0^+)(0_n) = 0.$$

Entonces $\text{cl } A = A = \mathbb{R}^n$, en virtud de la Proposición 0.1.

(ii) \Rightarrow (iii) Procederemos por reducción al absurdo, suponiendo que la función f no es 1-coerciva. Entonces existirá una constante $M > 0$, tal que, para todo $r \in \mathbb{N}$, podrá encontrarse un punto $x^r \in \mathbb{R}^n$, con $\|x^r\| > r$, de manera que

$$\frac{f(x^r)}{\|x^r\|} \leq M.$$

Para cualquier índice $t \in T$, tenemos

$$\langle a_t, x^r \rangle - b_t \leq f(x^r) \leq M \|x^r\|. \quad (3.16)$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{x^r}{\|x^r\|} = \bar{u}, \quad \|\bar{u}\| = 1.$$

Entonces, de (3.16), obtenemos que, para todo $r \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle a_t, \frac{x^r}{\|x^r\|} \right\rangle - \frac{b_t}{\|x^r\|} \leq \frac{f(x^r)}{\|x^r\|} \leq M,$$

y tomando límites cuando r tiende a ∞

$$\langle a_t, \bar{u} \rangle \leq M,$$

y esto se cumple para todo $t \in T$. Como $\text{conv} \{a_t, t \in T\} = \mathbb{R}^n$, concluimos que, para todo $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle a, \bar{u} \rangle \leq M,$$

y esto supone una contradicción (tómese, por ejemplo, $a = (M + 1)\bar{u}$).

Supongamos ahora que f es finito-valorada.

(i)-(iii) \Rightarrow (iv) En virtud de la Proposición 0.37, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial f(x) \supset \text{cl conv} \{a_t, t \in T(x)\}.$$

Evidentemente, para que (ii) se verifique, T no puede ser finito.

Vamos a considerar dos casos:

Caso 1. Si $T(\mathbb{R}^n) = T$, entonces $\{a_t, t \in T\} \subset \partial f(\mathbb{R}^n)$ y, por (ii),

$$\mathbb{R}^n = \text{conv} \{a_t, t \in T\} \subset \text{conv} \partial f(\mathbb{R}^n).$$

Caso 2. Si $T \setminus T(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, consideremos la representación de f

$$\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}.$$

Denotamos por D al conjunto (posiblemente vacío) de vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $\langle a, x \rangle - x_{n+1} \leq b$ es una relación consecuente de σ , y además el conjunto solución de

$$\sigma \cup \{\langle a, x \rangle - x_{n+1} = b\}$$

es una cara expuesta no vacía de $\text{epi } f$.

Definimos la función convexa

$$g(x) := \sup \left\{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T(\mathbb{R}^n); \langle a, x \rangle - b, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D \right\}.$$

Vamos a probar que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = g(x)$.

Primero, es evidente que $f(x) \geq g(x)$. Tomemos ahora un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. En el caso de que $f(\bar{x}) = \langle a_t, \bar{x} \rangle - b_t$, para algún índice $t \in T$, entonces $t \in T(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto $f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$.

Alternativamente, si

$$f(\bar{x}) > \langle a_t, \bar{x} \rangle - b_t, \tag{3.17}$$

para todo $t \in T$, podemos encontrar una sucesión $\{t_r\}_{r=1}^{\infty} \subset T$ tal que

$$f(\bar{x}) - \frac{1}{r} < \langle a_{t_r}, \bar{x} \rangle - b_{t_r} < f(\bar{x}), \tag{3.18}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$.

Si la sucesión $\left\{ \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\}_{r=1}^{\infty}$ tuviera un número infinito de términos repetidos, llamémosles $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}$, con $s \in T$, podríamos obtener una subsucesión convergente, evidentemente, a $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}$, y tomando límites en (3.18), restringiéndonos a la subsucesión, tendremos que

$$\langle a_s, \bar{x} \rangle - b_s = f(\bar{x}),$$

lo que contradice (3.17).

Podemos, por tanto considerar, sin pérdida de generalidad, que

$$\begin{pmatrix} c \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\|^{-1} \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix},$$

con $\beta \leq 0$. De esta manera, se obtiene que $\langle c, x \rangle + \beta x_{n+1} \leq \gamma$ es una relación consecuente de σ .

Además, a partir de (3.18), tenemos que

$$-\frac{1}{r} < \langle a_{t_r}, \bar{x} \rangle - b_{t_r} - f(\bar{x}) < 0,$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. Entonces

$$-\frac{1}{r \left\| \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\|} < \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x} \\ f(\bar{x}) \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\|} < 0. \quad (3.19)$$

En el caso de que $\left\{ \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\}_{r=1}^{\infty}$ estuviera acotada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -1 \\ \delta \end{pmatrix},$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} d \\ -1 \\ \delta \end{pmatrix} \right\| > 0.$$

Si no estuviera acotada, es decir, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} a_{t_r} \\ -1 \\ b_{t_r} \end{pmatrix} \right\| = +\infty$, tendríamos que, en ambos casos, tomando límites en (3.19),

$$\langle c, \bar{x} \rangle + \beta f(\bar{x}) - \gamma = 0, \quad (3.20)$$

de manera que el conjunto solución del sistema

$$\sigma \cup \{ \langle c, x \rangle + \beta x_{n+1} = \gamma \}$$

es una cara expuesta no vacía de $\text{epi } f$.

Vamos a demostrar que $\beta < 0$, por reducción al absurdo. Si ocurriera que $\beta = 0$, obtendríamos que $\langle c, x \rangle \leq \gamma$ sería una relación consecuente de σ , y, por tanto, tendría que ser verificada para todo $x \in \mathbb{R}^n$, lo que obligaría a que $c = 0_n$ y, de acuerdo con (3.20), necesariamente $\gamma = 0$. Esto representa una contradicción, pues el vector

$\begin{pmatrix} c \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tiene norma unitaria. Debe ser, por tanto, $\beta < 0$, y dividiendo por $|\beta|$ en (3.20), obtenemos

$$\langle a, \bar{x} \rangle - b = f(\bar{x}),$$

siendo además $\langle a, x \rangle - x_{n+1} \leq b$ una relación consecuente de σ , lo que implica que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D$. Hemos llegado, pues, a que $f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$.

Como f es 1-coerciva, g será también 1-coerciva y, teniendo en cuenta que (iii) implica (ii), concluimos que

$$\text{conv} \left(\{ a_t, t \in T(\mathbb{R}^n), \} \cup \left\{ a, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D \right\} \right) = \mathbb{R}^n.$$

Pero la función g verifica la condición del Caso 1, y por tanto $\text{conv } \partial f(\mathbb{R}^n) = \text{conv } \partial g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Ahora, como f es finito-valorada y cofinita, f^* será también finito-valorada y cofinita, con

$$f^*(u) = \sup \{ \langle u, x \rangle - f(x), x \in \mathbb{R}^n \},$$

con lo que podemos aplicar lo anterior para afirmar que $\text{conv } \partial f^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

(iv) \Rightarrow (ii) Aplicando la Proposición 0.39, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \text{cl conv } \{a_t, t \in T_\delta(x)\},$$

donde

$$T_\delta(x) = \{t \in T \mid \langle a_t, x \rangle - b_t \geq f(x) - \delta\}.$$

Dado que $\{a_t, t \in T_\delta(x)\} \subset \{a_t, t \in T\}$, para todo escalar $\delta > 0$, concluimos que $\partial f(x) \subset \text{cl conv } \{a_t, t \in T\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y por lo tanto

$$\mathbb{R}^n = \text{conv } \partial f(\mathbb{R}^n) \subset \text{cl conv } \{a_t, t \in T\},$$

de manera que obtenemos $\text{conv } \{a_t, t \in T\} = \mathbb{R}^n$. ■

A continuación, presentamos el primer resultado sobre conjugación.

Proposición 3.7 *Sea f una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica que además es cofinita. Entonces f^* posee las mismas propiedades.*

Demostración. La finitud y la cofinitud de f^* son inmediatas, pues $\text{dom } f = \text{dom } f^{**}$. Probaremos, por lo tanto, que f^* es una función cuasipoliédrica.

Sabemos que $f^*(u) = \sup \{ \langle u, x \rangle - f(x), x \in \mathbb{R}^n \}$. Ahora bien, para cada vector $u \in \mathbb{R}^n$, al ser $\text{dom } f^* = \mathbb{R}^n$, y en virtud de la Proposición 0.26, se cumplirá que $\partial f^*(u) \neq \emptyset$, siendo, además, un conjunto compacto. Vamos a considerar, para cada $u \in \mathbb{R}^n$, el conjunto

$$F(u) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \partial f^*(u) \right\}.$$

Al ser $\partial f^*(u)$ un conjunto compacto, y f una función continua en todo \mathbb{R}^n , $F(u)$ es un conjunto compacto, y por lo tanto, acotado. Podemos también expresarlo

$$F(u) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, x \rangle - x_{n+1} = f^*(u), \left\| \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq M \right\} \cap \text{epi } f,$$

pues, si $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{epi } f$ verifica que $\langle u, x \rangle - x_{n+1} = f^*(u)$, entonces $\langle u, x \rangle \geq f(x) + f^*(u)$, y, de acuerdo con la Proposición 0.29, $x \in \partial f^*(u)$ y, además, $x_{n+1} = f(x)$. De esta manera, hemos expresado $F(u)$ como la intersección de un polítopo y un conjunto cuasipoliédrico, y por lo tanto, es un polítopo. En virtud de la Proposición 0.17 en conjunción con la Proposición 0.15 (un polítopo no tiene direcciones extremas), $F(u)$ puede ser expresado como la envoltura convexa del conjunto (finito) de sus puntos extremos

$$F(u) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} x_j(u) \\ f(x_j(u)) \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, k(u) \right\}.$$

Por otro lado, el hiperplano $H_u := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, x \rangle - x_{n+1} = f^*(u) \right\}$ es un hiperplano no trivial soporte a $\text{epi } f$ y, dado que $F(u) = H_u \cap \text{epi } f$, obtenemos que $F(u)$ es una cara expuesta de $\text{epi } f$. Así, todo punto extremo de $F(u)$ será un punto extremo de $\text{epi } f$, de manera que hemos probado que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, existe cierto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^*(u) = \langle u, x \rangle - f(x)$ y además $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ es un punto extremo de $\text{epi } f$.

Vamos a denotar por

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \text{ es un punto extremo de } \text{epi } f \right\}.$$

Podemos por tanto expresar

$$f^*(u) = \sup \{ \langle u, x \rangle - f(x), x \in E \},$$

de manera que el sistema

$$\sigma^* := \{ \langle u, x \rangle - u_{n+1} \leq f(x), x \in E \} \tag{3.21}$$

es un representación de f^* . Además, para todo vector $u \in \mathbb{R}^n$,

$$T^*(u) = \{ x \in E \mid \langle u, x \rangle - f(x) = f^*(u) \} \neq \emptyset.$$

Vamos a demostrar que f^* es cuasipoliédrica a partir de la Proposición 3.4, que aplicaremos a la representación (3.21) de f^* .

Sea C un conjunto compacto no vacío en \mathbb{R}^n , y $T^*(C) = \cup \{T^*(u), u \in C\}$. Hemos demostrado ya que $T^*(C) \neq \emptyset$. Veamos ahora que es finito.

Procedamos por reducción al absurdo. Suponiendo que $T^*(C)$ no fuera finito, existiría, para todo $r \in \mathbb{N}$, $u^r \in C$ y $x^r \in T^*(u^r)$ tales que

$$f^*(u^r) = \langle u^r, x^r \rangle - f(x^r), \quad (3.22)$$

siendo $\begin{pmatrix} x^r \\ f(x^r) \end{pmatrix}$ un punto extremo de $\text{epi } f$.

En el caso de que $\left\{ \begin{pmatrix} x^r \\ f(x^r) \end{pmatrix} \right\}_{r=1}^{\infty}$ fuera una sucesión convergente de puntos extremos (no repetidos, pues la sucesión $\{(x^r)\}_{r=1}^{\infty}$ tiene infinitos términos no repetidos) de $\text{epi } f$, con $\lim_{r \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x^r \\ f(x^r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ f(\bar{x}) \end{pmatrix}$, entonces el polítopo

$$\left\{ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ f(\bar{x}) \end{pmatrix} + \text{cl } \mathbb{B}_{\infty} \right\} \cap \text{epi } f$$

tendría un número infinito de puntos extremos, y esto es imposible. Podemos por tanto afirmar que los puntos extremos están aislados, y por lo tanto, $\lim_{r \rightarrow \infty} \|x^r\| = +\infty$.

Como $\{u^r\}_{r=1}^{\infty} \subset C$, y éste es un conjunto compacto, tomando una subsucesión, si fuera necesario, tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u^r = \bar{u} \in C,$$

y además

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{x^r}{\|x^r\|} = y.$$

A partir de (3.22), obtenemos

$$\langle \bar{u}, y \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle u^r, \frac{x^r}{\|x^r\|} \right\rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f^*(u^r)}{\|x^r\|} + \frac{f(x^r)}{\|x^r\|}. \quad (3.23)$$

Ahora bien, al ser f^* continua en \mathbb{R}^n , tendremos que $\lim_{r \rightarrow \infty} f^*(u^r) = f^*(\bar{u})$ y, por otro lado, como f es cofinita, en virtud del Lema 3.1, también es 1-coerciva, de manera que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(x^r)}{\|x^r\|} = +\infty$. Así pues, tomando límites en (3.23), llegamos a que $\langle \bar{u}, y \rangle = +\infty$. Por lo tanto $T^*(C)$ debe ser finito. ■

El siguiente lema, en conjunción con la proposición anterior, permite obtener una

representación específica de toda función convexa finito-valorada cuasipoliédrica y cofinita.

Lema 3.2 *Sea f es una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica y cofinita. Entonces $\text{epi } f$ tiene un número infinito numerable de puntos extremos.*

Demostración. Al ser la función f cofinita, se verificará que $(f0^+)(y) = +\infty$, para todo $y \neq 0_n$, y además, aplicando la Proposición 0.23,

$$(f0^+)(0_n) = \sup \{f(x + 0_n) - f(x), x \in \mathbb{R}^n\} = 0.$$

En consecuencia, obtenemos que $\text{epi } (f0^+) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \geq 0 \right\} = 0^+(\text{epi } f)$. Podemos

concluir, por tanto, que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ es la única dirección de recesión de $\text{epi } f$. Además,

$$\text{lin}(\text{epi } f) = (0^+(\text{epi } f)) \cap (-0^+(\text{epi } f)) = 0_{n+1},$$

y, por lo tanto, $\text{epi } f$ es un conjunto convexo apuntado.

Dado que toda dirección extrema de $\text{epi } f$ es una dirección extrema de $0^+(\text{epi } f)$, y claramente $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ no puede ser una dirección extrema de $\text{epi } f$, se deriva que $\text{epi } f$ no puede tener direcciones extremas, y en virtud de la Proposición 0.15, $\text{epi } f$ es la envoltura convexa del conjunto de sus puntos extremos. Ello ya nos asegura que dicho conjunto debe tener cardinal infinito. Demostraremos que además es numerable.

Si consideramos la sucesión de polítopos $\{r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty\}_{r=1}^\infty$, en \mathbb{R}^{n+1} , tendremos que $(r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty) \cap \text{epi } f$ es a su vez un polítopo, para todo $r \in \mathbb{N}$. Esto implica que cada uno de ellos tiene un número finito de puntos extremos. Como todo punto extremo de $\text{epi } f$ estará en algún polítopo $r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty$, será a su vez un punto extremo de $(r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty) \cap \text{epi } f$. Podemos concluir que el conjunto de puntos extremos de $\text{epi } f$ estará contenido en la unión de todos los conjuntos de puntos extremos de los polítopos $(r \text{ cl } \mathbb{B}_\infty) \cap \text{epi } f$, para todo $r \in \mathbb{N}$, y esta unión tiene cardinal numerable. ■

Corolario 3.1 *Toda función convexa finito-valorada cuasipoliédrica y cofinita f puede representarse mediante el sistema*

$$\sigma := \{\langle a^r, x \rangle - x_{n+1} \leq b_r, r \in \mathbb{N}\}, \quad (3.24)$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} a^r \\ b_r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{N} \right\}$ es el conjunto de puntos extremos de $\text{epi } f^*$, siendo $b_r = f^*(a^r)$, $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. En virtud de la Proposición 3.7, f^* es una función cuasipoliédrica finito-valorada y cofinita y, aplicando el Lema 3.2, el conjunto de los puntos extremos de su epigrafo tiene cardinal infinito numerable. Denotemos dicho conjunto por

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^r \\ b_r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{N} \right\}, \text{ con } b_r = f^*(a^r).$$

Como consecuencia de la finitud de f^* y de la igualdad $f = f^{**}$, tendremos que

$$f(x) = \sup \{ \langle u, x \rangle - f^*(u), u \in \mathbb{R}^n \},$$

de manera que, claramente, $f(x) \geq \sup \{ \langle a^r, x \rangle - b_r, r \in \mathbb{N} \}$.

Por otro lado, podemos utilizar un argumento similar al seguido en la demostración de la Proposición 3.7, reemplazando f por su conjugada, y concluir que, para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$, existe un vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle u, x \rangle - f^*(u)$, siendo además $\begin{pmatrix} u \\ f^*(u) \end{pmatrix}$ un punto extremo de $\text{epi } f^*$, es decir, $\begin{pmatrix} a^{r_0} \\ b_{r_0} \end{pmatrix}$ para algún $r_0 \in \mathbb{N}$, y verificándose que $f(x) = \langle a^{r_0}, x \rangle - b_{r_0}$. Por lo tanto, σ en (3.24) es una representación de f . ■

Observación 3.2 Aplicando el corolario anterior a la conjugada de una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica y cofinita, obtenemos que, denotando por

$\left\{ \begin{pmatrix} c^r \\ d_r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{N} \right\}$ al conjunto de punto extremos de $\text{epi } f$, donde $d_r = f(c^r)$, podemos

expresar f^* de la forma:

$$f^*(u) = \sup \{ \langle c^r, u \rangle - d_r, r \in \mathbb{N} \},$$

de manera que el sistema asociado

$$\sigma^* := \{ \langle c^r, x \rangle - x_{n+1} \leq d_r, r \in \mathbb{N} \}, \quad (3.25)$$

será una representación de f^* . Además, (3.24) y (3.25) verificarán que para cualquier conjunto no vacío compacto $C \subset \mathbb{R}^n$, $T(C)$ y $T^*(C)$ son finitos y no vacíos.

Ejemplo 3.1 Sea $f(x) := \sup \{(2r + 1)x - (r^2 + r), r \in \mathbb{Z}\}$. Es fácil demostrar que f es finito-valorada cofinita y cuasipoliédrica. El conjunto de los puntos extremos de $\text{epi } f$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} r \\ r^2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por lo tanto, su conjugada puede expresarse de la forma

$$f^*(u) = \sup \{ru - r^2, r \in \mathbb{Z}\},$$

y el conjunto de los puntos extremos de $\text{epi } f^*$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2r + 1 \\ r^2 + r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3.6 Operaciones con funciones cuasipoliédricas

La propiedad para una función convexa de ser poliédrica se conserva bajo algunas importantes operaciones que resumimos en la siguiente proposición. El apartado (a) de esta proposición es un resultado auxiliar que utilizaremos en esta sección.

Proposición 3.8 *Sea f una función convexa poliédrica en \mathbb{R}^n y C un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^n . Se verifica:*

- (a) [26, Th. 19.3] *Para cualquier transformación lineal A de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , el conjunto convexo $AC := \{Ax \mid x \in C\}$ es poliédrico en \mathbb{R}^m . Además, si D es un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^m , $A^{-1}D := \{x \mid Ax \in D\}$ es un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^n .*
- (b) [26, Cor. 19.3.1] *Para cualquier transformación lineal A de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , $(Af)(y) := \inf \{f(x) \mid Ax = y\}$ es una función convexa poliédrica en \mathbb{R}^m . Además, si g es una función convexa poliédrica en \mathbb{R}^m , $(gA)(y) := g(Ay)$ es una función convexa poliédrica en \mathbb{R}^n .*
- (c) [26, Th. 19.4] *Si f es propia y h es otra función convexa propia poliédrica en \mathbb{R}^n , entonces $f + h$ es poliédrica.*

(d) [26, Cor. 19.5.1] Si f es propia, para todo escalar $\lambda > 0$, $(f\lambda)(x) := \lambda f(\lambda^{-1}x)$ es una la función convexa poliédrica, así como $f0^+$.

Estudiemos el efecto de la aplicación de las operaciones que aparecen en la Proposición 3.8 sobre las funciones convexas finito-valoradas y cuasipoliédricas. Algunos de los resultados se derivan de la siguiente proposición.

Proposición 3.9 Sea A una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , donde $m \geq n$. Entonces el conjunto convexo en \mathbb{R}^m

$$AC = \{Ax \mid x \in C\}$$

es cuasipoliédrico, para cada conjunto convexo cuasipoliédrico C en \mathbb{R}^n si, y sólo si, o bien $Ax = 0_m$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o bien $\ker A = \{0_n\}$. Además, si esta última condición se cumple, el conjunto convexo en \mathbb{R}^n

$$A^{-1}D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in D\},$$

siempre que no sea vacío, es cuasipoliédrico, para cada conjunto convexo cuasipoliédrico D en \mathbb{R}^m .

Demostración. Si $Ax = 0_m$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, AC se reduce a un punto, de manera que, trivialmente, es un conjunto convexo cuasipoliédrico. Por lo tanto, vamos a suponer que $\ker A = \{0_n\}$, en cuyo caso A es una aplicación biyectiva entre \mathbb{R}^n y $A\mathbb{R}^n$.

Sea P un polítopo en \mathbb{R}^m , tal que $(AC) \cap P \neq \emptyset$. Demostraremos que $(AC) \cap P$ es un polítopo. Como está acotado, será suficiente probar que es un conjunto poliédrico en \mathbb{R}^m .

La Proposición 3.8 (a) garantiza que $A^{-1}P$ es un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^n . Por otro lado, puesto que $C \cap (A^{-1}P) = A^{-1}((AC) \cap P) \neq \emptyset$, tendremos que $A^{-1}P \neq \emptyset$, y la Proposición 0.7 en conjunción con la hipótesis $\ker A = \{0_n\}$, nos conduce a que

$$0^+(A^{-1}P) = A^{-1}(0^+P) = A^{-1}(0_m) = 0_n.$$

Podemos, por tanto, concluir que $A^{-1}P$ es un polítopo en \mathbb{R}^n , y, en consecuencia, $C \cap (A^{-1}P)$ es un polítopo en \mathbb{R}^n . De nuevo aplicando la Proposición 3.8 (a),

$A(C \cap (A^{-1}P))$ es un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^m . Además,

$$\begin{aligned} A(C \cap (A^{-1}P)) &= (AC) \cap A(A^{-1}P) \\ &= (AC) \cap A(A^{-1}(P \cap A\mathbb{R}^n)) \\ &= (AC) \cap (P \cap A\mathbb{R}^n) \\ &= (AC) \cap P. \end{aligned}$$

De esta manera, hemos llegado a que $(AC) \cap P$ es un polítopo en \mathbb{R}^m .

A continuación, procedemos a probar el recíproco. Supongamos, por tanto, que AC es cuasipoliédrico, para todo conjunto convexo cuasipoliédrico C .

Si $Ax \neq 0_m$, para algún $x \in \mathbb{R}^n$, y además $\ker A \neq \{0_n\}$, podemos elegir dos vectores $u \in \ker A$ y $v \in \mathbb{R}^n \setminus \ker A$, tales que $\|u\| = \|v\| = 1$. Vamos a considerar el conjunto numerable

$$S := \left\{ s^k = ku + \frac{1}{k}v, k \in \mathbb{N} \right\},$$

y definamos $C := \text{conv } S + \text{cone } \{u\}$. En el subespacio vectorial $L := \text{span } \{u, v\}$, cada punto podrá expresarse en términos de sus coordenadas respecto de la base $\{u, v\}$.

Así, por ejemplo, $s^k \equiv \begin{pmatrix} k \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Primero, probaremos que C es cerrado. Sea $x \in \text{cl } C$, tal que $x = \lim_{r \rightarrow \infty} x^r$, donde $x^r \in C$ viene expresado por sus coordenadas respecto de $\{u, v\}$, para todo $r \in \mathbb{N}$. En virtud del Teorema de Carathéodory, existirán tres sucesiones, en \mathbb{N} , $\{k_i^r\}_{r=1}^{\infty}$, $i \in I = \{1, 2, 3\}$, tales que, si $x^r = \begin{pmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{pmatrix}$ para $r \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$x_1^r \geq \sum_{i \in I} \lambda_i^r k_i^r, \quad (3.26)$$

$$x_2^r = \sum_{i \in I} \lambda_i^r \frac{1}{k_i^r}, \quad (3.27)$$

donde $\sum_{i \in I} \lambda_i^r = 1$ y $\lambda_i^r \geq 0$, para todo $i \in I$.

Por otro lado, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_i^r = \lambda_i, \quad i \in I, \quad (3.28)$$

donde $\lambda_i \geq 0$, para todo $i \in I$ y además $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Consideremos el conjunto de índices

$$J := \{i \in I \mid \lambda_i > 0\}.$$

Dado que la sucesión $\{x_1^r\}_{r=1}^\infty$ es convergente (y, consecuentemente, acotada), resulta evidente a partir de (3.26) y (3.28) que, para todo $i \in J$, la sucesión $\{k_i^r\}_{r=1}^\infty$ está acotada. Así pues, tomando subsucesiones adecuadas, que denotaremos de la misma forma, podemos escribir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} k_i^r = k_i, \quad i \in J.$$

Esto implica que, a partir de (3.26),

$$x_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} x_1^r \geq \sum_{i \in J} \lambda_i k_i; \quad (3.29)$$

y además, a partir de (3.27),

$$\begin{aligned} x_2 &= \lim_{r \rightarrow \infty} x_2^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i \frac{1}{k_i^r} + \sum_{i \notin J} \lambda_i \frac{1}{k_i^r} \right\} \\ &= \sum_{i \in J} \lambda_i \frac{1}{k_i} + \limsup_{r \rightarrow \infty} \sum_{i \notin J} \lambda_i \frac{1}{k_i^r}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sea $\limsup_{r \rightarrow \infty} \sum_{i \notin J} \lambda_i \frac{1}{k_i^r} = \alpha \geq 0$ y tomemos una subsucesión verificando

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \notin J} \lambda_i^{r_l} \frac{1}{k_i^{r_l}} = \alpha.$$

Como $\frac{1}{k_i^{r_l}} \leq 1$, para todo $l \in \mathbb{N}$, tenemos

$$0 \leq \alpha \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \notin J} \lambda_i^{r_l} = 0.$$

Reemplazando en (3.30) obtenemos

$$x_2 = \sum_{i \in J} \lambda_i \frac{1}{k_i}, \quad (3.31)$$

de manera que, de acuerdo con (3.29) y (3.31), $x \in C$ y C es cerrado. En virtud de la Proposición 0.14, todo punto extremo de C es un punto de S . De hecho, S es el conjunto de los puntos extremos de C , puesto que la función $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ es estrictamente convexa en el intervalo $]0, +\infty[$.

Además, para cualquier par $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $k_1 \neq k_2$,

$$\begin{aligned} \|s^{k_1} - s^{k_2}\| &= \left\| (k_1 - k_2)u - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)v \right\| \\ &\geq |k_1 - k_2| - \left| \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

y los puntos extremos de C están aislados. La Proposición 0.21 nos permite concluir que C es cuasipoliédrico.

Sin embargo, su conjunto imagen

$$\begin{aligned} AC &= A(\text{conv } S + \text{cone } \{u\}) \\ &= A(\text{conv } S) \\ &= \text{conv } \left\{ \frac{1}{k}Av, k \in \mathbb{N} \right\} \\ &=]0, 1] Av, \end{aligned}$$

ni siquiera es cerrado, puesto que $Av \neq 0_m$.

Ahora, supongamos que D un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^m , y sea \hat{P} un polítopo en \mathbb{R}^n , tal que $(A^{-1}D) \cap \hat{P} \neq \emptyset$. De nuevo probaremos que es un conjunto poliédrico en \mathbb{R}^n .

Aplicando la Proposición 3.8 (a), $A\hat{P}$ es un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^m , y además es compacto. De manera que $D \cap (A\hat{P})$ es un polítopo en \mathbb{R}^m , y $A^{-1}(D \cap (A\hat{P}))$ es un conjunto convexo poliédrico en \mathbb{R}^n , verificándose $A^{-1}(D \cap (A\hat{P})) = (A^{-1}D) \cap \hat{P}$. ■

Observación 3.3 Si C es un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^n , su conjunto de puntos extremos no tiene puntos de acumulación, en virtud de la Proposición 0.49 (ii). Cuando se aplica una transformación lineal A , verificando $\ker A \not\supseteq \{0_n\}$, puede ocurrir que aparezca una sucesión de puntos extremos convergente en el conjunto AC .

Ejemplo 3.2 Vamos a considerar el conjunto, en \mathbb{R}^3 ,

$$S := \{s^k, k \in \mathbb{N}\}, \quad \text{con } s^k := \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k^2 \\ k \end{pmatrix},$$

y el vector $u := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Definamos $C := \text{conv } S + \text{cone } \{u\}$. Utilizando un argumento

similar al de la prueba del recíproco de la Proposición 3.9, podemos afirmar que C es un conjunto convexo cerrado, cuyo conjunto de puntos extremos es S .

A continuación, demostraremos que C es un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^3 . Aunque la Proposición 0.21 puede utilizarse nuevamente para tal fin, vamos a dar una prueba alternativa, basada en el estudio de las caras de C .

La Proposición 0.13 nos garantiza que si C' es una cara no vacía de C , y S' es el conjunto de los puntos de S que pertenecen a C' , entonces $C' = \text{conv } S' + \text{cone } \{u\}$, en el caso de que u sea una dirección de recesión de C' , y en otro caso, $C' = \text{conv } S'$. Además, de acuerdo con la Proposición 0.12, si C' es distinta del propio conjunto C , entonces $\dim C' < \dim C$.

A continuación probaremos que cada cuatro puntos diferentes en S forman un conjunto afinmente independiente. A tal efecto tomemos $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N}$, tales que, $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$. En virtud de la Proposición 0.9, probaremos que $\begin{pmatrix} s^{k_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s^{k_2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s^{k_3} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} s^{k_4} \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^4 , calculando el determinante formado por estos cuatro vectores y viendo que no puede ser cero.

$$\det \begin{pmatrix} s^{k_1} & s^{k_2} & s^{k_3} & s^{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/k_1 & 1/k_2 & 1/k_3 & 1/k_4 \\ 1/k_1^2 & 1/k_2^2 & 1/k_3^2 & 1/k_4^2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la i -ésima columna por k_i^2 , para cada $i = 1, 2, 3, 4$, e intercambiando las filas primera y segunda, así como las filas tercera y cuarta, obtenemos que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} s^{k_1} & s^{k_2} & s^{k_3} & s^{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{(k_1 k_2 k_3 k_4)^2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & k_4^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(k_1 k_2 k_3 k_4)^2} V(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned}$$

donde $V(k_1, k_2, k_3, k_4)$ es el determinante de la matriz de Vandermonde asociada a k_1, k_2, k_3, k_4 . Tenemos, por tanto, que

$$\det \begin{pmatrix} s^{k_1} & s^{k_2} & s^{k_3} & s^{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_1 k_2 k_3 k_4)^2} \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (k_i - k_j) \neq 0.$$

Esto, a su vez, prueba que $\dim C = 3$.

Por lo tanto, si C' es una cara no vacía propia de C , y denotamos por $J := \{1, \dots, \dim C' + 1\}$, tenemos las siguientes posibilidades:

- (1) $C' = \text{conv} \{s^{k_j}, j \in J\}$, en el caso de que $u \notin 0^+(C')$;
- (2) $C' = \text{conv} \{s^{k_j}, j \in J - 1\} + \text{cone} \{u\}$, si $u \in 0^+(C')$.

Observemos que en el caso (2), $\dim C' \geq 1$ y el conjunto $\{u, s^{k_1}, s^{k_2}\}$ es afinmente independiente, para todo par $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 \neq k_2$.

Podemos, por tanto, concluir, aplicando la Proposición 0.18 para el caso (2), que todas las caras de C son poliédricas. Este hecho nos ayudará a demostrar que, si P es un polítopo, tal que $C \cap P \neq \emptyset$, este conjunto es un polítopo de nuevo.

Si denotamos por $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 , para todo par $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $k_1 \neq k_2$,

$$\begin{aligned} \|s^{k_1} - s^{k_2}\| &= \left\| (k_1 - k_2)e_3 - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)e_1 - \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2}\right)e_2 \right\| \\ &\geq |k_1 - k_2| - \left| \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right| - \left| \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right| \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

y los puntos extremos de C están aislados. De manera que P sólo cortará a un número finito de caras de C , y la intersección de P con cada una de esas caras es un polítopo. En consecuencia, $P \cap \text{bd } C$ es una unión finita de polítopos, y por lo tanto $C \cap P$ es un polítopo.

Concluimos que C es un conjunto convexo cuasipoliédrico, siendo S el conjunto de sus puntos (aislados) extremos. Consideremos ahora la proyección de C en las dos primeras coordenadas. Su imagen es el conjunto

$$\tilde{C} := \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N} \right\},$$

el cuál, además del hecho de que no es cerrado, pues $0_2 \in \text{cl } \tilde{C} \setminus \tilde{C}$, tiene una sucesión convergente de puntos extremos, que provienen de la proyección de S .

Corolario 3.2 Sea A una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , donde $m \geq n$ y $\ker A = \{0_n\}$. Si g es una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica en \mathbb{R}^m , entonces la función convexa gA en \mathbb{R}^n verifica las mismas propiedades.

Demostración. Dado que

$$(gA)(x) = g(Ax) < +\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función convexa gA es finito-valorada.

Por otro lado, si consideramos la transformación lineal, de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R}^{m+1} ,

$$\bar{A} : \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Ax \\ x_{n+1} \end{pmatrix},$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, se cumple $\ker \bar{A} = \{0_{n+1}\}$ y, además,

$$(\bar{A})^{-1}(\text{epi } g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g(Ax) \leq x_{n+1} \right\} = \text{epi}(gA).$$

Concluimos que gA es cuasipoliédrica, en virtud de la Proposición 3.9. ■

Corolario 3.3 Sea A una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n no singular. Si f es una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica en \mathbb{R}^n , entonces la función convexa Af cumple las mismas propiedades.

Demostración. Para todo $y \in \mathbb{R}^m$ tenemos que

$$(Af)(y) = \inf \{f(x) \mid Ax = y\} = \inf \{f(x) \mid x \in A^{-1}\{y\}\}.$$

Al ser A una biyección, el conjunto $A^{-1}\{y\}$ es no vacío y unitario, de manera que $(Af)(y) < +\infty$, verificándose además que $(Af)(y) = f(A^{-1}\{y\})$.

Si consideramos de nuevo la transformación lineal del Corolario 3.2, particularizada al caso $n = m$, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{A}(\text{epi } f) &= \left\{ \begin{pmatrix} Ax \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \leq x_{n+1} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(A^{-1}\{y\}) \leq x_{n+1} \right\} = \text{epi}(Af). \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la Proposición 3.9, $\text{epi}(Af)$ es un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^{n+1} , y por lo tanto Af es cuasipoliédrica. ■

Observación 3.4 El hecho de exigir en las hipótesis del corolario anterior que la transformación lineal A sea una biyección se debe a que, si relajamos las condiciones para A a las especificadas en el Corolario 3.2, podría ocurrir que $A^{-1}\{y\}$ fuera vacío, para algún punto $y \in \mathbb{R}^m$ y, por lo tanto, Af no sería finito-valorada, a pesar de que $\text{epi } f$ seguiría siendo un conjunto convexo cuasipoliédrico.

Proposición 3.10 *Si f_1 y f_2 son dos funciones convexas finito-valoradas cuasipoliédricas en \mathbb{R}^n , entonces la función convexa $f_1 + f_2$ cumple las mismas propiedades.*

Demostración. Aplicando el resultado de la Proposición 3.4, consideremos sendas representaciones de f_1 y f_2 ,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}, \\ \sigma_2 &= \{\langle c_s, x \rangle - x_{n+1} \leq d_s, s \in S\},\end{aligned}$$

verificando que, para todo conjunto compacto no vacío C en \mathbb{R}^n , $T(C)$ y $S(C)$ son conjuntos no vacíos y finitos.

Para cada $(t, s) \in T \times S$, definimos

$$\begin{aligned}e_{t,s} &:= a_t + c_s, \\ h_{t,s} &:= b_t + d_s.\end{aligned}$$

Consideremos el sistema

$$\sigma := \{\langle e_{t,s}, x \rangle - x_{n+1} \leq h_{t,s}, (t, s) \in T \times S\}.$$

Vamos a demostrar que σ es una representación de $f_1 + f_2$; es decir,

$$(f_1 + f_2)(x) = \sup \{\langle e_{t,s}, x \rangle - h_{t,s}, (t, s) \in T \times S\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como $f_1(x) \geq \langle a_t, x \rangle - b_t$, para todo $t \in T$, y $f_2(x) \geq \langle c_s, x \rangle - d_s$, para todo

$s \in S$, tendremos que

$$(f_1 + f_2)(x) \geq \langle e_{t,s}, x \rangle - h_{t,s}, \text{ para todo } (t, s) \in T \times S.$$

Por otro lado, $T(x) \neq \emptyset$ y $S(x) \neq \emptyset$, de manera que existe un índice $(t, s) \in T(x) \times S(x) \subset T \times S$ tal que

$$(f_1 + f_2)(x) = \langle e_{t,s}, x \rangle - h_{t,s}.$$

A continuación, demostraremos que esta representación de $f_1 + f_2$ verifica que, para todo conjunto compacto no vacío C en \mathbb{R}^n , $(T \times S)(C)$ es no vacío y finito. En virtud de la Proposición 3.4, obtendremos el resultado deseado.

Hemos visto anteriormente que, para todo $x \in C$, $\emptyset \neq T(x) \times S(x) \subset (T \times S)(x)$. Por lo tanto $(T \times S)(C) \neq \emptyset$.

Por otro lado, $T(C)$ y $S(C)$ son conjuntos finitos, y vamos a probar que $(T \times S)(C) \subset T(C) \times S(C)$. Si $(t, s) \in (T \times S)(C)$, entonces, para cierto punto $x \in C$,

$$(f_1 + f_2)(x) = \langle e_{t,s}, x \rangle - h_{t,s},$$

donde $e_{t,s} = a_t + c_s$ y $h_{t,s} = b_t + d_s$. Pero $f_1(x) \geq \langle a_t, x \rangle - b_t$ y $f_2(x) \geq \langle c_s, x \rangle - d_s$, y ninguna de las dos desigualdades puede ser estricta. Por lo tanto $t \in T(C)$ y $s \in S(C)$. Se obtiene que $(T \times S)(C) \subset T(C) \times S(C)$, y podemos por tanto concluir que $(T \times S)(C)$ es finito. ■

Proposición 3.11 *Sea C un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^n . Entonces λC es un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^n , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Consideremos la transformación lineal A de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , $x \rightarrow \lambda x$. Se tiene que o bien $Ax = 0_n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (cuando $\lambda = 0$), o bien A es singular, y aplicando la Proposición 3.9, $\lambda C = AC$ es un conjunto convexo cuasipoliédrico en \mathbb{R}^n . ■

Corolario 3.4 *Si f es una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica en \mathbb{R}^n , entonces la función convexa $f\lambda$ cumple las mismas propiedades, para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. En primer lugar, es evidente que $f\lambda$ es finito-valorada, puesto que

$$(f\lambda)(x) = \lambda f(\lambda^{-1}x) < +\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda(\text{epi } f) &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda y_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(y) \leq y_{n+1} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda f(\lambda^{-1}x) \leq x_{n+1} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (f\lambda)(x) \leq x_{n+1} \right\} \\ &= \text{epi}(f\lambda). \end{aligned}$$

Concluimos, por tanto, que $f\lambda$ es cuasipoliédrica, en virtud de la Proposición 3.11. ■

Observación 3.5 En el caso de que $\lambda = 0$,

$$(f0)(x) := \delta(x \mid 0_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0_n, \\ +\infty, & \text{si } x \neq 0_n \end{cases},$$

para cualquier función convexa propia f definida sobre \mathbb{R}^n . Por lo tanto, $\text{epi}(f0) = \{0_n\} \times \mathbb{R}^+$, que es un conjunto convexo poliédrico, y $f0$ es una función convexa poliédrica, verificando que $\text{dom}(f0) = \{0_n\}$.

Finalmente, ¿qué podemos decir de la función de recesión de una función convexa cuasipoliédrica f ? Primero, veamos que el concepto de cuasipoliédrica no tiene sentido para $f0^+$.

Proposición 3.12 Sea K un cono convexo en \mathbb{R}^n . Entonces K es cuasipoliédrico si y sólo si es poliédrico.

Demostración. En virtud de la Proposición 0.21, un conjunto convexo no vacío C es cuasipoliédrico si y sólo si $D(C, x)$ es poliédrico, para todo $x \in C$.

En particular, si K es un cono, $0_n \in K$, y tenemos que

$$D(K, 0_n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \alpha y \in K, \text{ para todo } \alpha \geq 0\} = K.$$

De manera que si K es cuasipoliédrico, entonces $D(K, 0_n) = K$ es poliédrico, y el recíproco se verifica siempre. ■

Como $\text{epi}(f0^+) = 0^+(\text{epi } f)$, de acuerdo con este resultado, la pregunta que surge es si $f0^+$ será una función convexa poliédrica cuando f es cuasipoliédrica. Sin embargo, si C es un conjunto convexo cuasipoliédrico, 0^+C no es necesariamente un cono convexo poliédrico.

Ejemplo 3.3 [14, Example 5.1] Sea F el conjunto de soluciones del sistema, en \mathbb{R}^3 ,

$$\sigma = \{-x_3 \leq 0; -x_1 - t(t+1)x_2 - t^3x_3 \leq -2t - 1, t \in \mathbb{N}\}.$$

En la referencia citada, se demuestra que este sistema es LOP, a partir del hecho de que es ajustado y F es un conjunto cuasipoliédrico de dimensión completa (es decir, $\dim F = 3$), por lo que puede aplicarse la Proposición 0.48 (ii). La prueba de que F es cuasipoliédrico aparece de forma detallada en la citada referencia.

Sabemos que 0^+F será el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\sigma_0 = \{-x_3 \leq 0; -x_1 - t(t+1)x_2 - t^3x_3 \leq 0, t \in \mathbb{N}\}.$$

Asignando el índice $t = 0$ a la restricción $-x_3 \leq 0$, tendremos que $T = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Vamos a demostrar que 0^+F no es un cono convexo poliédrico, pues encontraremos un número infinito de direcciones extremas (véase Proposición 0.17). Este problema forma parte del Ejercicio 9.8 de [14].

Consideremos, para todo $r \in \mathbb{N}$, el vector

$$u^r := \begin{pmatrix} r^4 + 4r^3 + 4r^2 + r \\ -3r^2 - 3r - 1 \\ 2r + 2 \end{pmatrix}.$$

Primero, demostraremos que u^r es una dirección de recesión de F , para todo $r \in \mathbb{N}$, comprobando que es solución del sistema homogéneo.

Tomemos un número natural cualquiera, $r \in \mathbb{N}$. Entonces $u^r \in 0^+F$ si y sólo si

$$(r^4 + 4r^3 + 4r^2 + r) + t(t+1)(-3r^2 - 3r - 1) + t^3(2r+2) \geq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{N}$.

Consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3(2r+2) + x^2(-3r^2 - 3r - 1) + x(-3r^2 - 3r - 1) + (r^4 + 4r^3 + 4r^2 + r).$$

Se puede comprobar que $P(r) = P(r+1) = 0$. Aplicando la regla de los signos de Descartes a $P(-x) = 0$, se obtiene que $P(x) = 0$ posee una raíz real negativa, que denotaremos por α . Podemos, por tanto, expresar $P(x) = (x-r)(x-r-1)(x-\alpha)$. Esto nos garantiza que $P(x) < 0$ si y sólo si $x < \alpha$ o bien $r < x < r+1$. De manera que $P(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $u^r \in 0^+F$. Además, $T_0(u^r) = \{r, r+1\}$.

Al verificar σ el supuesto de rango completo (los vectores a_0, a_1 y a_2 son linealmente independientes), y teniendo en cuenta que $\dim \text{span} \{a_t, t \in T_0(u^r)\} = 2$, para todo $r \in \mathbb{N}$, u^r será una dirección extrema de F , para todo $r \in \mathbb{N}$, en virtud de la Proposición 0.52 y, en consecuencia, también será una dirección extrema de 0^+F .

3.7 Subdiferencial de una función cuasipoliédrica en un punto

En esta sección vamos a caracterizar el subdiferencial y ε -subdiferencial, para $\varepsilon > 0$, de una función convexa finito-valorada cuasipoliédrica f en un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Dicha caracterización vendrá expresada en términos de cierta sucesión de funciones poliédricas derivada de f y dependiente del punto \bar{x} .

Veamos, en primer lugar, el siguiente resultado auxiliar que se establece, sin prueba, en [17, Ch. VI, Example 2.3.5].

Lema 3.3 Sean f y g funciones convexas finito-valoradas, tales que $f(x) = g(x)$ para todo x en un entorno de \bar{x} . Entonces $\partial f(\bar{x}) = \partial g(\bar{x})$.

Demostración. Supongamos que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \bar{x} + \delta\mathbb{B}$, con $\delta > 0$.

Tomemos un vector $u \in \partial f(\bar{x})$. Entonces, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + \langle u, y - \bar{x} \rangle. \quad (3.32)$$

Si $x \in \bar{x} + \delta\mathbb{B}$, (3.32) puede reescribirse de la forma

$$g(x) \geq g(\bar{x}) + \langle u, x - \bar{x} \rangle.$$

Entonces, para un punto cualquiera $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq \bar{x}$, como podemos encontrar un escalar

$0 < \lambda \leq 1$ tal que

$$x := \lambda y + (1 - \lambda)\bar{x} \in \bar{x} + \delta\mathbb{B}.$$

la convexidad de g nos garantiza que

$$g(x) \leq \lambda g(y) + (1 - \lambda)g(\bar{x}).$$

Esto implica, a su vez, que

$$\begin{aligned} g(y) &\geq \frac{1}{\lambda}g(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}g(\bar{x}) \\ &\geq \frac{g(\bar{x}) + \langle u, x - \bar{x} \rangle}{\lambda} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)g(\bar{x}) \\ &= g(\bar{x}) + \left\langle u, \frac{1}{\lambda}(x - \bar{x}) \right\rangle = g(\bar{x}) + \langle u, y - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u \in \partial g(\bar{x})$, y por simetría, concluimos que $\partial f(\bar{x}) = \partial g(\bar{x})$. ■

Proposición 3.13 *Sea f una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica, y consideremos la representación de f*

$$\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \},$$

que verifica que, para todo conjunto compacto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$, $T(C)$ es finito y no vacío.

Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, para todo $r \in \mathbb{N}$, definimos la función

$$f_r(x) := \max \{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T(\bar{x} + r \text{cl } \mathbb{B}) \}.$$

Entonces $\partial f(\bar{x}) = \partial f_r(\bar{x})$, para todo $r \in \mathbb{N}$ y, además, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}).$$

Demostración. La primer afirmación es consecuencia directa del Lema 3.3, pues

$$f(x) = \sup \{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T \},$$

y, por lo tanto, f y f_r coinciden en el entorno $\bar{x} + r\mathbb{B}$ del punto \bar{x} .

A continuación, demostremos la igualdad $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \partial_\varepsilon f_r(\bar{x})$, siendo $\varepsilon > 0$.

Obsérvese que, por hipótesis, el conjunto de índices $T(\bar{x} + r\text{cl}\mathbb{B})$ es finito y no vacío, para todo $r \in \mathbb{N}$; de manera que f_r es una función convexa finito-valorada y poliédrica. Además, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica que

$$f_r(x) \leq f_{r+1}(x),$$

coincidiendo ambas funciones en el punto \bar{x} , en consecuencia se cumplirá que

$$\partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \subset \partial_\varepsilon f_{r+1}(\bar{x}),$$

y podemos concluir que la sucesión de conjuntos no vacíos $\{\partial_\varepsilon f_r(\bar{x})\}_{r=1}^\infty$ es expansiva, por lo tanto $\lim_{r \rightarrow \infty} \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) = \text{cl} \{ \cup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \}$. Demostremos, entonces, que $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \text{cl} \{ \cup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \}$.

Por un lado, y dado que, para todo $r \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica $f_r(x) \leq f(x)$ y $f_r(\bar{x}) = f(\bar{x})$, podemos concluir que

$$\partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \subset \partial_\varepsilon f(\bar{x}),$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\{ \cup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \} \subset \partial_\varepsilon f(\bar{x})$, y al ser $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$ un conjunto cerrado, tenemos que

$$\text{cl} \left\{ \bigcup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \right\} \subset \partial_\varepsilon f(\bar{x}).$$

Veamos ahora el otro contenido. Si $u \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$, y de acuerdo con el Teorema de Brønsted-Rockafellar, tomando sucesivamente $\lambda_r := \frac{2\varepsilon}{r}$, para todo $r \in \mathbb{N}$, existirá un punto $x^r \in \mathbb{R}^n$ y un vector $u^r \in \partial f(x^r)$ tales que $\|\bar{x} - x^r\| \leq \frac{r}{2}$ y $\|u - u^r\| \leq \frac{2\varepsilon}{r}$. Por lo tanto, para todo $r \in \mathbb{N}$, $x^r \in \text{int}(\bar{x} + r\text{cl}\mathbb{B})$ y además $\lim_{r \rightarrow \infty} u^r = u$.

Vamos a particularizar este resultado a un vector $u \in \text{rint}(\partial_\varepsilon f(\bar{x}))$. Para ello consideraremos la función

$$h^*(v) := f^*(v) + f(\bar{x}) - \langle v, \bar{x} \rangle, \quad v \in \text{dom } f^*.$$

Entonces $h^*(v) \geq 0$, para todo $v \in \text{dom } f^*$, y además

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \{v \in \text{dom } f^*, h^*(v) \leq \varepsilon\}.$$

Como $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$, tendremos que $\inf h^* = 0 < \varepsilon$, y por lo tanto

$$\text{rint}(\partial_\varepsilon f(\bar{x})) = \{v \in \text{rint}(\text{dom } f^*), h^*(v) < \varepsilon\},$$

en virtud de la Proposición 0.22.

Entonces $u \in \text{rint}(\partial_\varepsilon f(\bar{x}))$ si, y sólo si, $u \in \text{rint}(\text{dom } f^*)$ y $h^*(u) < \varepsilon$. Como $\{u^r\}_{r=1}^\infty \subset \text{dom } f^*$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} u^r = u$, existirá cierto $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \geq r_0$, $u^r \in \text{rint}(\text{dom } f^*)$. La función conjugada f^* es continua en $\text{rint}(\text{dom } f^*)$, y h^* hereda estas propiedades, de manera que podemos encontrar $r_1 \in \mathbb{N}$, $r_1 \geq r_0$, tal que, para todo $r \geq r_1$, $h^*(u^r) \leq \varepsilon$. Esto implica que $u^r \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$, para todo $r \geq r_1$.

Por otro lado, como $u^r \in \partial f(x^r)$ para todo $r \in \mathbb{N}$, y $f_r(x) = f(x)$ en un entorno de x^r , el Lema 3.3 nos garantiza que $u^r \in \partial f_r(x^r)$. Tenemos, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq r_1$,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon + \langle u^r, x - \bar{x} \rangle, \quad (3.33)$$

y además

$$f_r(x) \geq f_r(x^r) + \langle u^r, x - x^r \rangle. \quad (3.34)$$

Reemplazando x por x^r en (3.33) y teniendo en cuenta que $f_r(x^r) = f(x^r)$, obtenemos

$$f_r(x^r) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon + \langle u^r, x^r - \bar{x} \rangle.$$

A partir de (3.34) y, como $f(\bar{x}) = f_r(\bar{x})$, podemos concluir que

$$f_r(x) \geq f_r(\bar{x}) - \varepsilon + \langle u^r, x - \bar{x} \rangle,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r \geq r_1$. Entonces $u^r \in \partial_\varepsilon f_r(\bar{x})$, para todo $r \geq r_1$, y por lo tanto $u \in \text{cl} \left\{ \bigcup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \right\}$.

Hemos llegado a que $\text{rint}(\partial_\varepsilon f(\bar{x})) \subset \text{cl} \left\{ \bigcup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \right\}$, y tomando clausuras, obtenemos la inclusión deseada

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \subset \text{cl} \left\{ \bigcup_{r=1}^\infty \partial_\varepsilon f_r(\bar{x}) \right\}. \quad \blacksquare$$

Finalizamos esta sección presentando un resultado general que verifica cualquier representación de una función convexa finito-valorada. Para ello, vamos a dar previamente la siguiente definición:

Definición 3.2 Sea f una función convexa finito-valorada en \mathbb{R}^n y sea $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ una representación de f . Para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto

$$U_\varepsilon^\sigma(\bar{x}) := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t a_t \mid (\lambda_t) \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \sum_{t \in T} \lambda_t = 1, \sum_{t \in T} \lambda_t \{\langle a_t, \bar{x} \rangle - b_t\} \geq f(\bar{x}) - \varepsilon \right\}.$$

Proposición 3.14 Sea f una función convexa finito-valorada, y sea $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ una representación de f . Entonces, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y todo $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon^\sigma(\bar{x}) \subset \partial_\varepsilon f(\bar{x})$.

Demostración. Tomemos un vector $u \in U$ de manera que $u = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t$, $(\lambda_t) \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - \varepsilon + \langle u, x - \bar{x} \rangle &= (f(\bar{x}) - \varepsilon) + \sum_{t \in T} \lambda_t \langle a_t, x - \bar{x} \rangle \\ &\leq \sum_{t \in T} \lambda_t \{\langle a_t, \bar{x} \rangle - b_t\} + \sum_{t \in T} \lambda_t \langle a_t, x - \bar{x} \rangle \\ &= \sum_{t \in T} \lambda_t \{\langle a_t, x \rangle - b_t\} \leq \left(\sum_{t \in T} \lambda_t \right) f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $u \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$. ■

El siguiente ejemplo muestra que, en general, $U_\varepsilon^\sigma(\bar{x}) \not\subset \partial_\varepsilon f(\bar{x})$, incluso en el caso de que σ sea una representación LOP de f .

Ejemplo 3.4 Consideremos la función, definida sobre \mathbb{R} ,

$$f(x) := \sup \left\{ -\frac{1}{r(r+1)}x + \frac{2r+1}{r(r+1)}, r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esta función es finito-valorada y cuasipoliédrica; de hecho, el sistema

$$\sigma := \left\{ -\frac{1}{r(r+1)}x - y \leq -\frac{2r+1}{r(r+1)}, r \in \mathbb{N} \right\}$$

es LOP, pues verifica que para cualquier conjunto compacto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, $T(C)$ es finito y no vacío.

Para cualquier punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, y cualquier escalar $\varepsilon \geq f(\bar{x})$, tenemos que $0 \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$, pues $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo $0 \notin \text{conv} \left\{ -\frac{1}{r(r+1)}, r \in \mathbb{N} \right\}$.

3.8 Representaciones Farkas-Minkowski (FM)

Proposición 3.15 Si $\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \}$ es una representación FM de una función convexa finito-valorada f , entonces, para todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon^\sigma(\bar{x}) = \partial_\varepsilon f(\bar{x})$.

Demostración. En virtud de la Proposición 3.14, demostraremos que $\partial_\varepsilon f(\bar{x}) \subset U_\varepsilon^\sigma(\bar{x})$.

Aplicando la Proposición 0.46 (i), σ es un sistema FM si, y sólo si, el cono

$$K(\sigma) := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ -1 \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es cerrado.

Tomemos un vector $u \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon + \langle u, x - \bar{x} \rangle.$$

Esto implica que

$$\langle u, x \rangle - x_{n+1} \leq \langle u, \bar{x} \rangle - (f(\bar{x}) - \varepsilon),$$

es una relación consecuente de σ . En virtud del Teorema de Farkas Generalizado, tendremos que

$$\begin{pmatrix} u \\ -1 \\ \langle u, \bar{x} \rangle - (f(\bar{x}) - \varepsilon) \end{pmatrix} \in K(\sigma),$$

o, de forma equivalente,

$$\begin{pmatrix} u \\ \langle u, \bar{x} \rangle - (f(\bar{x}) - \varepsilon) \end{pmatrix} \in \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\} + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Podemos, por tanto, encontrar un $\lambda = (\lambda_t) \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$, y un escalar $\mu \geq 0$, verificando

$$u = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t, \quad (3.35)$$

$$\langle u, \bar{x} \rangle - (f(\bar{x}) - \varepsilon) = \sum_{t \in T} \lambda_t b_t + \mu. \quad (3.36)$$

Reemplazando (3.35) en (3.36), obtenemos

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - \varepsilon &= \langle u, \bar{x} \rangle - \sum_{t \in T} \lambda_t b_t - \mu \\ &= \sum_{t \in T} \lambda_t \{ \langle a_t, \bar{x} \rangle - b_t \} - \mu \\ &\leq \sum_{t \in T} \lambda_t \{ \langle a_t, \bar{x} \rangle - b_t \}, \end{aligned}$$

de manera que $u \in U_\varepsilon^\sigma(\bar{x})$. ■

Observación 3.6 Si $\langle a, x \rangle + \alpha x_{n+1} \leq b$ es una relación consecuente del sistema, en \mathbb{R}^{n+1} , $\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \}$, entonces $\alpha \leq 0$, como consecuencia del Teorema de Farkas Generalizado. Si, además, la dimensión del conjunto de soluciones de σ es $n + 1$ y $\alpha = 0$, necesariamente $a = 0_n$ y $b \geq 0$. Excluyendo este tipo de relaciones consecuentes, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha = -1$, y considerar sólo relaciones consecuentes de la forma

$$\langle a, x \rangle - x_{n+1} \leq b. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, si σ es una representación FM de f , (3.37) es una relación consecuente de σ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\} + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

y el hiperplano

$$\langle a, x \rangle - x_{n+1} = b,$$

es un minorante afin de f .

Podemos establecer las siguientes propiedades asociadas a representaciones FM de una función convexa finito-valorada f .

Proposición 3.16 Si $\sigma = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T\}$ es una representación FM de f , entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$A_\sigma(x)^\circ = \text{cl } D(\text{epi } f, x).$$

Demostración. Aplicando la Proposición 0.46 (iii), y siguiendo el mismo razonamiento que en la demostración de la Proposición 3.1. ■

Proposición 3.17 Sea f una función convexa finito-valorada. Entonces existe una representación FM de f .

Demostración. Aplicando la Proposición 0.50, el conjunto convexo cerrado no vacío $\text{epi } f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es el conjunto de soluciones de un sistema FM

$$\sigma = \{\langle d_t, x \rangle + \gamma_t x_{n+1} \leq c_t, t \in T\},$$

donde $d_t \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_t, c_t \in \mathbb{R}$, para todo $t \in T$. En base a la Observación 3.1, $\gamma_t \leq 0$, para todo $t \in T$, y si para algún índice $\gamma_t = 0$, necesariamente $d_t = 0_n$ y $c_t \geq 0$. De esta manera, el cono característico de σ , que es cerrado, de acuerdo con la Proposición 0.46 (i), se puede expresar

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} d_t \\ \gamma_t \\ c_t \end{pmatrix}, \gamma_t < 0, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{cone} \left\{ \frac{1}{|\gamma_t|} \begin{pmatrix} d_t \\ \gamma_t \\ c_t \end{pmatrix}, \gamma_t < 0, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema equivalente a σ

$$\tilde{\sigma} = \{\langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T_1\},$$

donde $a_t := d_t/|\gamma_t|$, $b_t := c_t/|\gamma_t|$, para todo $t \in T_1$, siendo T_1 al subconjunto de índices $t \in T$ tales que $\gamma_t < 0$, verifica que su cono característico $K(\tilde{\sigma})$ coincide con $K(\sigma)$ y, por tanto, es cerrado. De esta manera, concluimos que $\tilde{\sigma}$ es una representación FM de la función f . ■

Corolario 3.5 Sea f una función convexa finito-valorada en \mathbb{R}^n . Entonces existe una representación σ de f tal que, para todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar $\varepsilon > 0$,

$$U_\varepsilon^\sigma(\bar{x}) = \partial_\varepsilon f(\bar{x}).$$

Demostración. Es una consecuencia directa de las Proposiciones 3.17 y 3.15. ■

3.9 Una aplicación de la convexidad cuasipoliédrica

Dada una función no convexa f definida en \mathbb{R}^n , es bien conocido que podemos construir la mayor función convexa mayorizada por f , denominada la *envoltura convexa* de f :

$$F(x) := \inf \left\{ \mu \mid \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} \in \text{conv}(\text{epi } f) \right\}.$$

En esta sección, también construiremos una función convexa a partir de una función continua no convexa f , con la particularidad de que ambas funciones coincidirán en los conjuntos (convexos) donde f es convexa. La clave será reemplazar la función f en los conjuntos donde no sea convexa por una función cuasipoliédrica que la mayorice.

Como la convexidad de una función en un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ es equivalente a la convexidad de la función en cada segmento de C , trasladaremos el problema original al contexto unidimensional, y aplicaremos las definiciones y resultados apropiados a este contexto.

Recuérdese que si f es una función convexa, definida en \mathbb{R} , y x_0 es un punto en el interior de su dominio, entonces la función admite una derivada por la izquierda y una derivada por la derecha finitas [17, Chap. I, Th. 4.1.1]:

$$D_- f(x_0) := \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sup_{x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (3.38)$$

$$D_+ f(x_0) := \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \inf_{x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.39)$$

Respecto a los puntos en la frontera de $\text{dom } f$, si x_0 es un extremo a la izquierda (respectivamente a la derecha), la igualdad (3.39) (respectivamente (3.38)) se mantiene en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (respectivamente en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) [17, Chap. I, Prop. 4.1.3].

Observación 3.7 Si f no es convexa en todo \mathbb{R} , sino en un conjunto convexo cerrado

no vacío $C \subset \mathbb{R}$, podemos obtener resultados idénticos para los puntos de $\text{int } C$ y para los puntos de $\text{bd } C$, definiendo la función convexa en \mathbb{R} auxiliar $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$, si $x \in C$, y $\tilde{f}(x) = +\infty$, si $x \notin C$. De esta manera, para todo $x_0 \in \text{int } C$

$$\begin{aligned} D_- f(x_0) &= D_- \tilde{f}(x_0) \in \mathbb{R}, \\ D_+ f(x_0) &= D_+ \tilde{f}(x_0) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Similarmente, si x_1 (respectivamente x_2) es un extremo a la izquierda (respectivamente a la derecha) de C , tendremos que

$$\begin{aligned} D_+ f(x_1) &= D_+ \tilde{f}(x_1) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ D_- f(x_2) &= D_- \tilde{f}(x_2) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

El conjunto C debe ser cerrado, pues, en otro caso, las igualdades (3.38) y (3.39) podrían no cumplirse en los puntos de $\text{bd } C$:

Ejemplo 3.5 Consideremos la función, definida en \mathbb{R} ,

$$f(x) := \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x < 1, \\ x^{1/2}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Esta función es convexa en $C =]-\infty, 1[$ y podemos calcular

$$D_- f(1) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty,$$

mientras que

$$\sup_{x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0.$$

Así mismo, es sencillo calcular $D_- \tilde{f}(1) = +\infty$.

Extraeremos un corolario del siguiente resultado que nos será de gran utilidad en esta sección.

Proposición 3.18 [26, Th. 24.1] *Sea f una función convexa propia y cerrada en \mathbb{R} . Por conveniencia, extendamos las funciones derivadas a la derecha y a la izquierda de*

la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_+f(x) &= D_-f(x) = +\infty, & \text{si } x > y, \text{ para todo } y \in \text{dom } f, \\ D_+f(x) &= D_-f(x) = -\infty, & \text{si } x < y, \text{ para todo } y \in \text{dom } f. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Entonces D_+f y D_-f son funciones crecientes en \mathbb{R} , tales que, si $z_1 < x < z_2$, se verifica

$$D_+f(z_1) \leq D_-f(x) \leq D_+f(x) \leq D_-f(z_2).$$

Corolario 3.5 Sea f una función continua en \mathbb{R} , convexa en un conjunto convexo no vacío $C \subset \mathbb{R}$. Entonces las funciones D_+f y D_-f , definidas en $\text{cl } C$, son crecientes en $\text{cl } C$, y tales que si $z_1 < x < z_2$ son puntos de $\text{cl } C$, se verifica

$$D_+f(z_1) \leq D_-f(x) \leq D_+f(x) \leq D_-f(z_2).$$

Demostración. Al ser f continua en \mathbb{R} , será convexa en $\text{cl } C$, y la función auxiliar $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$, si $x \in \text{cl } C$, y $\tilde{f}(x) = +\infty$, si $x \notin \text{cl } C$, será convexa y cerrada; de hecho, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos de nivel

$$\left\{ x \mid \tilde{f}(x) \leq \alpha \right\} = \{x \in \text{cl } C \mid f(x) \leq \alpha\}$$

son cerrados. Basta, por tanto, aplicar la proposición anterior a la función \tilde{f} , habida cuenta de (3.40) y (3.41). ■

El siguiente resultado será fundamental en esta sección.

Proposición 3.19 ([17, Chap. I, Th. 5.3.1]) Sea f una función continua en un intervalo abierto C de \mathbb{R} . Si f posee una derivada por la derecha creciente, o una derivada por la izquierda creciente, entonces f es convexa en C .

Previamente al resultado principal, presentamos un lema auxiliar.

Lema 3.4 Sea f una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica en \mathbb{R} , y consideremos una representación LOP de f

$$\sigma := \{a_t x - y \leq b_t, t \in T\},$$

verificando que, para cualquier conjunto compacto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, $T(C)$ es finito y no vacío. Entonces, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, existe un escalar $\bar{\delta} > 0$ y un índice $\bar{t} \in T(\bar{x})$ tal que, si $\bar{x} < x < \bar{x} + \bar{\delta}$, $T(x) = \{\bar{t}\}$.

Demostración. En virtud de la Proposición 3.4, la representación σ existe. Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que no existen desigualdades repetidas en σ ; es decir

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{t'} \\ b_{t'} \end{pmatrix},$$

para todo $t, t' \in T$.

Tomemos un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. En el caso de que $T(\bar{x}) = \{\bar{t}\}$, elijamos un escalar cualquiera $\varepsilon > 0$, y consideremos el conjunto compacto $C := [\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon]$. Tendremos entonces, que

$$\begin{aligned} T(C) &= \{\bar{t}\}, \text{ o bien} \\ T(C) &= \{\bar{t}, t_1, \dots, t_s\}, \text{ con } s \geq 1. \end{aligned}$$

En el primer caso, no hay nada más que hacer, pues basta tomar $\bar{\delta} = \varepsilon$. Si estuviéramos en la segunda situación entonces, para todo $i = 1, \dots, s$, se cumpliría que

$$(a_{t_i} - a_{\bar{t}})\bar{x} - (b_{t_i} - b_{\bar{t}}) < 0.$$

Esto implica que, por continidad, podemos encontrar un escalar $0 < \delta_i < \varepsilon$, para todo $i = 1, \dots, s$, tal que, si $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta_i$, se verifica

$$(a_{t_i} - a_{\bar{t}})x - (b_{t_i} - b_{\bar{t}}) < 0.$$

El resultado deseado se consigue tomando $\bar{\delta} = \min_{i=1, \dots, s} \delta_i$ ya que, para todo x , $\bar{x} < x < \bar{x} + \bar{\delta}$, tendremos que

$$t_1, \dots, t_s \notin T(x) \subset T(C),$$

y, como consecuencia de ello $T(x) = \{\bar{t}\}$ (recuérdese que no puede ser vacío).

Supongamos ahora que $|T(\bar{x})| > 1$. Vamos a caracterizar, en primer lugar, el conjunto de los puntos extremos de $\text{epi } f$. Este conjunto no puede tener cardinal infinito no numerable, siguiendo el mismo razonamiento que aparece en la segunda parte de la

demostración del Lema 3.2.

Por otro lado, en virtud de la Proposición 3.5, $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ es un punto extremo de $\text{epi } f$ si y sólo si $\dim \partial f(x) = 1$. A partir de la Proposición 3.2 (σ es LOP y, en consecuencia, LFM) podemos deducir que

$$\partial f(x) = [a_{t_0}, a_{t_1}], \text{ donde } a_{t_0} = \min_{t \in T(x)} a_t \text{ y } a_{t_1} = \max_{t \in T(x)} a_t, \text{ siendo } a_{t_0} < a_{t_1},$$

y necesariamente $|T(x)| > 1$. A su vez, esta condición también es suficiente para que $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ sea un punto extremo de $\text{epi } f$ puesto que, en otro caso, $\dim \partial f(x) = 0$, de manera que $a_{t_0} = a_{t_1}$ y, en consecuencia, $b_{t_0} = b_{t_1}$ (pues ambos índices pertenecen a $T(x)$). Al no existir desigualdades repetidas, concluiríamos que $|T(x)| = 1$.

Podemos, por tanto, garantizar que $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ será un punto extremo de $\text{epi } f$ si y sólo si $|T(x)| > 1$. Denotemos por

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_k \\ f(x_k) \end{pmatrix}, |T(x_k)| > 1 \right\},$$

al conjunto de puntos extremos de $\text{epi } f$.

Vamos a suponer, primero, que el cardinal del conjunto E es finito, y representémoslo de la forma

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ f(x_m) \end{pmatrix} \right\},$$

tomando $x_1 < \dots < x_m$. Sabemos que \bar{x} debe ser alguno de estos puntos.

Consideremos primero el caso $m \geq 2$ y $\bar{x} = x_k$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Tomemos el escalar $\bar{\delta} := x_{k+1} - \bar{x}$. Para todo x , $\bar{x} < x < \bar{x} + \bar{\delta}$, tenemos que $|T(x)| = 1$. Primero, demostraremos que todos estos conjuntos unitarios $T(x)$ son en realidad el mismo conjunto, $\{\bar{t}\}$, para un cierto índice $\bar{t} \in T([\bar{x}, \bar{x} + \bar{\delta}])$.

Por reducción al absurdo, si existieran dos puntos, $\bar{x} < y_1 < y_2 < \bar{x} + \bar{\delta}$, tales que $f(y_1) = a_{t_1}y_1 - b_{t_1}$ y $f(y_2) = a_{t_2}y_2 - b_{t_2}$, con $t_1 \neq t_2$, esto implicaría que

$$(a_{t_1} - a_{t_2})y_1 - (b_{t_1} - b_{t_2}) > 0, \text{ y} \quad (3.43)$$

$$(a_{t_1} - a_{t_2})y_2 - (b_{t_1} - b_{t_2}) < 0.$$

Aplicando el Teorema de Bolzano, existirá un punto y_3 , tal que $y_1 < y_3 < y_2$, verificando

$$a_{t_1}y_3 - b_{t_1} = a_{t_2}y_3 - b_{t_2}. \quad (3.44)$$

Además, como $y_1 < y_2$ y, en virtud de la Proposición 3.2, $\partial f(y_i) = \{a_{t_i}\}$, $i = 1, 2$, la monotonía de la aplicación subdiferencial (recuérdese la Proposición 0.42) nos conduce a que $a_{t_1} \leq a_{t_2}$. Pero si fuera $a_{t_1} = a_{t_2}$, por (3.43), obtendríamos $b_{t_1} = b_{t_2}$, de manera que $a_{t_1} < a_{t_2}$.

La igualdad (3.44) implica que, como $\begin{pmatrix} y_3 \\ f(y_3) \end{pmatrix}$ no puede ser un punto extremo de $\text{epi } f$, $T(y_3) = \{t_3\} \neq \{t_i\}$, $i = 1, 2$, y

$$(a_{t_3} - a_{t_1})y_3 - (b_{t_3} - b_{t_1}) > 0,$$

$$(a_{t_3} - a_{t_2})y_3 - (b_{t_3} - b_{t_2}) > 0.$$

Teniendo en cuenta que

$$(a_{t_3} - a_{t_1})y_1 - (b_{t_3} - b_{t_1}) < 0,$$

$$(a_{t_3} - a_{t_2})y_2 - (b_{t_3} - b_{t_2}) < 0,$$

obtenemos que $a_{t_1} < a_{t_3} < a_{t_2}$, y, además, podemos encontrar otro punto, $y_1 < y_4 < y_3$ verificando

$$a_{t_3}y_4 - b_{t_3} = a_{t_1}y_4 - b_{t_1}.$$

Si continuamos de esta manera, podemos construir una sucesión estrictamente creciente en el conjunto finito $\{a_t, t \in T([\bar{x}, \bar{x} + \bar{\delta}])\}$ con tantos términos como queramos, y esto es imposible. Entonces $T(x) = \{\bar{t}\}$, para todo x , $\bar{x} < x < \bar{x} + \bar{\delta}$. También se cumple que $\partial f(x) = \{a_{\bar{t}}\}$.

Como f es una función convexa finito-valorada, el grafo de su función subdiferencial es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^2 , en virtud de la Proposición 0.27. Tomando la sucesión $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$, donde $z_r := \bar{x} + \frac{\bar{\delta}}{2r} \in]\bar{x}, \bar{x} + \bar{\delta}[$, para todo $r \in \mathbb{N}$, se verifica la relación

$$\left\{ \begin{pmatrix} z_r \\ a_{\bar{t}} \end{pmatrix} \right\}_{r=1}^{\infty} \subset \text{gph}(\partial f),$$

y, consecuentemente, $\lim_{r \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} z_r \\ a_{\bar{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ a_{\bar{t}} \end{pmatrix} \in \text{gph}(\partial f)$. Concluimos por tanto que $a_{\bar{t}} \in \partial f(\bar{x})$.

Finalmente, demostraremos que $\bar{t} \in T(\bar{x})$. Como, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + a_{\bar{t}}(y - \bar{x}),$$

tomando cualquier punto x , $\bar{x} < x < \bar{x} + \bar{\delta}$, tendremos que

$$a_{\bar{t}}x - b_{\bar{t}} = f(x) \geq f(\bar{x}) + a_{\bar{t}}(x - \bar{x}),$$

Esto nos conduce a que $f(\bar{x}) = a_{\bar{t}}\bar{x} - b_{\bar{t}}$.

En los casos $\bar{x} = x_m$ ó $m = 1$, las demostraciones siguen los mismos pasos que en el caso anterior, tomando cualquier escalar $\bar{\delta} > 0$.

Finalmente, si E es infinito numerable, la demostración es análoga, exceptuando el caso en que $\bar{x} = x_m$. ■

Teorema 3.1 *Sea f una función finito-valorada continua en \mathbb{R}^n , y convexa en los conjuntos convexos C_1, C_2, \dots, C_m de \mathbb{R}^n . Sea g una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica en \mathbb{R}^n , y consideremos una representación LOP de g , $\sigma = \{ \langle a_t, x \rangle - x_{n+1} \leq b_t, t \in T \}$, verificando que para cualquier conjunto compacto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$, $T(C)$ es finito y no vacío. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

- (i) *Si $x \in \cup_{i=1}^m C_i$, entonces $f(x) \geq g(x)$;*
- (ii) *si $x \notin \cup_{i=1}^m C_i$, entonces $f(x) \leq g(x)$;*
- (iii) *si $x \in \text{bd } C_i \cap \text{bd } C_j, i \neq j$, entonces $f(x) = g(x)$.*

Definamos la función $h(x) := \max \{ f(x), g(x) \}$. Entonces h es convexa en \mathbb{R}^n .

Demostración. En primer lugar, observemos que h es continua en \mathbb{R}^n , al ser f y g funciones continuas en todo el espacio.

En segundo lugar, es claro que la convexidad de h en \mathbb{R}^n es equivalente a la convexidad de la restricción de h a cada segmento en \mathbb{R}^n . Esto es lo mismo que la

convexidad de la función

$$\psi(\lambda) := h(a + \lambda d)$$

en \mathbb{R} , para todo punto $a \in \mathbb{R}^n$ y todo vector $d \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, tomemos cualesquiera $a, d \in \mathbb{R}^n$, y definamos primeramente

$$\varphi(\lambda) := f(a + \lambda d), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dado que f es una función continua en \mathbb{R}^n , φ será continua en \mathbb{R} .

Para cada conjunto convexo $C_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$, consideremos el conjunto en \mathbb{R} ,

$$\Lambda_i := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid a + \lambda d \in C_i\}.$$

Claramente, Λ_i es un conjunto convexo (posiblemente vacío) en \mathbb{R} . Además, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, φ es convexa en Λ_i , debido a la convexidad de f en C_i . También se verifica que

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda),$$

para todo $\lambda \in \cup_{i=1}^m \Lambda_i$, en virtud de (i).

Es evidente que, si para algún i , $\Lambda_i = \mathbb{R}$, ψ será convexa en \mathbb{R} . De manera que consideraremos el caso en que $\Lambda_i \subsetneq \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$, y sin pérdida de generalidad, supondremos también que $\Lambda_i \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$; es decir, los conjuntos Λ_i son, o bien un punto, o bien un intervalo (acotado o no acotado) de \mathbb{R} .

Pero si algún Λ_i es un conjunto mono-elemental, el hecho de que φ sea convexa en Λ_i no tiene interés, pues toda función es convexa en un punto. De esta manera, consideraremos que todos los conjuntos Λ_i son intervalos.

Estos intervalos pueden ser abiertos, cerrados, o ninguna de las dos cosas. Vamos a suponer que todos son abiertos y, si no fuera así, tomaríamos sus conjuntos interiores.

Por otro lado, tenemos que si $\lambda \in \text{bd } \Lambda_i$, para algún i , podemos encontrar dos sucesiones, $\{\lambda_r\}_{r=1}^{\infty}$ y $\{\tilde{\lambda}_r\}_{r=1}^{\infty}$, en Λ_i y $\mathbb{R} \setminus \Lambda_i$, respectivamente, convergentes a λ , que implica que las sucesiones $\{a + \lambda_r d\}_{r=1}^{\infty}$ y $\{a + \tilde{\lambda}_r d\}_{r=1}^{\infty}$ en C_i y $\mathbb{R}^n \setminus C_i$, respectivamente, convergen a $a + \lambda d$, y por lo tanto $a + \lambda d \in \text{bd } C_i$.

Recíprocamente, si un punto $x = a + \lambda d \in \text{bd } C_i$, para algún i , se tendrá que

para todo escalar $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon \mathbb{B}$ interseca con C_i y con $\mathbb{R}^n \setminus C_i$, de manera que el segmento relativamente abierto $]a + (\lambda - \varepsilon)d, a + (\lambda + \varepsilon)d[$ interseca con C_i y con $\mathbb{R}^n \setminus C_i$; entonces $] \lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon [$ interseca con Λ_i y con $\mathbb{R} \setminus \Lambda_i$, lo que implica que $\lambda \in \text{bd } \Lambda_i$.

Considerando que estamos tomando intervalos abiertos, si ocurriera que $\Lambda_i \cap \Lambda_j \neq \emptyset$, para algún par de índices $i \neq j$, entonces $\Lambda_{ij} := \Lambda_i \cup \Lambda_j$ será también un intervalo abierto en \mathbb{R} . Vamos a demostrar que φ será convexa en Λ_{ij} .

Como φ es continua en \mathbb{R} y convexa en Λ_i (respectivamente Λ_j), aplicando el Corolario 3.5, su derivada por la derecha, $D_+\varphi$, será una función creciente en Λ_i (respectivamente Λ_j). En virtud de la Proposición 3.19, será suficiente probar que $D_+\varphi$ es una función creciente en Λ_{ij} .

Tomemos dos puntos $\lambda_1 < \lambda_2$, en Λ_{ij} . Si ambos están en Λ_i (o en Λ_j), no hay nada que probar, de manera que supondremos que $\lambda_1, \lambda_2 \in (\Lambda_i \cup \Lambda_j) \setminus (\Lambda_i \cap \Lambda_j)$ y, por ejemplo, que $\lambda_1 \in \Lambda_i$, y $\lambda_2 \in \Lambda_j$.

Tomemos cualquier punto $\hat{\lambda}$ tal que $\lambda_1 < \hat{\lambda} < \lambda_2$, $\hat{\lambda} \in \Lambda_i \cap \Lambda_j$; entonces

$$D_+\varphi(\lambda_1) \leq D_+\varphi(\hat{\lambda}) \text{ y } D_+\varphi(\hat{\lambda}) \leq D_+\varphi(\lambda_2).$$

Este resultado nos permite considerar sólo el caso en que los intervalos abiertos son disjuntos dos a dos, pues en otra situación, consideraríamos el intervalo unión.

A continuación definimos

$$\phi(\lambda) := g(a + \lambda d), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ϕ es una función convexa finito-valorada y cuasipoliédrica en \mathbb{R} ; de hecho, para todo $t \in T$, y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\langle a_t, a + \lambda d \rangle - b_t = \lambda \langle a_t, d \rangle + \langle a_t, a \rangle - b_t = \alpha_t \lambda - \beta_t,$$

siendo $\alpha_t := \langle a_t, d \rangle$ y $\beta_t := b_t - \langle a_t, a \rangle$. Al ser σ una representación de la función g , se verificará que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = \sup \{ \langle a_t, x \rangle - b_t, t \in T \},$$

de manera que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\lambda) = \sup \{ \alpha_t \lambda - \beta_t, t \in T \}.$$

Así pues, el sistema $\hat{\sigma} := \{ \alpha_t \lambda - \delta \leq \beta_t, t \in T \}$ es una representación de la función ϕ . Si tomamos un conjunto compacto no vacío en \mathbb{R} , $C := [\lambda_1, \lambda_2]$, y consideremos el conjunto compacto no vacío $\tilde{C} := [a + \lambda_1 d, a + \lambda_2 d]$ en \mathbb{R}^n , entonces, por hipótesis, $T(\tilde{C})$ es no vacío y finito. Además, $t \in T(\tilde{C})$ si y sólo si existe un $\lambda \in C$ tal que $g(a + \lambda d) = \langle a_t, a + \lambda d \rangle - b_t$, y esto es equivalente a decir que $\phi(\lambda) = \alpha_t \lambda - \beta_t$ o, lo que es lo mismo, $t \in \hat{T}(C)$. Por lo tanto, $\hat{T}(C) = T(\tilde{C})$ y, como consecuencia de la Proposición 3.4, ϕ es cuasipoliédrica.

Finalmente, tenemos que

$$\psi(\lambda) = \max \{ \varphi(\lambda), \phi(\lambda) \}, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Podemos reformular las hipótesis del teorema en el contexto unidimensional, como sigue:

Sea φ una función continua finito-valorada en \mathbb{R} , que es convexa en m intervalos abiertos no vacíos, disjuntos dos a dos, $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$. Sea ϕ una función finito-valorada y cuasipoliédrica en \mathbb{R} , y consideremos una representación LOP de ϕ , $\hat{\sigma} = \{ \alpha_t \lambda - \delta \leq \beta_t, t \in T \}$, verificando que para cualquier conjunto compacto no vacío $C \subset \mathbb{R}$, $\hat{T}(C)$ es finito y no vacío. Definimos $\psi(\lambda) := \max \{ \varphi(\lambda), \phi(\lambda) \}$. Supongamos que las siguientes condiciones se cumplen:

- (a) Si $\lambda \in \cup_{i=1}^m \Lambda_i$, entonces $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)$;
- (b) si $\lambda \notin \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$, entonces $\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$;
- (c) si $\lambda \in \text{bd } \Lambda_i$, para algún i , entonces $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) = \phi(\lambda)$.

El punto (c) requiere una pequeña discusión, puesto que pueden presentarse dos casos: si ocurriera que $\lambda \in \text{bd } \Lambda_i \cap \text{bd } \Lambda_j$, para algún par $i \neq j$, por (iii), $\varphi(\lambda) = \phi(\lambda)$. Si fuera el caso $\lambda \notin \text{bd } \Lambda_j$, para todo $j \neq i$, podrían encontrarse dos sucesiones, $\{ \lambda_r \}_{r=1}^{\infty}$ y $\{ \tilde{\lambda}_r \}_{r=1}^{\infty}$, en Λ_i y $\mathbb{R} \setminus \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$, respectivamente, convergentes a λ , verificando que $\varphi(\lambda_r) \geq \phi(\lambda_r)$ y $\varphi(\tilde{\lambda}_r) \leq \phi(\tilde{\lambda}_r)$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\varphi(\lambda) = \phi(\lambda)$, pues

la función $\varphi - \phi$ es continua en \mathbb{R} .

Demostremos, con estas condiciones, que ψ es convexa en \mathbb{R} .

Supongamos que los m intervalos están ordenados, de manera que

$$\sup \{ \lambda \mid \lambda \in \Lambda_i \} \leq \inf \{ \lambda \mid \lambda \in \Lambda_{i+1} \}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Podemos incluso suponer que todas estas desigualdades son estrictas; es decir, $\text{cl } \Lambda_i \cap \text{cl } \Lambda_{i+1} = \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \dots, m-1$. La razón es que, si $\text{cl } \Lambda_i \cap \text{cl } \Lambda_{i+1} = \{ \hat{\lambda} \}$, para algún i , el intervalo abierto $\Lambda_i \cup \Lambda_{i+1} \cup \{ \hat{\lambda} \}$, puede reemplazar a ambos intervalos, pues φ será convexa en dicho intervalo. Si no fuera así, podemos encontrar dos puntos $\lambda_i \in \Lambda_i$ y $\lambda_{i+1} \in \Lambda_{i+1}$, y un escalar $\alpha \in]0, 1[$, tal que $\hat{\lambda} = \alpha \lambda_i + (1 - \alpha) \lambda_{i+1}$, y además

$$\phi(\hat{\lambda}) = \varphi(\hat{\lambda}) > \alpha \varphi(\lambda_i) + (1 - \alpha) \varphi(\lambda_{i+1}) \geq \alpha \phi(\lambda_i) + (1 - \alpha) \phi(\lambda_{i+1}),$$

contradiciendo la convexidad de ϕ .

Al ser la función h continua en \mathbb{R}^n , ψ será continua en \mathbb{R} , y aplicando la Proposición 3.19, probaremos que $D_+ \psi$ es una función creciente en \mathbb{R} . Procedamos a calcularla. Teniendo en cuenta las hipótesis (a)-(c), obtenemos:

Si $\lambda \in \cup_{i=1}^m \Lambda_i$, entonces $D_+ \psi(\lambda) = D_+ \varphi(\lambda)$.

Si $\lambda \notin \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$, entonces $D_+ \psi(\lambda) = D_+ \phi(\lambda)$.

Si $\lambda \in \text{bd } \Lambda_i$, para algún i , dependerá de si λ es un extremo a la derecha o a la izquierda. En el primer caso, $D_+ \psi(\lambda) = D_+ \phi(\lambda)$, mientras que en el segundo caso, $D_+ \psi(\lambda) = D_+ \varphi(\lambda)$.

Tomemos dos puntos cualesquiera $\lambda_1 < \lambda_2$. Debemos probar que

$$D_+ \psi(\lambda_1) \leq D_+ \psi(\lambda_2), \quad (3.45)$$

en cada posible caso.

Caso 1. Ambos puntos están en Λ_i , para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entonces es inmediato, pues ψ es el máximo (punto a punto) de dos funciones convexas en Λ_i y, por lo tanto, ψ será convexa en Λ_i .

Caso 2. $\lambda_1 \in \Lambda_i$ y λ_2 es un extremo a la derecha de $\text{cl } \Lambda_i$, para algún $i \in$

$\{1, 2, \dots, m\}$. Demostremos, en primer lugar, que

$$D_- \varphi(\lambda_2) \leq D_+ \phi(\lambda_2). \quad (3.46)$$

Dado que ϕ es una función finito-valorada y cuasipoliédrica, y su representación $\hat{\sigma}$ verifica las hipótesis del Lema 3.4, existe un escalar $\delta > 0$ y un índice $t \in \hat{T}(\lambda_2)$ tal que, si $\lambda_2 < \lambda < \lambda_2 + \delta$, entonces $\hat{T}(\lambda) = \{t\}$. Por lo tanto

$$D_+ \phi(\lambda_2) = \inf_{\lambda > \lambda_2} \frac{\phi(\lambda) - \phi(\lambda_2)}{\lambda - \lambda_2} = \inf_{\lambda_2 + \delta > \lambda > \lambda_2} \frac{\alpha_t(\lambda - \lambda_2)}{\lambda - \lambda_2} = \alpha_t.$$

Por otro lado, para $\lambda < \lambda_2$ (suficientemente cerca, para garantizar que $\lambda \in \Lambda_i$), tenemos que

$$\varphi(\lambda) \geq \phi(\lambda) \geq \alpha_t \lambda - \beta_t = \alpha_t \lambda_2 - \beta_t + \alpha_t(\lambda - \lambda_2).$$

Teniendo en cuenta que $\varphi(\lambda_2) = \phi(\lambda_2) = \alpha_t \lambda_2 - \beta_t$, obtenemos

$$\varphi(\lambda) \geq \varphi(\lambda_2) + \alpha_t(\lambda - \lambda_2).$$

Como $\lambda < \lambda_2$, está claro que

$$\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_2)}{\lambda - \lambda_2} \leq \alpha_t,$$

y podemos concluir que $D_- \varphi(\lambda_2) \leq \alpha_t = D_+ \phi(\lambda_2)$, obteniendo (3.46).

Ahora bien, dado que φ es convexa en Λ_i y continua en \mathbb{R} , de acuerdo con el Corolario 3.5, se cumplirá que

$$D_+ \varphi(\lambda_1) \leq D_- \varphi(\lambda_2),$$

de manera que, haciendo uso de (3.46), se verifica

$$D_+ \psi(\lambda_1) = D_+ \varphi(\lambda_1) \leq D_- \varphi(\lambda_2) \leq D_+ \phi(\lambda_2) = D_+ \psi(\lambda_2),$$

obteniendo la desigualdad (3.45).

Caso 3. λ_1 es un extremo a la izquierda de $\text{cl } \Lambda_i$ y $\lambda_2 \in \Lambda_i$, para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Aplicando de nuevo el Corolario 3.5, obtenemos

$$D_+ \varphi(\lambda_1) \leq D_+ \varphi(\lambda_2).$$

Podemos escribir, por tanto,

$$D_+\psi(\lambda_1) = D_+\varphi(\lambda_1) \leq D_+\varphi(\lambda_2) = D_+\psi(\lambda_2),$$

y obtenemos (3.45).

Caso 4. λ_1 es un extremo a la izquierda y λ_2 es un extremo a la derecha de $\text{cl } \Lambda_i$, para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Podemos obtener la desigualdad buscada, combinando los casos 2 y 3, aplicados a λ_2 y $\tilde{\lambda}$, y a λ_1 y $\tilde{\lambda}$, respectivamente, si tomamos cualquier $\tilde{\lambda}$ que verifique $\lambda_1 < \tilde{\lambda} < \lambda_2$.

Caso 5. $\lambda_1 \in \Lambda_i$ y $\lambda_2 \in \Lambda_{i+1}$, para algún $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Tomemos $\hat{\lambda}$ el extremo a la derecha de $\text{cl } \Lambda_i$ y $\tilde{\lambda}$ el extremo a la izquierda de $\text{cl } \Lambda_{i+1}$. Como $\text{cl } \Lambda_i \cap \text{cl } \Lambda_{i+1} = \emptyset$, tenemos que $\lambda_1 < \hat{\lambda} < \tilde{\lambda} < \lambda_2$.

Utilizando el caso 2,

$$D_+\psi(\lambda_1) \leq D_+\psi(\hat{\lambda}). \quad (3.47)$$

Por otro lado

$$D_+\psi(\hat{\lambda}) = D_+\phi(\hat{\lambda}) \leq D_+\phi(\tilde{\lambda}), \quad (3.48)$$

pues ϕ es una función convexa en \mathbb{R} .

Teniendo en cuenta que, para todo $\lambda_0 > \tilde{\lambda}$, $\lambda_0 \in \Lambda_{i+1}$, se cumple que $\varphi(\lambda_0) \geq \phi(\lambda_0)$, y además $\varphi(\tilde{\lambda}) = \phi(\tilde{\lambda})$, podemos escribir

$$\begin{aligned} D_+\phi(\tilde{\lambda}) &= \inf_{\lambda_0 > \tilde{\lambda}} \frac{\phi(\lambda_0) - \phi(\tilde{\lambda})}{\lambda_0 - \tilde{\lambda}} \leq \inf_{\lambda_0 > \tilde{\lambda}} \frac{\varphi(\lambda_0) - \varphi(\tilde{\lambda})}{\lambda_0 - \tilde{\lambda}} \\ &= D_+\varphi(\tilde{\lambda}) = D_+\psi(\tilde{\lambda}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Finalmente, utilizando el caso 3,

$$D_+\psi(\tilde{\lambda}) \leq D_+\psi(\lambda_2). \quad (3.50)$$

A partir de (3.47), (3.48), (3.49) y (3.50), obtenemos de nuevo (3.45).

Caso 6. $\lambda_1 \in \text{cl } \Lambda_i$ y $\lambda_2 \in \text{cl } \Lambda_j$, donde $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i < j$. Tomemos $\hat{\lambda}$ el extremo a la derecha de $\text{cl } \Lambda_i$ (observar que es posible que $\hat{\lambda} = \lambda_1$), y $\tilde{\lambda}$ el extremo a la izquierda de Λ_j (es posible, así mismo, que $\tilde{\lambda} = \lambda_2$).

Por la convexidad de ϕ y (3.49), obtenemos

$$D_+\psi(\hat{\lambda}) = D_+\phi(\hat{\lambda}) \leq D_+\phi(\tilde{\lambda}) \leq D_+\psi(\tilde{\lambda}).$$

Por lo tanto, en el caso de que $\hat{\lambda} = \lambda_1$ y $\tilde{\lambda} = \lambda_2$, concluimos que se verifica la desigualdad (3.45).

Si fuera $\lambda_1 < \hat{\lambda}$, aplicando el caso 4 o el caso 2, según λ_1 sea o no extremo a la izquierda de Λ_i , respectivamente, tenemos que

$$D_+\psi(\lambda_1) \leq D_+\psi(\hat{\lambda}),$$

y si fuera $\tilde{\lambda} < \lambda_2$, aplicando el caso 4 o el caso 3, según λ_2 sea o no extremo a la derecha de Λ_j , respectivamente, obtenemos

$$D_+\psi(\tilde{\lambda}) \leq D_+\psi(\lambda_2).$$

En cualquier caso, concluimos que

$$D_+\psi(\lambda_1) \leq D_+\psi(\hat{\lambda}) \leq D_+\psi(\tilde{\lambda}) \leq D_+\psi(\lambda_2).$$

Caso 7. $\lambda_1 \in \text{cl } \Lambda_j$ y $\lambda_2 \notin \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$. Tomemos $\hat{\lambda}$ el extremo a la derecha mayor, que verifica que $\hat{\lambda} < \lambda_2$ (es posible que $\hat{\lambda} = \lambda_1$).

A partir del caso 6,

$$D_+\psi(\lambda_1) \leq D_+\psi(\hat{\lambda}). \quad (3.51)$$

Por otro lado,

$$D_+\psi(\hat{\lambda}) = D_+\phi(\hat{\lambda}) \leq D_+\phi(\lambda_2) = D_+\psi(\lambda_2), \quad (3.52)$$

como consecuencia de la convexidad de ϕ . Obtenemos (3.45) a partir de (3.51) y (3.52).

Caso 8. $\lambda_1 \notin \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$ y $\lambda_2 \in \text{cl } \Lambda_j$. Tomemos $\hat{\lambda}$ el menor extremo a la izquierda tal que $\lambda_1 < \hat{\lambda}$ (es posible que $\hat{\lambda} = \lambda_2$). Tenemos

$$D_+\psi(\lambda_1) = D_+\phi(\lambda_1) \leq D_+\phi(\hat{\lambda}), \quad (3.53)$$

y, por (3.49),

$$D_+\phi(\hat{\lambda}) \leq D_+\psi(\hat{\lambda}). \quad (3.54)$$

Considerando el caso 6, tenemos que

$$D_+\psi(\hat{\lambda}) \leq D_+\psi(\lambda_2). \quad (3.55)$$

De nuevo, obtenemos (3.45) a partir de (3.53), (3.54) y (3.55).

Caso 9. $\lambda_1 \notin \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$ y $\lambda_2 \notin \cup_{i=1}^m \text{cl } \Lambda_i$. Tomemos $\hat{\lambda}$ el menor extremo a la izquierda, tal que $\lambda_1 < \hat{\lambda}$. Utilizando el caso 8,

$$D_+\psi(\lambda_1) \leq D_+\psi(\hat{\lambda}), \quad (3.56)$$

y considerando el caso 7,

$$D_+\psi(\hat{\lambda}) \leq D_+\psi(\lambda_2). \quad (3.57)$$

(3.56) y (3.57) nos llevan, finalmente, a la desigualdad (3.45). ■

Ejemplo 3.6 Consideremos la siguiente función, definida en \mathbb{R}^2 ,

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} |x_1| + |x_2|, & \text{si } x_1 x_2 \geq 0, \\ \max\{|x_1|, |x_2|\} + x_1 x_2, & \text{si } x_1 x_2 < 0. \end{cases}$$

Esta función es continua en \mathbb{R}^2 , y convexa en los conjuntos convexos

$$C_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\},$$

$$C_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \right\}.$$

Pero f no es convexa en los conjuntos

$$D_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0, x_2 > 0 \right\},$$

$$D_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 < 0 \right\}.$$

Tomemos, por ejemplo, los puntos $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en D_1 , y su punto medio, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Obtenemos que

$$f\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{4} > \frac{1}{2}f(-1, 2) + \frac{1}{2}f(-2, 3) = -\frac{3}{2}.$$

En el caso de D_2 , podemos tomar los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y, de nuevo, su punto medio, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Buscamos ahora una función finito-valorada, cuasipoliédrica, $g(x_1, x_2)$, tal que

$$f(x_1, x_2) \geq g(x_1, x_2), \quad \text{si } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in C_1 \cup C_2,$$

$$f(x_1, x_2) \leq g(x_1, x_2), \quad \text{si } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D_1 \cup D_2,$$

y además $f(0, 0) = g(0, 0)$.

Es evidente que, por motivo de simplicidad, nos preguntemos primero si nos basta con una función poliédrica, que satisfaga estas condiciones.

Como $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$, si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in C_1 \cup C_2$, tenemos que

$$f(x_1, x_2) \geq |x_1|, \text{ y}$$

$$f(x_1, x_2) \geq |x_2|,$$

lo que implica que $f(x_1, x_2) \geq \max\{x_1, -x_1, x_2, -x_2\}$.

Vamos, por lo tanto, a considerar la función

$$g(x_1, x_2) := \max\{x_1, -x_1, x_2, -x_2\}.$$

Para un punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D_1 \cup D_2$, ocurre que

$$f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2|\} + x_1x_2 < \max\{|x_1|, |x_2|\} = g(x_1, x_2),$$

y además $f(0, 0) = 0 = g(0, 0)$.

Podemos concluir que la función

$$h(x_1, x_2) := \max\{f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)\}$$

es convexa en \mathbb{R}^2 .



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Bibliograf3a

- [1] ANDERSON, E.J., GOBERNA, M.A. y LOPEZ, M.A., *Locally polyhedral linear inequality systems*, Linear Algebra Appl., 270, pp. 231-253, 1998.
- [2] ANDERSON, E.J., GOBERNA, M.A. y LOPEZ, M.A., *Simplex-like trajectories on quasipolyhedral sets*, Mathematics of Operations Research, Vol. 26, No. 1, pp. 147-162, 2001.
- [3] BAIR, J. y FOURNEAU, R., *Etude Geom3trique des Espaces Vectoriels II: Poly3dres et Polytopes Convexes*, Springer-Verlag, Berl3n, 1980.
- [4] BANK, B., GUDDAT, J., KLATTE, D., KUMMER, B. y TAMMER, K., *Non-linear Parametric Optimization*, Akademie Verlag, Berlin, 1982.
- [5] BR3NSTED, A., *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer Verlag, New York, New York, 1983.
- [6] BORWEIN, J.M., *Semi-infinite programming duality: How special is it?*, Semi-infinite Programming and Applications, Edited by A.V. Fiacco and K.O. Kortanek, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, Berlin, Germany, Vol. 215, pp. 10-36, 1983.
- [7] CERNIKOV, S.N., *Linear Inequalities*, Moskow: Nauka, 1968.
- [8] DINH, N., GOBERNA, M.A., LOPEZ, M.A. y SON, T.Q., *New Farkas-type constraint*

- qualifications in convex infinite programming*, aceptado para su publicación en ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 2006.
- [9] FAJARDO, M.D. y LOPEZ, M.A., *Locally Farkas-Minkowski systems in convex semi-infinite programming*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 103, No. 2, pp. 313-335, 1999.
- [10] FAJARDO, M.D. y LOPEZ, M.A., *Some results about the facial geometry of convex semi-infinite systems*, aceptado para su publicación en Optimization, 2006.
- [11] FAJARDO, M.D. y LOPEZ, M.A., *Some results on quasipolyhedral convexity*, aceptado para su publicación en Theory of Programming, 2006.
- [12] FAJARDO, M.D., LOPEZ, M.A. y PUENTE, R., *(Locally) Farkas representations and quasipolyhedrality of a convex function*, enviado a Optimization, 2006.
- [13] GOBERNA, M.A. y LOPEZ, M.A., *Dimension and finite reduction in linear semi-infinite programming*, Optimization, Vol. 25, pp.143-160, 1992.
- [14] GOBERNA, M.A. y LOPEZ, M.A., *Linear Semi-Infinite Optimization*, John Wiley and Sons, Chichester, U.K., 1998.
- [15] GOBERNA, M.A., LOPEZ, M.A. y TODOROV, M.I., *Stability theory for linear inequality systems*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 17, pp. 730-743, 1996.
- [16] HAAR, A., *Über linear ungleichungen*, Acta Math. Szeged, 2, pp. 1-14, 1924.
- [17] HIRIART-URRUTY, J.B. y LEMARECHAL, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer Verlag, New York, New York, 1991.
- [18] KLEE, V.L., *Some characterizations of convex polyhedra*, Acta Math., 102, pp. 79-107, 1959.

- [19] LI, W., NAHAK, C. y SINGER, I., *Constraint qualifications for semi-infinite systems of convex inequalities*, SIAM Journal Optimization, Vol. 11, No. 1, pp. 31-52, 2000.
- [20] LI, C. y NG, K.F., *On constraint qualification for an infinite system of convex inequalities in a Banach space*, SIAM Journal Optimization, Vol. 15, No. 2, pp. 488-512, 2005.
- [21] LOPEZ, M.A. y VERCHER, E., *Optimality conditions for non-differentiable convex semi-infinite programming*, Mathematical Programming, Vol. 27, pp. 307-319, 1983.
- [22] MARCHI, E., PUENTE, R. y VERA DE SERIO, V., *Quasipolyhedral sets in linear semi-infinite inequality systems*, Linear Algebra Appl., 255, pp. 157-169, 1997.
- [23] PHELPS, R.R., *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Springer Verlag, New York, New York, 1993.
- [24] PUENTE, R. y VERA DE SERIO, V., *Locally Farkas-Minkowski linear semi-infinite systems*, Theory of Programming, Vol. 7, pp. 103-121, 1999.
- [25] ROBINSON, S.M., *Convexity and Monotonicity in Finite-Dimensional Spaces*, Springer, 2001.
- [26] ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [27] ROCKAFELLAR, R.T. y WETS, R. J.B., *Variational Analysis*, Springer, New York, New York, 1998.
- [28] VOLLE, M., *Sous-différentiel d'une enveloppe supérieure de fonctions convexes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 317, pp. 845-849, 1993.
- [29] ZHU, Y.J., *Generalizations of some fundamental theorems on linear inequalities*, Acta Math. Sinica 16, pp. 25-40, 1966.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Índice alfabético

Las páginas que aparecen son las correspondientes a la definición del concepto o al enunciado del resultado.

- cara
 - de un conjunto convexo, **12**
 - del conjunto de soluciones, **56**
 - expuesta, **12**
- clausura de una función convexa, **6**
- condición KKT, **31**
- conjugada de Fenchel, **7**
- conjunto
 - afinmente independiente, **11**
 - derivado, **26**
 - monótono, **22**
- conjunto convexo
 - apuntado, **9**
 - cuasipoliédrico, **13**
 - poliédrico, **13**
- conjunto factible, **8**
- cono
 - activo, **24**
 - característico, **25**
 - de direcciones factibles, **14**
 - de los minorantes activos, **93**
 - de recesión, **9**
 - normal, **19**
 - polar, **8**
 - tangente, **19**
- consecuencia, **25**
- convergencia de Painlevé-Kuratowski, **10**
- cualificación de restricciones
 - de Slater, **29**
 - de Slater generalizada, **47**
- derivada direccional, **6**
- dirección
 - de recesión, **9**
 - de un vector, **9**
 - extrema, **12**
- dominio efectivo, **5**
- envoltura convexa, **12**
- epigrafo, **5**
- espacio de linealidad, **9**
- fórmula de Valadier, **21**
- faceta, **14**
- función
 - 1-coerciva, **101**
 - cofinita, **15**
 - convexa, **5**
 - cerrada, **6**
 - finito-valorada, **5**
 - propia, **5**
 - cuasipoliédrica, **95**
 - de recesión, **14**
 - estrictamente convexa, **5**
 - indicadora, **7**
 - poliédrica, **95**
 - semicontinua inferiormente, **6**
 - soporte, **7**
 - subdiferenciable en un punto, **7**
- grafo
 - de una función, **6**
 - de una multifunción, **16**
- índice
 - portador, **58**
 - propio, **58**
- linealidad de un conjunto convexo, **9**
- multifunción
 - cerrada, **23**
 - de las restricciones activas, **34**
 - de las restricciones sup-activas, **42**

- localmente acotada, 23
- monótona, 22
- monótona maximal, 22
- semicontinua superiormente, 23
- polítopo, 13
- punto
 - de Slater, 24
 - expuesto, 12
 - extremo, 12
- rayo expuesto, 12
- representación de una función, 91
- restricción (desigualdad)
 - activa, 24
 - casi sup-activa, 21
 - convexa trivial, 58
 - lineal trivial, 8
 - μ -activa, 46
 - sup-activa, 20
- sistema de restricciones, 8
 - ajustado, 26
 - consistente, 8
- convexas LFM, 32
- convexas trivial, 58
- FM, 25
- lineales LFM, 25
- lineales trivial, 8
- LOP, 26
- sistema homogéneo, 27
- SS-elemento, 24
- subdiferencial
 - de una función, 7
 - de una función en un punto, 7
 - ε -subdiferencial de una función en un punto, 21
- subgradiente, 6
 - ε -subgradiente, 21
- supuesto de rango completo, 27
- Teorema
 - de Brønsted-Rockafellar, 22
 - de Carathédory, 12
 - de Farkas Generalizado, 25
- vector normal, 18

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Comisión de Doctorado

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó otorgar, por UNANIMIDAD a la Tesis Doctoral de Don/Dña. M^{te} DOLORES FAJARDO GOMEZ la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE (10)

Alicante 3 de ABRIL de 2007

El Secretario,

El Presidente,



UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Comisión de Doctorado

La presente Tesis de Dña. M^{te} Dolores Fajardo Gómez ha sido registrada al Folio..... con el n.º 1260-287c del registro de entrada correspondiente. Alicante 3 de abril de 2007

El Encargado del Registro, ¹⁵⁴

