



Memòries del Programa de XARXES-I³CE de qualitat,
innovació i investigació en docència universitària.
Convocatòria 2018-19

Memorias del Programa de REDES-I³CE de calidad,
innovación e investigación en docencia universitaria.
Convocatoria 2018-19

Rosabel Roig-Vila (Coord.)
Jordi M. Antolí Martínez, Asunción Lledó
Carreres, Neus Pellín Buades (Eds.)



Memòries del Programa de Xarxes-I3CE
de qualitat, innovació i investigació en
docència universitària.
Convocatòria 2018-19

*Memorias del Programa de Redes-I3CE
de calidad, innovación e investigación
en docencia universitaria.
Convocatoria 2018-19*

Rosabel Roig-Vila (Coord.), Jordi M. Antolí Martínez, Asunción
Lledó Carreres, Neus Pellín Buades (Eds.)

Memòries de les xarxes d'investigació en docència universitària pertanyent al Programa Xarxes-I3CE d'Investigació en docència universitària del curs 2018-19 / *Memorias de las redes de investigación en docencia universitatira que pertenece al Programa Redes -I3CE de investigación en docencia universitaria del curso 2018-19*

Organització: Institut de Ciències de l'Educació (Vicerectorat de Qualitat i Innovació Educativa) de la Universitat d'Alacant/ *Organización: Instituto de Ciencias de la Educación (Vicerrectorado de Calidad e Innovación Educativa) de la Universidad de Alicante*

Edició / *Edición*: Rosabel Roig-Vila (Coord.), Jordi M. Antolí Martínez, Asunción Lledó Carreres, Neus Pellín Buades (Eds.)

Comité tècnic / *Comité técnico*: Neus Pellín Buades

Revisió i maquetació: ICE de la Universitat d'Alacant/ *Revisión y maquetación*: ICE de la Universidad de Alicante

Primera edició: / *Primera edición*: Novembre 2019

© De l'edició/ *De la edición*: Rosabel Roig-Vila , Jordi M. Antolí Martínez, Asunción Lledó Carreres & Neus Pellín Buades.

© Del text: les autores i autors / *Del texto: las autoras y autores*

© D'aquesta edició: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant / *De esta edición: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la Universidad de Alicante*

ice@ua.es

ISBN: 978-84-09-15746-4

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només pot ser realitzada amb l'autorització dels seus titulars, llevat de les excepcions previstes per la llei. Adreceu-vos a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra. / *Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.*

Producció: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant / *Producción: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la Universidad de Alicante*

EDITORIAL: Les opinions i continguts dels resums publicats en aquesta obra són de responsabilitat exclusiva dels autors. / *Las opiniones y contenidos de los resúmenes publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de los autores.*

158. Búsqueda de errores comunes en la asignatura de Análisis de una variable real I del grado en Física

Larrosa Navarro, Aurora¹; Muñoz Pérez, María de la Paz²; Navarro Climent, José Carlos³;

San Antolín Gil, Ángel⁴; Tarrío Antón, Antonio⁵.

aln21@alu.ua.es;¹ mpazmunoz@ua.es;² Jc.navarro@ua.es;³

angel.sanantolin@ua.es;⁴ ata23@alu.ua.es;⁵

Departamento de Matemáticas

Universidad de Alicante

RESUMEN

La investigación a realizar durante la duración de la red será, la de buscar los diferentes y principales problemas que, los alumnos encuentran en las principales nociones introducidas durante el curso, así como, los errores más comunes realizados por los alumnos en las diferentes pruebas de evaluación continua desarrollada por la signatura en cuestión. También se realizarán trabajos bibliográficos para proponer nuevos ejercicios/problemas para que los alumnos puedan mejorar la comprensión de los conceptos tratados. Además, se realizarán resúmenes escritos con las diferentes formas de resolución planteadas por los alumnos para que éstos puedan ver las diferentes formas de poder abarcar cada uno de los problemas planteados en la evaluación continua.

Palabras clave: Docencia en matemáticas, Error, revisión, aprendizaje

1. INTRODUCCIÓN

Desde un punto de vista filosófico, el concepto de error, se entiende como la equivocación en un acto. Esta noción, llevada al ámbito de las ciencias matemáticas, se define como error de cálculo o procedimental, es decir, la inexactitud o equivocación al realizar una operación matemática. Estos errores de cálculo pueden ser debidos a una gran cantidad de factores como pueden ser, la falta de concentración, cansancio, el mal uso de las calculadoras, etc. Si continuamos en el ámbito de las ciencias matemáticas, podemos encontrar otros tipos de errores como pueden ser los errores de aproximación, de medición o de experimentalidad.

Existe otro concepto de error, menos estudiado que los anteriormente mencionados, con el que queremos también trabajar en esta experiencia, se denomina error de concepto. Curiosamente, el ámbito principal donde aparece este tipo de error, es el ligado con el área de la psicología. Una definición podría ser “Inexactitud o equivocación al producir en la mente una idea sobre algo”.

Obviamente, si pensamos y/o trabajamos en matemáticas como una herramienta de cálculo, parece claro que la noción de error de concepto no tenga ningún sentido ni merezca ser objeto de estudio, ya que los principales errores que pueden aparecer, son por fallos en las cuentas o por el mal uso de algunos métodos mecánicos de cálculo.

Sin embargo, cuando hablamos de nociones matemáticas, es fundamental que cada persona que necesita interiorizar estos conceptos abstractos lo haga de una manera individual, pausada, sosegada y, sobre todo lo adquiera de una manera correcta. Así, cuando posteriormente necesite el uso de estas nociones en futuros razonamientos lógicos, esta adecuada adquisición de los conceptos, le facilite a su vez la comprensión y la buena abstracción de las nuevas definiciones matemáticas. Es, en esta parte del conocimiento matemático, donde aparece de manera natural la noción de error de concepto.

Los alumnos del primer curso de las carreras de ciencias se encuentran, desde el punto de vista de las matemáticas, ante una forma muy diferente de tratar los diferentes conceptos y de las principales competencias. Esto también conlleva que la forma en que se deben aprender también sea diferente y requiera de un afianzamiento de todos estos conocimientos. Es importante remarcarles e insistirles que una gran cantidad de los conceptos que se cuentan en estos primeros cursos les van a hacer falta en cualquier asignatura de cualquier curso del grado que están estudiando y es por eso por lo que no basta con engullir, aprobar y olvidar.

1.1 Problema o cuestión específica del objeto de estudio.

La cuestión principal que queremos tratar en este trabajo es, la detección de los errores más cometidos por los alumnos de la asignatura “Análisis de una variable real I”, del grado en Física de la Universidad de Alicante. Esta asignatura es obligatoria y se imparte en el primer semestre del primer curso del grado.

La llegada a la universidad para muchos alumnos supone un cambio metodológico importante. Es el primer curso el fundamental para la adquisición y consolidación de las competencias y habilidades necesarias para poder concluir con éxito su carrera universitaria.

Desde el punto de vista de las matemáticas todo este proceso se acentúa debido a los cambios procedimentales y a las diferentes necesidades de los conceptos que se les quiere mostrar a los alumnos. Es decir, se trata de cambiar la idea de cómo resolver un problema a el por qué ese método funciona. Se debe en definitiva dejar de ver los conceptos matemáticos como meras herramientas de cálculo para pasar a disfrutar de ellas, hacerlas propias y ser capaces de justificar su buen y mal uso.

Por todo lo anterior, se observa en los últimos años una dificultad añadida a todos estos cambios. Esta es la dificultad que tienen los alumnos en este nuevo proceso de adquisición de conocimientos.

Pensamos que una de las causas es la falta de entrenamiento y la inseguridad en el cálculo mental. Esto es, las calculadoras y otras herramientas tecnológicas les han enriquecido en ciertos aspectos, pero han contribuido a una dependencia absoluta a la hora de utilizar y comprender ciertos conceptos básicos como, por ejemplo, las razones trigonométricas. Estas dudas hacen que el repaso y comprensión de las cuentas, ocupe un lugar cada vez mayor en detrimento del tiempo dedicado a la adquisición y comprensión de los conceptos matemáticos.

Otra causa que creemos puede colaborar en esta dificultad a la hora de adquirir conceptos es la falta de entrenamiento. Observamos un déficit de este trabajo en las etapas educativas previas a la universidad, como se desprende de las propuestas de ejercicios que año tras año se repiten en las pruebas de acceso a la universidad.

Por todo esto pensamos que existe un problema de velocidad de adquisición de conceptos nuevos y un déficit de conocimientos previos a la llegada a la universidad.

1.2 Revisión de la literatura.

El estudio sobre el concepto de error en la literatura se lleva realizando desde hace mucho tiempo. Desde el punto de vista de las matemáticas no ha sido estudiado con tanta profundidad. Es cierto que el concepto de error de cálculo ha sido de interés sobre todo en las primeras etapas de la educación, pero queda claro que ha sido mucho menos estudiado a nivel universitario.

Varios han sido los autores que han clasificado los errores en matemáticas, estas calificaciones las realizan desde diferentes tipos de vista como puede ser, a partir del procesamiento de la información [14], mediante una teoría de esquemas [6], clasificaciones empíricas [10], etc.

Si nos centramos en los errores conceptuales podemos leer [10] y [7] que hablan de errores ocasionados por deducciones erróneas, fallos que se producen por nociones mal comprendidas y errores provocados por el lenguaje matemático. En [2], además de los dos primeros errores introducidos en [10], analiza los errores que nacen de las propiedades y reglas aritméticas. Por último, mencionaremos a [6], que habla de los conocimientos previos como estimulante de algunos errores, y de los provocados por las representaciones inadecuadas de la información.

Y, centrados en los errores de cálculo o procedimentales, queremos destacar el artículo [15], que, centrándose en temas de álgebra en los alumnos de secundaria estudia los diferentes errores de manipulación en expresiones matemáticas; y el artículo [12], que se centra en los errores y dificultades en el concepto de dimensión.

Centrados en la docencia universitaria podemos encontrar trabajos centrados en los primeros cursos, como [16] y [17]. Estos trabajos los utilizaremos en el apartado de Conclusiones para estudiar y comparar sus resultados con los obtenidos en nuestra red de docencia. Además, otras experiencias con los alumnos de asignaturas de matemáticas en el primer año de universidad podemos encontrar en [6] y [10]. En [1] se hace un estudio de las dificultades en conceptos matemáticos, pero para los estudiantes de magisterio mientras que en [3] se hace un estudio de errores y dificultades, pero para conceptos estadísticos básicos.

Por último, queremos señalar algunos textos donde se pueden encontrar todos los temas implicados en esta signatura como son [4], [7], [11] y [17].

1.3 Propósitos u objetivos

Los propósitos de esta red son varios. El principal es la detección de errores más repetidos por

los alumnos del primer curso del grado de Física en la asignatura “Análisis de una Variable Real I”. Esta asignatura se imparte en el primer semestre del curso.

Además, por la metodología de la red, los alumnos participantes, que son más de los que aparece en la red, se benefician de varias maneras como pueden ser la mejora en la comprensión de los conceptos que trabajan, acercamiento al profesorado, la implicación con el desarrollo de la asignatura, etc.

El objetivo final es intentar que los alumnos, que han sido los que han detectado los errores, sean capaces de ayudar a sus compañeros, mediante la búsqueda bibliográfica de problemas y ejercicios. Esto es preparar hojas de ejercicios que focalicen en los errores encontrados previamente.

2. MÉTODO

La asignatura en la que ha trabajado esta red se denomina “Análisis de una variable real I”. Esta asignatura tiene una evaluación continua que consta de tres pruebas escritas cuyas puntuaciones son de dos, tres y cinco puntos respectivamente.

Esta red de docencia está integrada por tres profesores de la Universidad de Alicante y dos alumnos que imparten la asignatura durante este curso 2018/2019.

Los instrumentos utilizados para nuestro objetivo han sido, por un lado, los exámenes realizados por los alumnos y por otro, toda la posible bibliografía de la que dispone, tanto el Departamento de Matemáticas como las bibliotecas de la Universidad de Alicante.

Tras la primera de las pruebas escritas se eligió a los dos alumnos que, por orden de nota, quisieron participar en esta red de docencia. En realidad, participaron de manera voluntaria muchos más, pero solo pudimos apuntar a dos en esta experiencia. Las labores fundamentales de los alumnos fueron la de una vez corregidos los exámenes, buscar los errores más comunes que aparecían en cada uno de los ejercicios, escribir todas las diferentes maneras de resolver los ejercicios de manera perfecta que sus propios compañeros habían realizado y por último buscar en la bibliografía diferentes ejercicios que pudieran ayudar a la subsanación de estos errores encontrados. Mientras tanto los diferentes profesores irían coordinando todas estas labores realizadas por los alumnos. Este proceso se repitió después de cada una de las pruebas, aunque hemos de destacar que, las vacaciones navideñas justo después de la tercera prueba, los exámenes posteriores, y el comienzo del nuevo semestre, han hecho que la tercera prueba no se revisara, por los alumnos, en su totalidad.

3. RESULTADOS

Por la manera de proponer nuestra experiencia expondremos los resultados dando una muestra de los trabajos realizados por los alumnos. Mostraremos una selección de preguntas de las tres pruebas realizadas, con el conjunto de errores encontrados y una tabla con las puntuaciones obtenida por los alumnos en ese ejercicio. También indicaremos la cantidad de formas por las que los alumnos han conseguido llegar a una resolución perfecta o casi correcta.

Antes de cada pregunta indicamos el número y título del tema en el que se trabaja y la noción principal que queremos examinar. En concreto mostraremos seis experiencias, tres corresponden al tema 1, dos al tema 2 y una al tema 4. Esta elección se debe, principalmente, a la importancia matemática de los errores encontrados.

1. Tema 1. Los números Reales. El valor absoluto.

1.1.ENUNCIADO.

Sean $0 < a < b$ números reales. Dar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| + |x - b| < a + b\}$.

1.2.Contexto.

Aunque este ejercicio no requiere de ningún concepto novedoso para el alumno, se observa en general que, el único concepto abstracto que deben manejar con cierta soltura para resolverlo correctamente, el valor absoluto de un número real, no lo tienen bien adquirido y, al dejarles parámetros arbitrarios, no se detecta la soltura necesaria para comprender perfectamente lo que pide el ejercicio.

1.3.Métodos de resolución empleados por los alumnos.

Tres fueron los diferentes métodos empleados por los alumnos para concluir el ejercicio de una manera correcta.

1.4.Errores más comunes.

De entre los errores conceptuales encontrados en este ejercicio quisiéramos destacar la mala comprensión del concepto de valor absoluto de un número real. La mayoría de los restantes errores los consideramos de cálculo y son:

- Propiedades de las desigualdades. En concreto que cuando se multiplica una desigualdad por un número no positivo la desigualdad cambia.
- No tener en cuenta las condiciones dadas en el enunciado.

- Errores en la expresión del conjunto. Es decir, falta de soltura a la hora de expresar el conjunto con un lenguaje matemático, claro, conciso e inequívoco.
- Falta de casos. En general no se observa soltura al trabajar con parámetros.

2. Tema 1. Los números Reales. Elementos notables de un conjunto.

2.1.ENUNCIADO.

Sean $A \subset B$ dos subconjuntos no vacíos y acotados de la recta real. Demostrar que

$$\text{Inf } A \geq \text{Inf } B.$$

2.2.Contexto.

Este ejercicio trata de observar si los alumnos manejan, comprenden y saben trabajar con los conceptos relacionados con los elementos notables de un conjunto. En concreto con las nociones de supremo, ínfimo, cota superior y cota inferior de un conjunto no vacío de la recta real. Es decir, las principales nociones son todas abstractas, aunque para trabajar con ellos es importante manejar con soltura las desigualdades numéricas. Estos conceptos son prácticamente nuevos para los alumnos por lo que son muy trabajados en las clases, tanto teóricas como prácticas.

2.3.Métodos de resolución empleados por los alumnos.

Una buena noticia que nos dio este estudio fue que el ejercicio, a priori, más abstracto de la primera prueba se llegó a concluir de manera correcta de hasta cuatro formas diferentes.

2.4.Errores más comunes.

Dado el carácter meramente conceptual del ejercicio los principales errores fueron conceptuales y los únicos errores no conceptuales fueron de cálculo al manejar desigualdades numéricas. De entre los errores conceptuales destacamos:

- Concepto de supremo e ínfimo.
- Concepto de cota superior e inferior.
- Saber relacionar los conceptos de cota inferior e ínfimo.
- Comprender la relación existente con el concepto de inclusión de conjuntos y los elementos notables de éste.

3. Tema 1. Los números Reales. El método de Inducción.

3.1.ENUNCIADO.

Demostrar por inducción que para cualquier número natural n , se verifica:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

3.2.Contexto.

Con este ejercicio se pretende que los alumnos demuestren el conocimiento del método de inducción matemática, el manejo de desigualdades y su solvencia a la hora de acotar. En este caso aparecen conceptos abstractos como la noción de inducción y prácticos como las desigualdades y el cálculo numérico para obtener dichas acotaciones y desigualdades. El principio de inducción se ve por primera vez en el primer curso de varias asignaturas del grado de física, por lo que los alumnos se enfrentan por primera vez, en una prueba calificada, a un ejercicio de este tipo.

3.3.Métodos de resolución empleados por los alumnos.

En general todos los alumnos realizaron el ejercicio de una única manera, aunque también tenemos que destacar que un porcentaje pequeño utilizaron otro método diferente para llegar a la tesis deseada. Esto es, todos los que concluyen correctamente el ejercicio aplican perfectamente la hipótesis de inducción y es para llegar al caso $n+1$ cuando aparece esa bifurcación de caminos, antes mencionada.

3.4.Errores más comunes.

Claramente se trata de un ejercicio de cálculo por lo que los únicos errores conceptuales que pueden aparecer son los relacionados con el método de inducción matemática. De estos destacamos:

- Errores al aplicar la hipótesis de inducción.
- No saber qué se tiene que buscar para poder utilizar la hipótesis de inducción.

Aunque en el límite entre los errores conceptuales y los de cálculo nos gustaría mencionar un error muy común que sería la falta de comprensión de lo que quiere decir la expresión del enunciado. Y por último los errores de cálculo a destacar serían

- Error al sustituir el caso $n=1$ y también en el caso $n+1$.
- Errores al sumar fracciones.
- Una vez obtenido el caso $n+1$ y después de usar correctamente la hipótesis de inducción no saber regresar para obtener la resolución perfecta del ejercicio.

4. Tema 2. Sucesiones de números reales.

4.1.ENUNCIADO.

Sea $(x_n)_n$ la sucesión de números reales de término general

$$x_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}.$$

Demostrar:

a) $x_n \leq \frac{n^2+n}{2(n^2+1)}$

b) $x_n \geq \frac{n^2+n}{2(n^2+n)}$

c) Deducir de los apartados anteriores que la sucesión es convergente.

4.2.Contexto.

Los objetivos principales de este ejercicio son el estudio y relación de las nociones, monotonía, acotación y convergencia. Casi todas estas nociones son trabajadas desde el punto de vista de las funciones en las etapas educativas anteriores. Desde el punto de vista teórico se trata de un ejercicio conceptual con bastante cálculo por los conceptos que se deben manejar, así como por los cálculos que se deben realizar para conseguir hacer acotaciones eficaces que nos ayuden a poder concluir con éxito el ejercicio.

4.3.Métodos de resolución empleados por los alumnos.

Fueron exactamente dos las ideas utilizadas por los alumnos para realizar de una manera perfecta este ejercicio.

4.4.Errores más comunes.

Debemos destacar que los alumnos que consiguieron realizar sin errores de cálculo las diferentes acotaciones, tenían bien interiorizados todos los aspectos teóricos necesarios para poder acabar deduciendo el resultado final. De los errores conceptuales queremos destacar

- Utilizar el álgebra de los límites de manera incorrecta.
- Aplicar mal la definición de límite de una sucesión numérica.

Por todo lo mencionado anteriormente, tenemos que los fallos que aparecen en este ejercicio son casi todos errores de cálculo. De entre ellos queremos destacar:

- Malas acotaciones.
- Sumar fracciones sumando numeradores y denominadores.
- Usar mal el principio de inducción.

- No usar bien la propiedad distributiva, es decir no saber utilizar correctamente la propiedad de sacar factor común.

5. Tema 2. Cálculo de límites.

5.1.ENUNCIADO.

Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(\left(\frac{4}{n} \right)^2 + \left(\frac{8}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{4n}{n} \right)^2 \right),$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!}$

5.2.Contexto.

El concepto de límite, aunque los alumnos piensan que no es nuevo para ellos, nosotros si lo consideramos como un concepto desconocido para ellos ya que, en la mayoría de los casos lo reducen a una mera sustitución. Además, los profesores de la red lo consideramos como uno de los conceptos más necesarios y fundamentales para la buena estructuración mental de las principales nociones que acompañan esta asignatura. Además del concepto de límite aparece el concepto de factorial de un número natural y una de las formas de resolución requiere del método de Stolz que a su vez requiere de un buen manejo del concepto de sucesión.

5.3.Métodos de resolución empleados por los alumnos.

En la resolución del primer límite se utilizaron dos métodos para concluir perfectamente el cálculo mientras que el segundo límite se resolvió en todos los casos mediante el método de Stolz.

5.4.Errores más comunes.

Dado el carácter meramente conceptual del ejercicio los principales errores fueron conceptuales y los únicos errores no conceptuales fueron de cálculo al manejar desigualdades numéricas. De entre los errores conceptuales destacamos:

- Concepto de supremo e ínfimo.
- Concepto de cota superior e inferior.
- Saber relacionar los conceptos de cota inferior e ínfimo.
- Comprender la relación existente con el concepto de inclusión de conjuntos y los elementos notables de éste.

6. Tema 4. Derivabilidad de las funciones reales. Optimización.

6.1.ENUNCIADO.

Sea $g(x)=(1-x)^n(1+x)^{2n}$, con n un número natural cualquiera. Obtener los máximos y los mínimos absolutos de la función g en el intervalo de la recta real $[0,1]$. Deducir que para todo número natural n existen dos valores distintos a,b pertenecientes al intervalo $[0,1]$ verificando que $g(a)=g(b)=10/9$.

6.2.Contexto.

Este ejercicio pertenece a la tercer y última prueba por lo que el temario ya estaba totalmente terminado. Esto significa que todos los conceptos introducidos durante cuatro meses se podían utilizar, relacionar y reflexionar para poder concluir el ejercicio, fundamentalmente requería de los conceptos de función, derivada, extremos, etc. y relaciones entre varios de estos conceptos, además demandaba el uso de alguno de los teoremas importantes del tema de continuidad.

Métodos de resolución empleados por los alumnos.

En este caso todos los alumnos que hicieron el ejercicio completamente correcto eligieron el mismo camino.

6.3.Errores más comunes.

A pesar de ser un ejercicio con temática de bachillerato, (salvo quizá el último apartado), el uso de parámetros y el uso de la propiedad distributiva para el cálculo de los puntos críticos parece poner en aprietos a un gran número de alumnos. Los errores conceptuales que más se repiten son

- No comprender bien el significado de extremo relativo y no saber relacionarlo con los conceptos de crecimiento y de decrecimiento.
- No utilizar el análisis lógico para concluir el último apartado.
- No usar los teoremas dados en teoría para poder concluir el ejercicio.

Y de los errores de cálculo mostramos los siguientes

- A la hora de calcular los puntos críticos se cometen errores de cálculo.
- A pesar de haber hecho bien el cálculo de la derivada no se consigue obtener todos los puntos críticos; principalmente por la falta de práctica con la propiedad distributiva o lo que también se conoce como “sacar factor común”.

Una vez analizados todos los errores mostrados en estas seis experiencias juntos con los errores de los otros ejercicios que no hemos mostrado en esta memoria, se realizarán unas

hojas de ejercicios con la intención de facilitar a los alumnos nuevas posibilidades de enfrentarse a los errores cometidos en las pruebas de evaluación continua. Además, estas hojas podrán servir a futuros compañeros de grado.

Por último para ayudarnos a visualizar de forma diferente el trabajo dividimos las puntuaciones, de todos los ejercicios estudiados en esta red, en cuatro grupos, ejercicio perfecto ($P=10$), ejercicio muy bien ($5 < P < 10$), ejercicio realizado regular ($2.5 < P < 5$) y ejercicio mal realizado ($P < 0.25$) y mediante una tabla mostramos el porcentaje de alumnos que se encuentran en cada uno de ellos para así, poder comprobar de manera rápida los ejercicios que han tenido unos peores resultados y poder focalizar en sus errores por encima de otros. Así tenemos

	Número de alumnos	Ejercicio perfecto 10 puntos.	Puntuación entre 5 y 10.	Puntuación entre 2.5 y 5.	Puntuación por debajo de 2.5.
Ejercicio 1	76	30.26%	23.68%	19.74%	26.32%
Ejercicio 2	76	18.42%	10.53%	30.26%	40.79%
Ejercicio 3	76	6.58%	19.74%	32.89%	40.79%
Ejercicio 4	76	3.95%	11.84%	43.42%	40.79%
Ejercicio 5	70	12.85%	38.57%	11.43%	37.15%
Ejercicio 6	58	3.45%	20.69%	39.66%	36.20%

Tabla 1. Porcentaje de alumnos en relación con la puntuación de cada ejercicio.

4. CONCLUSIONES.

Desde el punto de vista del profesorado estamos satisfechos por la manera de involucrarse los alumnos, tanto los que forma parte de la red, como los alumnos que han querido participar de una manera totalmente voluntaria, sin ninguna contraprestación y con el único beneficio de poder observar y aprender de los errores cometidos por ellos y por sus compañeros. Gracias a este trabajo los profesores que integramos esta red tenemos ahora, de primera mano, una información importantísima a la hora de plantear la asignatura en años venideros. En definitiva hemos aprendido de los errores de nuestros alumnos. También pensamos que los alumnos que han querido participar han tenido una experiencia de aprendizaje satisfactoria y sobre todo les ha servido para poder ir creciendo con el desarrollo de la asignatura.

Desde el punto de vista de los alumnos participantes en la red la experiencia de trabajar codo con codo con el profesorado que conforma la red ha resultado ser enriquecedora para su conocimiento de las herramientas de cálculo y razonamiento matemático, así como para la mejora de su habilidad a la hora de llevar a cabo ejercicios que requieran del uso de dichas herramientas. También consideran que a los estudiantes implicados en esta red les ha permitido asimilar mejor los conceptos de la asignatura así como conocer los errores más frecuentes que cometen los alumnos para así evitarlos en un futuro.

A nivel general, en opinión de los estudiantes, esta investigación permite a los profesores conocer directamente los problemas que atraviesan los alumnos que se enfrentan por primera vez a esta asignatura. Esta información puede ser utilizada por los profesores para comprender el salto cualitativo que supone el paso del bachillerato a la universidad, con el objetivo de mejorar la adaptación de los alumnos a la nueva manera de pensar que requiere esta asignatura.

Por último, queremos destacar la dificultad para poder contrastar nuestros resultados con estudios parecidos. Los únicos trabajos, de los que tenemos constancia, y a los que podemos hacer referencia son [15] y [16]. En estos trabajos se estudian los errores más comunes que cometen los alumnos de esta misma asignatura, pero en el grado de Matemáticas, aunque únicamente trabaja con los temas 1 y 2.

Además de los errores de cálculo los dos estudios coinciden en una gran cantidad de diferentes errores como son, los errores de razonamiento, falta de comprensión en el método de inducción, no manejar con soltura el concepto de monotonía, no dominar los elementos notables de un conjunto, falta de notación matemática, errores al trabajar con desigualdades, mala aplicación de la propiedad distributiva, errores en las definiciones fundamentales y no ser capaces de relacionar diferentes conceptos para concluir los ejercicios.

5. TAREAS DESARROLLADAS EN LA RED

PARTICIPANTE DE LA RED	TAREAS QUE DESARROLLA
JOSE CARLOS NAVARRO CLIMENT, PROFESOR TITULAR DE ESCUELA UNIVERSITARIA	<ol style="list-style-type: none">1. Coordinador de la red.2. Preparación de las pruebas.3. Realización y revisión de la Memoria.4. Búsqueda de ejercicios.5. Revisión de los ejercicios.
LARROSA NAVARRO, AURORA, ALUMNA	<ol style="list-style-type: none">1. Revisión de los ejercicios.2. Realización y revisión de la Memoria.3. Búsqueda de ejercicios.
MUÑOZ PÉREZ, MARÍA DE LA PAZ, PROFESORA ASOCIADA	<ol style="list-style-type: none">1. Preparación de las pruebas.2. Realización y revisión de la Memoria.3. Búsqueda de ejercicios.
SAN ANTOLÍN GIL, ÁNGEL, PROFESOR TITULAR DE UNIVERSIDAD	<ol style="list-style-type: none">1. Preparación de las pruebas.2. Realización y revisión de la Memoria.3. Búsqueda de ejercicios.
TARRIÑO ANTÓN, ANTONIO, ALUMNO	<ol style="list-style-type: none">1. Revisión de los ejercicios.2. Realización y revisión de la Memoria.3. Búsqueda de ejercicios.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alguacil de Nicolás, M., Boqué Torremorell, M.C., Pañellas Valls, M., (2016) Dificultades en conceptos matemáticos de los estudiantes para maestro. *International Journal of developmental and education Psychology*, volumen 1 (1), 419-439.
- [2] Astolfi, J. P. (1999). El error, un medio para enseñar. Sevilla: Diada.
- [3] Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes P., Vallecillos, A., (2002). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *Internation Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, vol 25(4), 527-547
- [4] Burgos, J. (2007) Cálculo infinitesimal de una variable, Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España.

- [5] Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.
- [6] Dubon, E.; Navarro, J.C.; Pakhrou, T.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2014) Estudio de las deficiencias matemáticas en los alumnos de nuevo ingreso. En *La producción científica y la actividad de innovación docente en proyectos de redes*, pp. 2717-2730, Editorial Universidad de Alicante.
- [7] Esteley, C. y Villarreal, M. (1990). *Categorización de errores en Matemática . XIII REM*. San Luis.
- [8] Fernández-Viña, J.A. (1992). *Análisis matemático. V.1. Cálculo infinitesimal*, Madrid: Tecnos.
- [9] Guerrero Benavides, J.I., Castillo Molina, E.J., Chamorro Quiroz, H.G., Isaza de Gil, G. (2013) El error como oportunidad de aprendizaje desde la diversidad en las prácticas evaluativas. *Plumilla Educativa*, volumen 1, 361-381.
- [10] Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. e Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- [11] Navarro, J.C., Segura, L., Sepulcre, J.M. (2010). About questionnaires as an active teaching method, en *INTED2010 Proceedings CD*, pp. 2137-2142, International Association of technology, education and development (IATED).
- [12] Navarro, J.C., Sepulcre, J.M., (2013) Anàlisi d'una variable real I, *Materials Docents en Valencià*, Universitat d'Alacant, núm. 144.
- [13] Páez Ortégón, J.E., Orjuela Osorio, C.P., Rojas Morales, C.E., (2008) El concepto de dimensión: errores y dificultades. *9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.
- [14] Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*. Vol 1 (1), 16-20.
- [15] Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 311-322.
- [16] Sepulcre, J.M., *Detección de errores conceptuales y operativos cometidos por los alumnos en una primera asignatura de análisis matemático- Parte I* (2017). Disponible en <http://hdl.handle.net/10045/70868>.

[17] Sepulcre, J.M., Detección de errores conceptuales y operativos cometidos por los alumnos en una primera asignatura de análisis matemático- Parte II (2017). Disponible en <http://hdl.handle.net/10045/71082>.

[18] Spivak, M. (2008) Calculus, New Cambridge: Cambridge University Press.