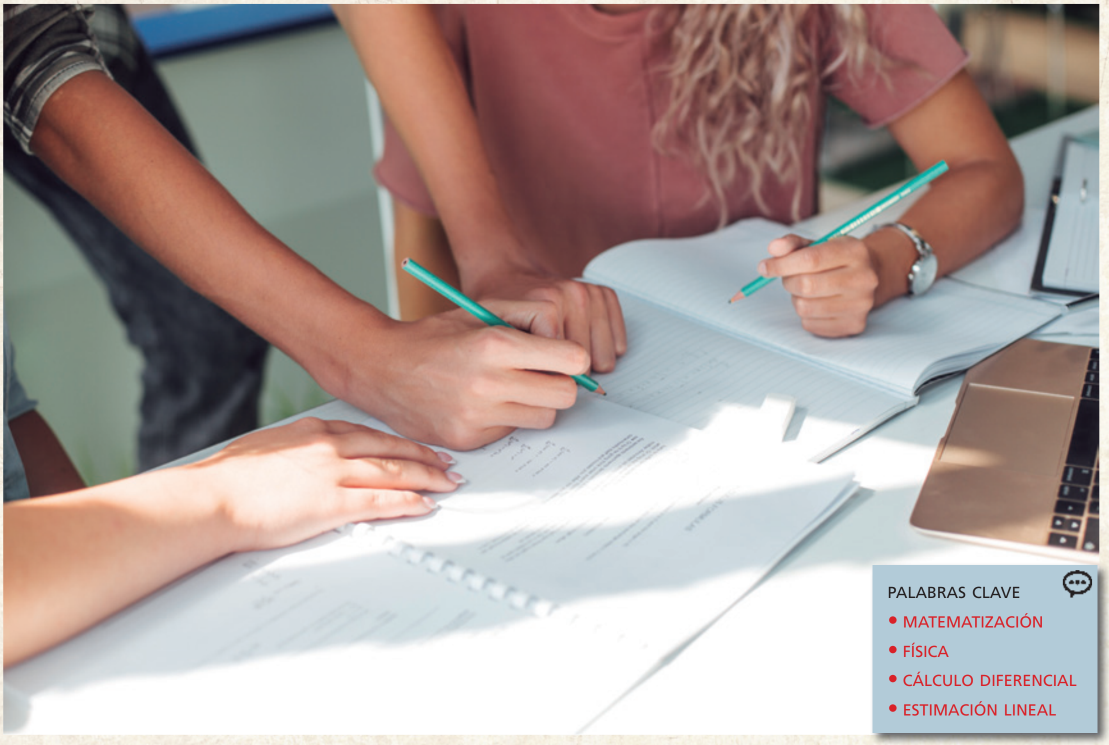
Significado y uso de la diferencial

Ayudando a conectar el mundo físico y matemático

AA.VV.

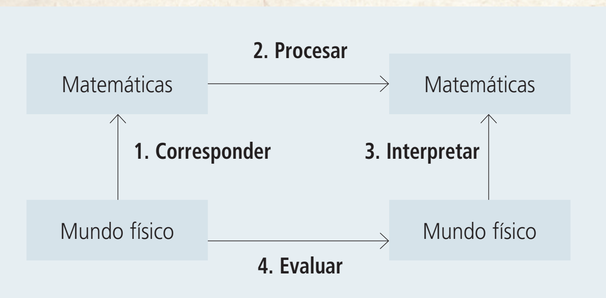
A través de dos ejemplos de la enseñanza de la física, se muestra el significado asignado a la diferencial y su relación con los conceptos de derivada e integral, con la intención de hacer efectivo el proceso de matematización en la física.



PALABRAS CLAVE
- MATEMATIZACIÓN
- FÍSICA
- CÁLCULO DIFERENCIAL
- ESTIMACIÓN LINEAL

El uso de las matemáticas en la ciencia ha sido descrito por Redish (2006) mediante un modelo de cuatro pasos (cuadro 1) que hemos llamado *proceso de matematización*. Tomando como referencia ese modelo, el uso habitual del cálculo diferencial en la enseñanza de la física es claramente deficiente, pues limita el paso 1 a escribir expresiones matemáticas sin justificación ni significado preciso, de manera que el paso 2 se reduce a un tratamiento algorítmico de esas expresiones; el resultado de ese tratamiento, avalado por el *rigor matemático*, se acepta sin más, ignorando los pasos 3 y 4.

Estas deficiencias en la enseñanza han sido puestas de manifiesto por la investigación didáctica (López-Gay, Martínez Torregrosa y Martínez Sáez, 2015), confirmando también que los estudiantes, desde el bachillerato a la universidad, no saben cuándo ni por qué han de usar el cálculo diferencial, desconocen el significado de expresiones diferenciales,[1] así como el papel de la diferencial dentro de la derivada y la integral (López-Gay, 2002). Se trata de un uso algorítmico en el que los estudiantes aprenden muy pronto que lo que se espera de ellos no es la comprensión del cálculo, sino su uso mecánico, como puede comprobarse en el fragmento de entrevista realizada sobre la base de un problema de física resuelto:



Cuadro 1. Modelo del uso de las matemáticas en la ciencia

ENTREVISTADOR: ¿Cuál es el significado del término dm?

JUAN (*alumno brillante de bachillerato*): Pues trocitos muy chiquitillos de la… de la masa. […] No lo tengo claro, la verdad, yo sé hacer integrales, pero no me he quedado muy bien con lo que son las diferenciales que aparecen. Lo veo escrito, pero no sé lo que son […]. Y para qué voy a preguntar, si me van a decir: «esto son los trocitos chiquititos».

DIFERENCIAL Y MATEMATIZACIÓN EN FÍSICA

Para superar estas deficiencias, hemos analizado las distintas concepciones de la *diferencial* que se utilizan en la enseñanza de las matemáticas y de la física. Nuestro interés en facilitar el proceso de matematización nos ha llevado a seleccionar la concepción basada en la definición de Fréchet en 1911 (citado por Artigue, 1989, p. 34), resaltando dos ideas:

- *Estimación lineal*. df es una aproximación de la variación de f (en adelante, Δf) que consiste en suponer que Δf cambia uniformemente respecto a Δx, sin referencia alguna al valor grande o pequeño de Δx, Δf, df o $(\Delta f - df)$. Así, en la expresión: $df = M \cdot dx$, dx es un Δx (no hay diferencia para el caso de la variable independiente) y df es una aproximación del Δf que consiste en suponer que M se mantiene constante durante ese Δx.
- *Condición adicional.* De las muchas estimaciones lineales posibles, solo es válida la que cumple que $(\Delta f\text{-}df)$ tiende a cero más rápido que Δx. Esa condición es equivalente a exigir que el cociente diferencial sea igual a la derivada ($df/dx = f'$), o que la suma de Riemann de las aproximaciones coincida con el incremento ($\int df = \Delta f$) (López-Gay, Martínez Torregrosa y Martínez Sáez, 2015). El cumplimiento de esa condición, a veces, debe ser aceptado como hipótesis.

En los apartados siguientes nos limitaremos a enunciar y comentar brevemente el tipo de actividades que realizamos usando esta concepción. En el primer tópico se resalta la idea de estimación lineal y en el segundo la naturaleza hipotética de la diferencial.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Después de estudiar el movimiento uniforme ($\Delta e = v \cdot \Delta t$, siendo *e* la posición), planteamos la siguiente actividad:

En el instante t = 3 la rapidez de un coche es de 15 m/s. Explica el significado de este dato y calcula el desplazamiento durante los 5 segundos siguientes. (Solo al final, añadimos:) ¿Y si la rapidez cambia continuamente durante ese intervalo?

El resultado obtenido, 75 m, es una estimación de lo que se desplazaría si *e* cambiase de forma uniforme, es decir, si la rapidez se mantuviese constante, lo que se identifica con *de* (imagen 1), introduciendo la concepción de diferencial como estimación lineal. Se discute en qué condiciones *de* será mayor o menor que Δe, y se interpreta el significado de $v = 15$ *m/s*: lo que cambiaría la posición cada segundo a partir de $t = 3$ *s*, si la rapidez se mantuviese constante.

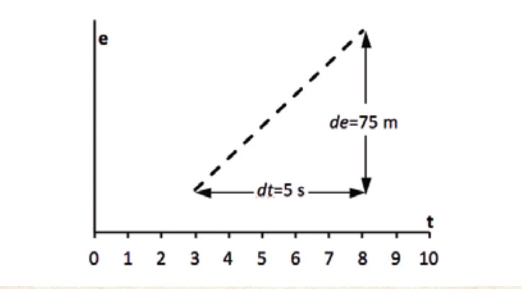


Imagen 1. Interpretación dx en la gráfica x - t

La siguiente actividad busca la generalización:

¿En qué casos será necesario escribir $de = v \cdot dt$ en lugar de $\Delta e = v \cdot \Delta t$? ¿Cuál es el significado de de?, ¿de qué depende su valor?, ¿cuál es el significado de la rapidez en un instante?

Se condiciona el uso de expresiones diferenciales a la existencia de un comportamiento no uniforme. El significado de la rapidez en un instante se expresa matemáticamente mediante el cociente: *de/dt*, que es la pendiente de la estimación lineal en la gráfica *e-t*. El siguiente problema será cómo calcular esa rapidez cuando se conoce *e(t)*, lo que conduce a la construcción de la derivada *(e')* a través de la definición intuitiva de la rapidez como el límite de la rapidez media cuando el intervalo Δt tiende a cero. Se legitima así la relación entre derivada y cociente diferencial, una relación tan usada como cuestionada en la física.

DESINTEGRACIONES RADIACTIVAS

¿De qué depende la variación en el número de núclidos (ΔN) presentes en una muestra radiactiva? Expresa matemáticamente el resultado del análisis físico que realices.

El análisis físico de esta situación conduce a pensar que ΔN depende del tipo de sustancia, el número de núclidos presentes y el intervalo de tiempo considerado (Δt). La expresión matemática inicial será: $\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$. Ahora bien, dado que el valor de *N* está cambiando durante ese Δt, hay que considerar la expresión como una estimación: $dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$, lo que cambiaría el número de núclidos suponiendo *N* constante.[2]

En este ejemplo, no sabemos *a priori* si la estimación lineal formulada cumple la condición adicional que se exige a la diferencial, algo que se acepta como hipótesis. Se obtiene así, mediante el cálculo de la integral (paso 2), un resultado para *N(t)* cuya interpretación y evaluación en relación con el mundo físico (pasos 3 y 4) permitirá confirmar o no la hipótesis.

Este carácter hipotético de la diferencial es ignorado en la enseñanza de la física, como se ha puesto de manifiesto a través del análisis de libros de texto y las respuestas de estudiantes y profesores a diferentes cuestiones (López-Gay, 2002). Esto explica que, cuando se obtienen resultados geométricos paradójicos usando el cálculo diferencial, rara vez se cuestione la validez de la expresión diferencial de partida, como si fuese válida cualquier expresión con tal de ser *muy pequeña*; tan solo se cuestiona el desarrollo matemático posterior (Artigue y Viennot, 1987).

IN MEMORIAM

Este trabajo fue el último de una larga lista en el que recibimos el asesoramiento y supervisión del profesor Francisco Gil. Queremos mostrar aquí nuestro agradecimiento por su amistad y enseñanza, por su colaboración siempre generosa y lúcida. ◂

Notas

* Son autores de este artículo: Rafael López-Gay, Joaquín Martínez Torregrosa, M.a Rut Jiménez Liso, María Martínez Chico y Emilio Gil Martínez.

1. Expresiones que relacionan la diferencial de una magnitud f con el incremento de la variable independiente *x*, cuya forma general es: $df = M(x) \cdot dx$.
2. Esa situación es posible si por cada núclido que se desintegra se incorpora uno nuevo, lo que ocurre por término medio en un ser vivo que intercambia materia, y con ello *14C*, con el exterior.

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M. (1989) : «Le passage de la différentielle totale a la notion d'application linéaire tangent», en *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe I)* [en línea]. París. IREM et LDPES Paris 7 (Brochures, 74). *www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97040.pdf*

ARTIGUE, M.; VIENNOT, L. (1987): «Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials». *Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*. Vol. III. Ithaca. Cornell University.

FRÉCHET, M. (1911):

LÓPEZ-GAY, R. (2002): *La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora*. Tesis doctoral. Madrid. Universidad Autónoma de Madrid.

LÓPEZ-GAY, R.; MARTÍNEZ TORREGROSA, J.; MARTÍNEZ SÁEZ, J. (2015): «Obstacles to Mathematization in Physics: The Case of the Differential». *Science & Education*, núm. 24, pp. 591-613.

REDISH, E.F. (2006): «Problem solving and the use of Math in Physics courses», en *Proceedings of the Conference World View on Physics Education in 2005: Focusing on World change* (Delhi, 21-26 agosto). Disponible en línea en: *http://arxiv.org/abs/physics/0608268v1* [Consulta: junio 2018]

Dirección de contacto

Rafael López-Gay
Universidad de Almería
rlucio@ual.es

Este artículo fue solicitado por Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas en enero de 2018 y aceptado en mayo de 2018 para su publicación.