

Capítulo 3

Caracterización de familias de conjuntos cerrados convexos

3.1 Introducción

La caracterización de familias de conjuntos convexos cerrados puede ser útil desde diferentes puntos de vista. Un problema PSIL consiste en la minimización de un funcional lineal sobre un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n que se describe por medio de infinitas desigualdades lineales. Si el conjunto factible es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial, veremos que la acotación del problema PSIL implica su resolubilidad. Por otra parte, asumiendo las hipótesis necesarias sobre el sistema de restricciones, es posible obtener un punto extremo del conjunto factible desde cualquier solución factible sin pérdida del objetivo (se pueden encontrar algoritmos de purificación en [3] y [19]) y después, comenzando en este punto extremo inicial, es posible construir una poligonal de aristas conectadas a lo largo de las cuales el funcional óptimo decrece (se ha propuesto un método simplex PSIL en [2]). Obviamente, la viabilidad de un algoritmo progresando sobre la frontera de la región factible requiere su conexión por arcos. En este capítulo caracterizaremos la clase de conjuntos convexos cerrados cuya frontera relativa es no vacía y conexa por

arcos (Sección 3.5).

Por otra parte, son problemas típicos de combinatoria geométrica, la caracterización de aquellos cuerpos convexos (conjuntos convexos cerrados de dimensión completa) para los cuales el mínimo número de puntos (o direcciones) que los iluminan en un cierto sentido tienen una expresión dada (véanse [27] y [28]).

Este capítulo trata sobre los diferentes modos de caracterizar familias de conjuntos convexos cerrados.

Cualquier conjunto convexo cerrado $C \subset \mathbb{R}^n$ admite diferentes representaciones. En primer lugar, C se puede descomponer como la suma de su espacio de linealidad, $\text{lin } C$, con $C \cap (\text{lin } C)^\perp$ (este es el cono apuntado de C , si C es un cono convexo). Este último conjunto es, a su vez, la suma de la envoltura convexa de su conjunto de puntos extremos, $E(C) \neq \emptyset$, con la envoltura convexa cónica de su conjunto de direcciones extremas, $D(C)$ [32, Th. 18.5], de modo que $C = \text{lin } C + E(C) + D(C)$. El triplete $(\text{lin } C, E(C), D(C))$ constituye la *representación interna* de C .

Por otra parte, C es el conjunto de soluciones de un cierto sistema semi-infinito lineal $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, con $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$, el cual constituye una representación externa de C . Dicha representación no es única, pero el cono

$$K(C) = \text{cl cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

es el mismo para todas las representaciones externas de $C \neq \emptyset$, de modo que, el cono de referencia, $K(C)$, se puede considerar como una *representación cónica* de C . A partir de $K(C)$ se pueden obtener diferentes representaciones externas de C (por ejemplo, $\{a'x \geq b, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in I\}$, donde el conjunto de índices I es un subconjunto denso arbitrario de $K(C)$). Sin embargo, existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos convexos cerrados no vacíos de \mathbb{R}^n y los conos convexos cerrados de \mathbb{R}^{n+1} que contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ pero no contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ (sus correspondientes conos de referencia).

El interés de la representación cónica deriva del hecho de que $K(C)$ captura toda la información relevante sobre C . Por ejemplo, $\dim C = n - \dim \text{lin } [K(C)]$ [19, Th. 5.8]) y el valor del problema de optimización $P(c) : \text{Min } c'x \text{ s.a. } x \in C$,

donde $c \in \mathbb{R}^n$, es $\sup \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} c \\ \alpha \end{pmatrix} \in K(C) \right\}$ [19, Th. 8.1(ii)], de modo que las propiedades de $K(C)$ y $P(c)$ están íntimamente relacionadas unas con otras. Además, dos conjuntos convexos cerrados, C_1 y C_2 , se pueden separar mediante un hiperplano si, y sólo si, $K(C_1) \cap [-K(C_2)]$ contiene al menos un rayo.

La unicidad, tanto de la representación interna como de la cónica, es una característica útil, de modo que grandes familias de conjuntos convexos cerrados no vacíos se pueden caracterizar por medio de las propiedades de sus correspondientes representaciones interna y cónica. Así, por ejemplo, resulta sencillo caracterizar la familia de los semiespacios cerrados.

PROPOSICIÓN 3.1 *Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) C es un semiespacio;
- (ii) $E(C)$ es singular, $\dim D(C) = 1$ y $\dim(\text{lin } C) = n - 1$; y
- (iii) $K(C)$ es un cono convexo cerrado y apuntado, $\dim K(C) = 2$ y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rbd } K(C)$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x \geq b\},$$

con $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces, $\text{lin } C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = 0\}$, por lo que $\dim(\text{lin } C) = n - 1$ y $(\text{lin } C)^\perp = \text{span } \{a\}$.

Tomando $\bar{x} := \frac{b}{\|a\|^2}a$, resulta evidente que $\bar{x} \in C \cap (\text{lin } C)^\perp$ y

$$\{\bar{x} + \lambda a, \lambda \geq 0\} \subset C \cap (\text{lin } C)^\perp.$$

Para demostrar la inclusión contraria, tomamos $x \in C \cap (\text{lin } C)^\perp$. Al ser $x - \bar{x} \in (\text{lin } C)^\perp$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \bar{x} + \lambda a$, pero, dado que $x \in C$, debe cumplirse

$$a'(\bar{x} + \lambda a) = b + \lambda \|a\|^2 \geq b,$$

por lo que $\lambda \geq 0$.

Así pues

$$E(C) + D(C) = C \cap (\text{lin } C)^\perp = \{\bar{x} + \lambda a, \lambda \geq 0\},$$

de donde se obtiene $E(C) = \{\bar{x}\}$ y $D(C) = \text{cone } \{a\}$.

(ii) \Rightarrow (iii) Supongamos que $E(C) = \{\bar{x}\}$, $D(C) = \text{cone } \{a\}$, $a \neq 0_n$, y $\dim(\text{lin } C) = n - 1$. Como

$$\bar{x} + \text{cone } \{a\} = C \cap (\text{lin } C)^\perp \subset (\text{lin } C)^\perp$$

y $\dim(\text{lin } C)^\perp = 1$, se tiene

$$(\text{lin } C)^\perp = \text{span } \{a\}$$

y

$$\text{lin } C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = 0\}.$$

Entonces, dado cualquier $x \in C$, $x = \bar{x} + \lambda a + z$ con $\lambda \geq 0$ y $a'z = 0$. Tomando $b := a'\bar{x}$, se obtiene

$$a'x = a'(\bar{x} + \lambda a + z) = b + \lambda \|a\|^2 \geq b,$$

por lo que, aplicando el Lema de Farkas, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C)$.

Probaremos que

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.1)$$

En efecto, si $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in K(C)$, entonces, de nuevo por el Lema de Farkas, $c'x \geq d$ para todo $x \in C$ y, en particular, $c'y \geq d$ para todo $y \in C \cap (\text{lin } C)^\perp$. Tomando $y \in C \cap (\text{lin } C)^\perp$ fijo y $z \in \text{lin } C$ arbitrario, se tiene

$$c'(y + \alpha z) = c'y + \alpha c'z \geq d$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde obtenemos que $c'z = 0$ para todo $z \in \text{lin } C$. Así pues, $c \in (\text{lin } C)^\perp$ y existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $c = \mu a$. En realidad, μ no puede ser negativo ya que, si lo fuese, $c'a = \mu \|a\|^2 < 0$ y, tomando $\lambda > \frac{d - c'\bar{x}}{\mu \|a\|^2} \geq 0$, se tendría

$$c'(\bar{x} + \lambda a) < d,$$

con $\bar{x} + \lambda a \in C$, contradiciéndose el hecho de que $c'x \geq d$ para todo $x \in C$. Así pues, $\mu \geq 0$.

Por otra parte, puesto que $\mu b = c'\bar{x} \geq d$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (\mu b - d) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, se cumple (3.1) y, dado que $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ son linealmente independientes, concluimos que $K(C)$ es un cono convexo cerrado apuntado bidimensional y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rbd } K(C)$.

(iii) \Rightarrow (i) Supongamos que

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\},$$

con $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$ un conjunto linealmente independiente en \mathbb{R}^{n+1} . Puesto que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in K(C)$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

$\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$. Si fuesen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, por la Proposición 0.6, tendríamos $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K(C)$, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto, podemos suponer $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ con $\beta > 0$ y

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de modo que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x \geq b\}$ es un semiespacio. ■

En la Tabla 3.1 se resume la información obtenida, en la proposición anterior, para los semiespacios cerrados y se recogen las caracterizaciones, ya conocidas [19, Ths. 5.8 y 5.13], de otras familias de conjuntos convexos cerrados. Dicha tabla podrá ir completándose con los resultados obtenidos, en las distintas secciones de este capítulo, para familias como la de las sumas de conjuntos convexos compactos con subespacios vectoriales (Sección 3.2), la de los símlices (Sección 3.3), sandwiches (Sección 3.4) o paralelotopos (Sección 3.6) (las tres subfamilias de la anterior), la de los conjuntos

continuos (Sección 3.7) o la de los cuerpos convexos suaves (Sección 3.8).

C	Representación interna	Representación cónica
semiespacio cerrado	$E(C)$ singular, $\dim D(C) = 1$, $\dim(\text{lin } C) = n - 1$	$K(C)$ apuntado, $\dim K(C) = 2$, $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rbd } K(C)$
variedad afín	$E(C)$ singular, $D(C) = \{0_n\}$	El cono apuntado de $K(C)$ es cone $\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
conjunto convexo poliédrico	$E(C)$ polítopo, $D(C)$ poliédrico	$K(C)$ poliédrico
conjunto singular	$E(C)$ singular, $D(C) = \{0_n\}$, $\text{lin } C = \{0_n\}$	$K(C)$ semiespacio
cuerpo convexo	$\dim(\text{lin } C) +$ $+ \dim [E(C) + D(C)] = n$	$K(C)$ apuntado

Tabla 3.1

En la última sección caracterizaremos algunas familias de cuerpos convexos utilizando ciertos conceptos de iluminación.

3.2 Caracterización de las sumas de conjuntos convexos compactos con subespacios vectoriales

PROPOSICIÓN 3.2 *Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) C es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial;
- (ii) $E(C)$ es compacto y $D(C) = \{0_n\}$;
- (iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K(C)$; y
- (iv) $(\text{lin } C)^\perp = \Pi(K(C))$, donde Π denota la proyección vertical

$$\Pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Si $C = E + L$, con E conjunto convexo compacto y L subespacio vectorial, entonces $\text{lin } C = L$ y $C \cap L^\perp = (E + L) \cap L^\perp$ es la proyección ortogonal de E sobre L^\perp , de modo que $C \cap L^\perp$ es compacto por ser la imagen continua de un conjunto compacto. Por lo tanto, $D(C) = \{0_n\}$ y $E(C) = C \cap L^\perp$ es compacto.

(ii) \Rightarrow (iii) Asumamos que $C = E(C) + \text{lin } C$, con $E(C)$ compacto, $E(C) \subset (\text{lin } C)^\perp$. Si $\text{lin } C = \mathbb{R}^n$, $C = \mathbb{R}^n$ y $K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, de modo que se verifica (iii).

Sea $\{u^1, \dots, u^p\}$ una base ortonormal de $(\text{lin } C)^\perp \neq \{0_n\}$ y sea $\rho > 0$ tal que $\|y\| \leq \rho$ para todo $y \in E(C)$.

Dado $x \in C$, podemos escribir $x = y + z$, $y \in E(C)$ y $z \in \text{lin } C$, de modo que $|\pm x'u^j| = |\pm y'u^j| \leq \rho$ y $\pm x'u^j \geq -\rho$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \pm u^j \\ -\rho \end{pmatrix} \in K(C)$, $j = 1, \dots, p$ (por el Lema de Farkas).

Dado $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C)$, $a'x \geq b$ para todo $x \in C$. Si $z \in \text{lin } C$, tomando un punto arbitrario $\bar{x} \in E(C)$, se tiene que $\bar{x} + \alpha z \in C$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $a'(\bar{x} + \alpha z) \geq b$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y esto implica que $a'z = 0$. Por lo tanto, $a \in (\text{lin } C)^\perp$ y podemos escribir $a = \sum_{j=1}^p \alpha_j u^j$ para ciertos escalares $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$.

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = (2p\rho)^{-1} \sum_{j=1}^p \left[\begin{pmatrix} u^j \\ -\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^j \\ -\rho \end{pmatrix} \right],$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \begin{pmatrix} u^j \\ -\rho \end{pmatrix} - \left(b + \rho \sum_{j=1}^p \alpha_j \right) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \pm u^j \\ -\rho \end{pmatrix}, j = 1, \dots, p \right\},$$

y el último conjunto resulta ser $\text{span } K(C)$. Por lo tanto, podemos aplicar la Proposición 0.6 para concluir que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K(C)$.

(iii) \Rightarrow (iv) Puesto que $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K(C)$, se tiene que $0_n \in \text{rint } \Pi[K(C)]$ (Proposición 0.3), siendo $\Pi[K(C)]$ un cono convexo. Entonces $\Pi[K(C)]$ es subespacio vectorial.

Si $\Pi[K(C)] = \{0_n\}$, entonces $K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $C = \mathbb{R}^n$, de modo que

$\text{lin } C = \mathbb{R}^n$ y $(\text{lin } C)^\perp = \Pi [K(C)]$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\Pi [K(C)] \neq \{0_n\}$.

Sea $\{v^1, \dots, v^q\}$ una base ortonormal del subespacio vectorial $\Pi [K(C)]$. Dado $k \in \{1, \dots, q\}$, existen escalares α_k y β_k tales que

$$\begin{pmatrix} v^k \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in K(C) \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -v^k \\ -\beta_k \end{pmatrix} \in K(C),$$

de manera que $\alpha_k \leq x'v^k \leq \beta_k$ para todo $x \in C$.

Probaremos que $\text{lin } C = [\Pi [K(C)]]^\perp$.

En efecto, si $z \in \text{lin } C$, tomando $\bar{x} \in C$ arbitrario, se tiene, para $k \in \{1, \dots, q\}$, $\alpha_k \leq (\bar{x} + \alpha z)'v^k \leq \beta_k$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y esto implica $z'v^k = 0$. Por lo tanto, $\text{lin } C \subset \{v^1, \dots, v^q\}^\perp = [\Pi [K(C)]]^\perp$.

Recíprocamente, si $z \in [\Pi [K(C)]]^\perp$, entonces $a'z = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C)$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. Puesto que

$$\left\{ a'x \geq b \mid \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C) \right\}$$

es una representación lineal de C , $\pm z$ es una solución del correspondiente sistema homogéneo, de manera que $\pm z \in O^+C$ y $z \in \text{lin } C$.

Por lo tanto, $[\Pi [K(C)]]^\perp = \text{lin } C$ y se verifica (iv).

(iv) \Rightarrow (i) Si $\Pi [K(C)] = \{0_n\}$, $C = \mathbb{R}^n$ y se verifica (i). Asumamos, pues, que $\dim \Pi [K(C)] = q$, $1 \leq q \leq n$.

Sea $\{v^1, \dots, v^q\}$ una base ortonormal de $\Pi [K(C)]$ y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_q$; β_1, \dots, β_q escalares tales que $\alpha_k \leq x'v^k \leq \beta_k$, para todo $x \in C$, $k = 1, \dots, q$.

Si $q = n$, C es compacto y se verifica (i).

En otro caso $(\text{lin } C)^\perp = \Pi [K(C)] \neq \mathbb{R}^n$ y podemos seleccionar vectores $v^k \in \text{lin } C$, $k = q+1, \dots, n$, tales que $\{v^1, \dots, v^n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Dado $x \in C \cap (\text{lin } C)^\perp$, se tiene que $\alpha_k \leq x'v^k \leq \beta_k$, $k = 1, \dots, q$ (puesto que $x \in C$) y $x'v^k = 0$, $k = q+1, \dots, n$ (puesto que $x \in (\text{lin } C)^\perp$). Por lo tanto $C \cap (\text{lin } C)^\perp$ es compacto y $C = [C \cap (\text{lin } C)^\perp] + \text{lin } C$ es la descomposición buscada. ■

El siguiente resultado justifica el interés de esta clase de conjuntos convexos

cerrados en PSIL.

COROLARIO 3.3 *Sea C la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial y sea $P(c) \equiv \text{Inf } c'x$ s.a. $x \in C$. Si $P(c)$ es acotado, entonces es resoluble, discretizable y tiene salto de dualidad nulo.*

Demostración. Asumamos que C es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial. De acuerdo con la Proposición 3.2, podemos escribir $C = E(C) + \text{lin } C$, con $E(C)$ compacto y $\Pi[K(C)] = (\text{lin } C)^\perp$.

Sea $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ cualquier representación externa de C y sea M el primer cono de momentos de σ . Dado $t \in T$, se tiene que $a_t = \Pi(a'_t, b_t) \in \Pi[K(C)]$, de manera que $M \subset \Pi[K(C)]$. Por otra parte, si $z \in \Pi[K(C)]$, existe una sucesión

$$\{z^r\} \subset \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

tal que $z_i = \lim_r z_i^r, i = 1, \dots, n$. Para cada z^r existen $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\mu^r \geq 0$ tales que $z^r = \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu^r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$. Puesto que $\sum_{t \in T} \lambda_t^r a_t \in M, r = 1, 2, \dots$, se tiene

$$z = \lim_r (z_1^r, \dots, z_n^r)' = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r a_t \in \text{cl } M.$$

Hemos demostrado que $M \subset (\text{lin } C)^\perp \subset \text{cl } M$, de modo que $\text{cl } M = (\text{lin } C)^\perp$. Por lo tanto,

$$(\text{lin } C)^\perp = \text{rint } (\text{lin } C)^\perp = \text{rint } \text{cl } M = \text{rint } M \subset M \subset (\text{lin } C)^\perp,$$

y esto implica $\text{rint } M = (\text{lin } C)^\perp$.

Si $P(c)$ tiene valor finito, $v(c)$, entonces $c \in (\text{lin } C)^\perp$ (en otro caso, existiría $y \in \text{lin } C = (O^+C) \cap (-O^+C)$ tal que o $c'y < 0$ e $y \in O^+C$ o $c'(-y) < 0$ y $-y \in O^+C$, de modo que $v(c) = -\infty$ en ambos casos). Por lo tanto, $c \in \text{rint } M$ y esto implica la resolubilidad de $P(c)$, su discretización (una solución óptima se puede obtener como límite de soluciones óptimas de una sucesión de subproblemas finitos) y el salto de dualidad nulo [19, Ths. 8.1(v) y 8.2]. ■

Aunque bajo las hipótesis del Corolario 3.3, $P(c)$ es resoluble y el salto de dualidad es nulo, $D(c)$ puede no ser resoluble, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.4 Consideremos el problema PSIL

$$(P) \quad \text{Inf} \quad x_1$$

$$s.a. \quad x_1 \geq -1/t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

$$-x_1 \geq -1 \quad (t = 0)$$

cuyo conjunto factible es $C = ([0, 1] \times \{0\}) + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial.

Se puede ver fácilmente que $v(P) = v(0) = 0$, por lo que, como era de esperar, (P) es resoluble.

Consideremos ahora el problema dual de (P)

$$(D) \quad \text{Sup} \quad - \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda_t}{t} - \lambda_0$$

$$s.a. \quad \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots$$

Desde luego, $\Psi(\lambda) \leq 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo que $v(D) \leq 0$. Veremos que, en realidad, $v(D) = 0$. En efecto, si $\{\lambda^r\}_{r=1}^{\infty} \subset \Lambda$ es tal que

$$\lambda_t^r = \begin{cases} 1, & t = r \\ 0, & t \neq r \end{cases},$$

al ser $\Psi(\lambda^r) = -\frac{1}{r}$, $\lim_r \Psi(\lambda^r) = 0 \leq v(D)$. Por lo tanto, $v(D) = 0$.

Sin embargo, (D) no es resoluble ya que, si lo fuese, existiría $\lambda \in \Lambda$ tal que $-\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda_t}{t} - \lambda_0 = 0$. Como $\lambda_t \geq 0$ para todo $t = 0, 1, \dots$, $-\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda_t}{t} - \lambda_0 < 0$ si algún $\lambda_t \neq 0$. Por lo tanto, $\lambda_t = 0$ para todo $t = 0, 1, \dots$, en cuyo caso $\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t - \lambda_0 \neq 1$, lo que se contradice con que $\lambda \in \Lambda$.

COROLARIO 3.5 Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) C es un conjunto compacto;
- (ii) $E(C)$ es compacto y $\text{lin } C = D(C) = \{0_n\}$;
- (iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int } K(C)$;
- (iv) $\Pi(K(C)) = \mathbb{R}^n$; y

(v) $P(c)$ es resoluble para todo $c \in \mathbb{R}^n$.

Demostraci3n. La equivalencia entre las cuatro primeras afirmaciones es consecuencia directa de la Proposici3n 3.2. Puesto que (i) \Rightarrow (v) es trivial, acabaremos la demostraci3n probando que (v) \Rightarrow (i). En efecto, si no se verifica (i), entonces existe $y \in O^+C$, $y \neq 0_n$, y $P(-y)$ no es ni siquiera acotado. Por lo tanto, tampoco se verifica (v). ■

3.3 Caracterizaci3n de los símplices

C es a k -símplice si es la envoltura convexa de $k + 1$ puntos afínmente independientes. Obviamente, cualquier k -símplice es compacto.

PROPOSICI3N 3.6 Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) C es un k -símplice;
- (ii) $E(C)$ tiene $k + 1$ puntos extremos, $\dim E(C) = k$ y $\text{lin } C = D(C) = \{0_n\}$; y
- (iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int } K(C)$, $\dim \text{lin } [K(C)] = n - k$ y el cono apuntado de $K(C)$ tiene $k + 1$ rayos extremos.

Demostraci3n. (i) \Rightarrow (ii) Dado que C es un conjunto convexo compacto, por el Corolario 3.5, se tiene que $\text{lin } C = D(C) = \{0_n\}$ y, por tanto, $E(C) = C$.

Si $C = \text{conv } \{x^1, \dots, x^{k+1}\}$, con $\{x^1, \dots, x^{k+1}\}$ afínmente independientes, es obvio que x^1, \dots, x^{k+1} contiene a todos los puntos extremos de C . Por otra parte, si x^j , $j \in \{1, \dots, k + 1\}$, no fuese punto extremo de C , podríamos escribir $x^j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i x^i$,

$\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k + 1$, $i \neq j$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i = 1$. Entonces $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i (x^i - x^j) = 0_{n+1}$, de

modo que $\{x^i - x^j, i = 1, \dots, k + 1\}$ son linealmente dependientes, lo que resulta ser una contradicci3n. Así pues, los puntos extremos de C son x^1, \dots, x^{k+1} .

Por lo tanto, $E(C) = C = \text{conv } \{x^1, \dots, x^{k+1}\}$ tiene exactamente $k + 1$ puntos extremos y $\dim E(C) = \dim C = k$.

(ii) \Rightarrow (i) $\text{lin } C = D(C) = \{0_n\}$ implica que $C = E(C)$. Si $\{x^1, \dots, x^{k+1}\}$ es el conjunto de puntos extremos de $E(C) = C$, entonces, por el teorema de representación, $C = \text{conv } \{x^1, \dots, x^{k+1}\}$. Si $\{x^1, \dots, x^{k+1}\}$ fuesen afínmente dependientes, entonces $\dim E(C) = \dim \text{aff } \{x^1, \dots, x^{k+1}\} \leq k - 1$, lo que contradice la hipótesis.

(i) \Rightarrow (iii) Puesto que todo k -símplice es compacto, por el Corolario 3.5, se tiene que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int } K(C)$. Por otra parte, de acuerdo con la fórmula dimensional,

$$\dim \text{lin } [K(C)] = n - \dim C = n - k. \quad (3.2)$$

Puesto que C es un símplice de dimensión completa en la variedad afín $V := \text{aff } C$, con $\dim V = k$, existen vectores no nulos

$$\{a_i, i = 1, \dots, k + 1\} \subset V - V$$

y correspondientes escalares

$$\{b_i, i = 1, \dots, k + 1\},$$

tales que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = b_i\}$ es un hiperplano soporte en los puntos del interior relativo de la i -ésima faceta, $i = 1, \dots, k + 1$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $a'_i x \geq b_i$ para todo $x \in C$, $i = 1, \dots, k + 1$, de modo que

$$C = \{x \in V \mid a'_i x \geq b_i, i = 1, \dots, k + 1\}.$$

Además, puesto que $\dim V = k$, podemos escribir

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = b_i, i = k + 2, \dots, n + 1\},$$

con

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k + 2, \dots, n + 1 \right\}$$

linealmente independientes (si C es un n -símplice, entonces $V = \mathbb{R}^n$ y esta parte de la prueba se puede simplificar).

Entonces,

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k + 1; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} +$$

$$+ \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k + 2, \dots, n + 1 \right\},$$

y demostraremos que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ se puede eliminar en esta expresión. Para ello, apelaremos a la conocida caracterización de los puntos interiores de un cono convexo dada en la Proposición 0.6.

Puesto que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int } K(C)$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{i \in I} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0 \text{ si } i \leq k + 1, \quad \mu \geq 0, \quad (3.3)$$

para un cierto conjunto $I \subset \{1, \dots, n + 1\}$, con

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i \in I \right\} = \mathbb{R}^{n+1} \text{ si } \mu = 0$$

y

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i \in I; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^{n+1} \text{ si } \mu > 0.$$

Si $0 \leq \mu < 1$, de (3.3) se sigue

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k + 1 \right\} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k + 2, \dots, n + 1 \right\}. \quad (3.4)$$

Probaremos que el caso $\mu \geq 1$ no se puede dar, por lo que (3.4) se cumple siempre. En efecto, si $\mu > 1$, entonces $(\mu - 1) \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i \in I} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \in K(C)$ y esto implica $C = \emptyset$. Por otra parte, si $\mu = 1$, entonces de (3.3) se sigue que $\sum_{i \in I} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0_{n+1}$ y existirá un $j \leq k + 1$ tal que $\lambda_j > 0$ (en otro caso $I \subset \{k + 2, \dots, n + 1\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k + 2, \dots, n + 1 \right\}$ son linealmente dependientes). Entonces,

$$-\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_j^{-1} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \in K(C),$$

de modo que $a'_j x = b_j$ para todo $x \in C$. Por lo tanto,

$$a_j \in (V - V) \cap (V - V)^\perp = \{0_n\},$$

es decir, $a_j = 0_n$ y esto es una contradicción.

De (3.4) se sigue

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k+1 \right\} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k+2, \dots, n+1 \right\}.$$

Comparando $\dim \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k+2, \dots, n+1 \right\} = n-k$ con (3.2), concluimos que el cono apuntado de $K(C)$ es

$$\widehat{K}(C) := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k+1 \right\}.$$

Si $\text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \right\}, j \in \{1, \dots, k+1\}$, no es un rayo extremo de $\widehat{K}(C)$, entonces podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \gamma_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, k+1, i \neq j,$$

de modo que $\widehat{K}(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k+1, i \neq j \right\}$ y $\dim \widehat{K}(C) \leq k$. Entonces $\dim K(C) = \dim \widehat{K}(C) + \dim \text{lin}[K(C)] \leq n$ y esto contradice el hecho de que $\text{int} K(C) \neq \emptyset$. Así pues,

$$\left\{ \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\}, i = 1, \dots, k+1 \right\}$$

es el conjunto de rayos extremos de $\widehat{K}(C)$.

(iii) \Rightarrow (i) Las hipótesis $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{int} K(C)$ y $\dim \text{lin}[K(C)] = n-k$ garantizan que C es compacto y $\dim C = k$, respectivamente. Sea

$$\left\{ \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\}, i = 1, \dots, k+1 \right\}$$

el conjunto de rayos extremos de $\widehat{K}(C)$. De acuerdo con el teorema de representación,

$$\widehat{K}(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, k+1 \right\}.$$

Sea

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = k+2, \dots, n+1 \right\}$$

una base de $\text{lin}[K(C)]$. Entonces $C = \{x \in V \mid a'_i x \geq b_i, i = 1, \dots, k+1\}$, donde $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = b_i, i = k+2, \dots, n+1\}$.

Así pues, el número de puntos extremos de C es $p \leq \binom{k+1}{k} = k+1$. Asumamos que $p < k+1$ y sea $\{x^1, \dots, x^p\}$ el conjunto de puntos extremos de C . El teorema de representación establece que $C = \text{conv} \{x^1, \dots, x^p\}$, de modo que $\dim C \leq p-1 < k$. Por lo tanto, $p = k+1$ y $\{x^1, \dots, x^{k+1}\}$ es afínmente independiente (en otro caso, $\dim C < k$). Esto completa la prueba. ■

3.4 Caracterización de los sandwiches

Dos variedades afines de la misma dimensión en \mathbb{R}^n , U_1 y U_2 , son paralelas si $U_1 - U_1 = U_2 - U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Diremos que un conjunto es un k -sandwich cuando es la envoltura convexa de la unión de dos variedades afines paralelas de dimensión $k-1$. El siguiente resultado establece algunas propiedades elementales de los k -sandwiches que se usarán más adelante.

PROPOSICIÓN 3.7 Sea $C = \text{conv}(U_1 \cup U_2)$, donde U_1 y U_2 son variedades afines paralelas, con $\dim U_i = k-1$, $i = 1, 2$. Sea $V = U_1 - U_1 = U_2 - U_2$, $U_i \cap V^\perp = \{x^i\}$, $i = 1, 2$ y $w = x^2 - x^1$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (i) $C = V + [x^1, x^2]$ (y, por tanto, C es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial);
- (ii) $\dim C = k$;
- (iii) $\text{aff } C = U_i + \text{span} \{w\}$, $i = 1, 2$;
- (iv) $U_i = \{x \in \text{aff } C \mid w'(x - x^i) = 0\}$, $i = 1, 2$; y
- (v) $\text{rbd } C = U_1 \cup U_2$ y $\text{rint } C = V +]x^1, x^2[$.

Demostración. Por ser U_i una variedad afín paralela a V , $U_i \cap V^\perp$ se reduce a un sólo punto, por lo que x^i está bien definido, $i = 1, 2$.

Como $U_i = x^i + V$, $i = 1, 2$, y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, necesariamente $x^1 \neq x^2$, es decir, $w := x^2 - x^1 \neq 0_n$.

Procedemos a la prueba:

- (i) Si $x \in C$, podemos escribir $x = (1 - \lambda)(x^1 + v^1) + \lambda(x^2 + v^2)$, donde

$\lambda \in [0, 1]$ y $v^1, v^2 \in V$. Entonces

$$x = [(1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2] + (1 - \lambda)v^1 + \lambda v^2 \in [x^1, x^2] + V.$$

Recíprocamente, si $v \in V$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$v + (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2 = (1 - \lambda)(x^1 + v) + \lambda(x^2 + v) \in \text{conv}(U_1 \cup U_2) = C.$$

(ii) Obviamente, para $\{i, j\} = \{1, 2\}$, se tiene

$$U_i + \text{span}\{w\} = x^i + V + \text{span}\{w\} = V + (x^i + \text{span}\{w\}) = V + \text{aff}([x^1, x^2]),$$

variedad afín que contiene a U_1 y a U_2 . Así pues, si $\{i, j\} = \{1, 2\}$,

$$\text{conv}[U_i \cup \{x^j\}] \subset C \subset U_i + \text{span}\{w\}. \quad (3.5)$$

Puesto que $x^j \notin U_i$ y $w \in V^\perp$, se sigue de (3.5)

$$\begin{aligned} k &\leq \dim \text{conv}[U_i \cup \{x^j\}] \leq \dim C \leq \dim [U_i + \text{span}\{w\}] = \\ &= \dim [V + \text{span}\{w\}] = k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica (ii).

(iii) Es consecuencia de la segunda inclusión en (3.5) y de la ecuación $\dim C = \dim [U_i + \text{span}\{w\}]$ que hemos probado antes.

(iv) Dado $x \in U_i = x^i + V$, $w'(x - x^i) = 0$ debido a que $w \in V^\perp$.

Recíprocamente, si $x \in \text{aff} C$ satisface que $w'(x - x^i) = 0$, entonces podemos escribir (en virtud de (iii)) $x = x^i + v + \alpha w$, $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, con $w'(v + \alpha w) = \alpha \|w\|^2 = 0$. Esto implica que $\alpha = 0$, es decir, $x = x^i + v \in U_i$.

(v) Es consecuencia directa de la Proposición 0.4 aplicada a (i). ■

A continuación, damos tres caracterizaciones diferentes de los sandwiches basadas en las representaciones interna, externa y cónica de los mismos. En la Sección 3.5 se dará una caracterización topológica.

PROPOSICIÓN 3.8 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y sea $K(C)$ su cono de referencia. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) C es un k -sandwich.
- (ii) $D(C) = \{0_n\}$, $E(C)$ es un segmento cerrado propio y $\dim(\text{lin } C) = k - 1$.
- (iii) existe subespacio vectorial $V \subset (\text{aff } C) - C$ con $\dim V = k - 1$, un vector no nulo $w \in V^\perp \setminus [(\text{aff } C) - C]^\perp$ y dos números reales α_1 y α_2 , tales que $\alpha_1 < \alpha_2$ y
- $$C = \{x \in \text{aff } C \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}.$$
- (iv) $K(C) = K + W$, donde K es un cono convexo cerrado y apuntado y W es un subespacio vectorial tales que $\dim K = 2$, $\dim W = n - k$, $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K$ y

$$K \cap \left(W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.6)$$

Demostración. Probaremos (ii) \Leftrightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).

(ii) \Rightarrow (i) Si $E(C) + D(C) = [x^1, x^2]$, con $x^1 \neq x^2$, definiendo $U_i = x^i + \text{lin } C$, es fácil probar que $C = \text{conv}(U_1 \cup U_2)$, siendo U_1 y U_2 variedades paralelas, tales que $\dim U_i = k - 1$, $i = 1, 2$.

(i) \Rightarrow (ii) Es consecuencia directa de la afirmación (i) de la Proposición 3.7.

(i) \Rightarrow (iii) Sea $C = \text{conv}(U_1 \cup U_2)$, donde U_1 y U_2 son variedades afines paralelas. Sean V , x^1 , x^2 y w definidos como en la Proposición 3.7, cuyas afirmaciones (ii) y (iii) demuestran que $\dim V = \dim C - 1$ y $V \subset V + \text{span}\{w\} = (\text{aff } C) - C$, respectivamente. Retomando la definición de w , se tiene que $w \in V^\perp \setminus \{0_n\}$ y $w \in (\text{aff } C) - C$, por lo que $w \in V^\perp \setminus [(\text{aff } C) - C]^\perp$.

Sean $\alpha_i = w'x^i$, $i = 1, 2$. Obviamente, $\alpha_2 - \alpha_1 = \|w\|^2 > 0$.

Puesto que $U_i = \{x \in \text{aff } C \mid w'x = \alpha_i\}$, $i = 1, 2$, de acuerdo con la afirmación (iv) de la Proposición 3.7, se obtiene

$$C = \text{conv}(U_1 \cup U_2) = \{x \in \text{aff } C \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}.$$

(iii) \Rightarrow (iv) Sea $d = \dim C$. Distinguiremos los casos $d = n$ y $d < n$.

Supongamos que $d = n$. Puesto que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, se tiene

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además,

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[\begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \right],$$

de modo que $K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \right\}$ y la Proposición 0.6 establece que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K(C)$.

Es más, puesto que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes y $K(C)$ es un cono apuntado bidimensional.

Acabaremos esta parte de la demostración probando que $K(C) = K(C) + \{0_{n+1}\}$ es la descomposición deseada. En efecto, si

$$z \in K(C) \cap \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

se puede escribir

$$z = \rho_1 \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0, \gamma \in \mathbb{R},$$

lo que implica que $\rho_1 = \rho_2$ y $\gamma = \rho_1(\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$, de modo que $z \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esto prueba que

$$K(C) \cap \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

mientras que la inclusión opuesta se cumple trivialmente. Por lo tanto, se verifica (3.6).

Supongamos ahora que $d < n$. Sea

$$\text{aff } C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = b_i, i = 1, \dots, n-d\},$$

con $\{a_i, i = 1, \dots, n-d\}$ un subconjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^n y $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-d$.

Puesto que $C = \{x \in \text{aff } C \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}$, se tiene ahora

$$\begin{aligned} K(C) &= \text{cone} \left\{ \pm \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-d; \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-d \right\} + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Sea

$$W := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-d \right\}$$

y

$$K := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} , con $\dim W = n-d$, y K (el mismo cono que en el caso $d = n$) es un cono convexo cerrado y apuntado, con $\dim K = 2$ y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K$. Además, es obvio que

$$\text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset K \cap \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset K \cap \left(W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right). \quad (3.7)$$

Consideremos ahora $z \in K \cap \left(W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$ arbitrario. Podemos escribir

$$z = \rho_1 \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-d} \beta_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

con $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-d$, y $\gamma \in \mathbb{R}$. De (3.8), se deduce

$$(\rho_2 - \rho_1)w + \sum_{i=1}^{n-d} \beta_i a_i = 0_n,$$

siendo $\{w; a_i, i = 1, \dots, n-d\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes, debido a que $w \neq 0_n$ y

$$w \notin [(\text{aff } C) - C]^\perp = \text{span} \{a_i, i = 1, \dots, n-d\}.$$

Por lo tanto, $\rho_1 = \rho_2$ y $\beta_i = 0$, $i = 1, \dots, n-d$, de modo que (3.8) se convierte en

$$z = \rho_1 \begin{pmatrix} 0_n \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

y se llega a que $\gamma = \rho_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$. Así pues, $z = \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Hemos probado que

$$K \cap \left(W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \subset \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

que junto con (3.7) demuestra que se verifica (3.6).

(iv) \Rightarrow (i) Cualquier cono convexo cerrado apuntado bidimensional es la envoltura convexa cónica de dos direcciones extremas (es decir, un ángulo agudo plano). Sea $K = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$, donde $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente en \mathbb{R}^{n+1} . Puesto que estamos asumiendo que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{rint } K$, podemos escribir (por la Proposición 0.6),

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0, \quad (3.9)$$

de modo que $a \neq 0_n$ (en otro caso $a = b = 0_n$ y $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente).

Definiendo $w = \rho_1 a \neq 0_n$ y $\gamma = \rho_1 \alpha$, se obtiene de (3.9)

$$K = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\gamma - 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sea $\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-d \right\}$ una base de W , con $d = \dim C$.

Dado que estamos suponiendo que $K(C) = K + W$, se tiene

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \pm \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-d; \begin{pmatrix} w \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\gamma - 1 \end{pmatrix} \right\},$$

de modo que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = \alpha_i, i = 1, \dots, n-d; \gamma \leq w'x \leq \gamma + 1\}. \quad (3.10)$$

Sean $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = \gamma + 1$ y

$$U_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = \alpha_i, i = 1, \dots, n-d; w'x = \gamma_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Probaremos que $U_j \neq \emptyset, j = 1, 2$.

Si $U_j = \emptyset$,

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K(U_j) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n-d; \begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix} \right\}$$

y podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-d} \beta_i \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} + \beta_0 \begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix}, \quad \beta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, n-d, \quad (3.11)$$

de donde se deduce que $\beta_0 \begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix} \in W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si $\beta_0 > 0$, entonces $\begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix} \in W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Si $j = 1$,

$$\begin{pmatrix} w \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \in K \cap \left[W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right] = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de acuerdo con (3.6), contradiciendo que $w \neq 0_n$. Alternativamente, si $j = 2$, entonces

$$-\begin{pmatrix} w \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in K \cap \left[W + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right] = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

y obtenemos otra vez que $w = 0_n$.

Si $\beta_0 < 0$, se obtiene $w = 0_n$ del mismo modo.

Finalmente, si $\beta_0 = 0$, (3.11) implica que $\{a'_i x = \alpha_i, i = 1, \dots, n - d\}$ es inconsistente, en contradicción con (3.10) (ya que $C \neq \emptyset$).

Se concluye que U_1 y U_2 son variedades afines paralelas y se puede demostrar fácilmente que $C = \text{conv}(U_1 \cup U_2)$.

Esto completa la demostración. ■

3.5 Caracterización topológica de los k -sandwiches

Por la afirmación (v) de la Proposición 3.7, está claro que la frontera relativa de cualquier k -sandwich no es ni siquiera conexa. En la siguiente proposición demostraremos que la no conexión de la frontera relativa es, en realidad, una propiedad que caracteriza a los k -sandwiches.

PROPOSICIÓN 3.9 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío de \mathbb{R}^n que no es una variedad afín, con $\dim C = k$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $\text{rbd } C$ es no conexa;
- (ii) $\text{rbd } C$ es no conexa por arcos; y
- (iii) C es un k -sandwich.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Es trivial.

(ii) \Rightarrow (iii) Supongamos, en primer lugar, que C tiene dimensión completa. Así pues, la hipótesis será que $\text{bd } C$ no es conexas por arcos.

Si $n = 1$, puesto que $\dim C = 1$ y $C \neq \mathbb{R}$, C será o una semirrecta cerrada (lo cual es imposible porque cualquier conjunto singular es conexo por arcos) o un segmento cerrado propio de \mathbb{R} . Por lo tanto, C es un sandwich unidimensional.

Así pues, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n \geq 2$.

Sean $x^i \in \text{bd } C$, $i = 1, 2$, puntos que no se pueden conectar por medio de ninguna curva enteramente contenida en $\text{bd } C$.

Sean $c_i \neq 0_n$, tales que

$$c'_i(x - x^i) \geq 0 \text{ para todo } x \in C, \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Denotaremos por

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'_i(x - x^i) = 0\}, \quad i = 1, 2,$$

los correspondientes hiperplanos soporte de C . Probaremos que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ por reducción al absurdo. Así pues, sea $z \in H_1 \cap H_2$.

Para $\{i, j\} = \{1, 2\}$, puesto que $z \in H_i$ y $x^j \in C$, se tiene

$$c'_i(z - x^j) = c'_i(z - x^i + x^i - x^j) = c'_i(x^i - x^j) \leq 0.$$

Si $c'_i(z - x^j) = 0$ entonces $x^j \in H_i$ (ya que $z \in H_i$), de modo que

$$[x^i, x^j] \subset C \cap H_i \subset \text{bd } C$$

(ya que H_i es hiperplano soporte de C), y esto contradice la hipótesis acerca de x^1 y x^2 . Por lo tanto,

$$c'_i(z - x^j) < 0 \text{ si } \{i, j\} = \{1, 2\}. \quad (3.13)$$

Consideremos ahora el vector $u = 2z - (x^1 + x^2)$. De (3.13), se obtiene

$$c'_i u = c'_i(z - x^i) + c'_i(z - x^j) < 0, \text{ si } \{i, j\} = \{1, 2\}. \quad (3.14)$$

De (3.12) y (3.14) se deduce que, para $i = 1, 2$, c_i es solución del sistema

$$\{y'u < 0; \quad y'(x - x^i) \geq 0, \quad x \in C\}$$

y, por la Proposición 2.4, esto implica que $x^i \in \text{end}(C; u)$, $i = 1, 2$. Entonces, podemos aplicar la Proposición 2.21 para obtener la deseada contradicción.

Así pues, hemos probado que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, de modo que $\text{span}\{c_1\} = \text{span}\{c_2\}$. Probaremos, a continuación, que $C = \text{conv}(H_1 \cup H_2)$.

Puesto que $x^1 \notin H_2$ y $x^2 \notin H_1$ (en caso contrario $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$), $c_2'(x^1 - x^2) > 0$ y $c_1'(x^1 - x^2) < 0$, de modo que c_2 es un múltiplo negativo de c_1 y podemos escribir $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x = \alpha_i\}$, $i = 1, 2$, donde $c \neq 0_n$, $c'x^i = \alpha_i$, $i = 1, 2$, y $\alpha_1 < \alpha_2$. Puesto que H_i es un hiperplano soporte de C en x^i , $i = 1, 2$, se tiene

$$C \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leq c'x \leq \alpha_2\} = \text{conv}(H_1 \cup H_2). \quad (3.15)$$

Para probar la inclusión opuesta, consideremos un vector arbitrario

$$v \in V := H_1 - H_1 = H_2 - H_2.$$

Si $v \notin O^+C$, existen números reales no negativos

$$\lambda_i := \max\{t \in \mathbb{R} \mid x^i + tv \in C\}, \quad i = 1, 2,$$

y $x^i + \lambda_i v \in \text{end}(C; v)$, $i = 1, 2$.

Entonces, por una parte, $[x^i, x^i + \lambda_i v] \subset C \cap H_i \subset \text{bd} C$, $i = 1, 2$, y por otra, existe un arco conectando $x^1 + \lambda_1 v$ con $x^2 + \lambda_2 v$ que está completamente contenido en $\text{bd} C$ (de nuevo por la Proposición 2.21), y esto significa que x^1 se puede conectar con x^2 por medio de un arco contenido en $\text{bd} C$, compuesto por tres arcos conectados. Esto es una contradicción, de modo que $V \subset O^+C$.

Así pues, $H_i = x^i + V \subset C + O^+C = C$, $i = 1, 2$, y se obtiene

$$\text{conv}(H_1 \cup H_2) \subset C. \quad (3.16)$$

De (3.15) y (3.16), se concluye que $C = \text{conv}(H_1 \cup H_2)$ es un sandwich de dimensión completa.

Supongamos ahora que $k < n$. Entonces C es un conjunto convexo cerrado de dimensión completa, en $\text{aff} C$, tal que su frontera, en la topología de $\text{aff} C$, no es conexa por arcos. Aplicando el argumento previo, C es de nuevo un sandwich de dimensión completa en $\text{aff} C$, es decir, un k -sandwich.

(iii) \Rightarrow (i) Es consecuencia directa de la afirmación (v) de la Proposición 3.7. ■

En la Proposición 2.23, se estableció como condición suficiente para la conexión por arcos de la frontera relativa de un conjunto convexo no vacío de dimensión mayor o igual que 2, la compacidad de dicho conjunto. Sin embargo, sólo hay que considerar el caso en el que C sea un semiespacio para ver que no es una condición necesaria. Quedaba pendiente, por tanto, el estudio de la conexión por arcos de la frontera relativa de los conjuntos convexos cerrados no vacíos de dimensión 1 y los de dimensión mayor o igual que 2 no acotados, cuestión que queda resuelta en la Proposición 3.9.

3.6 Caracterización de los paralelotopos

Un *paralelotopo* se puede definir como la intersección de una familia de n n -sandwiches "independientes", es decir, un conjunto de la forma $C = \bigcap_{i=1}^n C_i$, con $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i'x \leq \beta_i\}$, $\alpha_i < \beta_i$ para $i = 1, \dots, n$, y $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ linealmente independientes. En la siguiente proposición se caracteriza esta familia de conjuntos en términos de sus representaciones interna y cónica.

PROPOSICIÓN 3.10 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío de \mathbb{R}^n . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) C es un paralelotopo;
(ii) $E(C)$ es un polítopo de dimensión n con $2n$ facetas paralelas dos a dos y

$$\text{lin } C = D(C) = \{0_n\}; \text{ y}$$

- (iii) existe una base de \mathbb{R}^n , $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ y dos conjuntos de escalares,

$$\{\alpha_i, i = 1, \dots, n\} \text{ y } \{\beta_i, i = 1, \dots, n\},$$

con $\alpha_i < \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, tales que

$$K(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n; -\begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Sea C un paralelotopo, es decir,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i'x \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\},$$

con $\alpha_i < \beta_i$ para $i = 1, \dots, n$ y $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ linealmente independientes. Entonces, denotando por σ el sistema finito $\{\alpha_i \leq a_i'x \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$ que representa a C , el primer cono de momentos de σ resulta ser

$$M = \text{cone} \{\pm a_i, i = 1, \dots, n\} = \text{span} \{a_i, i = 1, \dots, n\} = \mathbb{R}^n$$

y, por la Proposición 0.19, C es acotado.

Así pues, C es un conjunto convexo compacto por lo que, aplicando el Corolario 3.5, se tiene

$$\text{lin } C = D(C) = \{0_n\}$$

y, en consecuencia,

$$E(C) = C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i'x \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\},$$

que es un polítopo por ser intersección de un número finito de semiespacios cerrados y ser acotado.

Por otra parte, como σ es un sistema LFM no trivial, de acuerdo con la Proposición 0.17, $\dim C = n$ si, y sólo si, ninguna combinación convexa de desigualdades no triviales de σ da lugar a la desigualdad trivial. Por reducción al absurdo, supongamos que

$$0_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \mu_i \begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix},$$

con $\lambda_i, \mu_i \in [0, 1]$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) = 1$. Entonces, podemos escribir

$$0_n = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) a_i \tag{3.17}$$

y

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \beta_i. \tag{3.18}$$

Puesto que $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ son linealmente independientes, de (3.17) se deduce

que $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ y, sustituyendo en (3.18), obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\alpha_i - \beta_i).$$

Al ser $\alpha_i - \beta_i < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, se tiene que $\lambda_i = \mu_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, lo cual se contradice con $\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) = 1$.

Así pues, $E(C)$ es un polígono de dimensión n representado linealmente por el sistema σ . De acuerdo con la Proposición 0.20 (ii), las facetas de C deben ser de la forma $\{x \in C \mid a'_i x = \alpha_i\}$ o $\{x \in C \mid a'_i x = \beta_i\}$, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Por otra parte, si demostramos que σ es una representación minimal de C (es decir no tiene restricciones redundantes), por el apartado (iii) de la misma proposición, se obtiene que $C_i = \{x \in C \mid a'_i x = \alpha_i\}$ y $C'_i = \{x \in C \mid a'_i x = \beta_i\}$, $i = 1, \dots, n$, son las $2n$ facetas, paralelas dos a dos, de C .

Supongamos, pues, que $a'_j x \geq \alpha_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, es redundante en σ (se haría del mismo modo para $a'_j x \leq \beta_j$). Entonces, por el Lema de Farkas,

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_j \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n, i \neq j; -\begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

es decir, existen escalares $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq j$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ y $\rho \geq 0$ tales que

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_j \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \mu_i \begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$0_n = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\lambda_i - \mu_i) a_i - (\mu_j + 1) a_j.$$

Entonces, por ser $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ linealmente independientes, $\lambda_i - \mu_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $i \neq j$, y $\mu_j + 1 = 0$, lo que se contradice con $\mu_j \geq 0$.

(ii) \Rightarrow (i) Por hipótesis, $C = E(C)$ es un polígono de dimensión n con $2n$ facetas paralelas dos a dos. Sean $\{C_1, \dots, C_n, C'_1, \dots, C'_n\}$ las $2n$ facetas y supongamos que C_i y C'_i son paralelas para todo $i = 1, \dots, n$.

Por ser C un polígono, siempre podemos encontrar una representación lineal finita

minimal para C . Sea

$$\sigma = \{a'_j x \geq b_j, j = 1, \dots, p\}$$

dicha representación. Por la Proposición 0.20 (iii), los conjuntos $\{x \in C \mid a'_j x = b_j\}$, $j = 1, \dots, p$, son las facetas de C , por lo que $p = 2n$. Reordenando si es preciso las inecuaciones de σ , podemos suponer que $C_i = \{x \in C \mid a'_i x = b_i\}$ y $C'_i = \{x \in C \mid a'_{i+n} x = b_{i+n}\}$, $i = 1, \dots, n$. Dado $j \in \{1, \dots, n\}$ y puesto que C_j y C'_j son paralelos, se tiene $a_{j+n} = \lambda_j a_j$ para algún $\lambda_j \neq 0$, en cuyo caso podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_{j+n} \\ b_{j+n} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + (b_{j+n} - \lambda_j b_j) \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si fuese $\lambda_j > 0$, entonces $a'_{j+n} x \geq b_{j+n}$ es consecuencia de $a'_j x \geq b_j$ si $b_{j+n} - \lambda_j b_j \leq 0$ (Lema de Farkas) y $a'_j x \geq b_j$ es consecuencia de $a'_{j+n} x \geq b_{j+n}$ si $b_{j+n} - \lambda_j b_j \geq 0$. En ambos casos σ no es minimal.

Así pues, $\lambda_j < 0$ y $b_j \leq a'_j x \leq \frac{b_{j+n}}{\lambda_j}$ si, y sólo si, $x \in C$. Si denotamos $\alpha_j := b_j$ y $\beta_j := \frac{b_{j+n}}{\lambda_j}$, se tiene $\alpha_j \leq a'_j x \leq \beta_j$ si, y sólo si, $x \in C$.

Así pues,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a'_i x \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Desde luego, $\alpha_i < \beta_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, puesto que $\dim C = n$.

Por otra parte, $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$ son linealmente independientes ya que, en caso contrario,

$$M = \text{cone} \{\pm a_i, i = 1, \dots, n\} = \text{span} \{a_i, i = 1, \dots, n\} \neq \mathbb{R}^n$$

y, por la Proposición 0.19, C no sería acotado y, por lo tanto, no sería un polígono.

(i) \Leftrightarrow (iii) Se obtiene de forma inmediata aplicando la definición de cono de referencia y teniendo en cuenta que los conos finitamente generados son cerrados.

■

3.7 Caracterización de conjuntos continuos

Un conjunto convexo cerrado no vacío C es *continuo* cuando su correspondiente función soporte, $\delta^*(\cdot | C)$ definida por

$$\delta^*(x | C) = \sup \{x'y \mid y \in C\},$$

es continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

$\delta^*(\cdot | C)$ es una función convexa y $\text{dom } \delta^*(\cdot | C) = \mathbb{R}^n$ si C es compacto (véase [32, Th. 5.5]). Por lo tanto, cualquier conjunto compacto es continuo (las funciones convexas son continuas en el interior de su dominio).

Esta clase de conjuntos fue introducida por Gale y Klee en 1959 en un artículo [15] en el que dan algunas caracterizaciones geométricas de estos conjuntos. En particular, la primera de ellas establece que un conjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n es continuo si, y sólo si, no tiene ni rayos frontera ni asíntotas. Esta caracterización muestra que el epigrafo de una función cuadrática estrictamente convexa (por ejemplo, $x_2 = x_1^2$) es continuo, a pesar de no ser acotado. Por lo tanto, todo conjunto convexo compacto es continuo, pero no todo conjunto continuo es compacto.

Los conjuntos convexos compactos tienen importantes propiedades que no cumplen, en general, los conjuntos convexos cerrados no acotados. Por ejemplo, si C es un conjunto convexo compacto no vacío y D es cualquier convexo cerrado no vacío, se cumple que $C + D$ es cerrado y que C y D pueden separarse fuertemente en caso de ser C y D disjuntos. En [15] se demuestra que cada una de estas propiedades caracteriza a la familia de los conjuntos continuos, por lo que ésta es la clase maximal de conjuntos que poseen dichas propiedades.

Por otra parte, se demostró en el Corolario 3.5 que un conjunto convexo cerrado no vacío C es compacto si, y sólo si, el problema $P(c) \equiv \text{Inf } c'x$ s.a. $x \in C$ es resoluble para todo $c \in \mathbb{R}^n$ y, en ese caso, su conjunto óptimo también es compacto. La condición análoga que caracteriza a la familia de los conjuntos continuos en general es la que damos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.11 [4, Pro. 2.4] *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces C es continuo si, y sólo si, el conjunto óptimo de cualquier problema acotado*

$P(c)$, $c \neq 0_n$, es un compacto no vacío.

La condición de la Proposición 3.11 garantiza la anulación del salto de dualidad para todo $c \in \mathbb{R}^n$ (si $c = 0_n$ o $v(c) = -\infty$ la afirmación es trivial, mientras que si $c \neq 0_n$ y $v(c) > -\infty$, la conclusión se obtiene de la Proposición 3.11 y de [19, Th. 8.1]). Sin embargo, aunque la proposición

“Si $P(c)$, $c \neq 0_n$, es acotado entonces $P(c)$ es resoluble y $\delta(c) = 0$ ”

se cumple tanto para la familia de los conjuntos continuos como para la de las sumas de compactos con subespacios vectoriales (Corolario 3.3), ésta no caracteriza a la unión de ambas familias (basta considerar el semiespacio cerrado $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 0\}$ y el único problema, con conjunto factible C , que es acotado: $P \equiv \text{Inf}(x_1 + x_2)$ s.a. $x \in C$).

En esta sección, obtendremos una caracterización de los conjuntos continuos en términos de su cono de referencia, pero para ello será necesario probar previamente dos lemas.

LEMA 3.12 *Dados dos conjuntos convexos cerrados no vacíos, C_1 y C_2 , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$;
- (ii) $K(C_1) + K(C_2)$ está contenido en el hipografo de una función lineal; y
- (iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl}\{K(C_1) + K(C_2)\}$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Sea $\bar{x} \in C_1 \cap C_2$ arbitrario.

Dado que

$$\left\{ a'x \geq b, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C_i) \right\}$$

es una representación lineal de C_i , $i = 1, 2$, se cumple $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq 0$ para todo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C_1) \cup K(C_2)$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' z \geq 0$ para todo $z \in K(C_1) + K(C_2)$ y $K(C_1) + K(C_2)$ está contenido en el hipografo de la función lineal $f(x) = \bar{x}'x$.

(ii) \Rightarrow (iii) La hipótesis implica que $\text{cl}\{K(C_1) + K(C_2)\}$ está contenido en

el hipografo (cerrado) de una función lineal $f(x) = a'x$. Si fallase (iii), $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ pertenecería a dicho hipografo, por lo que $1 \leq a'0_n$, lo cual es imposible.

(iii) \Rightarrow (i) Por la Proposición 1.2 (ii.a), la hipótesis implica la consistencia del sistema

$$\left\{ a'x \geq b, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C_1) \cup K(C_2) \right\}, \quad (3.19)$$

ya que su cono de referencia es

$$\text{cl cone} \left[K(C_1) \cup K(C_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right] = \text{cl} \{K(C_1) + K(C_2)\},$$

de acuerdo con la Proposición 0.1. Se llega a la conclusión observando que (3.19) es una representación lineal de $C_1 \cap C_2$. ■

LEMA 3.13 Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos cerrados no vacíos. C_1 y C_2 son fuertemente separables si, y sólo si, existe un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} , W , tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $\dim W = 2$ y $\text{cl} \{W \setminus [K(C_1) \cup K(C_2)]\}$ es un cono apuntado.

Demostración. Sean C_1 y C_2 fuertemente separables y sea $a \neq 0_n$ tal que $\sup \{a'x \mid x \in C_1\} < \inf \{a'y \mid y \in C_2\}$.

Sean $\bar{\alpha} := \sup \{a'x \mid x \in C_1\}$ y $\bar{\beta} := \inf \{a'y \mid y \in C_2\}$. Como $a'x \leq \bar{\alpha}$ para todo $x \in C_1$ y $a'y \geq \bar{\beta}$ para todo $y \in C_2$, se tiene

$$-\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in K(C_1) \text{ y } \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} \in K(C_2).$$

Sea $W := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Obviamente, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ y $\dim W = 2$.

Probaremos que

$$W \cap K(C_2) \subset \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \text{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En efecto, sea $\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} \in W \cap K(C_2)$, con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Se pueden dar los siguientes casos:

(i) Si $\gamma > 0$, $\begin{pmatrix} a \\ \gamma^{-1}\delta \end{pmatrix} \in K(C_2)$, por lo que $a'y \geq \gamma^{-1}\delta$ para todo $y \in C_2$ y $\gamma^{-1}\delta \leq \bar{\beta}$.

Entonces

$$\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} + (\gamma\bar{\beta} - \delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Si $\gamma = 0$, $\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ \delta \end{pmatrix} \in K(C_2)$, debiendo ser $\delta \leq 0$ puesto que $C_2 \neq \emptyset$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = (-\delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Si $\gamma < 0$ y $\gamma \bar{\alpha} < \delta$, al ser $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$, $\gamma \bar{\beta} < \gamma \bar{\alpha} < \delta$ y, como $\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix}$ y $|\gamma| \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$ son elementos de $K(C_2)$, tendríamos

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = (\delta - \gamma \bar{\beta})^{-1} \left[\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma a \\ -\gamma \bar{\beta} \end{pmatrix} \right] \in K(C_2),$$

en contradicción con $C_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, para $\gamma < 0$, se cumple $\gamma \bar{\alpha} - \delta \geq 0$ y

$$\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = |\gamma| \begin{pmatrix} -a \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix} + (\gamma \bar{\alpha} - \delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se cumple, pues, la doble inclusión

$$\begin{aligned} & \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset W \cap K(C_2) \subset \\ & \subset \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \text{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De forma semejante, se demuestra que

$$\begin{aligned} & \text{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset W \cap K(C_1) \subset \\ & \subset \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \text{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

De (3.20) y (3.21) se deduce que

$$W \cap [K(C_1) \cup K(C_2)] = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \text{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de donde (véase Figura 3.1)

$$\text{cl} \{W \setminus [K(C_1) \cup K(C_2)]\} = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.22)$$

Si $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right\}$ fuesen linealmente dependientes, sería posible escribir $\begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lambda = 1$ y $\bar{\beta} = \bar{\alpha}$, en contradicción con $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. Como el cono convexo generado por dos vectores linealmente independientes

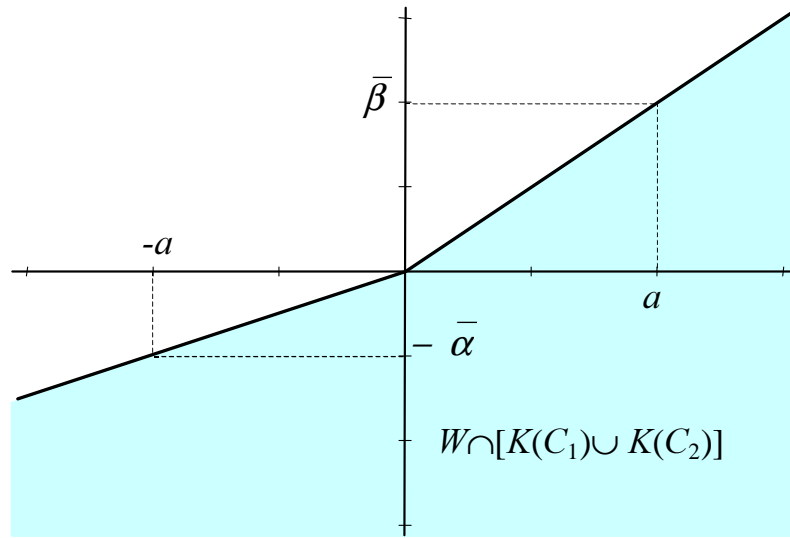


Figura 3.1

es siempre apuntado, (3.22) es un cono apuntado.

Recíprocamente, si W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $\dim W = 2$ y $\text{cl}\{W \setminus [K(C_1) \cup K(C_2)]\}$ es un cono apuntado, podemos escribir (3.22) para un vector $a \neq 0_n$ y dos escalares $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ tales que $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$.

Dado que $-\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$ pertenecen a la unión de $K(C_1)$ y $K(C_2)$, deberán pertenecer a uno de dichos conos. Supongamos $\begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} \in K(C_2)$. Si $-\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in K(C_2)$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = (\bar{\beta} - \bar{\alpha})^{-1} \left[\begin{pmatrix} a \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right] \in K(C_2)$$

contradiendo $C_2 \neq \emptyset$. Supondremos, por lo tanto, $-\begin{pmatrix} a \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in K(C_1)$.

De acuerdo con el Teorema de Farkas, se tiene, para $x \in C_1$ e $y \in C_2$ cualesquiera, $-a'x \geq -\bar{\alpha}$ y $a'y \geq \bar{\beta}$. Por lo tanto,

$$\sup \{a'x \mid x \in C_1\} \leq \bar{\alpha} < \bar{\beta} \leq \inf \{a'y \mid y \in C_2\},$$

estando C_1 y C_2 fuertemente separados. ■

PROPOSICIÓN 3.14 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. C es continuo si, y sólo si, para todo cono convexo cerrado, K , que contiene a $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$, no contiene a*

$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ y tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cl}\{K(C) + K\}$, existe un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} , W , con $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ y $\dim W = 2$, tal que $\text{cl}\{W \setminus [K(C) \cup K]\}$ es un cono apuntado.

Demostración. Se sabe que los conos de referencia de los cerrados convexos no vacíos son los conos cerrados convexos que contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ pero no contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$. También se sabe [15] que $C_1 = C$ es continuo si, y sólo si, cualquier otro conjunto cerrado convexo no vacío, C_2 , disjunto con C_1 puede ser separado fuertemente de C_1 . Se llega a la conclusión combinando estos resultados con los Lemas 3.12 y 3.13. ■

3.8 Caracterización de cuerpos convexos suaves

Dado un conjunto convexo cerrado no vacío C , se dice que un *punto* de $\text{bd } C$ es *suave* en C cuando existe un único hiperplano soporte de C en dicho punto. Un conjunto convexo cerrado $C \neq \mathbb{R}^n$ es *suave* cuando todos sus puntos frontera son suaves en C .

Si $\dim C < n$ y C no es una variedad afín, entonces $\text{rbd } C \neq \emptyset$ y no hay puntos de $\text{rbd } C$ que sean suaves. Si C es variedad afín, C es suave si, y sólo si, $\dim C = n - 1$.

Así pues, los conjuntos suaves son cuerpos convexos o hiperplanos. Dado que estos últimos carecen de interés, se refieren a *cuerpos convexos suaves* Felcyn [13] y Bezdek [7] en artículos sobre combinatoria geométrica. El concepto de punto suave aparece en Valentine [36] para cuerpos convexos. La definición de otros autores es más exigente, imponiendo, por ejemplo, que $\text{bd } C$ sea una variedad diferenciable de orden $p \geq 1$ (véase, por ejemplo, [22]).

Como se apunta en [36], la diferenciabilidad de las funciones convexas está conectada con la suavidad de su epigrafo. En efecto, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y $\text{epi } f$ es suave (en cuyo caso es cuerpo convexo, porque los únicos hiperplanos que pueden ser epigrafo son los verticales y entonces la imagen de cierta recta de \mathbb{R}^n debería ser $-\infty$), entonces, para cada $x \in \text{dom } f$, existe un

único hiperplano que soporta a $\text{epi } f$ en $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ y, si dicho hiperplano es no vertical, entonces tiene asociado un subgradiente de f en x . Por lo tanto, si $\text{epi } f$ es suave, la diferenciabilidad y la subdiferenciabilidad de f en un punto de $\text{dom } f$ resultan ser conceptos equivalentes y, en particular, f es diferenciable en $\text{rint}(\text{dom } f)$ [32, Th. 23.4].

La siguiente proposición caracteriza los puntos suaves de un conjunto convexo cerrado en función de su cono de referencia.

PROPOSICIÓN 3.15 *Sea C un conjunto convexo cerrado. Entonces $\bar{x} \in \text{bd } C$ es un punto suave de C si, y sólo si, el cono convexo*

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \quad (3.23)$$

tiene dimensión 1. En particular, si C es un cuerpo convexo, \bar{x} es suave si, y sólo si, el conjunto de (3.23) es un rayo.

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{bd } C$ un punto suave de C y sea $\tilde{a} \neq 0_n$ tal que $\tilde{a}'x \geq \tilde{a}'\bar{x}$ para todo $x \in C$. Por el Lema de Farkas, $\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{a}'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C)$, es decir, \tilde{a} pertenece al conjunto (3.23), cuya dimensión es al menos 1.

Dado $\begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C)$, tenemos $a'x \geq a'\bar{x}$ para todo $x \in C$ (de nuevo por el Lema de Farkas) y se cumple

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'(x - \bar{x}) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a}'(x - \bar{x}) = 0\},$$

de donde $a = \alpha\tilde{a}$ para cierto $\alpha \neq 0$. Entonces

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \subset \text{span} \{\tilde{a}\},$$

y

$$\dim \left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} = 1. \quad (3.24)$$

Supongamos ahora que $\bar{x} \in \text{bd } C$ satisface (3.24), y sea $\tilde{a} \neq 0_n$ un elemento de (3.23). Si $a'x \geq a'\bar{x}$ para todo $x \in C$, con $a \neq 0_n$, entonces $\begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C)$ y, por la hipótesis, puede escribirse $a = \alpha\tilde{a}$ para cierto $\alpha \neq 0$, en cuyo caso $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'(x - \bar{x}) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{a}'(x - \bar{x}) = 0\}$. Por lo tanto, \bar{x} es punto suave de C .

Supongamos ahora que C es un cuerpo convexo y $\bar{x} \in \text{bd } C$ es un punto suave o, lo que es lo mismo, satisface (3.24).

Sea $\tilde{a} \neq 0_n$ un elemento de (3.23). Entonces, tomando $x^1 \in \text{int } C$ arbitrariamente, se tiene $\tilde{a}'(x^1 - \bar{x}) > 0$ y $a'(x^1 - \bar{x}) > 0$ si $\begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C)$, lo que implica, junto con (3.24), que $a = \alpha\tilde{a}$ para cierto $\alpha > 0$. Así pues,

$$\text{cone } \{\tilde{a}\} \subset \left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \subset \text{cone } \{\tilde{a}\}.$$

Por lo tanto, $\left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} = \text{cone } \{\tilde{a}\}$ es un rayo. ■

Obsérvese que, si C es un hiperplano, entonces el conjunto de (3.23) es una recta por el origen 0_n .

COROLARIO 3.16 *Un conjunto convexo cerrado no vacío (cuerpo convexo) C es suave si, y sólo si, el conjunto de (3.23) tiene dimensión 1 (es un rayo, respectivamente) en todos los puntos de $\text{bd } C$.*

Este resultado caracteriza a los cerrados convexos suaves (cuerpos convexos suaves) en función de su representación cónica.

Por otra parte, si $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ es una representación LFM de C (cuya existencia garantiza [19, Th. 5.11]), el conjunto de (3.23) coincide con $A(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in C$ (por [19, (5.18)]) y, por lo tanto, $\bar{x} \in \text{bd } C$ es suave si, y sólo si, $\dim A(\bar{x}) = 1$. Obviamente, como consecuencia de esta afirmación, se puede obtener una caracterización de los cerrados convexos suaves (cuerpos convexos suaves) en relación con cualquier representación externa que sea LFM.

A continuación, nos proponemos caracterizar estos conjuntos en función de su representación interna. Con tal fin relajaremos el concepto de conjunto suave para que no implique dimensión máxima.

Si C es un conjunto convexo cerrado que no es variedad afín y $d = \dim C$, se dice que un punto $\bar{x} \in \text{rbd } C$ es *relativamente suave* en C si existe una única variedad afín $V \subset \text{aff } C$, $\dim V = d - 1$, tal que $\bar{x} \in V$ y C está contenido en una de las dos componentes conexas de $(\text{aff } C) \setminus V$. Decimos que C es *relativamente suave* cuando todos los puntos de $\text{rbd } C$ son relativamente suaves en C .

PROPOSICIÓN 3.17 *Sea C un conjunto convexo cerrado que no es variedad afín. $\bar{x} \in \text{rbd } C$ es relativamente suave en C si, y sólo si, el cono convexo*

$$\left\{ a \in (\text{aff } C) - C \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \quad (3.25)$$

es un rayo.

Demostración. Si $d = n$, entonces C es un cuerpo convexo, $\text{rbd } C = \text{bd } C$ y $(\text{aff } C) - C = \mathbb{R}^n$, por lo que los conjuntos de (3.25) y de (3.23) coinciden.

Suponemos, pues, $d < n$. Sean $W := [(\text{aff } C) - C]^\perp \neq \{0_n\}$ y $\tilde{C} := C + W$ (cuerpo convexo). Entonces, como se vió en la demostración de la Proposición 2.9(ii), $\text{rbd } C \subset \text{bd } \tilde{C}$. Probaremos que $\bar{x} \in \text{rbd } C$ es relativamente suave en C si, y sólo si, $\bar{x} \in \text{bd } \tilde{C}$ es suave en \tilde{C} .

En efecto, si $V \subset \text{aff } C$, con $\dim V = d - 1$, es la única variedad afín tal que $\bar{x} \in V$ y C está contenido en una de las dos componentes conexas de $(\text{aff } C) \setminus V$, considerando $H := V + W$, se tiene $\dim H = \dim V + \dim W = n - 1$, $\bar{x} \in H$ y \tilde{C} está contenido en uno de los semiespacios determinados por H (aquel que contenga a la componente conexa de $(\text{aff } C) \setminus V$ que contiene a C), por lo que H es el único hiperplano que soporta a \tilde{C} en $\bar{x} \in \text{bd } \tilde{C}$. Recíprocamente, si H es el único hiperplano que soporta a \tilde{C} en $\bar{x} \in \text{rbd } C \subset \text{bd } \tilde{C}$, tomando la variedad afín $V := H \cap \text{aff } C$, resulta que $V \subset \text{aff } C$, $\bar{x} \in V$, $\dim V = d - 1$ (ya que $H = V + W$), C está contenido en una de las dos componentes conexas de $(\text{aff } C) \setminus V$ y además V es la única variedad afín que cumple todas estas propiedades.

Sea $a \neq 0_n$ la dirección del hiperplano H y supongamos que $a'(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in \tilde{C}$. Entonces, tomando $x = \bar{x} + \lambda w$, $w \in W$ fijo y $\lambda \in \mathbb{R}$, debe cumplirse $\lambda(a'w) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y esto sólo es posible si $a'w = 0$. Por lo tanto, $a \in W^\perp = (\text{aff } C) - C$.

Así pues, \bar{x} es relativamente suave en C si, y sólo si, existe un único vector (salvo factor multiplicativo positivo) $a \in (\text{aff } C) - C$, $a \neq 0_n$, tal que $a'(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$, pudiendo sustituirse esta última condición por $\begin{pmatrix} a \\ a'\bar{x} \end{pmatrix} \in K(C)$ como consecuencia de Lema de Farkas. Por lo tanto, (3.25) está formado por los múltiplos positivos de dicho a y por 0_n . ■

COROLARIO 3.18 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío que no es variedad afín. C es relativamente suave si, y sólo si, el conjunto de (3.25) es un rayo cualquiera que sea $\bar{x} \in \text{rbd } C$.*

PROPOSICIÓN 3.19 *Un cuerpo convexo C es suave si, y sólo si, $E(C) + D(C)$ es relativamente suave.*

Demostración. Sea $X := E(C) + D(C)$, conjunto convexo cerrado no vacío. Sabemos que $C = X + \text{lin } C$. Repitiendo el argumento de la Proposición 3.17, con $W = \text{lin } C$, C es suave si, y sólo si, X es relativamente suave. ■

Obsérvese que si $E(C)$ es relativamente suave y $D(C) = \{0_n\}$ se cumple la condición de la Proposición 3.19. Sin embargo, como se puede ver en el siguiente ejemplo, el recíproco no es cierto.

EJEMPLO 3.20 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2\}$ el cilindro parabólico de la Figura 3.2.

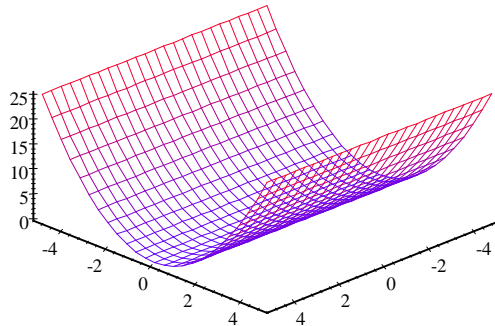


Figura 3.2

En este caso, $\text{lin } C = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $E(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq x_1^2 \right\}$ y $D(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Se observa que C es suave, $E(C) + D(C) = E(C)$ es relativamente suave, pero $D(C) \neq \{0_3\}$.

A pesar de lo visto anteriormente, no basta con que $E(C)$ sea relativamente suave para que el cuerpo convexo C sea suave.

EJEMPLO 3.21 Sea $C = (\text{cl } B_2 \times \{0\}) + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ el cono truncado de la Figura 3.3.

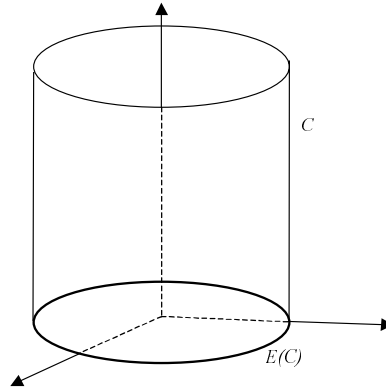


Figura 3.3

C no es suave por no serlo los puntos de la circunferencia de la base, a pesar de que la base, $E(C)$, es relativamente suave. Aquí, $D(C) = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Tampoco es cierto que C suave implique que $E(C)$ sea relativamente suave.

EJEMPLO 3.22 Sea $C = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen } t \end{pmatrix}, t \in [\pi/2, 3\pi/2] \right\} + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ el conjunto convexo cerrado de la Figura 3.4.

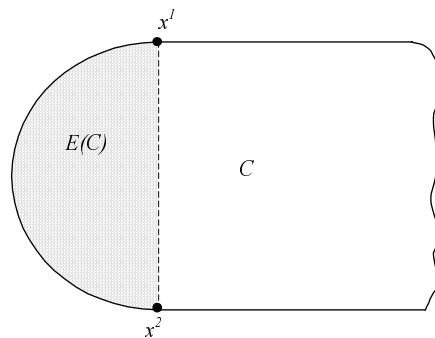


Figura 3.4

En este caso, C es suave, mientras que $E(C)$, que es la región sombreada de la figura, no es relativamente suave por no serlo los puntos x^1 y x^2 .

3.9 Caracterización de familias de cuerpos convexos mediante conceptos de iluminación

Además de los conceptos de iluminación que ya hemos tratado en la Sección 2.4, existen otros muchos (véase [28]). Entre ellos el siguiente, que fue introducido por Valentine [37]: dado un cuerpo convexo C y $z \notin C$, se dice que $x \in \text{bd } C$ es *visible* desde z si $]x, z[\cap C = \emptyset$. Denotamos por $\text{vis}(C; z)$ el conjunto de puntos frontera de C visibles desde $z \notin C$ y por $t(C)$ el mínimo número de puntos exteriores a C necesarios para que sea visible toda la frontera de C .

Soltan [34] demostró que, si C es un cuerpo convexo compacto, entonces $2 \leq t(C) \leq n + 1$, por lo que $\text{vis}(C; z) \neq \text{bd } C$ para cualquier $z \notin C$.

En un reciente artículo de Martini y Soltan [27], se prueba que, dado un cuerpo convexo compacto C , C es un n -símplice si, y sólo si, para todo $z^1 \notin C$ existe otro punto $z^2 \notin C$ tal que $\text{vis}(C; z^1) \cup \text{vis}(C; z^2) = \text{bd } C$, es decir, todo el conjunto C es visible desde $\{z^1, z^2\}$.

La compacidad de C es esencial en esta caracterización, incluso reforzando la anterior condición con $\text{vis}(C; z) \neq \text{bd } C$ para todo $z \notin C$. En efecto, dado un n -sandwich $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leq a'x \leq \alpha_2\}$, con $a \neq 0_n$ y $\alpha_1 < \alpha_2$, y $z \notin C$, se tiene

$$\text{vis}(C; z) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = \alpha_1\} & \text{si } a'z < \alpha_1 \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = \alpha_2\} & \text{si } a'z > \alpha_2 \end{cases}, \quad (3.26)$$

de modo que los n -sandwiches (que son cuerpos convexos no acotados) satisfacen las condiciones anteriores. Desafortunadamente, no son los únicos cuerpos convexos no acotados que satisfacen estas condiciones. Este es el caso de cualquier conjunto convexo cerrado C tal que $E(C)$ es un $(n - 1)$ -símplice, $\text{lin } C$ es una recta que pasa por el origen y $D(C) = \{0_n\}$ (por ejemplo, el producto cartesiano $S \times \mathbb{R}$ donde S es un $(n - 1)$ -símplice de \mathbb{R}^{n-1}). Sin embargo, los n -sandwiches (la clase de cuerpos convexos con frontera no vacía y no conexa) también se pueden caracterizar en términos de visibilidades.

PROPOSICIÓN 3.23 *Sea C un cuerpo convexo. Entonces C es un n -sandwich si, y sólo si, $\text{vis}(C; z)$ es un hiperplano y $\text{vis}(C; z) \neq \text{bd } C$ para todo $z \notin C$.*

Demostración. La implicación directa es consecuencia de (3.26).

Supongamos que $\text{vis}(C; z)$ es un hiperplano distinto de $\text{bd } C$ para todo $z \notin C$. Puesto que $\{\text{vis}(C; z), z \notin C\}$ es un recubrimiento de $\text{bd } C$, $\text{bd } C$ resulta ser la unión de al menos dos hiperplanos. Suponiendo que $\text{bd } C$ contiene dos hiperplanos no paralelos, obtendremos una contradicción. En efecto, sea $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x = b_i\}$, con $a'_i x \geq b_i$ para todo $x \in C, i = 1, 2$, con $\text{span}\{a_1\} \neq \text{span}\{a_2\}$. Puesto que H_1 no está contenido en $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_2 x \geq b_2\}$, existe $x^1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'_1 x^1 = b_1$ y $a'_2 x^1 < b_2$. Entonces $x^1 \in H_1 \setminus C$, contradiciendo $H_1 \subset \text{bd } C \subset C$.

Puesto que $\text{bd } C$ es la unión de al menos dos hiperplanos paralelos, $\text{bd } C$ no es conexa, y por tanto C es un n -sandwich por la Proposición 3.9. ■

Nótese que, en esta caracterización de los n -sandwiches, se puede sustituir $\text{vis}(C; z)$ por $\text{ill}(C; u)$, $\text{vis}(C; u)$ o $\text{end}(C; u)$, con $u \in \mathbb{R}^n \setminus O^+C$.

Al igual que los n -símplices y los n -sandwiches, los paralelotos no sólo se pueden caracterizar por medio de sus representaciones interna y cónica sino también a través de sus propiedades de combinatoria geométrica. Un paralelotopo es una clase particular de n -zonotopo (cuerpo convexo que se puede expresar como la suma de un número finito de segmentos compactos). Un n -zonotopo dado, C , es un paralelotopo si, y sólo si, el mínimo número de copias homotécicas más pequeñas de C que cubren C (o direcciones iluminando C) es exactamente 2^n [33].

También existen artículos ([34] y [35], por ejemplo) en los que se utilizan otros conceptos de iluminación distintos para caracterizar familias de cuerpos convexos como los semiespacios o los conos. Así, a partir de la caracterización de los semiespacios cerrados que se da en [34, Cor. 1], se puede demostrar fácilmente que un cuerpo convexo C es un semiespacio si, y sólo si, $\text{vis}(C; z) = \text{bd } C$ para todo $z \notin C$.

Los paralelotos, n -símplices y n -sandwiches son sólo algunas de las familias de cuerpos convexos que tienen buenas propiedades de combinatoria geométrica, de optimalidad y de separabilidad (véase, por ejemplo, [28], [19] y [6], respectivamente). La caracterización de todas estas familias en términos de sus representaciones interna y cónica y sus propiedades de iluminación son desafiantes problemas abiertos.