

Capítulo 2

Confín de un conjunto convexo

2.1 Introducción

Informalmente hablando, el confín de un conjunto convexo C en una dirección dada es el conjunto de puntos de C que se pueden ver desde el infinito en esa dirección. En realidad, el confín de C es el conjunto de puntos K -extremos de C (en el sentido de Yu [39]) para un cierto cono K y está conectado con dos conceptos de iluminación que han sido introducidos para abordar problemas de combinatoria geométrica sobre cuerpos convexos (véase el reciente artículo de Martini y Soltan [28]). En este capítulo se analizan las propiedades del confín de los conjuntos convexos en general y de los conjuntos convexos cerrados en particular (para los cuales los confines no vacíos son conexos por arcos), así como las relaciones entre el confín y ciertos conceptos de iluminación sobre conjuntos convexos. Además, se pretende demostrar que el confín puede ser una herramienta muy útil en análisis convexo y en temas relacionados (como los sistemas lineales o la optimización lineal).

En la Sección 2.2, se define el confín de un conjunto convexo C , se recupera la definición dada por Yu [39, Def. 4.1] de conjunto de puntos K -extremos, donde K es un cono, y se establecen relaciones entre estos dos conceptos. De hecho, se demuestra que el confín de C en una dirección dada, $u \neq 0_n$, es el conjunto de puntos

K -extremos de C para el cono $K = \text{cone}\{-u\}$. También se dan, en esta sección, las propiedades básicas del confín de un conjunto convexo, estableciéndose relaciones con su estructura facial y su dimensión, con su frontera y frontera relativa, con su conjunto de puntos extremos, etc.

Los confines pueden no ser cerrados (incluso para los conjuntos convexos compactos), pero siempre son conexos por arcos cuando el conjunto es convexo cerrado. Este es el principal resultado de la Sección 2.3, donde también se obtiene, como consecuencia, la conexión por arcos de la frontera relativa de los conjuntos convexos compactos de dimensión mayor que 1.

En la Sección 2.4, se extienden las definiciones de iluminación por direcciones y visibilidad en una dirección (dadas para cuerpos convexos por Boltyanski [8] y Soltan [34], respectivamente) a los conjuntos convexos cerrados y se discuten las relaciones entre el confín y estos dos conceptos de iluminación.

La última sección de este capítulo muestra algunas aplicaciones del confín a la teoría de los sistemas lineales.

2.2 Confín: Propiedades básicas

El *confín* de un conjunto convexo no vacío C en la dirección de un vector no nulo u es el conjunto

$$\text{end}(C; u) = \{x \in C \mid u \notin D(C, x)\}.$$

Obviamente, $\text{end}(C; u) = \emptyset$ tanto si C es abierto como si $u \in O^+C$ y $\text{end}(C; u) = C$, para todo $u \neq 0_n$, cuando C es singular. Por otra parte, dado un cono $K \subset \mathbb{R}^n$, el *conjunto de puntos K -extremos* de C se define [39] como

$$\text{Ext}[C \mid K] = \{x \in C \mid x \notin y + K \text{ para todo } y \in C \setminus \{x\}\}.$$

Obsérvese que si C es singular, $\text{Ext}[C \mid K] = C$ cualquiera que sea el cono K . Además, es obvio que $\text{Ext}[C \mid \{0_n\}] = C$ y, para C no singular, $\text{Ext}[C \mid \mathbb{R}^n] = \emptyset$.

Las dos siguientes proposiciones establecen relaciones entre estos dos conceptos.

PROPOSICIÓN 2.1 *Si C es un conjunto convexo no vacío y $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, entonces $\text{end}(C; u) = \text{Ext}[C \mid \text{cone}\{-u\}]$.*

Demostración. El caso C singular es trivial, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que C es no singular.

Si $x \in C \setminus \text{Ext}[C \mid \text{cone}\{-u\}]$, entonces existen $y \in C \setminus \{x\}$ y $\lambda > 0$ tales que $x = y - \lambda u$ o, lo que es lo mismo, $x + \lambda u = y \in C$. Esta última igualdad implica que $u \in D(C, x)$ y, por lo tanto, $x \notin \text{end}(C; u)$.

Recíprocamente, si $x \in C \setminus \text{end}(C; u)$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x + \lambda u \in C$. Tomando $y := x + \lambda u \in C \setminus \{x\}$, se tiene que $x \in y + \text{cone}\{-u\}$ y, por lo tanto, $x \notin \text{Ext}[C \mid \text{cone}\{-u\}]$. ■

PROPOSICIÓN 2.2 *Si C es un conjunto convexo no vacío y $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \{0_n\}$, es un cono, entonces*

$$\text{Ext}[C \mid K] = \bigcap_{y \in K \setminus \{0_n\}} \text{end}(C; -y).$$

Demostración. Supongamos que C es no singular.

Si $x \in C \setminus \text{end}(C; -y)$ para algún $y \in K \setminus \{0_n\}$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x - \lambda y \in C$. Tomando $z := x - \lambda y$, se tiene que $z \in C \setminus \{x\}$ y $x = z + \lambda y \in z + K$, por lo que $x \notin \text{Ext}[C \mid K]$.

Recíprocamente, si $x \in C \setminus \text{Ext}[C \mid K]$, entonces existen $z \in C \setminus \{x\}$ e $y \in K \setminus \{0_n\}$ tales que $x = z + y$, por lo que $x - y = z \in C$ y $x \notin \text{end}(C; -y)$. En consecuencia, $x \notin \bigcap_{y \in K \setminus \{0_n\}} \text{end}(C; -y)$. ■

Podría pensarse que en el caso particular de que $K = \text{cone } Z$, $\emptyset \neq Z \neq \{0_n\}$, debería cumplirse que $\text{Ext}[C \mid K] = \bigcap_{y \in Z \setminus \{0_n\}} \text{end}(C; -y)$ y, por lo tanto, la Proposición 2.1 se obtendría como consecuencia, tomando $K = \text{cone}\{-u\}$. Sin embargo, este resultado no es cierto ni siquiera cuando Z es finito.

EJEMPLO 2.3 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2, x_1 \geq 0, -x_2 \geq -1\}$ y sea $K = \text{cone } Z$, con $Z = \{-e^1, \pm e^2\}$. En este caso, $\text{end}(C; -y) = C$ para todo $y \in Z \setminus \{0_n\}$ y, sin embargo, $\text{Ext}[C \mid K] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Las siguientes proposiciones proporcionan dos formas diferentes de describir el conjunto $\text{end}(C; u)$.

PROPOSICIÓN 2.4 *Sea C un conjunto convexo, $\bar{x} \in C$ y $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Si existe $y \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo*

$$\{u'y < 0; (x - \bar{x})'y \geq 0, x \in C\}, \quad (2.1)$$

entonces $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$. El recíproco es válido en $\bar{x} \in C$ para todo $u \neq 0_n$ si, y sólo si, $D(C; \bar{x})$ es cerrado.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'u < 0$ y $c'(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$. Si $\bar{x} + \alpha u \in C$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $0 \leq c'(\bar{x} + \alpha u - \bar{x}) = \alpha c'u$ y esto implica que $\alpha \leq 0$. Así pues, $u \notin D(C, \bar{x})$ y $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$.

El recíproco es cierto en $\bar{x} \in C$ si $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$, con $u \neq 0_n$, implica la existencia de $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'u < 0$ y $c'(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$. Asumamos esta hipótesis y sea $u \neq 0_n$ tal que $u \in \text{cl } D(C, \bar{x})$. Entonces, se tiene

$$u \in \text{cl } D(C, \bar{x}) = \text{cl cone } \{x - \bar{x} \mid x \in C\},$$

de modo que, por el Lema de Farkas Homogéneo, $u'y \geq 0$ es una consecuencia del sistema lineal homogéneo

$$\{(x - \bar{x})'y \geq 0, x \in C\}$$

y no existe ningún $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'u < 0$ y $c'(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$. Por lo tanto, $\bar{x} \notin \text{end}(C; u)$, es decir, $u \in D(C, \bar{x})$. En consecuencia, $D(C, \bar{x})$ es cerrado.

Recíprocamente, sea $D(C, \bar{x})$ cerrado y $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$. Si (2.1) no tuviese solución, entonces $u'y \geq 0$ sería consecuencia del sistema homogéneo

$$\{(x - \bar{x})'y \geq 0, x \in C\},$$

de manera que

$$u \in \text{cl cone } \{x - \bar{x} \mid x \in C\} = D(C, \bar{x}),$$

en contradicción con $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$. ■

La interpretación de la proposición anterior es que, si C está contenido en un semiespacio cuyo hiperplano de frontera, H , soporta a C en un punto, entonces dicho

punto está en el confín de C para toda dirección que forme ángulo agudo con la dirección normal a H dirigida hacia el exterior del semiespacio. El recíproco no se verifica en general, como puede verse en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.5 Sea $C = \text{cl } B_2$. Si consideramos $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene que $u \notin D(C, \bar{x})$, por lo que $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$ (véase Figura 2.1). Sin embargo, el único vector, $c \in \mathbb{R}^n$, que verifica que $c'(x - \bar{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$ es $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para el cual se cumple que $c'u = 0$ (obsérvese que $D(C, \bar{x})$ no es un conjunto cerrado).

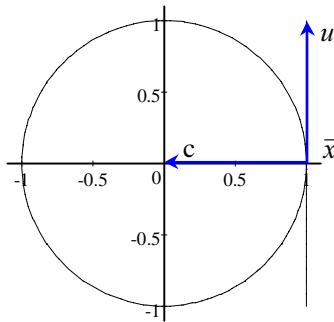


Figura 2.1

COROLARIO 2.6 Un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$ es cuasipoliédrico si, y sólo si, $\text{end}(C; u) = \{\bar{x} \in C \mid (2.1) \text{ es consistente}\}$ para todo $u \neq 0_n$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.4, ya que los conjuntos cuasipoliédricos son aquellos conjuntos convexos cerrados tales que el cono de direcciones factibles es cerrado en todos los puntos (véanse [1, Lem. 3.2] y [6, VII, 1.6]). ■

Es bien conocido que el interior relativo de las caras de un conjunto convexo no vacío C forman una partición de C [32, Th. 18.2]. El siguiente resultado establece que un determinado subconjunto de dicha partición de C es, a su vez, una partición de $\text{Ext}[C \mid K]$ y, en particular, de $\text{end}(C; u)$.

PROPOSICIÓN 2.7 Sea X una cara del conjunto convexo $C \neq \emptyset$ y sea K un cono. Si

$$(\text{rint } X) \cap \text{Ext}[C \mid K] \neq \emptyset,$$

entonces $X \subset \text{Ext}[C \mid K]$. Además, $\text{Ext}[C \mid K]$ es la unión de cierta familia de caras de C y los correspondientes interiores relativos forman una partición de $\text{Ext}[C \mid K]$.

Demostración. Si C es singular o $K = \{0_n\}$, entonces $\text{Ext}[C | K] = C$ y la proposición se cumple trivialmente. Supongamos, pues, que C es no singular y $K \neq \{0_n\}$.

Sea $\bar{x} \in (\text{rint } X) \cap \text{Ext}[C | K]$ y supongamos que $x^1 \in X \setminus \text{Ext}[C | K]$. Entonces, existen $y^1 \in C \setminus \{x^1\}$ y $k^1 \in K \setminus \{0_n\}$ tal que $x^1 = y^1 + k^1$.

Por ser $\bar{x} \in \text{rint } X$, la Proposición 0.2(iv) nos asegura la existencia de $\mu > 1$ tal que

$$x^2 := (1 - \mu)x^1 + \mu\bar{x} \in X \subset C.$$

Tomando $\lambda = (\mu - 1)/\mu$, se tiene $0 < \lambda < 1$ y

$$\bar{x} = (1 - \lambda)x^2 + \lambda x^1 = (1 - \lambda)x^2 + \lambda y^1 + \lambda k^1 \in (1 - \lambda)x^2 + \lambda y^1 + K,$$

con $(1 - \lambda)x^2 + \lambda y^1 \in C \setminus \{\bar{x}\}$, de modo que $\bar{x} \notin \text{Ext}[C | K]$ en contra de la hipótesis.

Consideremos ahora la familia de todas las caras de C cuyo interior relativo contiene, al menos, un punto de $\text{Ext}[C | K]$ y denotémosla como $\{X_i, i \in I\}$. Puesto que para cualquier $i \in I$, X_i es una cara de C tal que

$$(\text{rint } X_i) \cap \text{Ext}[C | K] \neq \emptyset,$$

acabamos de probar que

$$\bigcup_{i \in I} X_i \subset \text{Ext}[C | K]. \quad (2.2)$$

Por otra parte, si $x \in \text{Ext}[C | K] \subset C$, existe una única cara de C , digamos X , tal que $x \in \text{rint } X$. Puesto que $(\text{rint } X) \cap \text{Ext}[C | K] \neq \emptyset$, existe $i \in I$ tal que $X = X_i$. Por lo tanto,

$$\text{Ext}[C | K] \subset \bigcup_{i \in I} \text{rint } X_i. \quad (2.3)$$

La combinación de (2.2) y (2.3) da lugar a

$$\text{Ext}[C | K] = \bigcup_{i \in I} \text{rint } X_i = \bigcup_{i \in I} X_i.$$

Finalmente, $\{\text{rint } X_i, i \in I\}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos de acuerdo con [32, Th. 18.2]. ■

COROLARIO 2.8 *Sea X una cara del conjunto convexo $C \neq \emptyset$. Si*

$$(\text{rint } X) \cap \text{end}(C; u) \neq \emptyset,$$

con $u \neq 0_n$, entonces $X \subset \text{end}(C; u)$. Además, $\text{end}(C; u)$ es la unión de cierta familia de caras de C y los correspondientes interiores relativos forman una partición de $\text{end}(C; u)$.

Nótese que $\text{end}([0, 1]^2; e^1)$ contiene 3 caras del cuadrado ($\{(1, 0)'\}$, $\{(1, 1)'\}$ y $\{1\} \times [0, 1]$) e intersecta (pero no contiene) otras dos caras propias ($[0, 1] \times \{0\}$ y $[0, 1] \times \{1\}$). Por otra parte, $\text{bd } [0, 1]^2$ se puede escribir, de diferentes maneras, como unión de confines; por ejemplo, $\text{bd } [0, 1]^2 = \text{end}(C; e^1 + e^2) \cup \text{end}(C; -e^1 - e^2)$. Veremos que esto se cumple para cualquier conjunto convexo cerrado.

PROPOSICIÓN 2.9 *Dado un conjunto convexo no vacío C , se cumplen las siguientes proposiciones:*

- (i) $(\text{bd } C) \cap C = \bigcup_{u \in S_n} \text{end}(C; u)$; y
- (ii) $(\text{rbd } C) \cap C = \bigcup \{\text{end}(C; u), u \in S_n \cap [(\text{aff } C) - C]\}$.

Demostración. (i) Si $\bar{x} \in (\text{bd } C) \cap C$, existe un semiespacio soporte, $v'x \geq b$, para C en \bar{x} . Entonces $\bar{x} \in \text{end}(C; -v/\|v\|)$, por lo que

$$(\text{bd } C) \cap C \subset \bigcup_{u \in S_n} \text{end}(C; u).$$

Recíprocamente, si $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$ para algún $u \in S_n$, entonces $\bar{x} \in C$ y $\bar{x} + \varepsilon u \notin C$ para cualquier $\varepsilon > 0$, de modo que $\bar{x} \in C \setminus (\text{int } C) \subset \text{bd } C$.

(ii) Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\dim C < n$, es decir, que $W := [(\text{aff } C) - C]^\perp \neq \{0_n\}$. Sea $\tilde{C} := C + W$.

Sea $\bar{x} \in (\text{rbd } C) \cap C$. Entonces, existe una sucesión $\{x^r\} \subset (\text{aff } C) \setminus C$ tal que $\lim_r x^r = \bar{x}$.

Si $x^r \in \tilde{C}$, se puede descomponer como $x^r = y^r + w^r$, con $y^r \in C$ y $w^r \in W$. Entonces $x^r - y^r = w^r \in [(\text{aff } C) - C] \cap W = \{0_n\}$ y llegamos a la contradicción de que $x^r = y^r \in C$. Puesto que $\bar{x} \in C \subset \tilde{C}$, concluimos que $\bar{x} \in \text{bd } \tilde{C}$ y existe un semiespacio soporte $v'x \geq b$ para \tilde{C} en \bar{x} , por lo que $\bar{x} \in \text{end}(C; -v/\|v\|)$. Además, puesto que $W \subset O^+\tilde{C}$, deberá ser $v'w = 0$ para todo $w \in W$, es decir, $v \in W^\perp = (\text{aff } C) - C$ y $-v/\|v\| \in S_n \cap [(\text{aff } C) - C]$.

Recíprocamente, si $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$, con $u \in S_n \cap [(\text{aff } C) - C]$, entonces $\bar{x} + \frac{1}{r}u \in (\text{aff } C) \setminus C$, para todo $r \in \mathbb{N}$, y $\bar{x} = \lim_r \left(\bar{x} + \frac{1}{r}u \right) \in \text{rbd } C$. ■

De la Proposición 2.9 se deducen las siguientes caracterizaciones de los conjuntos convexos cerrados.

COROLARIO 2.10 *Sea C un conjunto convexo no vacío. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) C es cerrado;
- (ii) $\text{bd } C = \bigcup_{u \in S_n} \text{end}(C; u)$; y
- (iii) $\text{rbd } C = \bigcup \{ \text{end}(C; u), u \in S_n \cap [(\text{aff } C) - C] \}$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) y (i) \Rightarrow (iii) son consecuencias directas de la Proposición 2.9.

(ii) \Rightarrow (i) Puesto que $\text{end}(C; u) \subset C$ para todo $u \neq 0_n$, se tiene que $\text{bd } C \subset C$ y C es cerrado.

(iii) \Rightarrow (i) Análogamente, $\text{rbd } C \subset C$ y, por lo tanto, C es cerrado en el conjunto cerrado $\text{aff } C$. Así pues, C también es cerrado. ■

Realmente, como consecuencia de un resultado de combinatoria geométrica que se mencionará más adelante, para cubrir $\text{bd } C$ y $\text{rbd } C$ son suficientes dos confines, aunque su unión puede no ser conexa (considérese $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^{n-1}$, con $\alpha < \beta$).

El siguiente ejemplo muestra que aunque el conjunto convexo C sea cerrado o compacto, $\text{end}(C; u)$ no tiene por qué serlo. Sin embargo, probaremos que los confines de los conjuntos cuasipoliédricos son cerrados y, por lo tanto, los confines de los polítopos son compactos.

EJEMPLO 2.11 Consideremos el conjunto convexo compacto

$$C = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \text{sen } t \end{pmatrix}, t \in [0, \pi/2]; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y la dirección $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En la Figura 2.2 se puede comprobar que

$$\text{end}(C; u) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{t \in]0, \pi/2[} \left[\begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \text{sen } t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

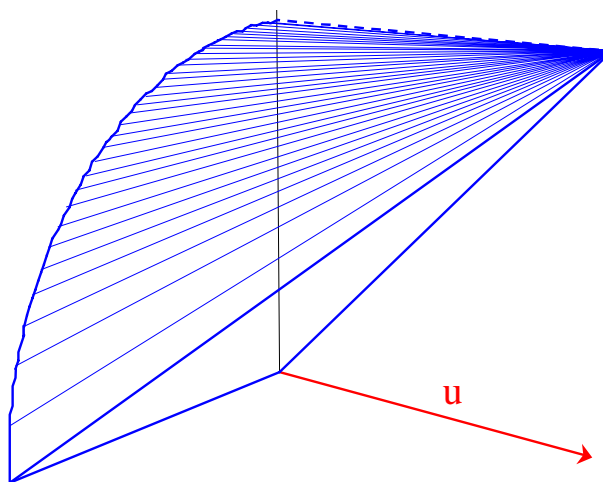


Figura 2.2

Obviamente,

$$\lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \text{sen } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cl}(\text{end}(C; u)),$$

mientras que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{end}(C; u)$.

Por lo tanto, $\text{end}(C; u)$ no es cerrado.

PROPOSICIÓN 2.12 *Si C es un conjunto cuasipoliédrico, entonces $\text{end}(C; u)$ es cerrado para todo $u \neq 0_n$.*

Demostración. Sea $\{X_i, i \in I\}$ la familia (numerable) de todas las caras de C tales que

$$(\text{rint } X_i) \cap \text{end}(C; u) \neq \emptyset.$$

En primer lugar, probaremos que $\text{end}(C; u)$ es cerrado cuando C es un conjunto poliédrico. En efecto, cualquier conjunto poliédrico tiene un número finito de caras [9, Cor. 8.5], todas ellas cerradas como consecuencia de que C es cerrado [9, Th. 5.1]. Entonces, puesto que I es finito y $\text{end}(C; u) = \bigcup_{i \in I} X_i$ (Corolario 2.8), $\text{end}(C; u)$ resulta ser la unión finita de una familia de conjuntos cerrados, de modo que también es cerrado.

Asumamos ahora que C es cuasipoliédrico y sea $\bar{x} = \lim_r x^r$, con $x^r \in \text{end}(C; u)$, $r = 1, 2, \dots$. Consideremos un polítopo P tal que $\bar{x} \in \text{int } P$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $x^r \in \text{int } P$, $r = 1, 2, \dots$

Puesto que $u \notin D(C, x^r) = D(C \cap P, x^r)$, $x^r \in \text{end}(C \cap P; u)$ para todo $r \in \mathbb{N}$, siendo $C \cap P$ un conjunto poliédrico (un polítopo). Puesto que hemos demostrado que $\text{end}(C \cap P; u)$ es cerrado, obtenemos que $\bar{x} \in \text{end}(C \cap P; u)$ y, por lo tanto, $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$. Esto prueba que $\text{end}(C; u)$ es cerrado. ■

Las dos proposiciones siguientes proporcionan caracterizaciones de los puntos extremos y de la dimensión completa de los conjuntos convexos no vacíos en términos de los confines.

PROPOSICIÓN 2.13 *x es un punto extremo del conjunto convexo no vacío C si, y sólo si,*

$$x \in \text{end}(C; u) \cup \text{end}(C; -u) \tag{2.4}$$

para todo $u \neq 0_n$.

Demostración. Probaremos la equivalencia entre ambas negaciones para cualquier $x \in C$.

Si no se verifica (2.4) para cierto $u \neq 0_n$, entonces $\pm u \in D(C, x)$, por lo que deben existir $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $x + \varepsilon_1 u \in C$ y $x - \varepsilon_2 u \in C$. Entonces $x \in]x - \varepsilon_2 u, x + \varepsilon_1 u[\subset C$ y x no es un punto extremo de C .

Recíprocamente, si x no es un punto extremo de C , entonces existe $u \neq 0_n$, tal que $x \pm u \in C$, en cuyo caso $\pm u \in D(C, x)$ y no se verifica (2.4). ■

PROPOSICIÓN 2.14 *Dado un conjunto convexo no vacío C , se verifican las siguientes proposiciones:*

- (i) $\text{end}(C; u) = C$, con $u \neq 0_n$, si, y sólo si, $u \notin (\text{aff } C) - C$.
- (ii) $\dim C < n$ si, y sólo si, existe $u \neq 0_n$ tal que $\text{end}(C; u) = C$.

Demostración. (i) Si $\text{end}(C; u) \neq C$ podemos tomar $x \in C \setminus \text{end}(C; u)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon u \in C$. Entonces $\varepsilon u \in (\text{aff } C) - C$ y, por lo tanto, $u \in (\text{aff } C) - C$.

Recíprocamente, asumamos que $u \neq 0_n$ satisface $u \in (\text{aff } C) - C$. Tomando un punto arbitrario $x \in \text{rint } C$, por la Proposición 0.7, $(\text{aff } C) - C = \text{span}(C - x)$ y $0_n \in \text{rint}(C - x)$. Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon u \in C - x$ y $u \in D(C, x)$. Entonces, $x \in C \setminus \text{end}(C; u)$.

(ii) Puesto que $(\text{aff } C) - C = \text{span}(C - x)$ cualquiera que sea $x \in \text{rint } C$, $\dim C < n$ si, y sólo si, existe $u \neq 0_n$ tal que $u \notin \text{span}(C - x) = (\text{aff } C) - C$ o, equivalentemente (por la parte (i)), $\text{end}(C; u) = C$. ■

La siguiente proposición establece condiciones suficientes para que un punto de C sea punto extremo o punto extremo expuesto.

PROPOSICIÓN 2.15 *Sea C un conjunto convexo no vacío. Si $\{\bar{x}\} = \text{end}(C; u)$ para cierto $u \neq 0_n$, entonces $\bar{x} \in \text{extr } C$. Si, además, C es cerrado, entonces \bar{x} es punto extremo expuesto de C y $\dim C \leq 1$.*

Demostración. Si $\bar{x} \notin \text{extr } C$, entonces existen dos puntos $y, z \in C$ y un escalar $0 < \lambda < 1$ tales que

$$\bar{x} = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Dado que $y, z \notin \text{end}(C; u)$ (pues $\text{end}(C; u) = \{\bar{x}\}$), existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $y + \varepsilon_1 u \in C$ y $z + \varepsilon_2 u \in C$. Por lo tanto,

$$\bar{x} + [\lambda\varepsilon_1 + (1 - \lambda)\varepsilon_2]u = \lambda(y + \varepsilon_1 u) + (1 - \lambda)(z + \varepsilon_2 u) \in C,$$

lo cual contradice que $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$.

Supongamos ahora que C es cerrado y $\{\bar{x}\} = \text{end}(C; u)$. Si $C = \{\bar{x}\}$, es evidente que \bar{x} es punto extremo expuesto de C y $\dim C = 0$.

Sea, pues, C un conjunto no singular. Probaremos, por reducción al absurdo, que $C - \bar{x} \subset \text{span}\{u\}$.

En efecto, si $x \in C$ es tal que $x - \bar{x} \notin \text{span}\{u\}$, se tiene que $x \notin \text{end}(C; u)$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon u \in C$.

Consideremos el conjunto no vacío

$$L := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid x + \alpha u \in C\}.$$

Dado que la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\varphi(\alpha) = x + \alpha u$ es continua y $L = \varphi^{-1}(C)$, se tiene que L es cerrado. Entonces, se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

(i) $\sup L = \max L = \bar{\alpha} > 0$, con lo que $x + \bar{\alpha}u \in C$ y

$$x + (\alpha + \bar{\alpha})u = (x + \bar{\alpha}u) + \alpha u \notin C,$$

para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, $x + \bar{\alpha}u \in \text{end}(C; u)$ y $x + \bar{\alpha}u \neq \bar{x}$ (si fueran iguales, $x - \bar{x} \in \text{span}\{u\}$), lo cual contradice la hipótesis $\text{end}(C; u) = \{\bar{x}\}$.

(ii) $\sup L = +\infty$, con lo que $x + \varepsilon u \in C$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $u \in O^+C$ y $\text{end}(C; u) = \emptyset$, lo cual contradice de nuevo la hipótesis.

Concluimos, pues, que $C - \bar{x} \subset \text{span}\{u\}$ y, por lo tanto, $\dim C \leq 1$. Es más, puesto que C no es singular, $\dim C = 1$.

Por otro lado, puesto que C es un conjunto convexo cerrado unidimensional contenido en $\bar{x} + \text{span}\{u\}$ y $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$, C deberá ser la semirrecta $\{\bar{x} - \lambda u; \lambda \geq 0\}$ o un segmento $[\bar{x}, \bar{y}]$ con $\bar{y} = \bar{x} - \bar{\lambda}u$, para cierto $\bar{\lambda} > 0$. En ambos casos

$$C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid u'(x - \bar{x}) = 0\} = \{\bar{x}\},$$

por lo que \bar{x} es punto extremo expuesto de C . ■

La hipótesis $\text{end}(C; u) = \{\bar{x}\}$ no implica que \bar{x} sea punto extremo expuesto de C . En otras palabras, la condición de clausura (referida a C), en la segunda parte de la

Proposición 2.15, no es superflua. El siguiente ejemplo justifica esta afirmación.

EJEMPLO 2.16 Consideremos el conjunto C de soluciones del sistema

$$\{tx_1 + (1-t)x_2 > t - t^2, t \in]0, 1[; x_1 > 0\},$$

representado en la Figura 2.3.

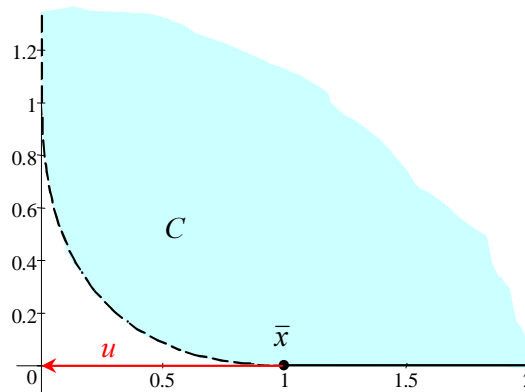


Figura 2.3

Si consideramos el punto $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la dirección $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{end}(C; u) = \{\bar{x}\}$ y \bar{x} es punto extremo de C , pero no es punto extremo expuesto. En efecto, el único hiperplano que soporta a C en el punto \bar{x} es $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ y también contiene a todos los puntos del conjunto $]1, +\infty[\times \{0\} \subset C$.

El recíproco de la primera parte de la Proposición 2.15 no se verifica en general, como veremos en el siguiente ejemplo. Sin embargo, probaremos que sí se verifica para $\dim C \leq 1$.

EJEMPLO 2.17 Sea C el conjunto de soluciones del sistema

$$\{tx_1 + (1-t)x_2 > t - t^2, t \in]0, 1[\},$$

representado en la Figura 2.4.

Los puntos $x^1, x^2 \in C$ son puntos extremos y, sin embargo, no existe ninguna dirección en la que el confín sea igual a uno de esos puntos. En efecto, cualquier vector no nulo, u , del primer cuadrante (incluidos los ejes) es una dirección de recesión, por lo que $\text{end}(C; u) = \emptyset$. Las restantes elecciones del vector $u \neq 0_n$ dan lugar a los siguientes confines:

- Si $u \in]-\infty, 0[\times]0, +\infty[$, $\text{end}(C; u) = \{0\} \times [1, +\infty[$.
- Si $u = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda > 0$, $\text{end}(C; u) = \{x^1\} \cup (\{0\} \times [1, +\infty[)$.

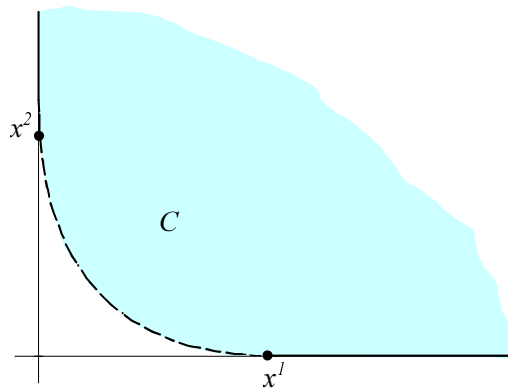


Figura 2.4

- Si $u \in]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$, $\text{end}(C; u) = (\{0\} \times [1, +\infty[) \cup ([1, +\infty[\times \{0\})$.
- Si $u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $\lambda > 0$, $\text{end}(C; u) = \{x^2\} \cup ([1, +\infty[\times \{0\})$.
- Si $u \in]0, +\infty[\times]-\infty, 0[$, $\text{end}(C; u) = [1, +\infty[\times \{0\}$.

COROLARIO 2.18 *Sea C un conjunto convexo no vacío tal que $\dim C \leq 1$. Entonces, \bar{x} es un punto extremo de C si, y sólo si, existe $u \neq 0_n$ tal que $\{\bar{x}\} = \text{end}(C; u)$.*

Demostración. Si $\dim C = 0$, entonces $C = \{\bar{x}\}$ para cierto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\text{end}(C; u) = \{\bar{x}\}$, cualquiera que sea $u \neq 0_n$.

Si $\dim C = 1$, entonces $C - \bar{x} \subset \text{span}\{v\}$ para cierto $v \neq 0_n$, es decir, $C \subset \{\bar{x} + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Puesto que $\bar{x} \in \text{extr} C$, aplicando la Proposición 2.13, se tiene que $\bar{x} \in \text{end}(C; v) \cup \text{end}(C; -v)$ y se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

(i) $\bar{x} \in \text{end}(C; v)$ o, lo que es lo mismo, $v \notin D(C, \bar{x})$. En este caso, $\max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \bar{x} + \alpha v \in C\} = 0$ y $\{\bar{x}\} = \text{end}(C; v)$.

(ii) $\bar{x} \notin \text{end}(C; v)$, en cuyo caso $\bar{x} \in \text{end}(C; -v)$. Del mismo modo, $\max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \bar{x} - \alpha v \in C\} = 0$ y $\{\bar{x}\} = \text{end}(C; -v)$.

El recíproco es un caso particular de la Proposición 2.15. ■

PROPOSICIÓN 2.19 *Si C es un conjunto convexo no vacío tal que $\dim C \leq 1$, entonces existe $u \neq 0_n$ tal que $\text{end}(C; u)$ es vacío o singular.*

Demostración. Si $\dim C = 0$, entonces $C = \{\bar{x}\}$ para cierto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\text{end}(C; u) = \{\bar{x}\}$, cualquiera que sea $u \neq 0_n$.

Si $\dim C = 1$, tomando $\bar{x} \in C$, se tiene que $C - \bar{x} \subset \text{span}\{u\}$ para cierto $u \neq 0_n$. Por lo tanto, $C \subset \{\bar{x} + \alpha u \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ y se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

(i) Existe un número real $\bar{\alpha} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \bar{x} + \alpha u \in C\}$. Si $\bar{x} + \bar{\alpha}u \in C$, entonces

$$\{\bar{x} + \bar{\alpha}u\} = \text{end}(C; u)$$

y $\text{end}(C; u)$ es singular. De lo contrario, $\text{end}(C; u) = \emptyset$.

(ii) $\sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \bar{x} + \alpha u \in C\} = +\infty$, con lo que $u \in O^+C$ y $\text{end}(C; u)$ es vacío. ■

2.3 Conexión del confín

Retomando el Ejemplo 2.17, podemos ver que si $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$\text{end}(C; u) = \{x^1\} \cup (\{0\} \times [1, +\infty]),$$

que es la unión de dos cerrados disjuntos y, por lo tanto, no es un conjunto conexo.

Así pues, los confines de los conjuntos convexos no son necesariamente conexos. En el siguiente ejemplo veremos que también pueden ser conexos pero no conexos por arcos.

EJEMPLO 2.20 Sea X un subconjunto conexo de $[-1, 1]^2$ que no sea conexo por arcos. Consideremos la proyección estereográfica $\varphi : S_3 \setminus \{e^3\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, que asocia a $x \neq e^3$, la intersección de la semirrecta que sale de e^3 y pasa por x con el plano $x_3 = 0$, es decir

$$\varphi(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right)'$$

Es bien sabido que φ establece un homeomorfismo entre $S_3 \setminus \{e^3\}$ y el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$, siendo fácil comprobar que la imagen mediante φ del hemisferio inferior, $\{x \in S_3 \mid x_3 \leq 0\}$, es el círculo $(\text{cl } B_2) \times \{0\}$.

Puesto que $\|x\|_\infty \leq 1$ para cualquier $x \in X$, se tiene que $X \subset \sqrt{2} \text{cl } B_2$, es decir, $\frac{1}{\sqrt{2}}X \subset \text{cl } B_2$.

$C := B_3 \cup \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} X \times \{0\} \right)$ es un conjunto convexo (al ser el resultado de agregar a una bola abierta un subconjunto de la esfera correspondiente) para el cual

$$\text{end}(C; -e^3) = \varphi^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} X \times \{0\} \right),$$

que es homeomorfo a X y, por lo tanto, conexo, aunque no conexo por arcos.

Una posible elección para X es el conjunto

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{1}{x_1}, x_1 \in [-1, 1] \setminus \{0\} \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]),$$

representado en la Figura 2.5.

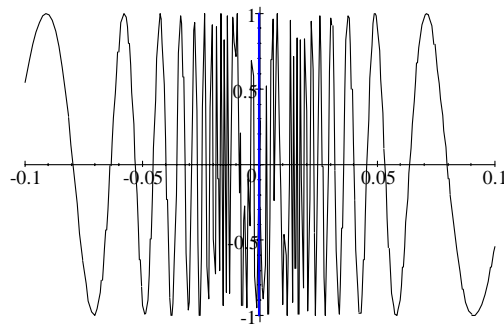


Figura 2.5

En cambio, para los conjuntos convexos cerrados, todo confín es conexo por arcos (y por lo tanto conexo), según veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 2.21 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $u \neq 0_n$ tal que $\text{end}(C; u) \neq \emptyset$. Entonces $\text{end}(C; u)$ es conexo por arcos.*

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\text{end}(C; u)$ contiene dos puntos distintos, \bar{x} e \bar{y} . Probaremos la existencia de un arco contenido en $\text{end}(C; u)$ que une \bar{x} e \bar{y} .

Consideremos $f : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para $x \in C$,

$$f(x) := \max \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda u \in C \}.$$

Puesto que u no es dirección de recesión (en caso contrario $\text{end}(C; u) = \emptyset$) y C es cerrado, f está bien definida. Obviamente, $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = 0$.

Para probar que f es cóncava, consideremos $x \in C$, $y \in C$ y $\rho \in [0, 1]$. Entonces, puesto que $x + f(x)u \in C$ e $y + f(y)u \in C$, se tiene

$$\begin{aligned} & (1 - \rho)x + \rho y + [(1 - \rho)f(x) + \rho f(y)]u = \\ & = (1 - \rho)[x + f(x)u] + \rho[y + f(y)u] \in C, \end{aligned}$$

de modo que

$$f((1 - \rho)x + \rho y) \geq (1 - \rho)f(x) + \rho f(y).$$

En consecuencia, la restricción de f al segmento $[\bar{x}, \bar{y}]$ es cóncava y, por lo tanto, continua en el interior de su dominio, es decir, en $] \bar{x}, \bar{y} [$. Probaremos, a continuación, su continuidad en \bar{x} (la prueba es la misma en \bar{y}).

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \neq f(\bar{x}) = 0$. En tal caso, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{x^r\}_{r \in \mathbb{N}} \subset] \bar{x}, \bar{y} [$ tal que $\lim_r x^r = \bar{x}$ y $f(x^r) \geq \varepsilon$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Para cada $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^r + f(x^r)u \in C$, de modo que

$$x^r + \varepsilon u \in [x^r, x^r + f(x^r)u] \subset C$$

y, puesto que C es cerrado, se obtiene $\bar{x} + \varepsilon u = \lim_r (x^r + \varepsilon u) \in C$, lo cual contradice que $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$.

Por lo tanto, la función $\varphi : [\bar{x}, \bar{y}] \rightarrow \text{end}(C; u)$ definida como $\varphi(x) := x + f(x)u$ es continua y satisface $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$ y $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$. Se concluye que $\{\varphi(x) \mid x \in [\bar{x}, \bar{y}]\}$ es la curva buscada. ■

Como consecuencia de la conexión por arcos de los confines no vacíos de los conjuntos convexos cerrados, se obtiene la conexión de la frontera de ciertos conjuntos convexos compactos. Dicha propiedad es trivial cuando la dimensión es menor que n (ya que cualquier conjunto convexo es conexo por arcos). Por lo tanto, analizaremos la conexión de la frontera relativa. Para ello necesitamos el siguiente lema.

LEMA 2.22 *Sea C un conjunto convexo no vacío, $Y \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in \text{cone } Y$, $u \neq 0_n$. Si $x \in \text{end}(C; u)$, entonces $x \in \text{end}(C; y)$ para un cierto $y \in Y \setminus \{0_n\}$.*

Demostración. Supongamos que $x \notin \text{end}(C; y)$ para todo $y \in Y \setminus \{0_n\}$ y sea

$u = \sum_{i=1}^p \lambda_i y^i$, con $\lambda_i > 0$ e $y^i \in Y \setminus \{0_n\}$, $i = 1, \dots, p$.

Puesto que $x \notin \text{end}(C, y^i)$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $x + \varepsilon_i y^i \in C$, $i = 1, \dots, p$. Definiendo $\mu := \min \left\{ \frac{\varepsilon_i}{\lambda_i}, i = 1, \dots, p \right\} > 0$, se tiene

$$x + \mu \lambda_i y^i \in [x, x + \varepsilon_i y^i] \subset C, i = 1, \dots, p,$$

y, por lo tanto, su media aritmética $x + \frac{\mu}{p} u \in C$. Por lo tanto, $u \in D(C, x)$, lo cual contradice la hipótesis $x \in \text{end}(C; u)$. ■

PROPOSICIÓN 2.23 *Sea C un conjunto convexo compacto no vacío. Entonces $\text{rbd } C$ es conexa por arcos (conexa) si, y sólo si, $\dim C \neq 1$.*

Demostración. Si $\dim C = 1$, entonces $C = [x, y]$ para dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, de modo que $\text{rbd } C = \{x, y\}$ ni siquiera es conexa.

Para demostrar el recíproco podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\dim C \geq 2$. Probaremos que

$$\text{rbd } C = \cup \{ \text{end}(C; u), u \in S_n \cap [(\text{aff } C) - C] \} \quad (2.5)$$

(véase Corolario 2.10) es conexo por arcos. Sea $\{u^1, \dots, u^d\}$ una base ortonormal de $(\text{aff } C) - C$ y sea $u^{d+1} := -\sum_{i=1}^d u^i / \sqrt{d} \in S_n \cap [(\text{aff } C) - C]$. Puesto que

$$S_n \cap [(\text{aff } C) - C] \subset \text{span} \{u^1, \dots, u^d\} = \text{cone} \{u^1, \dots, u^{d+1}\},$$

se obtiene, de (2.5) y del Lema 2.22,

$$\text{rbd } C = \bigcup_{i=1}^{d+1} \text{end}(C; u^i).$$

Por lo tanto, $\text{rbd } C$ es unión de $d + 1$ conjuntos que son conexos por arcos (Proposición 2.21), por lo que bastará probar que

$$\text{end}(C; u^i) \cap \text{end}(C; u^{i+1}) \neq \emptyset, i = 1, \dots, d.$$

Si $i \in \{1, \dots, d - 1\}$, consideremos una solución óptima, x^i , del problema

$$\text{Inf} - (u^i + u^{i+1})' x \text{ s.a } x \in C,$$

(dicha solución existe por ser continua la función objetivo y ser compacto el conjunto factible). Dicho punto satisface $-(u^i + u^{i+1})'(x - x^i) \geq 0$ para todo $x \in C$, mientras

que $-(u^i + u^{i+1})'u^j = -1$, $j = i, i + 1$. Por lo tanto $x^i \in \text{end}(C; u^j)$, $j = i, i + 1$, de acuerdo con la Proposición 2.4. En consecuencia,

$$\text{end}(C; u^i) \cap \text{end}(C; u^{i+1}) \neq \emptyset, i = 1, \dots, d - 1.$$

Finalmente, sea x^d una solución óptima del problema

$$\text{Inf} \left(\sum_{i=1}^{d-1} u^i - \frac{u^d}{2} \right)' x \text{ s.a } x \in C.$$

Puesto que

$$\left(\sum_{i=1}^{d-1} u^i - \frac{u^d}{2} \right)' (x - x^d) \geq 0$$

para todo $x \in C$ y

$$\left(\sum_{i=1}^{d-1} u^i - \frac{u^d}{2} \right)' u^j < 0, j = d, d + 1,$$

se obtiene, de nuevo por la Proposición 2.4,

$$\text{end}(C; u^d) \cap \text{end}(C; u^{d+1}) \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

La demostración que acabamos de realizar se puede considerar como una mera aplicación del confín al análisis convexo, ya que existen demostraciones alternativas más cortas. Por ejemplo, se puede demostrar considerando que C es un cuerpo convexo compacto en \mathbb{R}^n , con $n > 1$, eligiendo un punto cualquiera $a \in \text{int} C$ y definiendo la transformación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|}$ si $x \in \text{bd} C$ y $T(a + \lambda(x - a)) = \lambda T(x)$ si $\lambda \in [0, 1]$. Dado que T es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n que lleva la frontera de C en la esfera S_n (que es conexas por arcos), resulta que $\text{bd} C$ también es conexas por arcos.

2.4 El confín y la iluminación de los conjuntos convexos cerrados

Los siguientes conceptos son extensiones naturales para conjuntos convexos

cerrados de los dados por Boltyanski [8] y por Soltan [34] para cuerpos convexos compactos y cuerpos convexos, respectivamente.

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_n$. Dado $x \in \text{rbd } C$, se dice que x está iluminado por u si $\{x + \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap \text{rint } C \neq \emptyset$. Del mismo modo, diremos que $x \in \text{rbd } C$ es visible en la dirección u si $\{x - \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap C = \emptyset$.

Denotaremos por $\text{ill}(C; u)$ (por $\text{vis}(C; u)$) el conjunto de puntos de la frontera relativa de C que están iluminados por $u \neq 0_n$ (visibles en la dirección $u \neq 0_n$, respectivamente).

La siguiente proposición establece relaciones entre los conjuntos que acabamos de definir y los confines.

PROPOSICIÓN 2.24 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_n$. Entonces, se verifican las siguientes proposiciones:*

- (i) $\text{ill}(C; u) \subset \text{vis}(C; u) \subset \text{end}(C; -u)$;
- (ii) $\text{ill}(C; u) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $u \in [(\text{aff } C) - C] \setminus (-O^+C)$; y
- (iii) $\text{vis}(C; u) = \text{end}(C; -u)$ si, y sólo si, $u \in (\text{aff } C) - C$.

Demostración. (i) Si $x \in \text{ill}(C; u) \setminus \text{vis}(C; u)$, entonces existen $\lambda_1 > 0$ tal que $x + \lambda_1 u \in \text{rint } C$ y $\lambda_2 > 0$ tal que $x - \lambda_2 u \in C$. Como consecuencia del Lema de Accesibilidad (Proposición 0.2(iii)), se tiene

$$x \in]x + \lambda_1 u, x - \lambda_2 u[\subset \text{rint } C,$$

lo que contradice la hipótesis.

La inclusión $\text{vis}(C; u) \subset \text{end}(C; -u)$ es consecuencia directa de las definiciones de ambos conjuntos.

(ii) Si $\text{ill}(C; u)$ es no vacío, entonces existen $x \in \text{rbd } C$ y $\mu > 0$ tales que $\bar{x} := x + \mu u \in \text{rint } C$. Por lo tanto, $u = \frac{1}{\mu}(\bar{x} - x) \in (\text{aff } C) - C$.

Por otra parte, si $-u \in O^+C$, entonces $x - \mu u \in C$ y, por el Lema de Accesibilidad, se tiene

$$x \in]x + \mu u, x - \mu u[\subset \text{rint } C,$$

en contra de la hipótesis. Por lo tanto, $u \in [(\text{aff } C) - C] \setminus (-O^+C)$.

Recíprocamente, si $u \in [(\text{aff } C) - C] \setminus (-O^+C)$ y tomamos un punto arbitrario $x \in \text{rint } C$, entonces existe $\mu > 0$ tal que $x - \mu u \in C$. Sea

$$\varepsilon = \max \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid x - \lambda u \in C \} > 0$$

(dicho máximo se alcanza por ser $-u \notin O^+C$ y C cerrado y es positivo por ser $\varepsilon \geq \mu$) y sea $\bar{x} := x - \varepsilon u \in C$. De nuevo por el Lema de Accesibilidad, se tiene que $]\bar{x}, x[\subset \text{rint } C$ y, por lo tanto,

$$\emptyset \neq]\bar{x}, x[\subset \{ \bar{x} + \lambda u \mid \lambda > 0 \} \cap \text{rint } C. \quad (2.6)$$

Dado que $-u \notin D(C, \bar{x})$, se cumple que $\bar{x} \in \text{end}(C; -u) \subset \text{rbd } C$ (véase Corolario 2.10 (iii)) y esto, junto con (2.6), implica que $\bar{x} \in \text{ill}(C; u)$.

(iii) Si $u \notin (\text{aff } C) - C$, entonces $-u \notin (\text{aff } C) - C$ y, por la Proposición 2.14, $\text{end}(C; -u) = C$. Entonces, se tiene

$$\text{vis}(C; u) \subset \text{rbd } C \subsetneq C = \text{end}(C; -u),$$

lo que contradice la hipótesis.

Probaremos el recíproco viendo que $\text{end}(C; -u) \subset \text{vis}(C; u)$ para cualquier vector no nulo $u \in (\text{aff } C) - C$.

En efecto, si $x \in \text{end}(C; -u)$, por ser $-u \in (\text{aff } C) - C$ y por el Corolario 2.10, se tiene que $x \in \text{rbd } C$. Además, $-u \notin D(C, x)$ por lo que $\{x - \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap C = \emptyset$ y $x \in \text{vis}(C; u)$. ■

Nótese que $\text{vis}(C; u) \neq \emptyset$ es conexo por arcos cuando $u \in (\text{aff } C) - C$ (ya que $\text{vis}(C; u) = \text{end}(C; -u)$, conexo por arcos por la Proposición 2.21). Si $u \notin (\text{aff } C) - C$, entonces $\text{vis}(C; u) = \text{rbd } C$ que, como veremos en el Capítulo 3, es conexo por arcos siempre que C no sea un sandwich.

La primera inclusión en la Proposición 2.24 (i) puede ser estricta. Por ejemplo, si $C = [0, 1]^2$, $\text{ill}(C; e^1) = \{0\} \times]0, 1[$ mientras que $\text{vis}(C; e^1) = \{0\} \times [0, 1]$. Sin embargo, como veremos en la siguiente proposición, ambos conjuntos están bastante próximos.

PROPOSICIÓN 2.25 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y consideremos rbd C dotado de la topología inducida por la norma Euclídea de \mathbb{R}^n . Si $\text{ill}(C; u) \neq \emptyset$, entonces $\text{ill}(C; u)$ es abierto, conexo por arcos y denso en $\text{vis}(C; u)$.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{ill}(C; u)$ y sea $\lambda > 0$ tal que $\bar{x} + \lambda u \in \text{rint } C$. Sea $\rho > 0$ tal que $(\bar{x} + \lambda u + \rho B_n) \cap \text{aff } C \subset \text{rint } C$. Dado $x \in \text{rbd } C$ tal que $\|x - \bar{x}\| < \rho$, se puede ver fácilmente que $x + \lambda u \in (\bar{x} + \lambda u + \rho B_n) \cap \text{aff } C \subset \text{rint } C$, de modo que $x \in \text{ill}(C; u)$. Por lo tanto, $\text{ill}(C; u)$ es abierto en $\text{rbd } C$.

Sea, ahora, $x^i \in \text{ill}(C; u)$, $i = 1, 2$. La función $\Psi : [x^1, x^2] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\Psi(x) = \max \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid x - \lambda u \in C \}$$

está bien definida porque $-u \in [(\text{aff } C) - C] \setminus (O^+ C)$ (en otro caso $\text{ill}(C; u) = \emptyset$) y C es cerrado. Además, Ψ es continua (retomemos la demostración de la Proposición 2.21), $\Psi(x^1) = \Psi(x^2) = 0$ y $x - \Psi(x)u \in \text{end}(C; -u) \subset \text{rbd } C$ para todo $x \in [x^1, x^2]$, por el Corolario 2.10. Tenemos que demostrar que $x - \Psi(x)u \in \text{ill}(C; u)$ para todo $x \in]x^1, x^2[$. De hecho, si $x = (1 - \mu)x^1 + \mu x^2$, con $0 < \mu < 1$, y $x^i + \lambda_i u \in \text{rint } C$, con $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned} [x - \Psi(x)u] + [(1 - \mu)\lambda_1 + \mu\lambda_2 + \Psi(x)]u &= \\ &= (1 - \mu)(x^1 + \lambda_1 u) + \mu(x^2 + \lambda_2 u) \in \text{rint } C, \end{aligned}$$

con $(1 - \mu)\lambda_1 + \mu\lambda_2 + \Psi(x) > 0$, de modo que $x - \Psi(x)u \in \text{ill}(C; u)$. Por lo tanto, $\{x - \Psi(x)u \mid x \in [x^1, x^2]\}$ es un arco contenido en $\text{ill}(C; u)$ que conecta x^1 y x^2 .

Finalmente, dado $x^1 \in \text{vis}(C; u)$, tomemos un $x^2 \in \text{ill}(C; u)$ arbitrario, $x^2 \neq x^1$, y consideremos de nuevo la función Ψ . Probaremos que, para todo $x \in]x^1, x^2[$, $x - \Psi(x)u \in \text{ill}(C; u)$.

Sea $x^2 + \lambda_2 u \in \text{rint } C$, con $\lambda_2 > 0$. Entonces, si $x = (1 - \mu)x^1 + \mu x^2$, con $0 < \mu < 1$, el lema de accesibilidad establece que

$$[x - \Psi(x)u] + [\mu\lambda_2 + \Psi(x)]u = (1 - \mu)x^1 + \mu(x^2 + \lambda_2 u) \in \text{rint } C,$$

con $\mu\lambda_2 + \Psi(x) > 0$.

Por lo tanto, $x^1 = \lim_{x \rightarrow x^1} (x - \Psi(x)u) \in \text{cl } \text{ill}(C; u)$. ■

Nótese que, en la demostración de la conexión por arcos de $\text{ill}(C; u)$ y de su densidad en $\text{vis}(C; u)$, hemos considerado $\text{ill}(C; u)$ no singular. Si fuese un conjunto singular, $\text{rbd } C = \text{ill}(C; u) = \text{vis}(C; u)$ y se cumpliría trivialmente la proposición.

De la Proposición 2.25, $\text{ill}(C; u) \subset \text{int vis}(C; u)$ mientras que la inclusión inversa también es cierta cuando $\text{ill}(C; u) \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 2.26 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y consideremos $\text{rbd } C$ dotado de la topología inducida por la norma Euclídea de \mathbb{R}^n . Si $\text{ill}(C; u) \neq \emptyset$, entonces $\text{ill}(C; u) = \text{int vis}(C; u)$.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in \text{int vis}(C; u) \setminus \text{ill}(C; u)$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\bar{x} + \varepsilon B_n) \cap \text{rbd } C \subset \text{vis}(C; u). \quad (2.7)$$

Tomando $\bar{\lambda} := \frac{\varepsilon}{\|u\|}$, se tiene que $\bar{x} + \lambda u \in (\bar{x} + \varepsilon B_n)$, para todo $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, y, si suponemos que $\bar{x} + \lambda u \in \text{rbd } C$, entonces, de acuerdo con (2.7), $\bar{x} + \lambda u \in \text{vis}(C; u)$, lo cual se contradice con $\bar{x} \in C$. Por lo tanto, $\bar{x} + \lambda u \notin \text{rbd } C$ para todo $\lambda \in]0, \bar{\lambda}[$.

Como, por otra parte, $\bar{x} + \lambda u \notin \text{rint } C$ (pues $\bar{x} \notin \text{ill}(C; u)$), se concluye que $\bar{x} + \lambda u \notin C$ para todo $\lambda \in]0, \bar{\lambda}[$ y, como consecuencia, $\bar{x} \in \text{end}(C; u)$ y $u \notin O^+C$.

Sea $y \in \text{ill}(C; u)$. Puesto que u no es dirección de recesión y C es cerrado, podemos considerar la restricción, al segmento $[y, \bar{x}]$, de la aplicación de la Proposición 2.21, es decir, $f_{|[y, \bar{x}]} : [y, \bar{x}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para $x \in [y, \bar{x}]$,

$$f(x) := \max \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda u \in C \}.$$

Dado que $f(\bar{x}) = 0$ y f es continua en \bar{x} (véase la demostración de la Proposición 2.21), se cumple que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (x + f(x)u) = \bar{x}$ por lo que, para x suficientemente próximo a \bar{x} , se tiene $x + f(x)u \in (\bar{x} + \varepsilon B_n)$. Además, por la propia definición de f , se tiene que $x + f(x)u \in \text{end}(C; u) \subset \text{rbd } C$, de modo que

$$x + f(x)u \in (\bar{x} + \varepsilon B_n) \cap \text{rbd } C$$

y, sin embargo, $x + f(x)u \notin \text{vis}(C; u)$, lo que se contradice con (2.7). ■

COROLARIO 2.27 *Si C es un cuerpo convexo y $u \notin O^+C$, entonces $\text{end}(C; u) = \text{vis}(C; -u)$ y $\text{int end}(C; u) = \text{ill}(C; -u)$. Además, $\text{end}(C; u)$ es cerrado si, y sólo si, $\text{end}(C; u) = \text{cl ill}(C; -u)$.*

Demostración. Al ser C un cuerpo convexo, $(\text{aff } C) - C = \mathbb{R}^n$, por lo que la hipótesis $u \notin O^+C$ implica que $-u \in [(\text{aff } C) - C] \setminus (-O^+C)$ o, lo que es lo mismo, $\text{ill}(C; -u) \neq \emptyset$ (Proposición 2.24 (ii)) y $\text{vis}(C; -u) = \text{end}(C; u)$ (Proposición 2.24 (iii)). Partiendo de estos dos resultados y aplicando la Proposición 2.26, se obtiene

$$\text{ill}(C; -u) = \text{int vis}(C; -u) = \text{int end}(C; u).$$

Por otra parte, por la Proposición 2.25, $\text{ill}(C; -u)$ es denso en $\text{vis}(C; -u) = \text{end}(C; u)$, por lo que

$$\text{end}(C; u) \subset \text{cl ill}(C; -u) \subset \text{cl end}(C; u),$$

de donde se deduce la última parte de la proposición. ■

Acabaremos esta sección con algunos comentarios acerca de combinatoria geométrica en conjuntos convexos cerrados.

Dado $x \in \text{rbd } C$, si $y \in \text{rint } C$, entonces $x \in \text{ill}(C; y - x)$. Por lo tanto, $\{\text{ill}(C; u) \mid u \neq 0_n\}$ es un recubrimiento abierto de $\text{rbd } C$.

Denotemos por $b(C)$ el mínimo número de direcciones que iluminan C (es decir, todos los puntos de $\text{rbd } C$) y por $u(C)$ el mínimo número de direcciones en las que es visible C . Si $e(C)$ es el mínimo número de confines que cubren $\text{bd } C$, entonces $e(C) = 1$ si $\dim C < n$ (véase Proposición 2.14 (ii)) y $e(C) \leq u(C) \leq b(C)$ para todo conjunto convexo cerrado C (consecuencia de la Proposición 2.24 (i)).

Por lo que respecta a $b(C)$, obsérvese que sólo las direcciones de $(\text{aff } C) - C$ iluminan al menos un punto de $\text{rbd } C$ y que

$$\{\text{ill}(C; u) \mid u \in (\text{aff } C) - C, u \neq 0_n\}$$

es una familia de conjuntos abiertos en $\text{rbd } C$. Si C es compacto, $\text{rbd } C$ es compacto también, de modo que $b(C) < \infty$. Puesto que $b(C) \geq n + 1$ para cuerpos convexos compactos [8], se obtiene $\dim C + 1 \leq b(C) < \infty$.

Alternativamente, si C es no acotado, es posible que $b(C) = \infty$ incluso para cuerpos convexos. Si $b(C) < \infty$, la conjetura de Soltan sobre la iluminación de cuerpos convexos no acotados [34] se puede reformular como $b(C) \leq 2^{\dim C - 1}$.

Por otra parte, $u(C) \leq 2$ si C es un cuerpo convexo [34] (obsérvese que $u(C) = 1$ si C es el epigrafo de una función cuadrática estrictamente convexa). En consecuencia, $e(C) \leq u(C) \leq 2$ para todo conjunto convexo cerrado C , es decir, bastan dos confines para cubrir la frontera o la frontera relativa de un conjunto convexo cerrado.

2.5 Algunas aplicaciones a los sistemas de desigualdades lineales

En esta sección, consideraremos sistemas en \mathbb{R}^n de la forma

$$\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\},$$

donde T es un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$. Al conjunto de soluciones de σ , que es un conjunto convexo cerrado, lo denotaremos por F .

A continuación, daremos dos propiedades geométricas de F (una de ellas para sistemas LFM) y una caracterización de los sistemas LOP, a través de los confines.

PROPOSICIÓN 2.28 Sean $F \neq \emptyset$ y K , el conjunto de soluciones y el cono característico de $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$, respectivamente. Si $a'_s x \geq b_s$ (con $s \in T$) define un semiespacio soporte de F , entonces

$$\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} \in \text{end} \left(K; \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (2.8)$$

El recíproco es cierto cuando F es compacto.

Demostración. Supongamos que $a_s \neq 0_n$, $a'_s x \geq b_s$ para todo $x \in F$ y $a'_s \bar{x} = b_s$ para cierto $\bar{x} \in F$.

Puesto que $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq 0$ para todo $t \in T$, $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ y $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} = 0$, la desigualdad $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0$ define un semiespacio soporte de K en $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}$.

Asumiendo que no se verifica (2.8), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s \\ b_s + \gamma \end{pmatrix} \in K$$

para cierto $\gamma > 0$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_s \\ b_s + \gamma \end{pmatrix} \geq 0$, es decir, $a'_s \bar{x} - b_s - \gamma = -\gamma \geq 0$, y se obtiene la contradicción deseada.

Asumamos, ahora, que se verifica (2.8). La compacidad de F implica (por la Proposición 0.19) que

$$\text{int } K = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a'x > b \text{ para todo } x \in F \right\}.$$

Si $a'_s x \geq b_s$ no definiese un semiespacio soporte de F , entonces $a'_s x > b_s$ para todo $x \in F$, de modo que $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} \in \text{int } K$, lo que se contradice con (2.8). ■

El recíproco de la proposición anterior puede fallar si F no es compacto.

EJEMPLO 2.29 Consideremos el sistema

$$\sigma = \left\{ x_1 + tx_2 \geq \sqrt{t}, t \in [0, 1] \right\},$$

cuyo conjunto de soluciones está representado en la Figura 2.6, y tomemos el índice $s = 0$, que no define un semiespacio soporte de F .

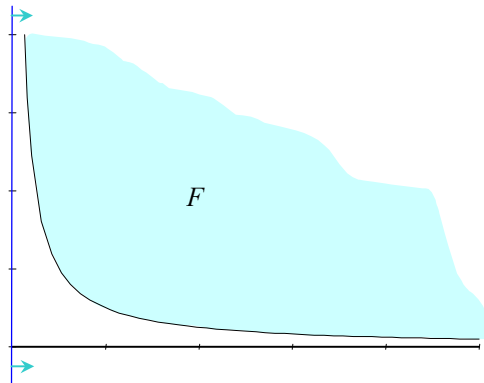


Figura 2.6

El cono característico del sistema es

$$K = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}, t \in [0, 1]; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Veremos que,

$$\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{end} \left(K; \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En efecto, si tomamos cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \notin K$$

pues, de lo contrario,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\gamma \in \mathbb{R}_+$. De (2.9) se obtiene

$$\sum_{t \in [0,1]} \lambda_t = 1, \quad \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t t = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \sqrt{t} - \gamma = \varepsilon,$$

de donde se deduce que

$$\lambda_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad -\gamma = \varepsilon,$$

con lo que γ resulta ser negativo.

PROPOSICIÓN 2.30 Sea $F \neq \emptyset$ el conjunto de soluciones de un sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ tal que $a_t \neq 0_n$ para todo $t \in T$. Se cumple:

- (i) Si $T_c \neq \emptyset$, entonces $F = \text{end}(F; u) = \text{end}(F; -u)$ para cierto $u \neq 0_n$.
- (ii) Si $F = \text{end}(F; u) = \text{end}(F; -u)$ para algún $u \neq 0_n$ y σ es LFM, entonces $T_c \neq \emptyset$.

Demostración. (i) Sea $s \in T_c$ y tomemos $\bar{x} \in F$ arbitrariamente. Dado que $a'_s(x - \bar{x}) = 0$ para todo $x \in F$, se tiene que $a_s \in [(\text{aff } F) - F]^\perp$, $a_s \neq 0_n$, de modo que $\pm a_s \notin (\text{aff } F) - F$ y $\text{end}(F; a_s) = \text{end}(F; -a_s) = F$ de acuerdo con la Proposición 2.14 (i).

(ii) Sea $F = \text{end}(F; u) = \text{end}(F; -u)$, $u \neq 0_n$. Puesto que $\dim F < n$ (por la afirmación (ii) de la Proposición 2.14), existe $v \neq 0_n$ tal que $v'(x - \bar{x}) = 0$ para todo $x \in F$, siendo \bar{x} un punto arbitrario de F . Entonces $\pm v'(x - \bar{x}) \geq 0$ son semiespacios soporte de F en \bar{x} , y existe un conjunto finito de índices $S \subset T$ tal que ambas desigualdades son consecuencia de $\{a'_t x \geq b_t \mid t \in S\}$. De acuerdo con el Lema de Farkas no homogéneo, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} v \\ v'\bar{x} \end{pmatrix} = \sum_{t \in S} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

y

$$-\begin{pmatrix} v \\ v'\bar{x} \end{pmatrix} = \sum_{t \in S} \gamma_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

con $\mu \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$ para todo $t \in S$ y $\gamma_t \geq 0$ para todo $t \in S$, no todos nulos.

De (2.10) y (2.11) se sigue que

$$(\mu + \delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in S} (\lambda_t + \gamma_t) \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in K, \quad (2.12)$$

de modo que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K$ si $\mu + \delta > 0$. Aplicando, de nuevo, el Lema de Farkas, se obtiene, para todo $x \in F$, la relación absurda $0'_n x \geq 1$.

Por lo tanto, $\mu = \delta = 0$ y (2.12) se convierte en

$$\sum_{t \in S} (\lambda_t + \gamma_t) \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = 0_{n+1}.$$

Si $\lambda_s + \gamma_s > 0$, entonces,

$$-\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} = \sum_{t \in S \setminus \{s\}} \frac{\lambda_t + \gamma_t}{\lambda_s + \gamma_s} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in K,$$

de modo que $a'_s x \leq b_s$ es consecuencia de σ (de nuevo por el Lema de Farkas no homogéneo). Por lo tanto, $a'_s x = b_s$ para todo $x \in F$ y $s \in T_c$. ■

La condición de que σ es LFM en (ii) no es supérflua. Podemos verlo en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.31 Consideremos el sistema

$$\sigma = \left\{ x_2 \geq \frac{-1}{r}, r \in \mathbb{N}; -x_2 \geq \frac{-1}{r}, r \in \mathbb{N}; x_1 - x_2 \geq 0 \right\},$$

cuyo conjunto factible está representado en la Figura 2.7.

Se trata de un sistema que no es LFM, pues la restricción $x_1 \geq 0$ define un hiperplano soporte de F , pero no es consecuencia de ningún subsistema finito de σ .

Si consideramos $a_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, se verifica que $\text{end}(F; a_s) = \text{end}(F; -a_s) = F$, pero no hay índices portadores.

PROPOSICIÓN 2.32 Sea $F \neq \emptyset$ el conjunto de soluciones de un sistema $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$. Entonces, se verifica:

(i) Si $x \in F$ y $u \notin A(x)^\circ$, entonces $x \in \text{end}(F; u)$.

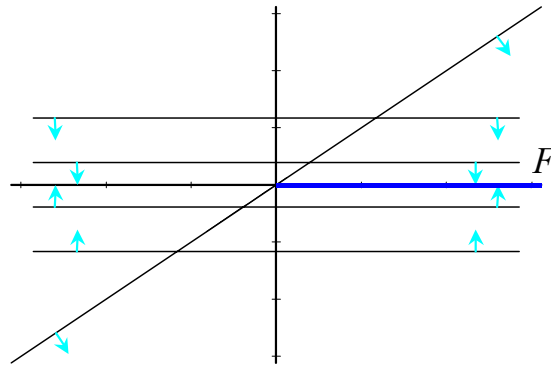


Figura 2.7

(ii) σ es LOP si, y sólo si, $u \notin A(x)^\circ$ para todo par (x, u) tal que $x \in \text{end}(F; u)$. En otras palabras, σ es LOP si, y sólo si, el recíproco de (i) se verifica en todos los puntos de F .

Demostración. (i) Sean $\bar{x} \in F$ y $u \notin A(\bar{x})^\circ$. Entonces, existe un vector $y = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t$, con $\lambda_t = 0$ para todo $t \notin T(\bar{x})$ y $\lambda_t \geq 0$ para todo $t \in T(\bar{x})$, satisfaciendo $y'u < 0$. Puesto que, para cualquier $x \in F$,

$$y'(x - \bar{x}) = \sum_{t \in T} \lambda_t a'_t (x - \bar{x}) = \sum_{t \in T} \lambda_t (a'_t x - b_t) \geq 0,$$

se concluye que y satisface (2.1) y, por tanto, $\bar{x} \in \text{end}(F; u)$ de acuerdo con la Proposición 2.4.

(ii) Sea $x \in F$ y $u \neq 0_n$ tal que $x \in \text{end}(F; u)$. Si σ es LOP, se verifica que $A(x)^\circ = D(F, x)$ y, puesto que $u \notin D(F, x)$, se tiene que $u \notin A(x)^\circ$.

Recíprocamente, dado $u \in A(x)^\circ$, la hipótesis implica que $x \notin \text{end}(F; u)$, de modo que $u \in D(F, x)$. Por lo tanto, $A(x)^\circ \subset D(F, x)$ mientras que la inclusión opuesta siempre es cierta. Se obtiene, pues, $A(x)^\circ = D(F, x)$ para todo $x \in F$, por lo que σ es LOP. ■

