Nuevos resultados sobre sistemas lineales y conjuntos convexos

Margarita Rodríguez Álvarez

Tesis de Doctorado

Facultad: Ciencias

Directores: Dr. Miguel Ángel Goberna Torrent
Dr. Valentín Jornet Pla

2001

Universidad de Alicante

Depto. de Estadística e Investigación Operativa

Nuevos resultados sobre sistemas lineales y conjuntos convexos

Memoria presentada por Margarita Rodríguez Álvarez para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, realizada bajo la dirección de los doctores D. Miguel Ángel Goberna Torrent y D. Valentín Jornet Pla.

Alicante, Mayo de 2001

D. MIGUEL ÁNGEL GOBERNA TORRENT, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante, y

D. VALENTÍN JORNET PLA, Catedrático E.U. de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante,

CERTIFICAN: Que la presente memoria **Nuevos resultados sobre sistemas lineales y conjuntos convexos** ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante por Dña. Margarita Rodríguez Álvarez, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente certificado en Alicante, a 10 de Mayo de dos mil uno.

Fdo: Miguel A. Goberna　　　　Fdo: Valentín Jornet

Índice

Introducción

El conjunto de soluciones de cualquier sistema de desigualdades lineales de la forma $\{a_t'x \geq b_t,\, t \in T\}$, siendo T un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$, es un conjunto convexo cerrado y, recíprocamente, cualquier conjunto convexo cerrado se puede representar por medio de una infinidad de sistemas lineales de este tipo. Existe, pues, una correspondencia entre sistemas semi-infinitos lineales (SSIL) y conjuntos convexos cerrados.

Sin embargo, los sistemas anteriormente mencionados no son los sistemas lineales más generales que podemos considerar. Un sistema en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\, t \in D;\, a_t'x > b_t,\ t \in E\}\,,$$

donde los conjuntos de índices, D y E, son disjuntos y no simultáneamente vacíos, $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T := D \cup E$, contiene un número arbitrario (posiblemente infinito) de restricciones de desigualdad débil (dos de las cuales reemplazan a una ecuación) y/o estricta. Se trata, pues, de un sistema semi-infinito lineal general (SSILG) y su conjunto de soluciones es un conjunto convexo, por tratarse de una intersección de semiespacios abiertos o cerrados.

En este punto, cabe preguntarse si, al igual que ocurre con los conjuntos convexos cerrados (caso particular de los conjuntos convexos) y los SSIL (caso particular de los SSILG), todo conjunto convexo se puede representar por medio de un SSILG. Al ser negativa la respuesta, llamaremos conjuntos linealizables a la clase de conjuntos convexos que sí cumplen esta propiedad. Estos conjuntos fueron introducidos por Fenchel [14] (con la denominación de “evenly convex”) para extender la teoría de la polaridad, pero sin analizar a fondo sus posibles caracterizaciones ni estudiar exhaustivamente sus propiedades. De la existencia de este trabajo tuvimos noticia a través de una comunicación privada del Prof. Martínez Legaz, quien ha utilizado estos conjuntos para definir un tipo de funciones cuasiconvexas importante para la generalización de la teoría de la conjugación (véanse [24], [30], [25] y [26]).

Aunque los SSIL han sido muy bien estudiados por su conexión con la Programación Semi-Infinita Lineal, no ocurre lo mismo con los SSILG, por lo que dedicaremos el Capítulo 1 de la presente memoria al estudio de esta clase de sistemas y de los conjuntos que admiten este tipo de representaciones lineales. En él analizaremos la existencia de soluciones, caracterizaremos geométricamente los conjuntos linealizables y probaremos que se pueden extender, a esta gran familia de conjuntos convexos, la mayoría de las propiedades conocidas para la subfamilia de los conjuntos convexos cerrados. También mostraremos que es posible obtener información geométrica sobre estos conjuntos a partir de una representación lineal dada y, finalmente, discutiremos la teoría y los métodos para aquellos problemas de optimización lineal que contienen restricciones de desigualdad estrictas.

Dentro de la correspondencia que existe entre SSIL y conjuntos convexos cerrados, hay ciertos tipos de SSIL que se corresponden con determinadas familias de conjuntos convexos cerrados. Así, por ejemplo, los llamados sistemas localmente poliédricos (LOP), sistemas en los que la condición de Weyl (siempre suficiente para que un punto sea extremo) es también necesaria, tienen conjuntos de soluciones cuasipoliédricos (conjuntos convexos cerrados cuyas intersecciones con polítopos son polítopos) y, viceversa, cualquier conjunto cuasipoliédrico admite una representación LOP. Por lo tanto, podemos caracterizar los conjuntos cuasipoliédricos como aquellos conjuntos convexos cerrados que admiten representaciones LOP.

La caracterización de familias de conjuntos convexos cerrados puede resultar útil en diferentes campos de las matemáticas aplicadas. Así, por ejemplo, una condición necesaria para la convergencia de algoritmos de programación matemática que progresan sobre la frontera del conjunto factible (como el método simplex en programación lineal ordinaria y semi-infinita) es la conexión por arcos de la frontera, por lo que sería útil caracterizar aquellos conjuntos convexos cerrados que poseen esta deseada propiedad. En el Capítulo 3 abordaremos la caracterización de determinadas familias de conjuntos convexos cerrados (algunas de ellas con propiedades muy interesantes de cara a las aplicaciones) desde diferentes puntos de vista, entre ellos sus representaciones lineales.

En particular, para caracterizar la clase de los conjuntos convexos cerrados que tienen la frontera relativa conexa por arcos será necesario el uso de un nuevo concepto, el de confín de un conjunto convexo no vacío, que introduciremos en el Capítulo 2. En este capítulo, además, analizaremos las propiedades del confín de los conjuntos convexos en general y de los convexos cerrados en particular, así como sus relaciones con ciertos conceptos de iluminación ya conocidos y sus aplicaciones a la teoría de los sistemas lineales.

Por último, decir que los tres capítulos que constituyen el cuerpo de esta memoria están precedidos por un capítulo de preliminares, el Capítulo 0, en el que se recoge la notación, las definiciones y los enunciados de los resultados ya conocidos que se van a utilizar en los demás capítulos. Buena parte de dichos resultados aparecen expuestos en la reciente monografía de Goberna y López [19] de una manera ordenada y con una notación unificada que se ha mantenido en esta memoria. Hemos optado por referirnos a [19], siempre que ha sido posible, en lugar de hacerlo a las fuentes originales (que el lector puede encontrar en las notas finales del correspondiente capítulo de [19]).

Capítulo 0

Preliminares

0.1 Conjuntos convexos

En el espacio euclídeo, $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\|\cdot\|$, 0_n,

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

y

$$S_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

la norma euclídea, el vector cero, la *bola unidad abierta* y la *esfera unidad*, respectivamente. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ la representaremos por $e^1, \ldots, e^n$.

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *convexo* cuando, para todo par $x, y \in C$, el segmento $[x, y] := \{(1-\lambda)\, x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contenido en C. Consideraremos que el vacío es un conjunto convexo por convenio.

Un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un *cono* si contiene a todos los rayos $\{\lambda x \mid \lambda > 0\}$, con $x \in C \setminus \{0_n\}$.

Dado $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\operatorname{span} C$, $\operatorname{aff} C$, $\operatorname{conv} C$, $\operatorname{cone} C$ y $C^{\perp}$ al *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *generado* por C, la *envoltura afín* de C, la *envoltura convexa* de C, el *cono convexo generado* por C (definido como la intersección de todos los conos convexos que contienen al origen y al conjunto C) y el subespacio de los vectores que son ortogonales a todos los elementos de C, respectivamente. Si $C = \emptyset$, adoptaremos el convenio $\operatorname{span} \emptyset = \operatorname{aff} \emptyset = \operatorname{cone} \emptyset = \{0_n\}$. Si C es convexo no vacío, denotaremos por $\dim C$ su *dimensión* (definida como la dimensión de $\operatorname{aff} C$). Todas estas envolturas se pueden describir a través del espacio de *sucesiones finitas generalizadas*, $\mathbb{R}^{(T)}$, cuyos elementos son las funciones $\lambda : T \to \mathbb{R}$ tales que $\lambda_t \neq 0$ sólo en un subconjunto finito de T. El cono convexo, en $\mathbb{R}^{(T)}$, de las sucesiones finitas no negativas es $\mathbb{R}_+^{(T)}$.

Supuesto que C es convexo, diremos que un conjunto convexo $X \subset C$ es una *cara* de C si, para todo par $v^1 \neq v^2$ de C tal que $X \cap \left]v^1, v^2\right[\neq \emptyset$, se tiene que $[v^1, v^2] \subset X$. El conjunto vacío también se considera una cara de C por convenio. Los *puntos extremos*, las *aristas* y las *facetas* de C son las caras de C de dimensión 0, 1 y $n-1$, respectivamente. Denotaremos por $\operatorname{extr} C$ el conjunto de todos los puntos extremos de C. Diremos que una cara es *expuesta* si se puede obtener como conjunto de mínimos de una función afín sobre C.

Para C convexo no vacío definiremos el *cono de recesión* de C, O^+C, que viene dado por

$$O^+C := \{v \in \mathbb{R}^n \mid x + \mu v \in C \text{ para todo } x \in C \text{ y para todo } \mu \geq 0\}$$

y el *cono de direcciones factibles* de C en $x \in C$, $D(C, x)$, dado por

$$D(C, x) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid x + \mu v \in C \text{ para algún } \mu > 0\}.$$

Si $C \neq \emptyset$ es un cono convexo, definiremos el *cono polar positivo* de C, C^o, dado por

$$C^o := \{u \in \mathbb{R}^n \mid u'x \geq 0 \text{ para todo } x \in C\}.$$

Obsérvese que para todo $x \in C$, $D(C, x) = \operatorname{cone}(C - x)$.

Al conjunto $O^+C \cap (-O^+C)$ le llamaremos *espacio de linealidad* de C y se denotará por $\operatorname{lin} C$.

Un cono convexo es *apuntado* cuando no contiene rectas, es decir, si su espacio de linealidad se reduce al vector cero.

Un vector no nulo $w \in O^+C$ es una *dirección extrema* del conjunto convexo no vacío C si, para todo par de vectores w^1, $w^2 \in O^+C$ tales que $w = \mu_1 w^1 + \mu_2 w^2$

(μ_1 y μ_2 números reales positivos), se tiene que

$$\operatorname{span}\left\{w^i\right\} = \operatorname{span}\{w\}, \quad i = 1, 2.$$

Desde el punto de vista topológico, denotamos por $\operatorname{int} C$, $\operatorname{cl} C$ y $\operatorname{bd} C$ los conjuntos *interior*, *clausura* y *frontera* de un subconjunto C cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Si el conjunto C es convexo, definimos los conjuntos *interior relativo* y *frontera relativa* de C, denotados por $\operatorname{rint} C$ y $\operatorname{rbd} C$, como el interior y la frontera de C cuando consideramos C como subconjunto de $\operatorname{aff} C$ con la topología inducida.

Dado un conjunto convexo C y un punto $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$, existe un vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tal que $a'x \geq a'\overline{x}$ para todo $x \in C$; a la frontera de este semiespacio le llamaremos *hiperplano de soporte* de C en $\overline{x}$.

Se utilizarán a menudo las siguientes familias de conjuntos convexos cerrados: los *poliedros convexos* (definidos como intersecciones finitas de semiespacios cerrados), los *polítopos* (poliedros convexos acotados) y los *conjuntos cuasipoliédricos* (definidos por Klee como aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cuyas intersecciones con polítopos son polítopos).

Ciertas pruebas por inducción utilizan implícitamente la adaptación de los conceptos anteriores a variedades: Las variedades afines en M (variedad afín de $\mathbb{R}^n$) son las variedades afines de $\mathbb{R}^n$ contenidas en M, y son hiperplanos en M cuando su dimensión es $(\dim M) - 1$. Si L es un hiperplano en M, cada una de las dos componentes conexas de $M \setminus L$ es un semiespacio abierto en M determinado por L; su unión con L proporciona los dos semiespacios cerrados en M correspondientes a L. La intersección de finitos semiespacios cerrados de M es un poliedro convexo en M, pudiéndose probar que son exactamente los poliedros convexos de $\mathbb{R}^n$ contenidos en M. Del mismo modo, los polítopos (cuasipoliedros) de M son los polítopos (cuasipoliedros) de $\mathbb{R}^n$ contenidos en M. Las propiedades de los poliedros convexos, polítopos y cuasipoliedros en una variedad afín de dimensión $m < n$ son las mismas que las de los objetos correspondientes en $\mathbb{R}^m$ (sustituyendo los operadores topológicos, bd e int, por los relativos correspondientes, rbd y rint).

Dado que será frecuente el uso de resultados de Análisis Convexo a lo largo de la memoria, hacemos, a continuación, una recopilación de los mismos, dando, para cada uno de ellos, la adecuada referencia bibliográfica. En algunos casos aislados, daremos el enunciado y su demostración, por tratarse de nuevas aportaciones.

PROPOSICIÓN 0.1 *[32, Th. 3.8] Si K_1 y K_2 son conos convexos que contienen al origen, entonces $K_1 + K_2 = \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$.*

PROPOSICIÓN 0.2 *Sea C un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$. Entonces, se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{rint} C$ *es un conjunto convexo no vacío [32, Th. 6.2];*

(ii) $\operatorname{rint} \operatorname{cl} C = \operatorname{rint} C$ *y* $\operatorname{cl} \operatorname{rint} C = \operatorname{cl} C$ *[32, Th. 6.3]*;

(iii) *si $x \in \operatorname{rint} C$ e $y \in \operatorname{cl} C$, entonces $[x, y[\subset \operatorname{rint} C$ (Lema de Accesibilidad) [32, Th. 6.1]; y*

(iv) *$z \in \operatorname{rint} C$ si, y sólo si, para todo $x \in C$, existe $\mu > 1$ tal que $(1-\mu)x + \mu z \in C$ [32, Th. 6.4].*

PROPOSICIÓN 0.3 *[32, Th. 6.6] Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea A una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces*

$$\operatorname{rint}(AC) = A(\operatorname{rint} C).$$

PROPOSICIÓN 0.4 *[32, Cor. 6.6.2] Para cualquier par de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, C_1 y C_2, se cumple*

$$\operatorname{rint}(C_1 + C_2) = \operatorname{rint} C_1 + \operatorname{rint} C_2.$$

Como se ha señalado, el interior relativo de un conjunto convexo no vacío es no vacío. Algo parecido ocurre con $\operatorname{rbd} C$.

PROPOSICIÓN 0.5 *Sea C un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$. Entonces, se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{rbd} C$ *es no vacío si, y sólo si, C no es una variedad afín; y*

(ii) *si C es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^n$, entonces C tiene, al menos, un punto frontera.*

Demostración. (i) Para demostrar la implicación no trivial, construiremos un par de sucesiones $\{x^n\} \subset C$ e $\{y^n\} \subset (\operatorname{aff} C) \setminus C$ convergentes al mismo punto de $\operatorname{aff} C$. Dicho punto estará en la frontera relativa de C.

Por ser C no vacío y no ser una variedad afín ($(\operatorname{aff} C) \setminus C \neq \emptyset$), existe un punto $x^1 \in C$ y un punto $y^1 \in (\operatorname{aff} C) \setminus C$. Si $\dfrac{x^1 + y^1}{2}$ (que pertenece a $\operatorname{aff} C$ por ser combinación convexa de elementos de dicho conjunto) pertenece a C, entonces tomamos

$$x^2 = \frac{x^1 + y^1}{2} \text{ e } y^2 = y^1.$$

En caso contrario, tomamos

$$x^2 = x^1 \text{ e } y^2 = \frac{x^1 + y^1}{2}.$$

En general, para construir los términos x^{n+1} e y^{n+1}, se toman

$$x^{n+1} = \frac{x^n + y^n}{2} \quad \text{e} \quad y^{n+1} = y^n, \quad \text{si} \quad \frac{x^n + y^n}{2} \in C,$$

y

$$x^{n+1} = x^n \quad \text{e} \quad y^{n+1} = \frac{x^n + y^n}{2}, \quad \text{si} \quad \frac{x^n + y^n}{2} \in (\operatorname{aff} C) \setminus C.$$

De esta manera hemos construido una sucesión $\{x^n\}$ contenida en el conjunto C y una sucesión $\{y^n\}$ contenida en el conjunto $(\operatorname{aff} C) \setminus C$ cuyos términos n-ésimos verifican que

$$\|x^n - y^n\| = \frac{\|x^{n-1} - y^{n-1}\|}{2}.$$

La sucesión $\{x^n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ ya que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $p \geq 0$, se tiene que

$$\left\|x^{n+p} - x^n\right\| \leq \|x^n - y^n\| = \frac{\|x^1 - y^1\|}{2^{n-1}}.$$

Del mismo modo, $\{y^n\}$ también es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Además, ambas sucesiones son convergentes en $\mathbb{R}^n$ a un mismo punto, el cual pertenece a $\operatorname{aff} C$ por ser éste un conjunto cerrado.

(ii) El argumento de la demostración es el mismo que en el caso anterior sustituyendo $\operatorname{aff} C$ por $\mathbb{R}^n$. ■

La siguiente proposición caracteriza los puntos del interior relativo de la envoltura convexa (envoltura convexa cónica) de un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSICIÓN 0.6 *[19, Th. A7] Sea C un conjunto no vacío en $\mathbb{R}^n$ y $z \in \operatorname{aff} C$ ($z \in \operatorname{span} C$). Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) $z \in \operatorname{rint} \operatorname{conv} C$ *(*$z \in \operatorname{rint} \operatorname{cone} C$*, respectivamente);*

(ii) *existen puntos* $x^i \in C$*,* $i = 1, 2, \ldots, p$*, con* $\operatorname{aff}\{x^1, x^2, \ldots, x^p\} = \operatorname{aff} C$ *(respectivamente* $\operatorname{span}\{x^1, x^2, \ldots, x^p\} = \operatorname{span} C$*), y escalares positivos* α_i*,* $i = 1, 2, \ldots, p$*, tales que* $z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i$ *y* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ *(respectivamente* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ *arbitraria); y*

(iii) $z + \operatorname{cone}(C - z) = \operatorname{aff} C$

$$(\mathbb{R}_+ [(\operatorname{cone} C) - z] = \operatorname{cone}[\{-z\} \cup \operatorname{cone} C] = \operatorname{span} C).$$

En la siguiente proposición demostramos algunas de las propiedades, claramente intuitivas, que tienen los puntos del interior relativo de un convexo no vacío.

PROPOSICIÓN 0.7 *Sea* C *un conjunto convexo no vacío y* $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$*. Entonces se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{span}(C - \overline{x}) = \operatorname{cone}(C - \overline{x}) = (\operatorname{aff} C) - C$; y

(ii) $0_n \in \operatorname{rint}(C - \overline{x})$.

Demostración. (i) Para demostrar la primera igualdad es suficiente probar que dada una base en $\operatorname{span}(C - \overline{x})$, sus elementos y los opuestos pertenecen a $\operatorname{cone}(C - \overline{x})$. Sea $\{y^i - \overline{x},\, i = 1, \ldots, m\}$, con $y^i \in C$ para todo $i = 1, \ldots, m$, una base de $\operatorname{span}(C - \overline{x})$.

Puesto que $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$, existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$(\overline{x} + \varepsilon B_n) \cap (\operatorname{aff} C) \subset C.$$

Para cada $i = 1, \ldots, m$, el punto

$$\overline{x} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{(y^i - \overline{x})}{\|y^i - \overline{x}\|} \in (\overline{x} + \varepsilon B_n) \cap (\operatorname{aff} C) \subset C,$$

de modo que

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{(\overline{x} - y^i)}{\|y^i - \overline{x}\|} \in C - \overline{x}$$

y, por lo tanto,

$$\overline{x} - y^i \in \operatorname{cone}(C - \overline{x}).$$

Dado que también se verifica que $y^i - \overline{x} \in \operatorname{cone}(C - \overline{x})$ para todo $i = 1, ..., m$, se obtiene que

$$\operatorname{cone}(C-\overline{x}) = \operatorname{span}(C-\overline{x}).$$

Por otra parte, si $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$,

$$(\operatorname{aff} C) - C = (\operatorname{aff} C) - \overline{x}. \tag{0.1}$$

En efecto, si $y - x \in (\operatorname{aff} C) - C$, entonces

$$y - x = y + \overline{x} - \overline{x} - x = (y + \overline{x} - x) - \overline{x} \in (\operatorname{aff} C) - \overline{x}.$$

La segunda igualdad en (i) se obtiene como consecuencia de (0.1) y de la Proposición 0.6(iii).

(ii) Si $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$, entonces, por la Proposición 0.6, existen puntos $x^i \in C$, $i = 1, \ldots, p$, con

$$\operatorname{aff} C = \operatorname{aff}\left\{x^1, x^2, ..., x^p\right\},$$

y escalares positivos α_i, $i = 1, \ldots, p$, tales que

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i \text{ y } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Entonces

$$0_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i - \overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (x^i - \overline{x})$$

con $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ y

$$\operatorname{aff}(C - \overline{x}) = \operatorname{aff}\left\{x^1 - \overline{x}, x^2 - \overline{x}, ..., x^p - \overline{x}\right\},$$

y, por la Proposición 0.6,

$$0_n \in \operatorname{rint} \operatorname{conv}(C - \overline{x}) = \operatorname{rint}(C - \overline{x}). \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado caracteriza la acotación de un conjunto convexo cerrado no vacío a través de su cono de recesión.

PROPOSICIÓN 0.8 *[32, Th. 8.4] Un conjunto convexo cerrado no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si, y sólo si, $O^+C = \{0_n\}$.*

PROPOSICIÓN 0.9 *[32, Cor. 9.1.1] Sean $C_1, \ldots, C_m$ conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la siguiente condición: si $z_1, \ldots, z_m$ son vectores tales que $z_i \in O^+ (\mathrm{cl}\, C_i)$ y $z_1 + \ldots + z_m = 0_n$, entonces $z_i \in \mathrm{lin}\,(\mathrm{cl}\, C_i)$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces*

$$\mathrm{cl}\,(C_1 + \ldots + C_m) = \mathrm{cl}\, C_1 + \ldots + \mathrm{cl}\, C_m,$$

$$O^+ [\mathrm{cl}\,(C_1 + \ldots + C_m)] = O^+ (\mathrm{cl}\, C_1) + \ldots + O^+ (\mathrm{cl}\, C_m).$$

En las dos siguientes proposiciones se dan propiedades acerca de las caras de un conjunto convexo.

PROPOSICIÓN 0.10 *[32, Th. 18.1] Sea C un conjunto convexo, y sea C' una cara de C. Si D es un conjunto convexo en C tal que $(\mathrm{rint}\, D) \cap C' \neq \emptyset$, entonces $D \subset C'$.*

PROPOSICIÓN 0.11 *[32, Cor. 18.1.3] Sea C un conjunto convexo, y sea C' una cara propia de C. Entonces $C' \subset \mathrm{rbd}\, C$ y $\dim C' < \dim C$.*

Se dice que un par de conjuntos no vacíos, C_1 y C_2, son *separables* si existe un hiperplano $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = b\}$ tal que $a'x - b \leq 0 \leq a'y - b$ para todo $x \in C_1$ y para todo $y \in C_2$. Si, además, $(C_1 \cup C_2) \setminus H \neq \emptyset$, entonces C_1 y C_2 están *propiamente separados*. En el caso de que las desigualdades sean estrictas, se dice que H separa a C_1 y C_2 *estrictamente.*

Por otra parte, si se cumple la desigualdad

$$\inf \{a'x \mid x \in C_1\} \geq \sup \{a'y \mid y \in C_2\},$$

se dice que C_1 y C_2 están *débilmente separados* y si esta desigualdad es estricta, se dice que H separa a C_1 y C_2 *fuertemente*.

PROPOSICIÓN 0.12 *[32, Th. 11.2] Sea C un conjunto convexo no vacío relativamente abierto en $\mathbb{R}^n$, y sea M una variedad afín no vacía en $\mathbb{R}^n$ que no corta a C. Entonces existe un hiperplano H conteniendo a M, tal que uno de los semiespacios abiertos asociados con H contiene a C.*

PROPOSICIÓN 0.13 *[32, Cor. 11.4.1] Sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados convexos no vacíos disjuntos en $\mathbb{R}^n$ que no tienen direcciones de recesión en común. Entonces existe un hiperplano separando fuertemente a C_1 y C_2.*

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, se definen el *epigrafo* de f, $\mathrm{epi}\, f$, y el *hipografo* de f, $\operatorname{hypo} f$, como los conjuntos

$$\operatorname{epi} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \leq \alpha \right\}$$

y

$$\operatorname{hypo} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \geq \alpha \right\}.$$

Diremos que f es *convexa* o *cóncava* según sea convexo el conjunto $\operatorname{epi} f$ o bien $\operatorname{hypo} f$.

Llamaremos *dominio efectivo* de f, $\operatorname{dom} f$, al conjunto

$$\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}.$$

Una función convexa f se dice que es *propia* si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ y $f(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dada una función convexa propia, f, y un punto $x \in \operatorname{dom} f$, se dice que el vector u es un *subgradiente* de f en x si, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(x) + u'(y - x).$$

Se dice que f es *subdiferenciable* en un punto $x \in \operatorname{dom} f$ si existe algún subgradiente de f en x y, en el caso de que éste sea único, se dice que f es *diferenciable* en x.

La subdiferenciabilidad de f en un punto $x \in \operatorname{dom} f$ es equivalente a la existencia de un hiperplano no vertical que soporta a $\operatorname{epi} f$ en $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ y cada subgradiente de f en x, u, está asociado con exactamente uno de estos hiperplanos de soporte (el que tiene como vector normal a $\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}$). La existencia de tales hiperplanos de soporte no verticales es una propiedad de los puntos de $\operatorname{rint}(\operatorname{dom} f)$, es decir, f es subdiferenciable en todos los puntos de $\operatorname{rint}(\operatorname{dom} f)$ [32, Th. 23.4].

0.2 Sistemas semi-infinitos lineales

A lo largo de la memoria irán apareciendo repetidamente sistemas lineales de la forma

$$\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\, t \in T\}\,, \tag{0.2}$$

donde T es un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$. En esta sección haremos una recopilación de los principales conceptos y resultados que se van a utilizar en relación con los sistemas semi-infinitos lineales (SSIL).

Denotaremos por F el *conjunto de soluciones* de σ y diremos que σ es *consistente* si $F \neq \emptyset$. Cuando todos los coeficientes de una desigualdad lineal son cero, se dice que esta *desigualdad* es *trivial*. El *sistema* será *trivial* cuando todas sus desigualdades sean triviales.

Las caras de F son los conjuntos $F_t = \{x \in F \mid a_t' x = b_t\}$, $t \in T$, que, de hecho, son caras expuestas de F. Si $a_t \neq 0_n$ entonces diremos que $t \in T$ es un *índice propio*. Se dice que $t \in T$ ($a_t' x \geq b_t$) es un *índice portador* (*desigualdad portadora*) de σ cuando $F_t = F$. El *conjunto de índices portadores* lo denotaremos por T_c. Obviamente, si existe un cierto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_t' x > b_t$ para todo $t \in T$ entonces $T_c = \emptyset$. Tales puntos reciben el nombre de *puntos de Slater*.

Asociados al sistema σ se definen los llamados *primer y segundo cono de momentos*

$$M := \operatorname{cone}\{a_t,\, t \in T\} \quad \text{y} \quad N := \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\, t \in T \right\},$$

y el *cono característico*

$$K := \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\, t \in T;\, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cualquier conjunto convexo cerrado no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los semiespacios de soporte de C, de manera que C es el conjunto solución de un cierto sistema lineal σ de la forma (0.2). Tal sistema σ se llama *representación externa* de C. Llamaremos *cono de referencia* de C, y lo denotaremos por $K(C)$, a la clausura del cono característico de cualquier representación externa de C. Esta definición es independiente de la representación considerada, ya que dos representaciones lineales distintas del conjunto C son sistemas lineales equivalentes, y por lo tanto, las clausuras de sus correspondientes conos característicos son iguales [19, Th. 5.10].

En ocasiones, asociados al sistema σ, definiremos un par de problemas parametrizados, cuyo parámetro, c, recorre $\mathbb{R}^n$. El primero de ellos es de Programación Semi-infinita Lineal (PSIL para abreviar), siendo el parámetro el gradiente del funcional objetivo:

$$P(c) \equiv \operatorname{Inf} c'x \quad s.a \quad x \in F.$$

Denotaremos por $F^*(c)$ el *conjunto óptimo* de $P(c)$ y por $v(c)$ su *valor óptimo*, con $v(c) = +\infty$ si $F = \emptyset$. Diremos que un punto $x^* \in F$ es una *solución fuertemente única* para $P(c)$ si existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $x \in F$, $c'x \geq c'x^* + \alpha \|x - x^*\|$. Obviamente, en este caso, $F^*(c) = \{x^*\}$.

El segundo problema es el dual de $P(c)$ (en el sentido de Haar), de modo que el parámetro es el vector de la derecha en el sistema de restricciones,

$$D(c) \equiv \operatorname{Sup} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \quad s.a \quad \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c, \ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}.$$

Denotaremos por Ψ la función objetivo de $D(c)$, es decir, $\Psi : \mathbb{R}_+^{(T)} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Psi(\lambda) := \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$, por $\Lambda(c)$ su conjunto factible, por $\Lambda^*(c)$ su conjunto óptimo y por $v_D(c)$ su valor óptimo, acordando que $v_D(c) = -\infty$ si $\Lambda(c) = \emptyset$. Llamaremos *salto de dualidad*, $\delta(c)$, a la diferencia entre el valor del problema primal y el del dual,

$$\delta(c) := v(c) - v_D(c),$$

que siempre es no negativo por el Teorema de Dualidad Débil.

Dado un sistema consistente σ, se dice que $a'x \geq b$ es una *consecuencia* de σ si la satisfacen todos los puntos de F, es decir, $a'z \geq b$ para todo $z \in F$. En relación con este concepto, el *Lema de Farkas extendido* [40] caracteriza las desigualdades lineales $a'x \geq b$ que son consecuencia de un sistema consistente σ como aquellas para las que se satisface

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} K.$$

Un caso particular es el *Lema de Farkas extendido para sistemas homogéneos* [19, Cor. 3.1.3] que dice que la desigualdad $a'x \geq 0$ es consecuencia del sistema

$\{a_t'x \geq 0,\, t \in T\}$ si, y sólo si, $a \in \operatorname{cl} M$.

En un sistema consistente, para cada $x \in F$, definimos el *conjunto de índices activos*

$$T(x) := \{t \in T \mid a_t'x = b_t\}$$

y el *cono de restricciones activas*

$$A(x) := \operatorname{cone}\{a_t,\ t \in T(x)\}$$

en el punto x.

Los resultados más importantes sobre los sistemas finitos de desigualdades lineales sólo son válidos para ciertas clases de sistemas infinitos.

Consideremos, por ejemplo, el Teorema de Weyl [38] que caracteriza los puntos extremos de F cuando $|T| < \infty$: $\overline{x} \in F$ es un punto extremo de F si, y sólo si, $\dim A(\overline{x}) = n$. En [1] se prueba que este resultado se cumple cuando $A(x)^o = D(F, x)$ para todo $x \in F$. Un sistema que satisface esta propiedad se dice que es *localmente poliédrico* (LOP). Para aquellos problemas PSIL

$$(P) \qquad \operatorname{Inf} c'x$$

$$s.a. \quad a_t'x \geq b_t,\, t \in T,$$

cuyo sistema de restricciones es LOP, se han propuesto extensiones del método simplex y del método del gradiente reducido [2].

El Teorema de Karush-Kuhn-Tucker para problemas PL establece que $\overline{x} \in F$ es una solución óptima de (P) si, y sólo si, $c \in A(\overline{x})$. En [31] se demuestra que esta afirmación también es cierta cuando cualquier desigualdad que defina un semiespacio soporte de F es también consecuencia de un subsistema finito de σ. Los sistemas que satisfacen esta propiedad se llaman *localmente Farkas-Minkowski* (LFM).

Para los sistemas LOP se verifica que F es cuasipoliédrico [19, Cor. 5.6.1] y, recíprocamente, todo cuasipoliedro admite una representación LOP [19, Th. 5.11]. Cualquier sistema finito es LOP y cualquier sistema LOP es LFM [19, Th. 5.7].

Un *sistema* σ es *continuo* cuando T es un espacio topológico compacto y Hausdorff y todos los coeficientes, $a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot), b(\cdot)$, son continuos en T.

PROPOSICIÓN 0.14 *[19, Lem. 4.1(i)] Dado un sistema σ, se verifica la siguiente relación entre las clausuras de N y K:*
$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} N$ *si, y sólo si,* $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} K$.

PROPOSICIÓN 0.15 *Si $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución de $\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\ t \in T\}$ entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{rint} F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x > b_t,\ t \in T \backslash T_c;\ a_t'x = b_t,\ t \in T_c\}$ [19, Th. 5.1(i)]; *y*

(ii) $\dim F = n - \dim \operatorname{lin} \operatorname{cl} K$ [19, Th. 5.8].

PROPOSICIÓN 0.16 *[19, Cor. 5.1.1] Un sistema consistente σ tiene, al menos, un punto de Slater si, y sólo si, $T_c = \emptyset$.*

PROPOSICIÓN 0.17 *[19, Th. 5.9] Cualquier sistema LFM no trivial σ, satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\dim F = n$ *si, y sólo si, ninguna combinación convexa de desigualdades no triviales de σ da lugar a la desigualdad trivial.*

(ii)
$$\dim F = n - \dim \operatorname{span} \{a_t,\ t \in T_c\}.$$
Además, si $T_c \neq \emptyset$, se tiene
$$\operatorname{aff} F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x = b_t,\ t \in T_c\}.$$

(iii) $\operatorname{rint} F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x > b_t,\ t \in T \backslash T_c;\ a_t'x = b_t,\ t \in T_c\}$.

PROPOSICIÓN 0.18 *[19, Th. 9.1(i)] Dado $\overline{x} \in F$, si $\dim A(\overline{x}) = n$ entonces $\overline{x}$ es punto extremo de F. Esta condición también es necesaria cuando σ es LOP.*

PROPOSICIÓN 0.19 *[19, Th. 9.3] Si $F \neq \emptyset$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *F es acotado;*

(ii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{int} K$;

(iii) $\operatorname{int} K = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a'x > b \text{ para todo } x \in F \right\}$;

(iv) $M = \mathbb{R}^n$; *y*

(v) *existe un subsistema finito de σ cuyo conjunto solución es acotado.*

PROPOSICIÓN 0.20 *[19, Th. A.11] Sea C un conjunto poliédrico de máxima dimensión en $\mathbb{R}^n$, y consideremos una representación lineal de C*
$$\{a_i'x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, p\}. \tag{0.3}$$

Entonces se verifican las siguientes proposiciones:

(i) $\operatorname{bd} C = \overset{p}{\underset{i=1}{\cup}} H_i \cap C$, donde $H_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = b_i\}$;

(ii) si X es una faceta de C, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $X = H_j \cap C$; y

(iii) cada conjunto $H_i \cap C$ es una faceta de C si, y sólo si, (0.3) es una representación minimal de C (es decir un sistema sin restricciones redundantes).